



UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET



Nikola B. Danković

**RAZVOJ NOVE KLASSE ORTOGONALNIH FILTARA S
PRIMENOM U MODELIRANJU, ANALIZI I SINTEZI
SISTEMA ZA DIFERENCIJALNU IMPULSNO KODNU
MODULACIJU**

doktorska disertacija

Niš, 2017.



UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET



Nikola B. Danković

**RAZVOJ NOVE KLASSE ORTOGONALNIH FILTARA S
PRIMENOM U MODELIRANJU, ANALIZI I SINTEZI
SISTEMA ZA DIFERENCIJALNU IMPULSNO KODNU
MODULACIJU**

doktorska disertacija

Niš, 2017.



UNIVERSITY OF NIS
FACULTY OF ELECTRONIC ENGINEERING



Nikola B. Danković

**DEVELOPMENT OF A NEW CLASS OF
ORTHOGONAL FILTERS WITH APPLICATIONS IN
MODELLING, ANALYSIS AND SYNTHESIS OF
DIFFERENTIAL PULSE CODE MODULATION
SYSTEM**

PhD dissertation

Niš, 2017.

Podaci o disertaciji

I Autor

Ime i prezime	Nikola B. Danković
Datum i mesto rođenja	30. 07. 1984. god., Pirot
Sadašnje zaposlenje	Univerzitet u Nišu Elektronski fakultet, Niš Katedra za automatiku

II Doktorska disertacija

Naslov	Razvoj nove klase ortogonalnih filtara s primenom u modeliranju, analizi i sintezi sistema za diferencijalnu impulsno kodnu modulaciju
Broj stranica	162
Broj slika	45
Broj tabela	16
Broj bibliografskih jedinica	119
Ustanova i mesto gde je disertacija urađena	Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš
Naučna oblast	Elektrotehničko i računarsko inženjerstvo
Uža naučna oblast	Automatika
UDK broj	(621.319:531.39):004-925.8
Mentor	Prof. dr Dragan Antić, redovni profesor

III Ocena i odbrana

Datum prijave teme disertacije	23. 10. 2015. god.
Datum javne prezentacije teme za doktorsku disertaciju	16.12.2015. god.
Broj odluke i datum prihvatanja teme disertacije	NSV 07/03-041/15-004 od 22. 12. 2015. god.

Komisija za ocenu podobnosti teme disertacije	<ol style="list-style-type: none">1. Dragan Antić, redovni profesor, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet2. Vlastimir Nikolić, redovni profesor, Univerzitet u Nišu, Mašinski fakultet3. Zoran H. Perić, redovni profesor, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet4. Darko Mitić, vanredni profesor, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet5. Marko Milojković, docent, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet
---	---

Komisija za odbranu disertacije	<ol style="list-style-type: none">1. Dragan Antić, redovni profesor, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet2. Vlastimir Nikolić, redovni profesor, Univerzitet u Nišu, Mašinski fakultet3. Zoran H. Perić, redovni profesor, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet4. Darko Mitić, vanredni profesor, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet5. Marko Milojković, docent, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet
---------------------------------	---

Datum odbrane

Zahvalnica

Ova teza je nastala kao rezultat višegodišnjih napora da spojim samo na prvi pogled nespojive oblasti, automatiku, kao primarnu kojom se bavim u svom naučno-istraživačkom radu i telekomunikacije, koje su takođe u jednom periodu bila moja preokupacija. Zbog toga, na početku moram da se zahvalim svom mentoru prof. dr Draganu Antiću koji je imao viziju od samog početka da je sve to moguće i ostvarivo, i koji me do kraja podsticao i da to uspešno privedem kraju. Takođe, posebno se zahvaljujem, prof. dr Zoranu Periću ispred Katedre za telekomunikacije na stručnoj pomoći i korisnim sugestijama. Veliku zahvalnost dugujem i kolegama doc. dr Saši Nikoliću koji je uvek bio tu za bilo kakvu vrstu pomoći, prof. dr Darku Mitiću na finalnoj korekturi i dipl. inž. Zoranu Ičiću na ogromnoj pomoći pri praktičnim realizacijama.

Hvala i ostalim kolegama sa Katedre za automatiku sa kojima provodim više vremena nego sa bilo kim drugim na poslu ali i van njega i sa kojima nikada nije dosadno.

Hvala i mojim najbližim prijateljima na razumevanju. Ponekad nije bilo lako odbiti i izabrati nauku umesto nekog izlaska i ćaskanja s dragim licima.

I konačno, svojoj majci i ocu dugujem neizmernu zahvalnost na bezrezervnoj moralnoj podršci, a svom ocu i na stručnim savetima iz svog dugogodišnjeg naučnog i praktičnog iskustva.

*Autor
Avgust, 2017.*

Rezime

Razvoj nove klase ortogonalnih filtara s primenom u modeliranju, analizi i sintezi sistema za diferencijalnu impulsno kodnu modulaciju

Ova doktorska disertacija se bavi razvojem novih klasa ortogonalnih filtara baziranih na simetričnom preslikavanju njihovih polova u nule i obrnuto. Razvijeni su filtri zasnovani na recipročnoj transformaciji pri čemu su dobijeni uopšteni Malmkvistovi filtri ortogonalni u smislu specijalnog unutrašnjeg proizvoda. Takođe, projektovani su ortogonalni filtri korišćenjem bilinearne transformacije, koji obuhvataju više klasa postojećih ortogonalnih kaskadnih filtara (Ležandrovi, Lagerovi, Minc-Ležandrovi, Malmkvistovi). Ovi filtri su i praktično realizovani i to u analognom i digitalnom domenu. Važna njihova osobina je mogućnost adaptivnog podešavanja parametara filtra, odnosno parametara bilinearne transformacije, čime se postižu najbolje performanse. Krajnji rezultat ovog dela istraživanja je široka primena ovih filtara u identifikaciji, modeliranju, analizi i sintezi tehničkih sistema. Analogne verzije ovih filtara su primenjene u modeliranju sistema za hlađenje gumene trake u auto industriji, a digitalne za modeliranje telekomunikacionog sistema za diferencijalno impulsno kodnu modulaciju (DPCM sistem). Potvrđeno je da su modeli dobijeni pomoću novih filtara kvalitetniji od modela dobijenih pomoću klasičnih filtara.

Drugi deo istraživanja ove disertacije odnosi se na već pomenuti DPCM sistem. Prvi put je odrađena sveobuhvatna analiza DPCM sistema s prediktorom proizvoljnog reda. Ona podrazumeva ispitivanje stabilnosti klasičnim pristupom kao i ispitivanje stohastičke stabilnosti. Analiza robustne stabilnosti Haritonovljevom metodom je, takođe, izvršena (deterministički i stohastički slučaj), za prediktore kako nižeg, tako i višeg reda. Takođe, razmatrana je i parametarska osetljivost u odnosu na koeficijente prediktora za različite redove prediktora.

Ključne reči: ortogonalni filtri, Malmkvistove funkcije, Mincovi polinomi, unutrašnji proizvod, bilinearne transformacije, genetički algoritam, DPCM, linearna predikcija, Monte Karlo metoda, normalna raspodela, funkcija gustine verovatnoće

Summary

Development of a new class of orthogonal filters with applications in modelling, analysis and synthesis of differential pulse code modulation system

This PhD dissertation deals with development of new classes of orthogonal filters based on symmetric transformation of their poles to zeroes and *vice versa*. The filters based on reciprocal transformation are developed and the generalized Malmquist filters orthogonal with respect to a special inner product are designed in this way. The orthogonal filters by using bilinear transformation, including several classes of classical orthogonal cascade filters (Legendre, Laguerre, Müntz-Legendre, Malmquist), are also designed. These filters are practically realized both in analogue and digital techniques. The main quality of these filters is a possibility of adaptive adjustment of filter parameters, i.e. parameters of bilinear transformation, achieving the best filter performances. The final result of this part of research is a wide range of applications of these filters in identification, modelling, analysis, and design of technical systems. The analogue versions of filters are applied in modelling of the system for rubber strip cooling in tyre industry, and their digital versions in modelling of telecommunication system for differential pulse code modulation (DPCM system). It is verified that the models obtained by using these new filters are of higher quality than the models based on classical filters.

The other part of research in PhD dissertation refers to the mentioned DPCM system. A complete analysis of DPCM system with arbitrary order predictor is performed for the first time. This relates to the consideration of stability by classical approach, as well as to stochastic stability analysis. The analysis of robust stability by using Kharitonov method is also performed for both deterministic and stochastic case, as well as for low- and high orders of predictors. The parametric sensitivity related to different order-predictors coefficients is also analyzed.

Keywords: orthogonal filters, Malmquist functions, Müntz polynomials, inner product, bilinear transformation, genetic algorithm, DPCM, linear prediction, Monte Carlo method, normal distribution, probability density function

Spisak slika

Slika 1.1 Kaskadni Jakobijev ortogonalni filter.	- 7 -
Slika 1.2 Kaskadni digitalni ortogonalni filter Malmkvistovog tipa.....	- 8 -
Slika 3.1 Kaskadna šema nove klase ortogonalnih filtara.....	- 20 -
Slika 3.2 Blok šema novog ortogonalnog filtra zasnovanog na recipročnoj transformaciji.-	21 -
Slika 3.3 Praktična realizacija analognog generalizovanog Malmkvistovog ortogonalnog filtra.....	- 22 -
Slika 3.4 Izlazi $\varphi_l(t)$, $l = 0,1,2,3,4$ iz novog analognog filtra.	- 23 -
Slika 3.5 Blok šema novog ortogonalnog filtra zasnovanog na bilinearnoj transformaciji. -	24 -
Slika 3.6 Praktična realizacija analognog ortogonalnog filtra zasnovanog na bilinearnoj transformaciji.....	- 26 -
Slika 3.7 Izlazi $\varphi_l(t)$, $l = 0,1,2,3$ iz analognog ortogonalnog filtra zasnovanog na bilinearnoj transformaciji.....	- 27 -
Slika 3.8 Kaskadni sistem za transport gumene trake (1-ekstruder, 2-gumena traka, 3-vaga, 4-transporteri, 5-prelazi).....	- 28 -
Slika 3.9 Prelaz gume između dva transportera.	- 29 -
Slika 3.10 Laboratorijska postavka – kaskadni sistem s četiri transportera.....	- 31 -
Slika 3.11 Blok šema podesivog modela s novim analognim ortogonalnim filtrom.	- 32 -
Slika 3.12 Izlazi iz prve kaskade sistema za hlađenje protektora i podesivih modela.....	- 33 -
Slika 3.13 Blok šema podesivog modela s novim analognim ortogonalnim filtrom zasnovanim na bilinearnoj transformaciji.....	- 35 -
Slika 3.14 Izlazi iz prve kaskade sistema za hlađenje protektora i podesivih modela baziranih na novim i klasičnim ortogonalnim filtrima.	- 36 -
Slika 4.1 Blok šema generalizovanog digitalnog ortogonalnog filtra Malmkvistovog tipa.-	41 -
Slika 4.2 Razvijena Simulink blok šema generalizovanog Malmkvistovog ortogonalnog filtra prilagođena praktičnoj realizaciji.....	- 42 -
Slika 4.3 Izgled štampane pločice realizovanog ortogonalnog filtra projektovane u programu <i>PROTEL</i>	- 43 -
Slika 4.4 Električna šema praktične realizacije ortogonalnog filtra.	- 44 -
Slika 4.5 Praktična realizacija generalizovanog digitalnog ortogonalnog filtra Malmkvistovog tipa.....	- 45 -

Slika 4.6 Izlazi $\varphi_l(K)$, $l = 0,1,2,3$ iz novog digitalnog filtra (signali dobijeni u Matlab/Simulink-u)	- 47 -
Slika 4.7 Izlazi $\varphi_l(K)$, $l = 0,1,2,3$ iz novog digitalnog filtra (signali snimljeni sa štampane ploče).....	- 49 -
Slika 4.8 Blok šema digitalnog ortogonalnog filtra zasnovanog na bilinearnoj transformaciji.....	- 51 -
Slika 5.1 Blok-šema DPCM sistema: a) predajnik, b) prijemnik	- 57 -
Slika 5.2 Blok šema idealnog linearnog prediktora k-tog reda	- 58 -
Slika 5.3 Blok šema adaptivnog kvantovanja s procenom unapred	- 63 -
Slika 6.1 DPCM/ADPCM sistem, a) enkoder, b) dekoder.....	- 69 -
Slika 6.2 Zavisnost SNR od ρ_1 u DPCM sistemu za uzorkovani govorni signal.....	- 73 -
Slika 6.3 Oblast stabilnosti S_2 za drugi red predikcionog filtra.	- 80 -
Slika 6.4 Funkcija gustine verovatnoće za koeficijent prediktora a_1	- 81 -
Slika 6.5 Funkcija gustine verovatnoće za koeficijent prediktora a_2	- 81 -
Slika 6.6 Oblast stabilnosti S_3 predikcionog filtra trećeg reda.	- 88 -
Slika 6.7 Funkcija gustine verovatnoće za koeficijente prediktora a_1 , a_2 , i a_3 , respektivno (za $M = 20$)	- 91 -
Slika 6.8 Osetljivosti za prediktor drugog reda.	- 97 -
Slika 6.9 Osetljivosti za prediktor trećeg reda.....	- 97 -
Slika 6.10 Osetljivosti za prediktor petog reda	- 98 -
Slika 6.11 Logaritamska osetljivosti za prediktor drugog reda.....	- 99 -
Slika 6.12 Logaritamska osetljivosti za prediktor trećeg reda	- 99 -
Slika 6.13 Logaritamska osetljivosti za prediktor petog reda	- 100 -
Slika 6.14 Blok šema podesivog modela sa predloženim novim digitalnim ortogonalnim filtrom Malmkvistovog tipa	- 113 -
Slika 6.15 Ulaz u prediktivni filter DPCM sistema i u podesivi filter	- 114 -
Slika 6.16 Izlazi iz predikcionog filtra DPCM sistema i podesivog modela.....	- 115 -
Slika 6.17 Blok šema podesivog modela sa predloženim novim digitalnim ortogonalnim filtrom baziranog na bilinearnoj transformaciji.	- 118 -
Slika 6.18 Izlazi iz predikcionog filtra DPCM sistema i podesivog modela.....	- 119 -

Spisak tabela

Tabela 3.1 Dobljene vrednosti parametara ortogonalnog modela sistema	- 34 -
Tabela 3.2 Filtri sa modelima u obliku funkcije prenosa korišćeni u eksperimentima	- 36 -
Tabela 3.3 Dobljene vrednosti parametara ortogonalnih modela zasnovanih na novim i klasičnim filtrima.....	- 37 -
Tabela 6.1 Verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra za razne vrednosti σ	- 76 -
Tabela 6.2 Verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra drugog reda za različite dužine frejmova	- 82 -
Tabela 6.3 Izračunate verovatnoće stabilnosti pomoću klasične integracije Monte Karlo metodom za srednje vrednosti $\bar{a}_1 = 1.292$, $\bar{a}_2 = -0.410$ i standardne devijacije $\sigma_1 = 0.206$, $\sigma_2 = 0.205$ prediktor drugog reda.....	- 86 -
Tabela 6.4 Verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra trećeg reda za pet različitih vrednosti M	- 90 -
Tabela 6.5 Verovatnoće stabilnosti za predikcioni filter četvrtog reda za različite dužine frejmova M	- 94 -
Tabela 6.6 Srednja vrednost i standardna devijacija koeficijenata prediktora prvog reda za različite dužine frejmova.....	- 102 -
Tabela 6.7 Srednja vrednost i standardna devijacija koeficijenata prediktora drugog reda za različite dužine frejmova.....	- 104 -
Tabela 6.8 Srednja vrednost i standardna devijacija koeficijenata prediktora trećeg reda za različite dužine frejmova.....	- 107 -
Tabela 6.9 Srednja vrednost i standardna devijacija koeficijenata prediktora četvrtog reda za različite dužine frejmova.....	- 110 -
Tabela 6.10 Dobljene vrednosti izlaza u trenucima odabiranja iz DPCM predikcionog filtra i podesivog modela zasnovanog na ortogonalnim digitalnim filtrima generalizovanog Malmkvistovog tipa	- 116 -
Tabela 6.11 Dobljene vrednosti parametara ortogonalnog modela	- 117 -
Tabela 6.12 Dobljene vrednosti izlaza u trenucima odabiranja iz DPCM predikcionog filtra i podesivog modela zasnovanog na ortogonalnim digitalnom filtru sa bilinearnom transformacijom	- 120 -
Tabela 6.13 Dobljene vrednosti parametara ortogonalnog modela	- 121 -

Sadržaj

Uvod	- 1 -
1 Ortogonalni sistemi i njihova primena u sintezi ortogonalnih kaskadnih filtara	- 5 -
1.1 Istorijski razvoj ortogonalnih racionalnih funkcija.....	- 5 -
1.2 Mogućnosti primene ortogonalnih sistema u tehnici	- 6 -
2 Generalizacija klasičnih ortogonalnih racionalnih funkcija primenom simetrične transformacije	- 10 -
2.1 Ortogonalne racionalne funkcije dobijene pomoću simetrične transformacije polova u nule.....	- 10 -
2.2 Ortogonalni Mincovi polinomi i ortogonalni Malmkvistovi sistemi.....	- 12 -
2.2.1 Klasa Mincovih polinoma zasnovana na recipročnom preslikavanju polova u nule, novi unutrašnji proizvod	- 13 -
2.2.2 Klasa Mincovih polinoma zasnovana na bilinearnoj transformaciji polova u nule i novi unutrašnji proizvod	- 16 -
3 Projektovanje novih klasa ortogonalnih kaskadnih filtara	- 20 -
3.1 Nova klasa ortogonalnih kaskadnih filtara bazirana na recipročnoj transformaciji polova u nule (generalizovani Malmkvistovi filtri).....	- 20 -
3.2 Nova klasa ortogonalnih kaskadnih filtara zasnovana na bilinearnoj transformaciji polova u nule.....	- 23 -
3.3 Primena novih analognih ortogonalnih filtara u modeliranju dinamičkih sistema u vremenski kontinualnom domenu.....	- 28 -
3.3.1 Opis sistema za hlađenje gumene trake	- 28 -
3.3.2 Primena generalizovanog Malmkvistovog ortogonalnog filtra u modeliranju sistema za hlađenje gumene trake.....	- 31 -
3.3.3 Primena ortogonalnog filtra zasnovanog na bilinearnoj transformaciji u modeliranju sistema za hlađenje gumene trake	- 34 -
3.3.4 Mogući pravci daljeg istraživanja.....	- 38 -
4 Novi digitalni kaskadni ortogonalni filtri	- 39 -
4.1 Kratak istorijski pregled razvoja digitalnih ortogonalnih filtara.....	- 39 -

4.2 Novi digitalni ortogonalni filtar uopštenog Malmkvistovog tipa - struktura, praktična realizacija, određivanje odziva.....	40 -
4.3 Novi digitalni ortogonalni filtar zasnovan na bilinearnoj transformaciji.....	51 -
5 DPCM sistem - tipovi, koncept linearne predikcije.....	54 -
5.1 Kodne tehnike za prenos signala.....	54 -
5.2. Opis DPCM sistema.....	56 -
5.3. Linearni prediktor	57 -
5.4 Koncept adaptivne predikcije i kvantovanja u prenosu signala.....	61 -
5.4.1 Adaptivna predikcija.....	62 -
5.4.2 Adaptivno kvantovanje	62 -
5.5 Linearna predikcija – značaj i primena.....	64 -
5.5.1 Linearna predikcija unapred	65 -
6 Analiza DPCM sistema sa stanovišta teorije automatskog upravljanja.....	68 -
6.1 Analiza stabilnosti predikcionog filtra i celog DPCM sistema.....	70 -
6.1.1 Analiza stabilnosti DPCM predikcionog filtra prvog reda	71 -
6.1.2 Analiza stabilnosti DPCM predikcionog filtra drugog reda	77 -
6.1.3 Analiza stabilnosti predikcionih filtara viših redova u DPCM sistemima - klasični pristupi, alternativne metode.....	83 -
6.2 Osetljivost DPCM sistema.....	94 -
6.2.1 Parametarska osetljivost predikcionog filtra proizvoljnog reda	95 -
6.3 Robustnost DPCM predikcionog filtra	100 -
6.3.1 Robustnost predikcionog filtra prvog reda	101 -
6.3.2 Robustnost predikcionog filtra drugog reda	103 -
6.3.3 Analiza robustnosti predikcionih filtara viših redova.....	106 -
6.4 Modeliranje DPCM predikcionog filtra pomoću novih klasa digitalnih kaskadnih ortogonalnih filtara.....	112 -
6.4.1 Generalizovani digitalni ortogonalni filtar Malmkvistovog tipa	112 -
6.4.2 Digitalni ortogonalni filtar baziran na bilinearnoj transformaciji.....	118 -
Zaključci i mogući pravci daljeg istraživanja	122 -
Doprinosi doktorske disertacije.....	125
Dodatak 1	126
Dodatak 2.....	127
Dodatak 3.....	128
Dodatak 4.....	130

Literatura.....	132
Biografija autora.....	142
Spisak referenci autora.....	143

Uvod

Sredinom prošlog veka objavljeni su prvi radovi o ortogonalnim racionalnim funkcijama na jediničnom krugu, čiji su polovi fiksirani. Izvedene su racionalne funkcije koje predstavljaju izvesna uopštenja Malmkvistovih racionalnih funkcija kao i uopštenja Segovih ortogonalnih funkcija. S druge strane, definisane su neke klase ortogonalnih Mincovih polinoma od strane jermenskog matematičara Badalijana. Takođe, krajem devedesetih razmatrana je jedna klasa Mincovih polinoma ortogonalnih na intervalu $(0, 1)$ u odnosu na novi unutrašnji proizvod, kao i Malmkvistovi sistemi racionalnih funkcija, koje su ortogonalne na jediničnom krugu u kompleksnoj ravni. Uspostavljena je veza između ortogonalnih Mincovih polinoma i ortogonalnih Malmkvistovih funkcija. Uvedene su nove vrste unutrašnjeg proizvoda, čime je omogućeno uopštenje ortogonalnih funkcija na osnovu kojih su projektovani novi ortogonalni filtri. Korišćeno je simetrično preslikavanje polova u nule i nula u polove kod racionalnih funkcija za dobijanje ortogonalnih sistema racionalnih funkcija. Simetrično preslikavanje je iskorišćeno i za formiranje kvazi-ortogonalnih i skoro ortogonalnih funkcija na osnovu kojih su projektovani kvazi-ortogonalni i skoro ortogonalni filtri.

U doktorskoj tezi biće razvijene nove klase ortogonalnih racionalnih funkcija zasnovanih na novom unutrašnjem proizvodu, koji je dobijen na osnovu simetričnih transformacija - prostije recipročne i opštije bilinearne. Ove funkcije biće korišćene za sintezu novih klasa ortogonalnih filtara i to, kako u analognom, tako i u digitalnom vremenskom domenu. Takođe, biće izvedena nova klasa Mincovih polinoma koja će služiti za određivanje izlaza filtara. Ovako dobijene klase ortogonalnih filtara sadrže većinu klasičnih kaskadnih ortogonalnih filtara, čije ćelije su funkcije prenosa prvog reda. Analogne verzije ovih filtara biće primenjene u modeliranju i identifikaciji realnih dinamičkih sistema, konkretno sistema za hlađenje gumene trake u auto industriji.

Intenzivni razvoj digitalnih ortogonalnih filtara krenuo je početkom osamdesetih godina prošlog veka. Primećeno je da ortogonalni IIR¹ digitalni filtri (srp. *digitalni filtri beskonačnog impulsnog odziva*) zbog svojih karakteristika mogu da imaju veliku primenu u DSP² (srp. *digitalno procesiranje signala*) aplikacijama, tj. da olakšaju prenos signala u

¹ eng. Infinite Impulse Response

² eng. Digital Signal Processing

digitalnim telekomunikacijama, zatim kod višekanalne predikcije, modeliranja telekomunikacionih sistema, itd. Zbog toga su u ovoj disertaciji realizovane i digitalne verzije novih filtara zasnovanih na recipročnim transformacijama. One su, praktično, primenjene i proverene na aktuelnom, često korišćenom telekomunikacionom sistemu - sistemu za diferencijalno impulsnu kodnu modulaciju.

Diferencijalno impulsno kodna modulacija (DPCM³) je veoma efikasna kodna tehnika za prenos signala, koja se često koristi u telekomunikacijama, procesiranju signala, kod prenosa govornog signala, kodovanja slike i medicinskim aplikacijama. Iako je DPCM/ADPCM (adaptivni DPCM) sistem u osnovi telekomunikacioni sistem, treba uočiti da je to sistem s negativnom povratnom spregom i, kao takav, interesantan za analizu u oblasti automatike. Procena ili predikcija sadašnje vrednosti ulaznog signala zasniva se na poznavanju njegovih prethodnih vrednosti. Linearna predikcija je veoma važna u mnogim oblastima kao što su: identifikacija sistema, spektralna estimacija, procesiranje signala, adaptivna filtracija, ekonomija itd. Jedna od najvažnijih primena linearne predikcije je kod govornog signala. Naime, pokazano je da se govorni signal veoma dobro modelira upravo korišćenjem linearne predikcije. Sadašnja (trenutna) vrednost signala predstavlja linearnu kombinaciju prethodnih vrednosti. Poređenje dva signala (stvarnog i željenog) najbolje može da se izvrši poređenjem njihovih koeficijenata predikcije.

S druge strane, svaki realan sistem je, na neki način, nesavršen. To znači da vrednosti parametara sistema nisu sasvim određene, već poseduju izvesnu raspodelu oko željene vrednosti. Ovo je i razumljivo, pošto nijedna komponenta nekog tehničkog sistema ne može da se savršeno izradi. U tehničkim sistemima je ta raspodela najčešće normalna. Veoma je važno proceniti kako varijacije u vrednostima pojedinih parametara utiču na performanse samog sistema. Zbog toga se nameće potreba da se, pri svakoj potpunoj analizi sistema poput ispitavanja njegovih osobina (stabilnost, robustnost, pouzdanost, itd.), uključi, na neki način, i ta raspodela. Tako će se u ovoj disertaciji, umesto klasične stabilnosti, koristiti pojam "verovatnoća stabilnosti".

U skladu s prethodnim biće data kompletna analiza stabilnosti predikcionog filtra, koji je najvažniji deo svakog DPCM/ADPCM sistema (klasična i verovanoća stabilnosti).

U ovoj doktorskoj disertaciji, po prvi put, biće ispitivana verovatnoća stabilnosti i za prediktore višeg reda. To je vrlo teško izvodljivo ukoliko se koristi metod klasične integracije prilikom računanja verovatnoće stabilnosti. Zato će ovde biti predložena i primenjena Monte

³ eng, Differential Pulse Code Modulation

Karlo integraciona metoda. Jedna od značajnih primena Monte Karlo metode je prilikom procene vrednosti određenih integrala, koje je klasičnom integracijom veoma teško izračunati, naročito kada se radi o višestrukim integralima i kada je jako teško odrediti granice integracije. Takođe, povećanjem broja uzoraka, uvek možemo dobiti zadovoljavajuću tačnost rešenja integrala. To je i razlog uvođenja Monte Karlo integracije prilikom računanja verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra visokog reda.

Osetljivost predstavlja još jednu vrlo važnu osobinu sistema. Vrlo je bitno znati kako poremećaji i male promene parametara utiču na rad sistema. Parametarska osetljivost predikcionog filtra je po prvi put razmatrana u ovoj disertaciji. Izuzetno važno je znati na koji koeficijent prediktora je DPCM sistem najosetljiviji. Izvedeni su odgovarajući zaključci, koji su vrlo značajni pri projektovanju DPCM sistema.

Takođe, korišćenjem Harotonovljeve metode, biće analizirana i robustnost predikcionog filtra u okviru DPCM sistema u odnosu na promenu njegovih koeficijenata. Analiza robustne stabilnosti biće izvršena za prediktore kako nižih tako i viših redova, gde će ponovo biti korišćena Monte Karlo metoda.

Doktorska disertacija je organizovana na sledeći način. U prvom poglavlju je dat pregled ortogonalnih sistema. Dat je kraći istorijski razvoj ortogonalnih racionalnih funkcija, kao i njihovih primena u elektronici, naročito realizaciji električnih filtara, ali i u modeliranju, identifikaciji i na kraju upravljanju.

Drugo poglavlje daje uopštenja već postojećih klasa ortogonalnih filtara na bazi simetričnih transformacija. Neke od ovih klasa filtara su već razvijene u skorije vreme, a u ovoj disertaciji uvedene su i dve nove klase ovih poboljšanih filtara. U uvodnom delu ovog poglavlja dat je opet kratak pregled primena već razvijenih filtara. Predstavljena je kompletna matematička podloga za razvijanje ortogonalnih racionalnih funkcija, zasnovanih na simetričnom preslikavanju polova u nule. Uspostavljena je veza između Mincovih polinoma i Malmkvistovih funkcija, pri čemu će ovi potonji biti osnova za projektovanje novih filtara. Takođe, definisano je uopštenje klasičnog unutrašnjeg proizvoda. Na kraju poglavlja, data je strategija za razvoj novih filtara.

Treće poglavlje bavi se projektovanjem novih klasa uopštenih ortogonalnih kaskadnih filtara. Najpre je projektovana klasa ortogonalnih filtara zasnovana na uopštenim Malmkvistovim funkcijama (uopšteni Malmkvistovi filtri). Ovi filtri su ortogonalni u smislu specijalnog unutrašnjeg proizvoda. Takođe, formirana je nova klasa ortogonalnih filtara bazirana na novim ortogonalnim funkcijama dobijenim korišćenjem bilinearne transformacije za preslikavanje polova u nule i nula u polove. Ovi filtri predstavljaju uopštenje klasičnih

kaskadnih ortogonalnih filtara (Ležandrovi, Minc-Ležandrovi, Lagerovi, Jakobijevi, Malmkvistovi), ali i prethodno razvijenih uopštenih Malmkvistovih. Oba filtra su praktično realizovana, a kasnije primenjena u modeliranju i identifikaciji realnog sistema kakav je sistem za hlađenje gumene trake, često zastupljen u automobilskoj industriji. Na kraju poglavlja, prikazani su i mogući pravci u daljem razvoju ovih filtara, uopštavanjem u pogledu transformacije koja se koristi, ali i proširivanjem i na kompleksne vrednosti polova i nula. Takođe, u pogledu primene istih, dat je predlog za korišćenje nekih drugih kriterijuma optimalnosti različitih od kriterijuma srednje-kvadratne greške korišćenog u ovoj disertaciji.

Četvrto poglavlje bavi se razvojem digitalnih kaskadnih ortogonalnih filtara. Najpre, dat je kratak pregled razvoja digitalnih ortogonalnih filtara poslednjih nekoliko decenija. Zatim su projektovane digitalne verzije dve, već razvijene, klase kaskadnih filtara u analognoj tehnici, opisanih u trećem poglavlju. Ovi novi digitalni ortogonalni filtri su, takođe, praktično realizovani.

Peto poglavlje je u potpunosti posvećeno DPCM sistemu. Ovaj, vrlo često zastupljen sistem za prenos signala, detaljno je opisan, a posebna pažnja data je njegovom najvažnijem delu, linearnom prediktoru, koji će biti od velike važnosti u daljoj analizi. Takođe, dat je i kratak pregled razvoja ovih sistema, kao i podtipova istih.

Šesto poglavlje razmatra DPCM sistem sa stanovišta teorije automatskog upravljanja. Izvršena je kompletna analiza sistema u pogledu stabilnosti, osetljivosti i robustnosti. Pored klasičnog pristupa razmatrana je stohastička stabilnost, kao i robustnost i to, kako za niže, tako i za više redove prediktora. Upravo kod prediktora višeg reda predložene su nove metode po prvi put korišćene za ispitivanje osobina ovog sistema, između ostalog i dobro poznata Monte Karlo metoda. Na kraju, izvršeno je modeliranje datog sistema pomoću digitalnih ortogonalnih filtara opisanih u četvrtom poglavlju. Pokazano je izuzetno slaganje ponašanja predloženog modela zasnovanog na novim digitalnim filtrima s ponašenjem realnog sistema.

Trebalo bi napomenuti i da je jedan deo rezultata, neposredno proisteklih ili vezanih za ovu disertaciju, već verifikovan u naučnim radovima objavljenim u istaknutim međunarodnim časopisima, ali i zbornicima sa međunarodnih i domaćih konferencija koji su citirani u okviru literature na kraju. Takođe, na kraju su razmatrani doprinosi ove disertacije, izvedeni zaključci i dati neki dalji pravci u istraživanjima, zasnovani na rezultatima prikazanim u disertaciji.

1 Ortogonalni sistemi i njihova primena u sintezi ortogonalnih kaskadnih filtara

1.1 Istorijski razvoj ortogonalnih racionalnih funkcija

U drugoj polovini XX veka i početkom ovog veka postignut je veliki napredak u razvoju ortogonalnih sistema (ortogonalni algebarski i ortogonalni trigonometrijski polinomi, ortogonalni Mincovi⁴ polinomi, ortogonalne racionalne funkcije, itd.). Uporedo s razvojem teorijske osnove sve je veća i primena ovih sistema u matematici, fizici, ali i u tehnici (elektronika, automatika, telekomunikacije, modeliranje, identifikacija) (Danković, 1997). Klasični ortogonalni polinomi (Szegő, 1975, Chihara, 1978, Freud, 1971, Suetin, 1976, Geronimus, 1958, Geronimus, 1977, Nevai, 1979, Milovanović, 1994) već duži period su veoma važno sredstvo u teoriji aproksimacija i numeričkoj analizi. Neke od ovih klasa polinoma se koriste u primenjenoj nauci. Postoje i mnoge druge klase ortogonalnih polinoma koji nisu klasični ili standardni (Gautschi, 1996, Milovanović, 1995, Danković, 1997), klasa Sege polinoma na jediničnom krugu (Szegő, 1975), ortogonalni polinomi na polukrugu ili kružnom luku (Gautschi, 1987, de Bruin, 1990).

U poslednjih nekoliko decenija, neke druge klase ortogonalnih sistema, kao što su Malmkvistovi⁵ sistemi, (Walsh, 1969) i Mincovi sistemi (Borwein, 1995) su, takođe, našle primenu kao u teoriji, tako i u praksi.

Sredinom XX veka objavljeni su prvi radovi o ortogonalnim racionalnim funkcijama na jediničnom krugu, čiji su polovi fiksirani (Akhiezer, 1956, Djrbashian, 1962). Racionalne funkcije, koje su izvedene u ovim radovima, predstavljaju izvesne generalizacije Segovih⁴ ortogonalnih klasičnih polinoma (Szegő, 1975). Pregled teorije ovakvih ortogonalnih sistema i nekih otvorenih problema u oblasti primene ortogonalnih polinoma dat je u (Djrbashian, 1990). S druge strane, ortogonalni Mincovi sistemi su, najpre, razmatrani od strane jermenskih matematičara Taslakijana⁶ (Taslakyan, 1984) i Badalijana (Badalyan, 1995), da bi ih kasnije istraživao i irski matematičar Mek Karti s grupom autora (McCarthy, 1993), a

⁴ Herman Müntz (1884-1956), nemački matematičar

⁵ Johannes Malmquist (1882-1952), švedski matematičar

⁶ Arakel Taskakyan, jermenski matematičar

zatim detaljnije i Borwein⁷ s grupom autora (Borwein, 1994). Takođe, u (Danković, 1997, Milovanović, 1998) je razmatrana jedna klasa Mincovih polinoma ortogonalnih na intervalu $(0, 1)$ u odnosu na novi unutrašnji proizvod. Napomenimo da ovi Mincovi polinomi imaju kompleksne ili realne ne cele stepene. U ovim radovima su, takođe, prikazani i Malmkvistovi sistemi ortogonalnih racionalnih funkcija, koje su ortogonalne na jediničnom krugu u kompleksnoj ravni. Predstavljena je veza između ortogonalnih Mincovih polinoma i ortogonalnih Malmkvistovih funkcija u (Danković, 1997, Milovanović, 1998, Marinković, 2004). Takođe je u (Danković, 1997, Milovanović, 1998) izložen postupak kako se na osnovu Malmkvistovih funkcija dobijaju ortogonalni Mincovi polinomi i obrnuto. Ove dve klase ortogonalnih sistema iskorišćene su za sintezu novih klasa ortogonalnih filtara, koje će biti predstavljene u ovoj disertaciji.

1.2 Mogućnosti primene ortogonalnih sistema u tehnici

Kao što je već napomenuto, primena klasičnih ortogonalnih polinoma u tehničkim naukama poput elektronike, elektrotehnike, sinteze mreža, projektovanja filtara, telekomunikacija, procesiranja signala, automatike, identifikacije dobro je poznata. Ležandrovi⁸, Lagerovi⁹, Čebiševljevi¹⁰ i Jakobijevi¹¹ polinomi su veoma korisni za projektovanje električnih mreža, formiranje funkcija prenosa, ortogonalnih filtara, u adaptivnom upravljanju, telekomunikacionim sistemima itd. Ove primene su zasnovane na srednje-kvadratnoj polinomijalnoj aproksimaciji. Ortogonalnost ovih polinoma omogućava projektovanje optimalnih mreža i filtara. Štaviše, Laplasova transformacija klasičnih polinoma ili nekih modifikacija istih, su racionalne funkcije, koje se mogu vrlo lako faktorizovati. Ova osobina je vrlo zahvalna prilikom realizacije generatora signala, adaptivnih kontrolera i funkcija prenosa. Tako se, recimo, Čebiševljevi polinomi pored poznatih primena u numeričkoj analizi, teoriji aproksimacija, odavno koriste u tehnici, prvenstveno za projektovanje odgovarajućih ortogonalnih filtara (Szegő, 1938, Hansell, 1969, Smith, 2003).

Za projektovanje ortogonalnih filtara i optimalnih funkcija prenosa mogu se koristiti modifikacije Ležandrovih i Jakobijevih polinoma koje su ortogonalne na intervalu $(-1, 1)$.

⁷ Peter Benjamin Borwein (1953-), kanadski matematičar

⁸ Adrien-Marie Legendre (1752-1833), francuski matematičar

⁹ Edmond Laguerre (1834-1886), francuski matematičar

¹⁰ Pafnuty Lvovich Tchebycheff (1821-1894), ruski matematičar

¹¹ Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), nemački matematičar

Kako projektovani tehnički sistemi rade u realnom vremenu, potrebne su odgovarajuće aproksimacije na intervalu $(0, \infty)$. Ukoliko uvedemo smenu $x = 2e^{-at} - 1$ ($a > 0$) kod polinoma ortogonalnih na $(-1, 1)$, dobijamo eksponencijalne polinome ortogonalne na $(0, \infty)$. Za polinome ortogonalne na $(0, 1)$ treba koristiti smenu $x = e^{-at}$ ($a > 0$).

Primenom Laplasove transformacije na eksponencijalne ortogonalne polinome dobijaju se ortogonalne racionalne funkcije. Iz relacije za ortogonalnost Jakobijevih polinoma $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ s parametrima $\alpha, \beta > -1$, tj.

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \|P_n^{(\alpha, \beta)}\| \delta_{n,m}, \quad (1.1)$$

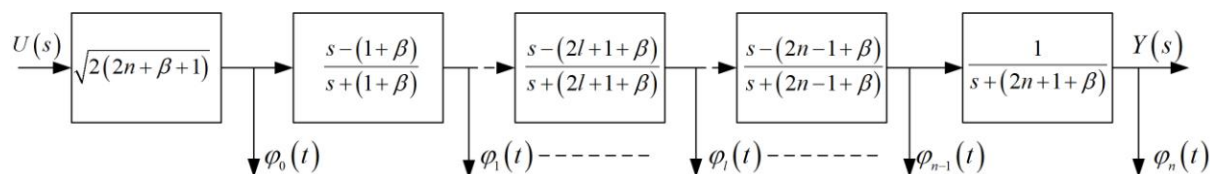
gde je: $\|P_n^{(\alpha, \beta)}\| = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! (2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$, može se dobiti (Danković, 1997):

$$W_n(s) = \sqrt{2(2n+\beta+1)} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (s - (2k+1+\beta))}{\prod_{k=0}^n (s + (2k+1+\beta))}. \quad (1.2)$$

Sekvenca racionalnih funkcija (1.2) ortogonalna je u kompleksnom domenu na konturi koja obuhvata sve polove $W_n(s)$:

$$\oint_C W_n(s) W_m(s) ds = N_n \delta_{nm}. \quad (1.3)$$

Funkcije $W_n(s)$ su iskorišćene za projektovanje kaskadnih Jakobijevih ortogonalnih filtara, čija je struktura prikazana na slici 1.1.



Slika 1.1 Kaskadni Jakobijev ortogonalni filter

Izlazi iz ovih filtara su ortogonalni u vremenskom domenu:

$$\int_0^\infty \varphi_n(t) \varphi_m(t) e^{-t} dt = N_n^2 \delta_{n,m}. \quad (1.4)$$

Klasa Jakobijevih ortogonalnih filtara obuhvata poznate klase ortogonalnih filtara (Ležandrovi, Lagerovi, Čebiševljevi).

U (Tasklaky, 1984, Borwein, 1994) uvedena je nova klasa Mincovih polinoma koji su ortogonalni na intervalu (0, 1):

$$Q_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_p} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{s + \overline{\alpha_j} + 1}{s - \alpha_j} \frac{x^s ds}{s - \alpha_n}, \quad (1.5)$$

gde kontura C_p obuhvata sve polove podintegralne funkcije. Korišćenjem ovih polinoma i sekvence racionalnih funkcija:

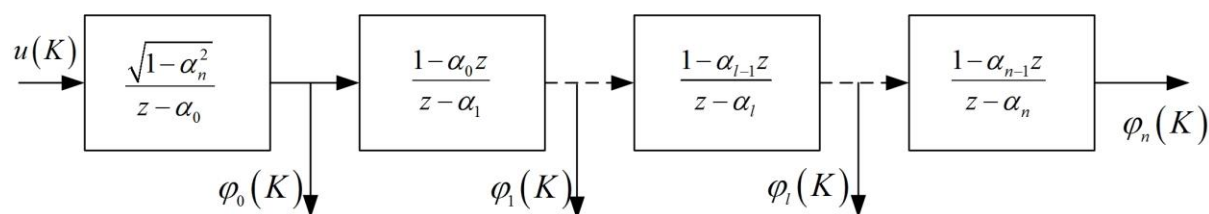
$$W_n(s) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{s + \overline{\alpha_j} + 1}{s - \alpha_j} \frac{x^s ds}{s - \alpha_n}, \quad (1.6)$$

formirana je klasa Minc-Ležandrovih ortogonalnih filtara. Izlazi iz ovih filtara su dobijeni korišćenjem ortogonalnih Minc-Ležandrovih polinoma (1.5).

Koristeći ortogonalne racionalne Malmkvistove funkcije:

$$W_n(z) = \frac{\sqrt{1 - \alpha_n^2}}{z - \alpha_n} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - \alpha_k z}{z - \alpha_k}, \quad (1.7)$$

dobija se kaskadni ortogonalni digitalni filtar prikazan na slici 1.2 (Gray, 1975).



Slika 1.2 Kaskadni digitalni ortogonalni filtar Malmkvistovog tipa

Ovi kaskadni ortogonalni filtri (slika 1.1 i 1.2) se sastoje od redno povezanih ćelija (sekcija). Može se uočiti da su nule ovih ćelija dobijene pomoću simetrične transformacije. Korišćenjem navedene transformacije može se generisati većina postojećih klasa ortogonalnih polinoma (Ležandrovi, Lagerovi, Jakobijevi, Mincovi, Minc-Ležandrovi). Takođe se mogu dobiti Malmkvistove ortogonalne racionalne funkcije, kao i kvazi ortogonalni (Antić, 2012(c), Milojković, 2013, Nikolić, 2014) i skoro ortogonalni polinomi (Danković, 2009, Milojković, 2010, Antić, 2011, Antić 2012(a)).

Pokazano je da dve poslednje pomenute klase nalaze uspešnu primenu u modeliranju i analizi sistema sa određenim nesavršenostima. Na osnovu ovih funkcija, dobijene su nove

klase unapređenih skoro ortogonalnih i kvazi ortogonalnih polinoma a , zatim, praktično realizovani i odgovarajući filtri (Antić, 2012(a), Milojković, 2013). Nova klasa ortogonalnih filtara Ležandrovog tipa s kompleksnim nulama i polovima je realizovana u (Nikolić, 2016), i takođe, našla primenu u modeliranju jednog realnog tehničkog sistema.

Dalji pravci u razvoju racionalnih ortogonalnih funkcija idu ka proširivanju teorije izvan kompleksnog domena (1.7), kao i korišćenju opštijih simetričnih transformacija, što i jeste predmet istraživanja u ovoj disertaciji. Tako se pored navedenih ortogonalnih funkcija mogu dobiti i ortogonalne sekvence racionalnih funkcija u z -domenu za diskretne sisteme (Heuberger, 2005). Ovo, kao i pomenuta uopštenja simetričnih transformacija, biće predmet istraživanja u narednim poglavljima.

2 Generalizacija klasičnih ortogonalnih racionalnih funkcija primenom simetrične transformacije

U ovom poglavlju, definisan je sistem uopštenih Malmkvistovih funkcija, kao i novi unutrašnji proizvod za Mincove polinome korišćenjem simetrične recipročne transformacije. Pokazano je kako se iz Malmkvistovih ortogonalnih funkcija dobijaju Mincovi ortogonalni polinomi. Ovi polinomi su ortogonalni na intervalu $(0, 1)$ u smislu novog unutrašnjeg proizvoda. Takođe, na bazi opštije simetrične transformacije kakva je bilinearna, definisan je opštiji unutrašnji proizvod.

Ove funkcije su osnova za razvoj novih filtara. Primetimo, da ukoliko s predstavlja operator diferenciranja, u tom slučaju se dobijaju novi ortogonalni filtri za kontinualne sisteme, kod kojih su izlazni signali ortogonalni u smislu novog unutrašnjeg proizvoda. U slučaju da umesto s imamo diskretni operator z , koji predstavlja operator vremenskog prednjačenja (predikcije) za jednu periodu odabiranja T , dobijamo novu klasu digitalnih ortogonalnih kaskadnih filtara.

Biće pokazano da izborom specijalnih vrednosti za parametre u recipročnoj, a naročito u bilinearnoj transformaciji, možemo dobiti većinu postojećih i ovde navedenih klasa ortogonalnih filtara.

S obzirom da u opštem slučaju možemo podešavati parametre u realizovanim filtrima i da predloženi filtri obuhvataju već postojeće koji imaju primenu u tehnici, može se očekivati da oni nađu svoju kvalitetnu primenu, pre svega, u modeliranju i identifikaciji sistema.

2.1 Ortogonalne racionalne funkcije dobijene pomoću simetrične transformacije polova u nule

U radovima (Akhiezer, 1956, Djrbashian, 1962) su prvi put razmatrane sekvence ortogonalnih racionalnih funkcija na jediničnom krugu. Uopštenje ovih funkcija dato je u radovima (Danković, 1997, Milovanović, 1998). Razmatrane su racionalne funkcije oblika (Nikolić, 2010):

$$W_n(s) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (s - f(s_k))}{\prod_{k=0}^n (s - s_k)}, \quad (2.1)$$

gde su nule $W_n(s)$ dobijene preslikavanjem polova iz skupa s u skup s_k pomoću simetrične transformacije:

$$\Phi(s, s^*) = 0, \quad s^* = f(s). \quad (2.2)$$

Neka je oblast u kojoj leže svi polovi racionalne funkcije $W_n(s)$, obuhvaćena konturom C_p . Polovi funkcije $W_n(s)$ leže van ove konture. Pomoću (2.2) se vrši preslikavanje polova koji leže u konturi C_p u nule koje leže van ili nula koje leže u konturi u polove koji leže van konture C_p . Tako se primenom transformacije (2.2) dobija funkcija prenosa $W_n^*(s)$, kod koje su polovi jednaki nulama $W_n(s)$, a nule $W_n^*(s)$ jednake polovima $W_n(s)$.

Posmatrajmo, sada, unutrašnji proizvod:

$$J_{n,m} = (W_n(s), W_m(s)) = \oint_{C_p} W_n(s) W_m^*(s) ds = \oint_{C_p} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (s - f(s_k))}{\prod_{k=0}^n (s - s_k)} \cdot \frac{\prod_{k=0}^{m-1} (s - s_k)}{\prod_{k=0}^m (s - f(s_k))} ds. \quad (2.3)$$

Ako je $m > n$, svi polovi $W_n(s)$ koji leže u konturi C_p krate se nulama $W_n^*(s)$, pa je $J_{n,m} = 0$. Zbog simetričnosti transformacije (2.2), zaključuje se da isto važi i za slučaj kada je $m < n$, tj. svi polovi $W_n^*(s)$ koji leže u konturi C_p krate se nulama $W_n(s)$. Dakle za $m \neq n$ važi da je $J_{n,m} = 0$. U slučaju kada je $m = n$, ne krate se svi polovi u konturi C_p , već ostaje jedan pol prvog reda. Na osnovu Košijeve¹² teoreme dobija se:

$$\oint_{C_p} W_n(s) W_n^*(s) ds = N_n \neq 0 \quad (2.4)$$

Na kraju, iz svega gore navedenog, sledi:

$$J_{n,m} = \oint_{C_p} W_n(s) W_m^*(s) ds = N_n \delta_{mn}, \quad (2.5)$$

¹² Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), francuski matematičar

gde je $\delta_{n,m}$ Kronekerov¹³ simbol. Dakle, sekvenca racionalnih funkcija (2.1) ortogonalna je u oblasti obuhvaćenoj konturom C_p .

U slučaju da funkcija $W_n(s)$ ima kompleksne polove, onda se pomoću transformacije (2.2) preslikavaju konjugovano-kompleksni polovi u konjugovano-kompleksne nule i obrnuto, tako da tada transformacija ima oblik: $s^* = f(\bar{s})$.

2.2 Ortogonalni Mincovi polinomi i ortogonalni Malmkvistovi sistemi

Neka je $A = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ sekvenca kompleksnih brojeva. Definišimo x^α na sledeći način: $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$, $x \in (0, \infty)$, $\alpha \in C_p$, i vrednost za $x=0$ je definisana da bude granica za x^α kada $x \rightarrow 0$ iz $(0, \infty)$ gde god granice postoje. Razmatramo Mincove polinome kao linearnu kombinaciju Mincovog sistema $\{x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_n}\}$ (Borwein, 1994, Borwein, 1995).

Polinomi oblika:

$$Q_n(\alpha_0, \dots, \alpha_n, x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{\alpha_k}, \quad (2.6)$$

gde su $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ kompleksni brojevi ili u posebnom slučaju realni neceli brojevi, nazivaju se Mincovi polinomi (Milovanović, 1998).

Jedna klasa Mincovih polinoma ortogonalnih na $(0, 1)$, izvedena iz sekvence ortogonalnih racionalnih funkcija, data je u (McCarthy, 1993, Borwein, 1994). Na sličan način, Mincovi polinomi (Djrbashian, 1990) mogu se dobiti iz ortogonalne sekvence:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_p} W_n(s) x^s ds, \quad (2.7)$$

gde je C_p kontura koja obuhvata sve polove funkcije prenosa (Danković, 1997, Milovanović, 1998).

¹³ Leopold Kronecker (1823-1891), nemački matematičar i logičar

2.2.1 Klasa Mincovih polinoma zasnovana na recipročnom preslikavanju polova u nule, novi unutrašnji proizvod

Uvedimo sada novu klasu ortogonalnih Mincovih polinoma, koji su dobijeni preslikavanjem polova u nule i nula u polove racionalnih funkcija primenom transformacije (2.2) i to za slučaj recipročne transformacije:

$$\Phi(s, s^*) = s \cdot s^* = b, \quad (2.8)$$

odnosno:

$$s = b/s^* \quad (s^* = b/s), \quad (2.9)$$

gde je b parametar preslikavanja u recipročnoj transformaciji.

Neka je $A = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ proizvoljna sekvenca kompleksnih brojeva u jediničnom krugu $|\alpha_k| < 1$. Definisan je Malmkvistov sistem racionalnih funkcija na sledeći način (Akhiezer, 1956, Djrbashan, 1962, Walsh, 1969, Szegö, 1975):

$$Q_n(s) = \frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}}{1-\overline{\alpha_n}s} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k - s}{1-\overline{\alpha_k}s} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Primitimo da su nule racionalnih funkcija (2.10) dobijene pomoću simetrične transformacije

$$\text{polova } \alpha_k^* = \frac{1}{\overline{\alpha_k}}.$$

Međutim, u ovoj disetraciji koristimo opštiju simetričnu transformaciju (2.9), tj. $\alpha_k^* = \frac{b}{\overline{\alpha_k}}$. Ne uzimajući u obzir normalizacione konstante, na taj način, dobijamo uopštene

Malmkvistove ortogonalne funkcije u obliku:

$$W_n(s) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (s - \alpha_k^*)}{\prod_{k=0}^n (s - \alpha_k)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Dakle, nule α_k^* se dobijaju preslikavanjem polova α_k , a polovi α_k se dobijaju preslikavanjem nula α_k^* , koristeći simetričnu transformaciju (2.9), tj. $\alpha_k^* = f(\overline{\alpha_k})$, $\overline{\alpha_k} = f(\alpha_k^*)$. U skladu s tim, sekvenca racionalnih funkcija ima oblik:

$$W_n^*(s) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (s - \alpha_k)}{\prod_{k=0}^n (s - \alpha_k^*)}. \quad (2.12)$$

Nule u transformisanoj sekvenci su jednake polovima funkcije $W_n(s)$ i obrnuto.

Primenjujući simetričnu transformaciju (2.9), tj. $\alpha_k^* = \frac{b}{\alpha_k}$ i $\alpha_k = \frac{b}{\alpha_k^*}$, na sekvencu

(2.1) dobijamo dva niza ortogonalna u smislu unutrašnjeg proizvoda (2.3):

$$W_n(s) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(s - \frac{b}{\alpha_k} \right)}{\prod_{k=0}^n (s - \alpha_k)}, \quad (2.13)$$

$$W_m^*(s) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (s - \alpha_k)}{\prod_{k=0}^n \left(s - \frac{b}{\alpha_k} \right)}, \quad (2.14)$$

gde su $W_n(s)$ i $W_n^*(s)$ uopštene Malmkvistove funkcije.

Koristeći (2.3), (2.13) i (2.14), konačno dobijamo:

$$(W_n(s), W_m^*(s)) = \frac{b^n}{(|\alpha_n|^2 - b) \prod_{k=1}^{n-1} |\alpha_k|^2} \delta_{n,m}. \quad (2.15)$$

Koristeći (2.7) i (2.13) i primenom Košijeve teoreme dobijamo Mincove polinome u obliku:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n A_{n,k} x^{\alpha_k}, \quad (2.16)$$

gde je:

$$A_{n,k} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_j^*)}{\prod_{j=0, j \neq k}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_j)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.17)$$

S druge strane, u (Danković, 1997, Milovanović, 1998) je pokazano da su Mincovi polinomi: $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{\alpha_k}$ ortogonalni na $(0, 1)$ u smislu unutrašnjeg proizvoda definisanog na sledeći način. Prvo, definisan je operator \odot primenjen na monomima x^α i x^β na sledeći način:

$$x^\alpha \odot x^\beta = x^{\alpha\beta}. \quad (2.18)$$

Koristeći ovaj operator definisan je novi proizvod dva Mincova polinoma $P_n(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^{\alpha_k}$ i

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^m q_j x^{\alpha_j} :$$

$$(P_n \odot P_m)(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m p_k q_j x^{\alpha_k \alpha_j}. \quad (2.19)$$

Na osnovu ovog izraza, može se definisati sledeći unutrašnji proizvod:

$$(P_n, P_m)_\odot = \int_0^1 (P_n \odot \bar{P}_m)(x) \frac{dx}{x^2}. \quad (2.20)$$

Dokaz da je ovo zaista unutrašnji proizvod izveden je u Dodatku 1.

Pod uslovom (2.19), uz unutrašnji proizvod (2.20), važi:

$$(P_n(x), P_m(x))_\odot = \frac{b^n}{(|\alpha_n|^2 - b) \prod_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|^2} \delta_{n,m}. \quad (2.21)$$

Na ovaj način, dobijena je nova klasa Mincovih polinoma. Time je uspostavljena veza između Mincovih polinoma ortogonalnih u smislu unutrašnjeg proizvoda (2.21) i sekvence ortogonalnih (generalizovanih) Malmkvistovih racionalnih funkcija (videti (2.15)).

U slučaju da funkcija $W_n(s)$ ima realne polove, onda transformacija (2.9) vrši preslikavanje realnih polova u nule $\alpha_k^* = \frac{b}{\alpha_k}$, umesto opštijeg preslikavanja konjugovano-

kompleksnih polova u nule koje je bilo korišćeno u ovom poglavlju ($\alpha_k^* = \frac{b}{\bar{\alpha}_k}$). Naravno,

ova konstatacija važi i u obrnutom smeru zbog simetričnosti transformacije. Iz ovakvih funkcija $W_n(s)$ dobijaju se Mincovi polinomi s realnim eksponentima. Ova klasa polinoma je

od interesa pri formiranju filtra s realnim polovima. Ako se kod ovih polinoma izvrši smena $x = e^{-t}$ dobijaju se eksponencijalne funkcije koje će služiti za određivanje izlaza iz ortogonalnih filtara dobijenih na osnovu Malmkvistovih funkcija, što će biti pokazano kasnije. Funkcije $\varphi_n(t) = P_n(e^{-t})$ su ortogonalne na intervalu $(0, \infty)$ u smislu novog unutrašnjeg proizvoda (2.21).

2.2.2 Klasa Mincovih polinoma zasnovana na bilinearnoj transformaciji polova u nule i novi unutrašnji proizvod

U ovom odeljku, razmotrićemo opštiji slučaj transformacije (2.2) koja obuhvata linearnu i uopštenu recipročnu transformaciju korišćenu u prethodnom odeljku. U (Marinković, 2004) je uvedena bilinearna transformacija za preslikavanje polova u nule, i nula u polove racionalnih funkcija:

$$s^* = \frac{\overline{as+b}}{cs-a}, \quad (a^2 + bc > 0), \quad (a, b, c \in R), \quad (2.22)$$

odnosno $\Phi(s, s^*) = css^* - a(s + s^*) - b$. Kao i prostija recipročna, bilinearna transformacija je simetrična, pa se polovi u nule i obratno preslikavaju na sledeći način:

$$\alpha_k^* = \frac{\overline{a\alpha_k + b}}{c\alpha_k - a}, \quad \overline{\alpha_k^*} = \frac{a\alpha_k^* + b}{c\alpha_k^* - a}. \quad (2.23)$$

Primenjujući ovu transformaciju na (2.1), slično kao i recipročnu, dobija se ortogonalna sekvenca racionalnih funkcija, koja može biti predstavljena u sledećem obliku:

$$W_n(s) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(s - \frac{a\overline{\alpha_k} + b}{c\overline{\alpha_k} - a} \right)}{\prod_{k=0}^n (s - \alpha_k)}, \quad (2.24)$$

gde su $\alpha_k, k = 0, 1, 2, \dots$ različiti kompleksni brojevi, $c\alpha_i\overline{\alpha_j} - a(\alpha_i + \alpha_j) - b > 0$ takvi da polovi $\{\alpha_k\}$ i nule $\{(a\overline{\alpha_k} + b)/(c\overline{\alpha_k} - a)\}$ leže na različitim stranama konture C_p :

$$C_p = \{c|s|^2 - 2a \operatorname{Re} s - b = 0\}. \quad (2.25)$$

Kontura C_p je krug poluprečnika $\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{b}{c}}$ s centrom u tački $\left(\frac{a}{c}, 0\right)$ (Marinković, 2004).

Ako primenimo (2.22) na $W_n(s)$ dobijamo:

$$W_n^*(s) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (s - \alpha_k)}{\prod_{k=0}^n \left(s - \frac{a\bar{\alpha}_k + b}{c\bar{\alpha}_k - a} \right)}. \quad (2.26)$$

Relacija (2.24) predstavlja sekvencu generalizovanih Malmkvistovih funkcija, pri čemu je skalarni proizvod za ovu sekvencu definisan na sledeći način:

$$(W_n(s), W_m(s)) = \oint_{C_p} W_n(s) W_m^*(\bar{s}) ds, \quad (2.27)$$

gde je: $W_m^*(s) = W_m\left(\frac{a\bar{s} + b}{c\bar{s} - a}\right)$.

Korišćenjem (2.5) dobija se:

$$\oint_{C_p} W_n(s) W_m^*(\bar{s}) ds = \frac{(a^2 + bc)^n}{\prod_{k=0}^{n-1} |c\alpha_k - a|^2 (c|\alpha_n|^2 - 2a \operatorname{Re} \alpha_n - b)} \delta_{n,m}. \quad (2.28)$$

Dokaz relacije (2.28) dat je u dodatku 2. (Marinković, 2004).

Sekvenca (W_n, W_m) se može prikazati i na sledeći način:

$$(W_n, W_m) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{A_{nk} \bar{A}_{mj}}{c\alpha_k \bar{\alpha}_j - a(\alpha_k + \bar{\alpha}_j) - b}, \quad (2.29)$$

gde je:

$$A_{n,k} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} \left(\alpha_k - \frac{a\bar{\alpha}_j + b}{c\bar{\alpha}_j - a} \right)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (\alpha_k - \alpha_j)}. \quad (2.30)$$

Korišćenjem relacije (2.15) dobiće se ortogonalni Mincovi polinomi u smislu novog unutrašnjeg proizvoda, iz sekvence racionalnih funkcija W_n (2.24),.

Definišimo operaciju \otimes na monomima x^α i x^β (Marinković, 2004):

$$x^\alpha \otimes x^\beta = x^{c\alpha\beta - a(\alpha+\beta) - b}, \quad (2.31)$$

tako da proizvod dva Mincova polinoma $P_n(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^{\alpha_k}$ i $P_m(x) = \sum_{j=0}^m q_j x^{\alpha_j}$ daje:

$$P_n(x) \otimes Q_m(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^{\alpha_k} \otimes \sum_{j=0}^m q_j x^{\alpha_j} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m p_k q_j x^{c\alpha_k \alpha_j - a(\alpha_k + \alpha_j) - b}, \quad (2.32)$$

a novi unutrašnji proizvod ima oblik:

$$(f, g)_{\otimes} = \frac{1}{x^2} \int_0^1 f(x) \otimes \bar{g}(x) dx. \quad (2.33)$$

Posmatrajmo Mincove polinome dobijene na osnovu (2.15) i (2.24):

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_p} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(s - \frac{a\bar{\alpha}_k + b}{c\bar{\alpha}_k - a} \right)}{\prod_{k=0}^n (s - \alpha_k)} x^s ds. \quad (2.34)$$

U (Marinković, 2004) je dokazano da polinomi $P_n(x)$ imaju oblik:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n A_{n,k} x^{\alpha_k}, \quad (2.35)$$

gde je $A_{n,k}$ definisano kao u (2.30).

Ovi polinomi su ortogonalni na intervalu $(0, 1)$ u smislu unutrašnjeg proizvoda (2.33), odnosno:

$$(P_n(x), P_m(x))_{\otimes} = \frac{(a^2 + bc)^n}{\prod_{k=0}^{n-1} |c\alpha_k - a|^2 (c|\alpha_n|^2 - 2a \operatorname{Re} \alpha_n - b)} \delta_{mn}. \quad (2.36)$$

Opet napominjemo da u slučaju da funkcija $W_n(s)$ ima realne polove, onda transformacija (2.23) ima oblik $\alpha_k^* = \frac{a\alpha_k + b}{c\alpha_k - a}$. Tada Mincovi polinomi $P_n(x)$ imaju realne eksponente. U tom slučaju, uvođenjem smene $x = e^{-t}$ u $P_n(x)$, dobijamo eksponencijalne funkcije:

$$\varphi_n(t) = P_n(e^{-t}) = \sum_{k=0}^n A_{nk} x^{-\alpha_k t}. \quad (2.37)$$

Generalizacija klasičnih ortogonalnih racionalnih funkcija primenom simetrične transformacije

Takođe, ove funkcije su ortogonalne na intervalu $(0, \infty)$ u smislu novog unutrašnjeg proizvoda (2.33), odnosno:

$$\left(\varphi_n(t), \varphi_m(t)\right)_{\otimes} = \int_0^{\infty} \varphi_n(t) \otimes \varphi_m(t) e^{-t} dt = N_n^{-2} \delta_{n,m}, \quad (2.38)$$

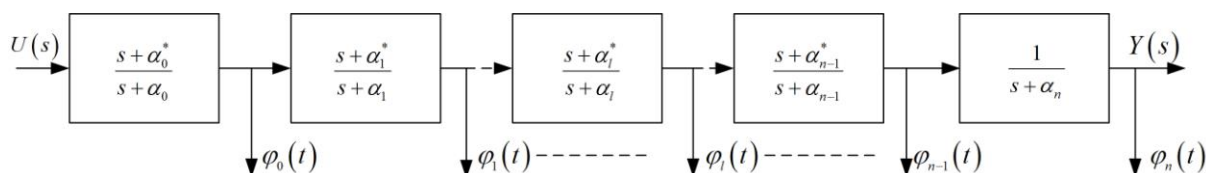
gde je:

$$\varphi_n(t) \otimes \varphi_m(t) = \sum_{k=0}^n A_{n,k} e^{-\alpha_k t} \otimes \sum_{j=0}^m A_{m,j} e^{-\alpha_j t} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m A_{n,k} A_{m,j} e^{-[c\alpha_k \alpha_j - a(\alpha_k + \alpha_j) - b]t}. \quad (2.39)$$

Funkcije $\varphi_n(t)$ služiće za određivanje izlaza iz nove klase filtara projektovanih na osnovu novog unutrašnjeg proizvoda (2.33).

3 Projektovanje novih klasa ortogonalnih kaskadnih filtara

Sekvence ortogonalnih racionalnih funkcija (2.13) i (2.24) omogućuju dobijanje dve nove klasa ortogonalnih kaskadnih filtara na način što se usvoji da $W_n(s)$ predstavljaju funkcije prenosa odgovarajućih filtara. Relacije (2.13) i (2.24) omogućuju izbor tri grupe veličina u cilju dobijanja različitih filtara. Najpre se mogu birati parametri preslikavanja b (2.13) i bilinearne transformacije a, b i c (2.24), a zatim i polovi funkcije $W_n(s)$. Na taj način se dobija nova klasa kontinualnih ortogonalnih filtara, kod kojih su izlazi iz filtra ortogonalni u smislu novih unutrašnjih proizvoda. Kaskadna šema ovakvog filtra data je na slici 3.1.



Slika 3.1 Kaskadna šema nove klase ortogonalnih filtara

3.1 Nova klasa ortogonalnih kaskadnih filtara bazirana na recipročnoj transformaciji polova u nule (generalizovani Malmkvistovi filtri)

Kada funkcija $W_n(s)$ ima realne polove tada pridruženi Mincovi polinomi imaju realne eksponente. U ovom slučaju, zamenom $x = e^{-t}$ u $P_n(x)$, (2.16), dobijaju se eksponencijalne funkcije:

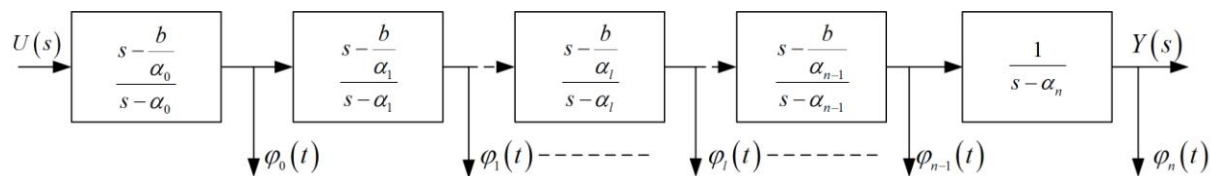
$$\varphi_n(t) = P_n(e^{-t}) = \sum_{k=0}^n A_{n,k} e^{-\alpha_k t}. \quad (3.1)$$

Ove funkcije su ortogonalne u smislu unutrašnjeg proizvoda:

$$(\varphi_n(t), \varphi_m(t))_{\odot} = \int_0^{\infty} \varphi_n(t) \odot \varphi_m(t) e^{-t} dt, \quad (3.2)$$

gde je: $\varphi_n(t) \odot \varphi_m(t) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m A_{n,k} A_{m,j} e^{\alpha_k \alpha_j t}$.

Kao što je već rečeno, niz ortogonalnih racionalnih funkcija (2.13) omogućava projektovanje nove klase ortogonalnih filtara zasnovanih na recipročnoj transformaciji njihovih polova u nule. Pretpostavimo da ove funkcije imaju realne polove. Na ovaj način, projektuje se kaskadni ortogonalni filter dat na slici 3.2.



Slika 3.2 Blok šema novog ortogonalnog filtra zasnovanog na recipročnoj transformaciji

Izlazi iz ovog filtra u vremenskom domenu su:

$$\varphi_l(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W_l(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_p} W_l(s) e^{st} ds, \quad (3.3)$$

gde je: $W_l(s) = \prod_{k=0}^l \frac{s-b}{s-\alpha_k}$, $l = 0, 1, 2, \dots, n$. Dakle, kontura C_p obuhvata sve polove funkcije

$W_l(s)$ dok sve nule funkcije $W_l(s)$ leže izvan ove konture.

Izlazi $\varphi_l(t)$ su ortogonalni u vremenskom domenu na intervalu $(0, \infty)$ u smislu unutrašnjeg proizvoda (3.2). Filter sa slike 3.2 je ortogonalan u kompleksnom domenu na konturi koja obuhvata sve polove filtra.

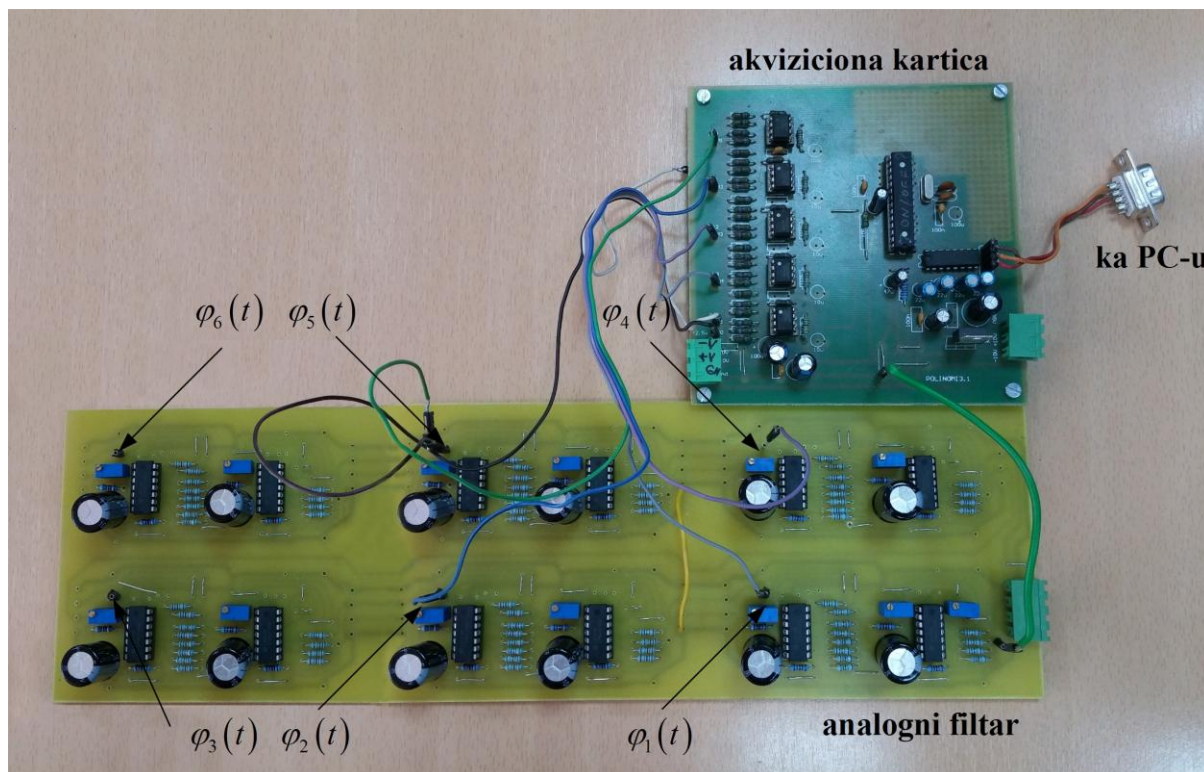
Praktična realizacija filtara zasnovanih na recipročnoj transformaciji

Za potrebe praktične realizacije novog ortogonalnog filtra zasnovanog na recipročnoj transformaciji polova u nule, zapisaćemo funkciju prenosa u sledećem obliku:

$$W_n(s) = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (s + \alpha_k^*)}{\prod_{k=0}^n (s + \alpha_k)} = \frac{1}{s + \alpha_0} \prod_{k=1}^n \frac{s + \alpha_{k-1}^*}{s + \alpha_k}, \quad \alpha_k^* = \frac{b}{\alpha_k}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad \alpha_k \geq 0. \quad (3.4)$$

Kao što se može primetiti, promenili smo znakove u (3.4) jer je to pogodniji zapis za praktičnu realizaciju, s obzirom da su u realnom filteru polovi u levoj poluravni (videti sliku 3.1 gde je data opšta šema za filtre na bazi simetričnih transformacija). Ovaj filter je ortogonalan kako u vremenskom, tako i u kompleksnom domenu.

Ovakav generalizovani Malmkvistov filter je i praktično realizovan u Laboratoriji za modeliranje, simulaciju i upravljanje sistemima na Elektronskom fakultetu u Nišu (slika 3.3). On se sastoji od PCB¹⁴ štampane ploče, mikroprocesora, akvizicione kartice i napajanja. Ovako realizovani filter ima realne i podesive polove.



Slika 3.3 Praktična realizacija analognog generalizovanog Malmkvistovog ortogonalnog filtra

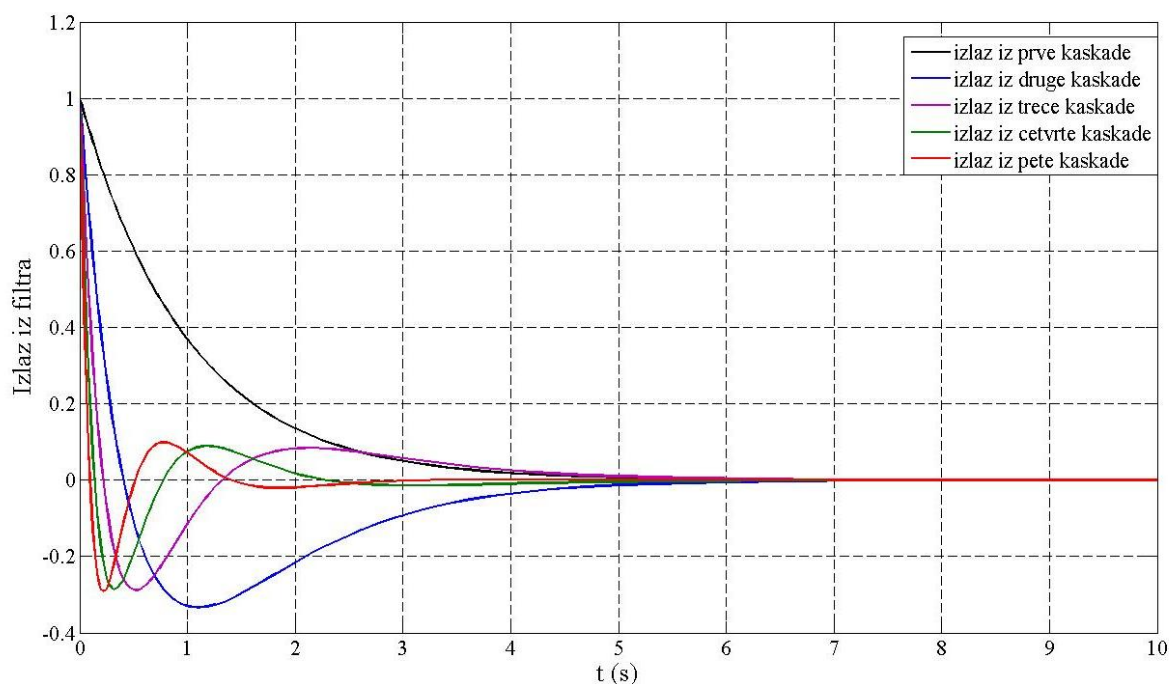
Iz ilustrativnih razloga date su funkcije na izlazima prvih pet kaskada predloženog analognog filtra (3.4) dobijene matematičkim putem:

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(t) &= e^{-t}, \\
 \varphi_1(t) &= 3e^{-2t} - 2e^{-t}, \\
 \varphi_2(t) &= 7e^{-3t} - \frac{15}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-t}, \\
 \varphi_3(t) &= \frac{65}{4}e^{-4t} - \frac{70}{3}e^{-3t} + \frac{35}{4}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t}, \\
 \varphi_4(t) &= \frac{77}{2}e^{-5t} - \frac{1105}{16}e^{-4t} + \frac{455}{12}e^{-3t} - \frac{105}{16}e^{-2t} + \frac{5}{24}e^{-t}.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

¹⁴ eng. Printed Circuit Board

Treba napomenuti da je ovaj niz funkcija dobijen za sledeće parametre: $b = -1$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$, $\alpha_4 = 5$.

Na slici 3.4 su dati i snimljeni izlazi iz filtra u vremenskom intervalu od 10 sekundi. Izlaz iz l -te kaskade odgovara funkciji $\varphi_{l-1}(t)$ u (3.5). Ortogonalnost ovih izlaza u smislu unutrašnjeg proizvoda (3.2) može se lako proveriti.



Slika 3.4 Izlazi $\varphi_l(t)$, $l = 0, 1, 2, 3, 4$ iz novog analognog filtra

3.2 Nova klasa ortogonalnih kaskadnih filtara zasnovana na bilinearnoj transformaciji polova u nule

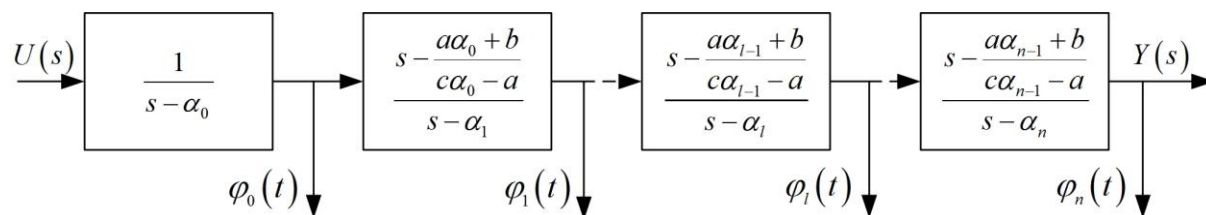
Generisani niz ortogonalnih funkcija (2.24) biće osnova za projektovanje filtara zasnovanih na bilinearnoj transformaciji. Kako bi dobili funkciju prenosa ovih novih filtara, izraz (2.24) napisaćemo u sledećem obliku:

$$W_n(s) = \frac{\prod_{k=1}^n \left(s - \frac{a\alpha_k + b}{c\alpha_k - a} \right)}{\prod_{k=0}^n (s - \alpha_k)}. \quad (3.6)$$

Smatramo da su nule i polovi realni. Takođe, potrebno je formirati funkcije prenosa pojedinih ćelija ovog filtra na sledeći način. Početna ćelija ima funkciju prenosa: $W_0(s) = \frac{1}{s - \alpha_0}$, dok ostale ćelije imaju funkciju prenosa sledećeg oblika:

$$W_l(s) = \frac{s - \alpha_{l-1}^*}{s - \alpha_l} = \frac{s - \frac{a\alpha_{l-1} + b}{c\alpha_{l-1} - a}}{s - \alpha_l}, \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (3.7)$$

tako da je kompletna funkcija prenosa filtra data kao na slici 3.5.



Slika 3.5 Blok šema novog ortogonalnog filtra zasnovanog na bilinearnoj transformaciji

Izlazi iz ovog filtra određuju se na osnovu (2.34) i (2.37), odnosno:

$$\varphi_l(t) = \sum_{k=0}^l A_{lk} e^{-\alpha_k t}, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

Na taj način, dobijen je novi ortogonalni filter zasnovan na bilinearnoj transformaciji.

U kompleksnom s -domenu izlazi iz filtra su ortogonalni u odnosu na unutrašnji proizvod (2.27). Izlazi iz filtra u vremenskom domenu su:

$$\varphi_l(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W_l(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_P} W_l(s) e^{st} ds = P_l(e^{-t}), \quad (3.9)$$

gde je: $W_l(s) = \prod_{k=0}^l \frac{s - \frac{a\alpha_{k-1} + b}{c\alpha_{k-1} - a}}{s - \alpha_k}$, $l = 0, 1, 2, \dots, n$, P_l su Mincovi polinomi izvedeni iz $W_l(s)$

koristeći (2.24). Izlazi iz filtra $\varphi_l(t)$ ortogonalni su u vremenskom domenu na intervalu $(0, \infty)$ u smislu unutrašnjeg proizvoda (2.39).

Filter sa slike 3.5 predstavlja opštiji ortogonalni filter baziran na primeni bilinearne transformacije (2.22) u odnosu na onaj opisan u prethodnom poglavlju.

Na ovaj način, dobili smo novu klasu ortogonalnih filtara, uz primenu simetrične bilinearne transformacije. Ovi filtri su ortogonalni u kompleksnom domenu u oblasti obuhvaćenom konturom (2.25) u s -ravni, Izlazi iz ovog filtra za kontinualne sisteme su ortogonalni u klasičnom smislu ako je $c = 0$ (Nikolić, 2010, Antić, 2012(a)), dok su za $c \neq 0$ ortogonalni u smislu novog unutrašnjeg proizvoda (2.39).

Značaj, prednosti i mogućnosti ovih novih filtara ogledaju se u činjenici da se za konkretne vrednosti parametra bilinearne transformacije mogu dobiti neke dobro poznate klase filtara. Tako se za $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ i celobrojne polove α_k dobijaju Ležandrovi filtri (Nikolić, 2010, Antić, 2012(a)), a uopšteni Ležandrovi ako polovi imaju proizvoljne realne vrednosti. Ako polovi imaju jednake vrednosti dobijamo Lagerove filtre. Takenaka¹⁵-Malmkvistovi (Takenaka-Malmquist) filtri se projektuju za $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, a uopšteni Malmkvistovi za $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Za $-\frac{b}{a} = b_0 > 0$, $c = 0$, i ako su polovi prirodni brojevi, dobija se jedna klasa Jakobijevih filtara (Marinković, 2003, Pavlović, 2011). Ukoliko je $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ i ukoliko su polovi filtra neceli brojevi, dobijaju se Mincovi ortogonalni polinomi (Borwein, 1994) na osnovu kojih se dobijaju Mincovi ortogonalni filtri. Ako je $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ i ako se usvoji da je broj polova veći od broja nula za više od jedan, dobijaju se kvazi ortogonalni filtri (Antić, 2012(c), Milojković, 2013, Nikolić, 2014). Ako se uz navedene uslove polovi promene za neku malu vrednost ε , dobijaju se skoro ortogonalni filtri (Milojković, 2010, Antić, 2011). Na kraju, još jednom, filtri predloženi u ovoj disertaciji za $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ obuhvataju sve pomenute klase filtara, a i samim tim i sve njihove dobre osobine, što će kasnije biti i praktično pokazano.

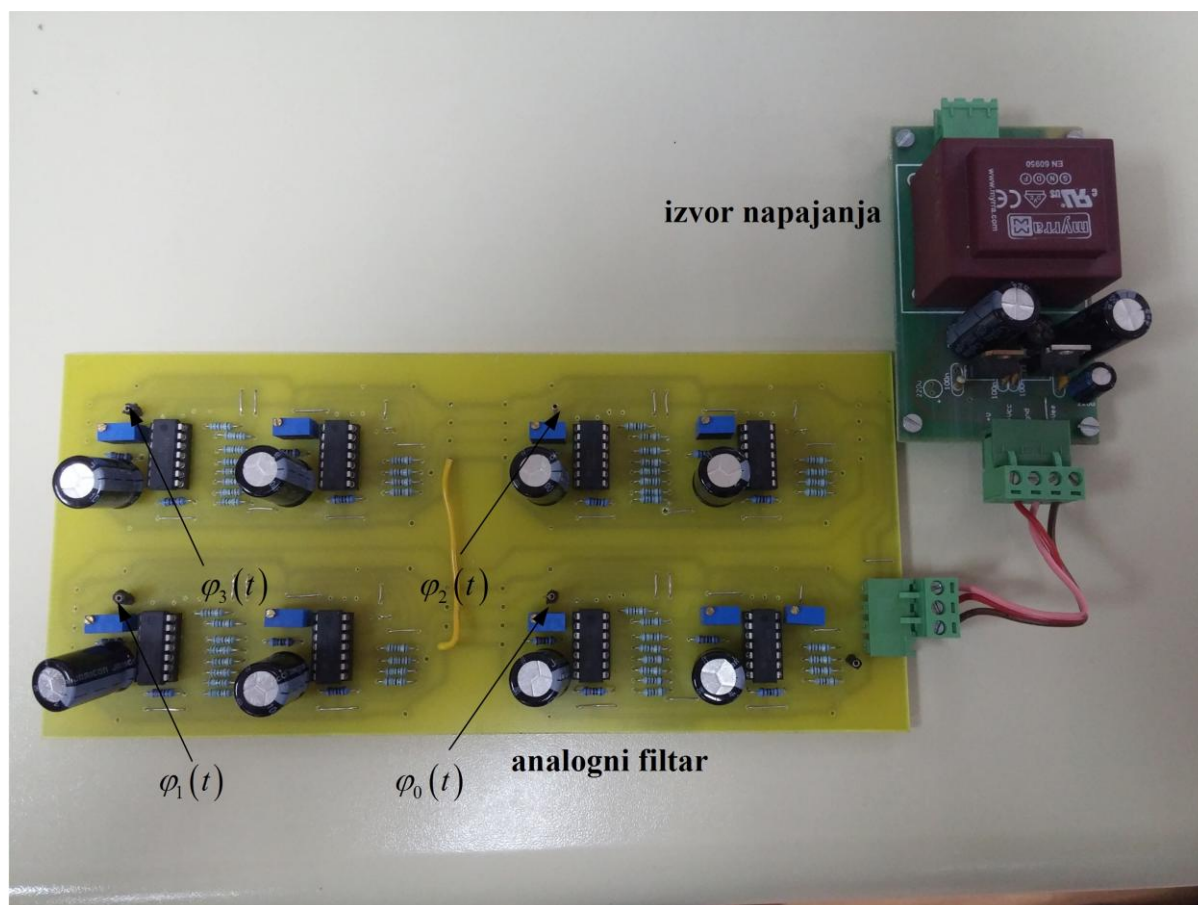
Praktična realizacija filtara zasnovanih na bilinearnoj transformaciji

Sekvenca ortogonalnih racionalnih funkcija (3.6) se koristi za projektovanje nove klase ortogonalnih filtara zasnovanih na bilinearnoj transformaciji:

$$W_n(s) = \frac{1}{s + \alpha_0} \prod_{k=1}^n \frac{s + \frac{a\alpha_{k-1} + b}{c\alpha_{k-1} - a}}{s + \alpha_k}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad \alpha_k \geq 0. \quad (3.10)$$

¹⁵ Satoru Takenaka, japanski matematičar

Izraz (3.10) je osnova za praktičnu realizaciju novog filtra. Ovaj filter je i praktično realizovan u Laboratoriji za modeliranje, simulaciju i upravljanje sistemima (slika 3.6). Ovako realizovani filter ima realne i podesive polove.



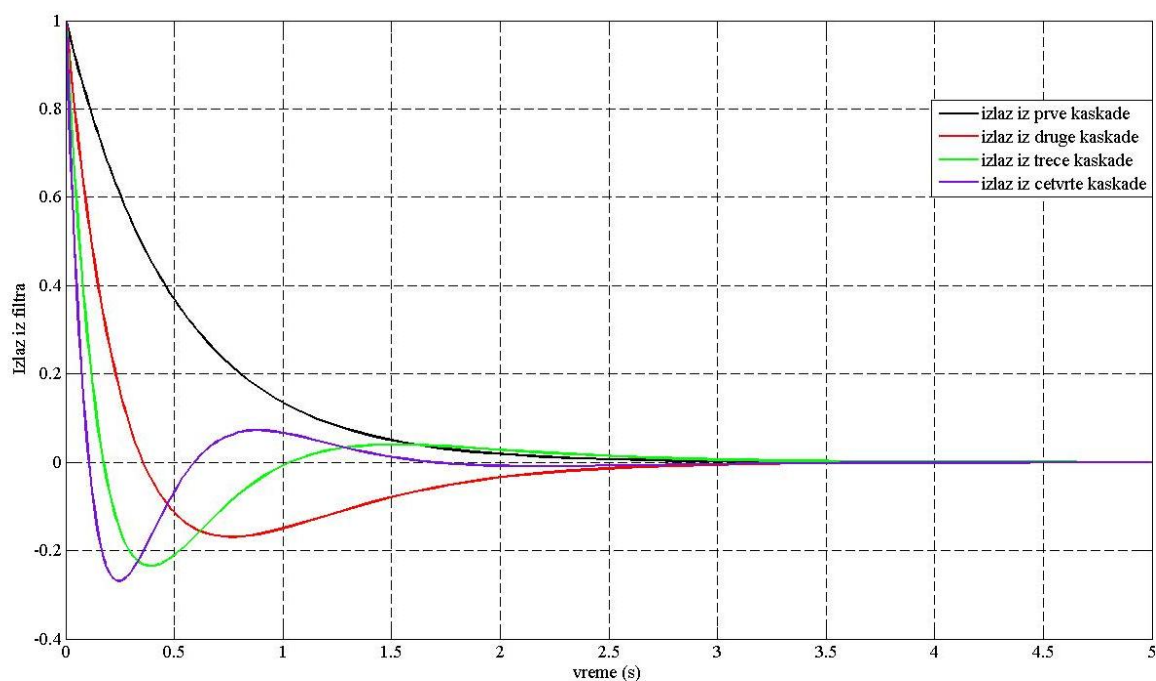
Slika 3.6 Praktična realizacija analognog ortogonalnog filtra zasnovanog na bilinearnoj transformaciji

Ovaj filter je ortogonalan u kompleksnom domenu u smislu unutrašnjeg proizvoda (2.36) na konturi C_p i u vremeskom domenu u smislu unutrašnjeg proizvoda (2.39).

Iz ilustrativnih razloga date su funkcije na izlazima prvih nekoliko kaskada predloženog analognog filtra (3.10) za sledeće vrednosti polova: $\alpha_0 = -2$, $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = -4$, $\alpha_3 = -5$, $\alpha_4 = -6$ i parametara bilinearne transformacije $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Matematički dobijeni izlazi na osnovu Mincovih polinoma (2.37):

$$\begin{aligned}
 \varphi_0(t) &= e^{-2t}, \\
 \varphi_1(t) &= \frac{10}{3}e^{-3t} - \frac{7}{3}e^{-2t}, \\
 \varphi_2(t) &= \frac{39}{4}e^{-4t} - \frac{35}{3}e^{-3t} + \frac{35}{12}e^{-2t}, \\
 \varphi_3(t) &= \frac{1232}{45}e^{-5t} - \frac{897}{20}e^{-4t} + 21e^{-3t} - \frac{91}{36}e^{-2t}.
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

Na slici 3.7 su dati i snimljeni izlazi iz realizovanog filtra u vremenskom interval od 5 sekundi. Izlaz iz l -te kaskade odgovara funkciji $\varphi_{l-1}(t)$ u (3.11).



Slika 3.7 Izlazi $\varphi_l(t)$, $l = 0,1,2,3$ iz analognog ortogonalnog filtra zasnovanog na bilinearnoj transformaciji

Ortogonalnost ovih izlaza u smislu novog unutrašnjeg proizvoda može se proveriti korišćenjem relacije (2.36), tj: $\int_0^{\infty} \varphi_n(t) \otimes \varphi_m(t) dt = N_n^2 \delta_{n,m}$, i $e^{\alpha_k t} \otimes e^{\alpha_j t} = e^{[\alpha_k \alpha_j - (\alpha_k + \alpha_j) - 1]t}$.

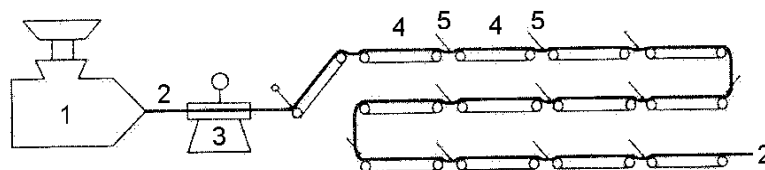
3.3 Primena novih analognih ortogonalnih filtara u modeliranju dinamičkih sistema u vremenski kontinualnom domenu

Dve nove klase kaskadnih ortogonalnih filtara opisane u ovom poglavlju biće primenjene na modeliranje jednog realnog tehničkog sistema. Kvalitet dobijenih rezultata biće potvrđen poređenjem sa rezultatima dobijenim korišćenjem nekih, već postojećih, klasa ortogonalnih filtara.

3.3.1 Opis sistema za hlađenje gumene trake

Proces hlađenja gumene trake, tačnije spoljnog zaštitnog sloja automobilske gume, tzv. protektora (Trajković, 2005, Antić, 2012(c)) je vrlo važan tehnološki process u auto industriji. Ovo je složen elektromehanički i termodinamički sistem, koji se obično sastoji od 5 do 16 kaskada, čija je dužina oko petnaestak metara. Procenjuje se da postoji više hiljada ovakvih sistema širom sveta.

Sistem se sastoji od kaskadno povezanih transportera za hlađenje gumenih traka, prikazan šematski na slici 3.8 (Antić, 2012(c)).



Slika 3.8 Kaskadni sistem za transport gumene trake (1-ekstruder, 2-gumena traka, 3-vaga, 4-transporteri, 5-prelazi)

Gumena traka dolazi iz ekstrudera (oznaka 1 na slici 3.8), prolazi vagu (oznaka 3) i ide u sistem za hlađenje. Neophodno je gumenu traku ohladiti do sobne temperature. Dok guma prolazi kroz sistem za hlađenje ona se skuplja i to s nekim koeficijentom kontrakcije $\mu < 1$. Usled kontrakcije imamo različite brzine gumene trake na krajevima, što izaziva proklizavanje gume u odnosu na transporter. Brzine pojedinačnih transportera se podešavaju lokalnim regulatorima, koji određuju brzinu sledećeg transportera u odnosu na dužinu gume između dva uzastopna transportera.

Promena dužine gumene trake između dva transportera može se opisati sledećim jednačinama (Antić, 2012(c)):

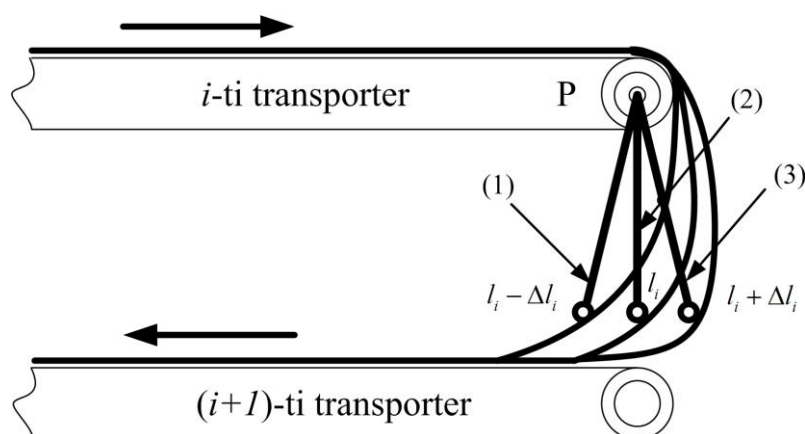
$$\frac{dl_i}{dt} = V_{g,i-1}^{(2)} - V_{g,i}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.12)$$

$$V_{g,i-1}^{(2)} = V_{i-1}, \quad V_{g,i}^{(1)} = \frac{1}{\mu} V_i, \quad (3.13)$$

$$\frac{dl_i}{dt} = V_{i-1} - \frac{1}{\mu} V_i, \quad \Delta l_i = \frac{1}{s} \left(V_{i-1} - \frac{1}{\mu_i} V_i \right), \quad (3.14)$$

gde je: l_i - dužina gumene trake između i -tog i $(i+1)$ -og transportera, $V_{g,i-1}^{(2)}$ - brzina gume na kraju $(i-1)$ -og transportera, $V_{g,i}^{(1)}$ - brzina gume na početku i -tog transportera, n - broj transportera, Δl_i - promena dužine gumene trake između dva uzastopna transportera, V_i - brzina i -tog transportera, μ_i - koeficijent kontrakcije (skupljanja) gume za i -ti transporter.

Slika 3.9 prikazuje prelaz između dva transportera. Da bi regulisali brzine transportera, neophodno je meriti dužine gume između transportera (Δl_i). Ova merenja se izvode specijalnim sensorima (potencijometri P na slici 3.9). Vrednost ugla potencijometra β_i zadovoljava relaciju $\beta_i = \Phi(\Delta l_i)$, gde Φ predstavlja nelinearnu zavisnost. Vrednost β_i se kreće između 0 i 90 stepeni. Napon na potencijetru je u tom slučaju dat sa $u_i = K_{pi} \beta_i$, gde K_{pi} predstavlja koeficijent potencijetra [V/rad].



Slika 3.9 Prelaz gume između dva transportera

Vrednosti koeficijenata μ_i se kreću u opsegu od 0.9042 do 0.9620 za slučaj sistema sa četiri transportera, odnosno od 0.9042 do 1 za sistem sa 13 transportera. Eksperimentalno je određena i jednačina za računanje pojedinačnih vrednosti koeficijenata kontrakcije kao:

$$\mu_i = \frac{0.7 + 0.3e^{-\frac{i}{2.6}}}{0.7 + 0.3e^{-\frac{i-1}{2.6}}}. \quad (3.15)$$

Napon na potenciometru se potom pojačava, pri čemu se brzine motora koji pogone transportere regulišu pomoću tiristorskih regulatora. Dinamika i -tog transportera sa regulatorom i motorom može se opisati sledećom jednačinom:

$$T_1 T_2 \frac{dV_i^2}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dV_i}{dt} + V_i = u_i, \quad (3.16)$$

gde su T_1 i T_2 mehanička i električna vremenska konstanta elektromehaničkog pogona, respektivno. Primenjujući Laplasovu transformaciju na (3.16), možemo naći funkciju prenosa i -tog transportera, koja ima sledeći oblik:

$$W_i(s) = \frac{V_i(s)}{u_i(s)} = \frac{1}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}. \quad (3.17)$$

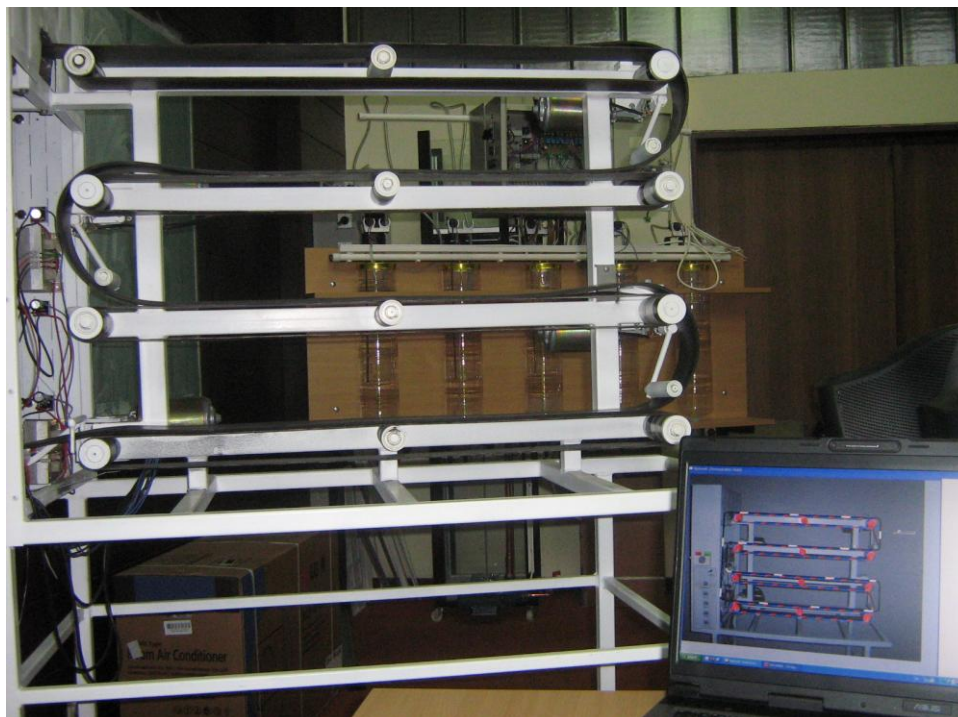
Integraljenje brzine između transportera može izazvati statičku grešku kada se parametar μ menja (npr. pri promeni kvaliteta gume ili temperature okoline) (Nikolić, 2014). Na slici 3.9, srednja pozicija senzora (pozicija 2) odgovara normalnom radu. Ako se μ poveća, senzor se pomera u poziciju 1 i javlja se statička greška $-\Delta l_i$ (guma se rasteže). Ako se μ smanji, senzor se pomera u poziciju 3 i javlja se statička greška $+\Delta l_i$ (guma se skuplja). Kompenzacioni potenciometri (K_{ri}) se uvode u cilju kompenzacije statičke greške, tako da se njihovim podešavanjem sistem vraća u normalno funkcionisanje (pozicija 2 na slici 3.9). Na stabilnost i dinamiku opisanog transportnog sistema, između ostalih, utiču i sledeće osobine:

- guma se nagomilava na mestima prelaza (tačke 5 na slici 3.9) zbog integracije razlike u brzinama,
- na prelazima kaskada, između transportera, javljaju se nelinearne zavisnosti,
- koeficijent kontrakcije μ ima delimično stohastički karakter zato što zavisi od kvaliteta gume i temperature okoline (Antić, 2012(b), Antić, 2012(c)).

Usled kaskadne strukture i prisutnih nelinearnosti, sistem je sklon oscilovanju (Antić, 2012(c)), a pod izvesnim uslovima u njemu se može javiti i deterministički haos (Danković, 1997). Zbog svega toga, ovaj sistem je veoma kompleksan i težak za modeliranje (Trajković, 2005, Antić, 2012(c)).

Ekperimentalni kaskadni sistem s četiri transportera je praktično realizovan u Laboratoriji za modeliranje, simulaciju i upravljanje sistemima na Elektronskom fakultetu u

Nišu (slika 3.10). Praktično realizovan sistem može da imitira stvarni, fabrički, u svim pomenutim aspektima.



Slika 3.10 Laboratorijska postavka – kaskadni sistem s četiri transportera

3.3.2 Primena generalizovanog Malmkvistovog ortogonalnog filtra u modeliranju sistema za hlađenje gumene trake

Novi kaskadni ortogonalni filtar zasnovan na recipročnom preslikavanju polova u nule biće primenjen u modeliranju transportnog istema opisanog u prethodnom potpoglavlju. Model se dobija sukcesivnim modeliranjem kaskada počevši od prve. Za modeliranje je korišćen genetički algoritam (Goldberg, 1989, Kristinsson, 1992, Mitchel, 1997) koji će kasnije biti detaljnije objašnjen. Koristi se podesivi¹⁶ model sistema sa predloženim ortogonalnim filtrom dat na slici 3.11. U ovom slučaju koristimo ovaj filtar sa četiri sekcije i

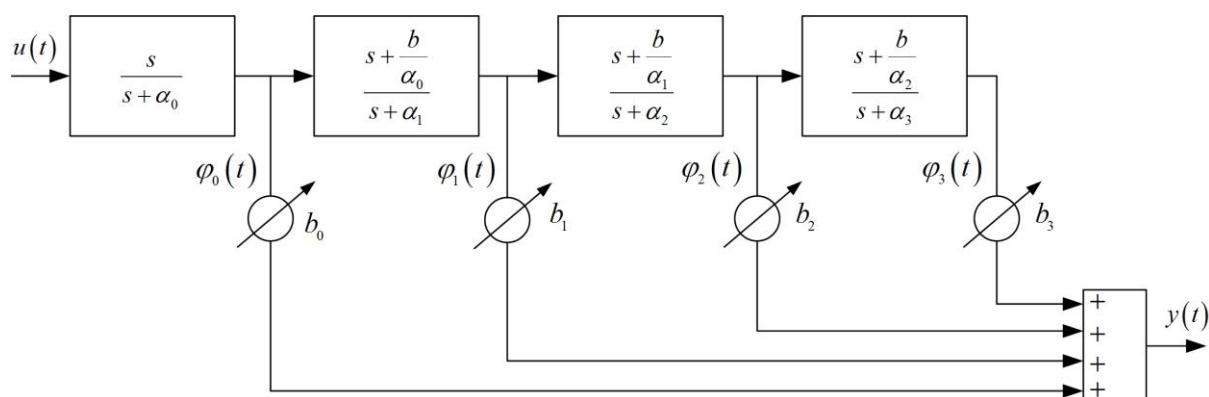
to sa realnim polovima ($\alpha_k^* = \frac{b}{\alpha_k}$, $k = 0, 1, 2, 3$). Kao što se može zaključiti, izlaz iz i -te

kaskade ima oblik:

$$y_{M,i} = \sum_{k=0}^N b_k \varphi_k(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.18)$$

¹⁶ eng. adjustable

gde je N broj kaskada sistema a b_k su sumarni koeficijenti. U našem slučaju $N = 3$.



Slika 3.11 Blok šema podesivog modela s novim analognim ortogonalnim filtrom

Željeni model sistema za hlađenje protektora se dobija podešavanjem sledećih parametara: polova ortogonalnog filtra α_k ($k=0,1,2,3$), sumarnih koeficijenata b_k ($k=0,1,2,3$) i parametra preslikavanja b . Kada se modelira nepoznat sistem, parametri modela treba da se podese tako da model odgovara što je više moguće (nepoznatom) sistemu koji se modelira. Proces modeliranja se vrši metodom dovodenja istog signala na ulaz u objekat, čiji se model određuje, i na ulaz u model, koji ima podesive parameter i koji je zasnovan na novim kaskadnim ortogonalnim analognim filtrima (slika 3.11).

Za određivanje modela prve kaskade sistema za hlađenje gumene trake koristimo odskočni ulaz, dok se za modeliranje ostalih kaskada, koriste izlazi iz prethodnih (za modeliranje i -te kaskade koristi se $(i-1)$ -va kaskada). Izlazi iz prve kaskade sistema, $y_s(t)$ i modela, $y_M(t)$ prikazani su na slici 3.12.

U eksperimentu, kao što je već napomenuto, korišćemo genetički algoritam gde kao kriterijumsku funkciju koristimo srednje-kvadratnu grešku¹⁷ $J = \frac{1}{T} \int_0^T (y_s(t) - y_M(t))^2 dt$

(Antić, 2012(a), Nikolić, 2016) čijom minimizacijom dobijamo tražene parametre: polove procesa α_i , sumarne koeficijente b_i i parametar preslikavanja b .

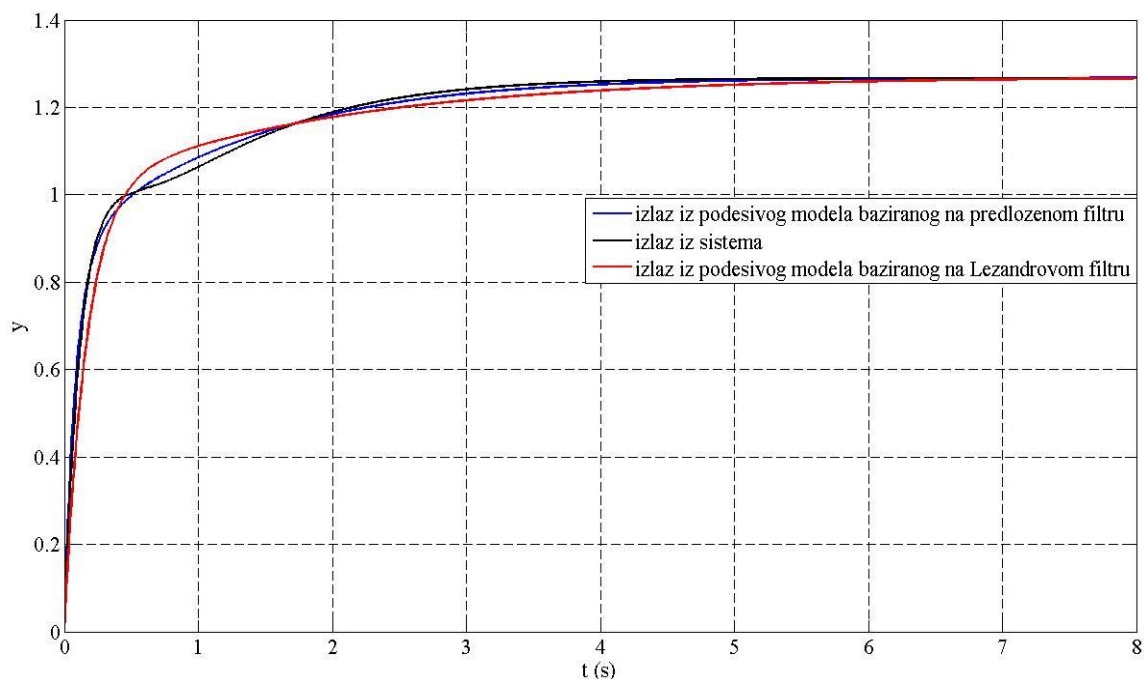
Genetički algoritam, koji je iskorišćen u eksperimentu, ima sledeće parametre: populaciju od 1000 jedinki, broj generacija 600, stohastičku uniformnu selekciju, reprodukciju uz 10 elitnih jedinki i Gausovu¹⁸ mutaciju sa skupljanjem. Izabrani hromozom

¹⁷ eng. mean-squared error (MSE)

¹⁸ Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), nemački matematičar i naučnik

ima strukturu koja se sastoji od 8 parametara kodiranih realnim brojevima (filtrar sa četiri sekcije, $n=3$): $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, i b_3$. Ukupno vreme trajanja eksperimenta je 15 sekundi. Glavni cilj eksperimenta je dobiti najbolji model sistema u pogledu srednje-kvadratne greške kao kriterijumske funkcije.

Izlazi iz prve kaskade sistema, $y_s(t)$ i podesivog modela baziranog na novim ortogonalnom filtru, $y_M(t)$ su dati na slici 3.12. Vremenski interval snimanja je 8 sekundi što je sasvim dovoljno za praćenje slaganja odziva modela i sistema do ulaska u zasićenje.



Slika 3.12 Izlazi iz prve kaskade sistema za hlađenje protektora i podesivih modela

Na osnovu (3.4) i (3.18) kao i slike 3.11, konačno možemo formirati model prve kaskade sistema:

$$W(s) = b_0 \frac{1}{s + \alpha_0} + \sum_{l=1}^3 b_l \frac{1}{s + \alpha_0} \prod_{k=1}^l \frac{s + \frac{b}{\alpha_{k-1}}}{s + \alpha_k}, \quad (3.19)$$

gde je $b = 0.62$. Dobijene numeričke vrednosti polova i sumarnih koeficijenata su date u tabeli 3.1. Srednje-kvadratna greška u ovom eksperimentu iznosi: $J_{\min} = 0.77954 \cdot 10^{-3}$.

Tabela 3.1 Dobijene vrednosti parametara ortogonalnog modela sistema

k	0	1	2	3
a_k	1.68	1.21	4.53	6.53
b_k	2.08	-0.22	3.35	3.35

Funkcija prenosa modela (3.19) nakon zamena numeričkih vrednosti iz tabele 3.1 može se napisati u konačnom obliku:

$$W(s) = \frac{8.57s^3 + 51.31s^2 + 103.12s + 76.38}{s^4 + 13.96s^3 + 63.65s^2 + 108.17s + 60.25} \quad (3.20)$$

Oblik (3.20) funkcije prenosa je pogodan za analizu sistema, a za samo modeliranje je pogodniji oblik (3.19).

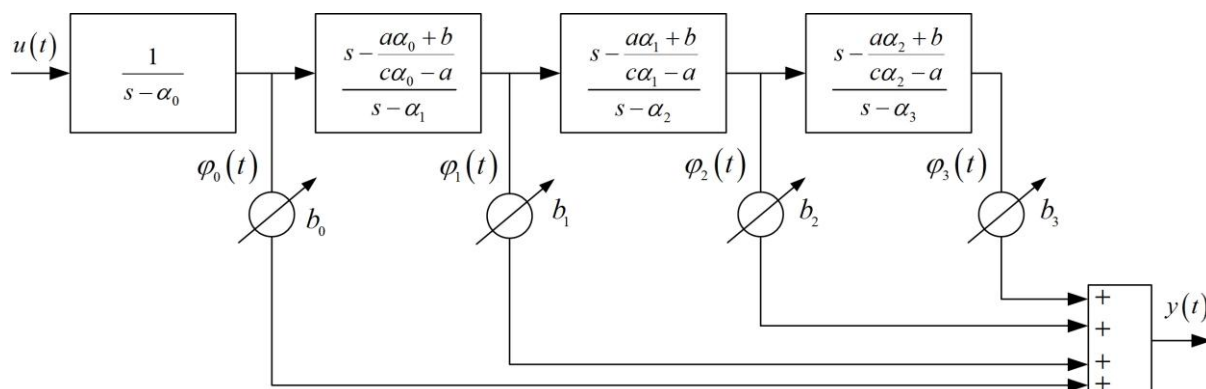
Kako bi potvrdili kvalitet korišćenog modela zasnovanog na predloženom ortogonalnom filtru, izvršeno je modeliranje sistema na već opisan način korišćenjem podesivog modela zasnovanog na klasičnom ortogonalnom filtru. U ovom slučaju uzeli smo uopšteni Ležandrov filter (nule filtra α_k^* su pomerene za vrednost l u odnosu na polove filtra, α_k (Nikolić, 2010, Nikolić, 2016), tako da je podesivi model sa slike 3.11 modifikovan jer je sada funkcija preslikavanja $\alpha_k^* = \alpha_k + l$. Na slici 3.12 je dat i izlaz iz ovog podesivog modela. U ovom eksperimentu su dobijene sledeće vrednosti parametara: $l=0.7$, $\alpha_0=5.82$, $\alpha_1=4.20$, $\alpha_2=0.54$, $\alpha_3=1.31$, $b_0=6.48$, $b_1=-0.38$, $b_2=0.18$, $b_3=-0.08$ i $J_{\min} = 5.3457 \cdot 10^{-3}$. Dakle, srednje-kvadratna greška je značajno veća (jedan red veličine) nego kada se modeliranje sistema vrši pomoću predloženog novog ortogonalnog filtra. Da model baziran na novom filtru bolje prati odziv iz sistema može se lako videti i sa slike 3.12.

3.3.3 Primena ortogonalnog filtra zasnovanog na bilinearnoj transformaciji u modeliranju sistema za hlađenje gumene trake

Slično kao u prethodnom odeljku, opštiji ortogonalni filter baziran na bilinearnoj transformaciji primenićemo u modeliranju i indentifikaciji sistema za hlađenje gumene trake i uporediti s nekim već postojećim filtrima, uključujući i prethodno opisani i razvijeni generalizovani Malmkvistov filter. Postupak modeliranja je isti kao u prethodnom slučaju. Na slici 3.13 je dat podesivi model s novim analognim filtrom baziranim na bilinearnoj

transformaciji polova u nule. I ovde koristimo filtar s četiri sekcije i to s realnim polovima

$$(\alpha_k^* = \frac{a\alpha_k + b}{c\alpha_k - a}, k = 0, 1, 2, 3).$$



Slika 3.13 Blok šema podesivog modela s novim analognim ortogonalnim filtrom zasnovanim na bilinearnoj transformaciji

Za određivanje modela prve kaskade sistema za hleđenje gumene trake opet koristimo odskočni ulaz, dok se za modeliranje ostalih kaskada, koriste izlazi iz prethodne.

U eksperimentu ponovo koristimo genetički algoritam i srednje-kvadratnu grešku kao kriterijumsku funkciju. Traženi parametri su: polovi procesa α_i , sumarni koeficijenti b_i i koeficijenti bilinearne transformacije a , b i c .

Genetički algoritam, koji je korišćen u eksperimentu, ima sledeće parametre: populaciju od 800 jedinki, broj generacija 400, stohastičku uniformnu selekciju, reprodukciju uz 10 elitnih jedinki i Gausovu mutaciju sa skupljanjem. Izabrani hromozom ima strukturu koja se sastoji od 11 parametara kodiranih realnim brojevima (filtar sa četiri sekcije, $n=3$): $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3, a, b$ i c . Ukupno vreme eksperimenta je 15 sekundi.

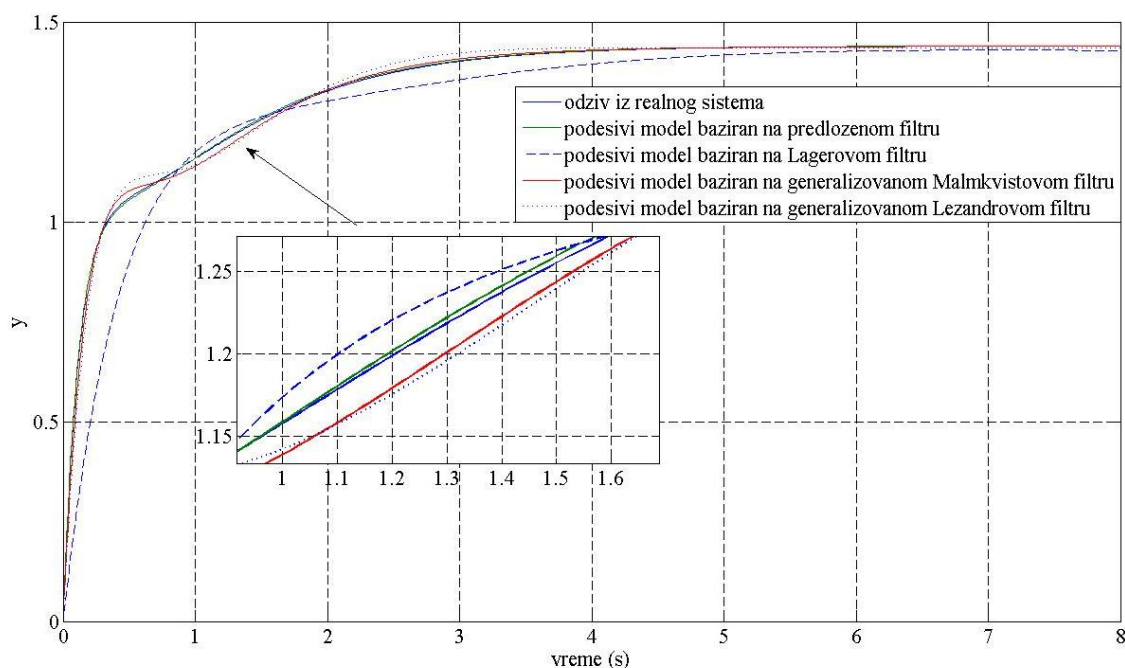
Izlazi iz prve kaskade sistema, $y_s(t)$ i podesivog modela baziranog na novom ortogonalnom filtru, $y_M(t)$ su snimani kao i u prošlom eksperimentu na intervalu od 8 sekundi i prikazani su na slici 3.14, a dobijeni rezultati su dati u tabeli 3.3.

Izvršeno je poređenje rezultata s rezultatima dobijenim korišćenjem postojećih klasičnih ortogonalnih filtara, kao i razvijene nove klase analognih filtara u ovoj disertaciji, kako bi se proverio kvalitet modela zasnovanog na novim ortogonalnim filtrima s bilinearnom transformacijom. Upotrebljeni su za tu svrhu sledeći filtri: Lagerovi, generalizovani Ležandrovi i generalizovani Malmkvistovi (3.4).

Radi preglednosti svi filtri, korišćeni u modeliranju datog sistema, dati su u tabeli 3.2 sa svojim funkcijama prenosa.

Tabela 3.2 Filtri sa modelima u obliku funkcije prenosa korišćeni u eksperimentima

Vrsta filtra	Model u obliku funkcije prenosa
Lagerov filtar	$W(s) = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{s+\alpha} \left(\frac{1+\alpha s}{s+\alpha} \right)^3$
Ležandrov (Minc-Ležandrov) filtar	$W(s) = \frac{1}{s+\alpha_0} \prod_{i=1}^3 \frac{(s-\alpha_{i-1}+\lambda)}{(s+\alpha_i)}$
Generalizovani Malmkvistov filtar	$W(s) = \frac{1}{s+\alpha_0} \prod_{i=1}^3 \frac{s+\frac{b}{\alpha_{i-1}}}{s+\alpha_i}$
Filtar baziran na bilinearnoj transformaciji	$W(s) = \frac{1}{s+\alpha_0} \prod_{i=1}^3 \frac{s+\frac{a\alpha_{i-1}+b}{c\alpha_{i-1}-a}}{s+\alpha_i}$



Slika 3.14 Izlazi iz prve kaskade sistema za hlađenje protektora i podesivih modela baziranih na novim i klasičnim ortogonalnim filtrima

Kriterijumska funkcija je ponovo srednje-kvadratna greška J , a broj sekcija 4. Izlazi iz modela baziranih na ovim filtrima se, kao što je poznato, računaju po formuli:

$$y_M(t) = \sum_{l=0}^3 b_l \varphi_l(t).$$

Struktura hromozoma u svim eksperimentima sadrži 8 standardnih

parametara: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, b_0, b_1, b_2$ i b_3 . Kod uopštenih Ležandrovih filtara dodatni parameter je λ , kod uopštenih Malmkvistovih dodatni parameter je b . Svi ovi parametri se kodiraju realnim brojevima.

Na osnovu (3.10) i (3.18), kao i slike 3.13, konačno možemo formirati model prve kaskade sistema:

$$W_1(s) = b_0 \frac{1}{s + \alpha_0} + \sum_{l=1}^3 b_l \frac{1}{s + \alpha_0} \prod_{k=1}^l \frac{s + \frac{a\alpha_{k-1} + b}{c\alpha_{k-1} - a}}{s + \alpha_k}, \quad (3.21)$$

gde su dobijene numeričke vrednosti polova, sumarnih koeficijenata i parametara bilinearne transformacije date u tabeli 3.3.

Tabela 3.3 Dobijene vrednosti parametara ortogonalnih modela zasnovanih na novim i klasičnim filtrima

<i>Kriterijumska funkcija i vrsta ortogonalnog modela</i>	<i>i</i>	0	1	2	3
$J = 0.0331 \cdot 10^{-3}$ ortogonalni model s novim filtrom baziranom na bilinearnoj transformaciji ($a = 0.26, b = 0.62,$ $c = 3.38$)	α_i	1.14	2.27	4.68	7.64
	b_i	1.28	0.57	3.90	3.19
$J = 0.6465 \cdot 10^{-3}$ ortogonalni model s generalizovanim Malmkvistovim filtrom ($b = 0.84$)	α_i	1.78	1.18	4.63	6.42
	b_i	2.16	-0.19	3.27	3.64
$J = 0.8132 \cdot 10^{-3}$ ortogonalni model s Ležandrovim filtrom ($\lambda = 0.58$)	α_i	0.38	0.76	0.98	1.95
	b_i	0.88	1.02	0.67	0.47
$J = 2.5071 \cdot 10^{-3}$ ortogonalni model s Lagerovim filtrom	α_i	2.19	2.19	2.19	2.19
	b_i	3.17	-0.60	2.09	2.03

Iz tabele 3.3 može da se vidi da je srednje-kvadratna greška ubedljivo najmanja kod novih ortogonalnih filtara zasnovanih na bilinearnoj transformaciji. Kod generalizovanih Malmkvistovih filtara (Danković, 2016(b)), takođe razvijenih u ovoj disertaciji, srednje-kvadratna greška je veća, ali kao što je i ranije pokazano, opet je manja od vrednosti za klasične ortogonalne filtre poput Lagerovih i Ležandrovih. Sa slike 3.14 se, takođe, može videti najbolje poklapanje ovde opisanog modela s realnim sistemom.

Na kraju, funkcija prenosa modela zasnovanog na novom analognom ortogonalnom filtru koristeći (3.21) i vrednosti iz tabele 3.3 može da se napiše u obliku:

$$W_1(s) = 1.440 \left(\frac{0.067s^3 + 0.496s^2 + 1.131s + 1}{0.011s^4 + 0.170s^3 + 0.970s^2 + 1.662s + 1} \right). \quad (3.22)$$

Modeliranje ostalih kaskada sistema za hlađenje protektora vrši se na isti način. Modeli ostalih kaskada su veoma slični sa (3.22). Naime, pojačanja ostalih kaskada imaju vrlo bliske vrednosti i sve manje se razlikuju s obzirom da su sakupljanja gumene trake, koja se hladi, sve manja i manja kako se ide prema kraju sistema. Konačno, pojačanja preposlednje i poslednje kaskade su identična (videti odeljak 3.3.1, jednačinu (3.15)).

3.3.4 Mogući pravci daljeg istraživanja

Filtri zasnovani na simetričnim transformacijama njihovih polova u nule mogu se upotrebiti u određivanju matematičkih modela i kada se koriste drugi kriterijumi optimizacije (minimaks kriterijum¹⁹, kriterijumi u optimalnom upravljanju (H_2 , H_∞), itd.) (Malyshev, 1992). Čak i ovde korišćen kriterijum u vidu srednje-kvadratne greške može biti u drugačijem smislu definisan kada su izlazne veličine logaritamske. Filtri razvijeni u ovoj disertaciji se mogu koristiti i u adaptivnom upravljanju procesima. Jedan od mogućih daljih pravaca istraživanja bi mogao ići u razvoju odgovarajućih klasa novih filtara s kompleksnim polovima i to kako u analognom, tako i u digitalnom domenu. Naravno, ovako realizovani filtri mogu imati svoje prednosti u modeliranju određenih sistema. Drugi pravac istraživanja bi bio u primeni još opštije simetrične transformacije za preslikavanje polova u nule. Naime, kao što je već rečeno, filtri zasnovani na bilinearnoj transformaciji obuhvataju većinu postojećih klasa ortogonalnih filtara, međutim upotrebom još opštije simetrične transformacije može se dobiti još opštija klasa kaskadnih ortogonalnih filtara.

¹⁹ eng. min-max criterion

4 Novi digitalni kaskadni ortogonalni filtri

U ovom poglavlju se razmatraju nove klase digitalnih filtara, koje se adekvatnim transformacijama dobijaju iz prethodno razvijenih analognih varijanti filtara zasnovanih na simetričnoj transformaciji. Najpre je dat kratak istorijat razvoja digitalnih ortogonalnih filtara s posebnim akcentom na kaskadne filtre. Značajan broj njih je predstavljen modelom u prostoru stanja zbog određenih prednosti, ali mi ćemo ih, kao u dosadašnjem delu disertacije, definisati modelom u obliku funkcije prenosa.

4.1 Kratak istorijski pregled razvoja digitalnih ortogonalnih filtara

Intenzivni razvoj digitalnih ortogonalnih filtara započeo je početkom osamdesetih godina prošlog veka. Pioniri u razvoju ove klase digitalnih filtara bili su Dewilde²⁰ i Deprettere²¹ (Dewilde, 1980), Henrot²² i Mullis²³ (Henrot, 1983), Rao²⁴ i Kailat²⁵ (Rao, 1984) i Vaidyanathan²⁶ (Vaidyanathan, 1985, Vaidyanathan, 1987). U (Dewilde, 1980, Rao, 1984) je projektovanje filtara zasnovao na funkciji prenosa, dok je već u (Desai, 1991, Jun Ma, 1998) razvijen novi algoritam za projektovanje MIMO²⁷ digitalnih ortogonalnih filtara (sa više ulaza i izlaza) u prostoru stanja. Prilaz projektovanju filtara u prostoru stanja ima nekoliko prednosti: algoritmi uključuju samo ortogonalne transformacije (Jun Ma, 1998), mogu se lako generalizovati za MIMO filtre i vremenski promenljive²⁸ filtre, dok su prethodno razvijeni filtri preko funkcije prenosa ograničeni na SISO²⁹ strukturu (jedan ulaz, jedan izlaz). Konačno, prostor stanja pruža mnogo bolji uvid u strukturu ortogonalnih filtara nego funkcija prenosa. Kaskadni filtri (Dewilde, 1980, Ma, 2000) su vrlo zahvalni za modeliranje sistema, a

²⁰ Patrick Dewilde, holandski profesor u oblasti mikroelektronike

²¹ Ed Deprettere (1944-), belgijski profesor u oblasti informacionih tehnologija

²² Denis Henrot, američki profesor elektronike i računarstva

²³ Clifford Mullis, američki profesor elektronike i računarstva

²⁴ Shailesh Rao, indijski profesor elektronike i računarstva

²⁵ Thomas Kailath, indijski profesor elektronike i računarstva

²⁶ P. P. Vaidyanathan (1954-), indijski profesor elektronike i računarstva

²⁷ eng. multi-input multi-output

²⁸ eng. time-varying

²⁹ eng. single-input single-output

po potrebi se mogu proširivati novim sekcijama. Uostalom takav tip digitalnih ortogonalnih filtara je predmet istraživanja u ovoj disertaciji.

Gore pomenuti Rao i Kailat krenuli su s razvijanjem tzv. *pipelined* strukture ortogonalnih digitalnih filtara, i to ortogonalnih s dvostrukom rotacijom (ODR³⁰) lestvičastih³¹ filtara (Rao, 1984). Ovde su i brojilac i imenilac implementirani u ortogonalnim sekcijama. Pokazano je da je razvijeni algoritam vrlo lako primenljiv, naročito za klase filtara poput Batervortovih³², Čebiševljevih, kao i tzv. *eliptičnih selektivnih*³³ filtara. Razvijanje *pipelined* strukture je nastavljeno tokom 90-tih godina XX veka, prvenstveno od strane Jun Ma³⁴ (Ma, 1998), ali i njegovih saradnika (Ma, 2000). Primećeno je da ortogonalni IIR³⁵ digitalni filtri, zbog svojih karakteristika, mogu imati veliku primenu u DSP³⁶ aplikacijama, tj. mogu olakšati prenos signala u digitalnim telekomunikacijama, naročito kod višekanalne predikcije, zatim u modeliranju sistema itd.

Zbog svojih dobrih osobina (dobre numeričke osobine; niska osetljivost na ograničenu preciznost aritmetike, eliminisanje graničnih krugova i prevelikih oscilacija (Desai, 1991)), digitalni ortogonalni filtri su veoma pogodni za tzv. VLSI³⁷ implementaciju (Rao, 1984, Ma, 1988, Ma, 2000).

4.2 Novi digitalni ortogonalni filtar uopštenog Malmkvistovog tipa - struktura, praktična realizacija, određivanje odziva

Dok je kod analognih verzija filtara figurisala kompleksna promenljiva s koja je ustvari operator diferenciranja, u digitalnim filtrima je to z , tj. operator prednjačenja (predikcije) za jedan takt (jednu periodu odabiranja T). Prelaskom u z -domen (odnosno zamenom operatora s operatorom z), dobija se funkcija prenosa prilagođena za realizovanje digitalne varijante novih ortogonalnih filtara Malmkvistovog tipa:

³⁰ *eng.* orthogonal double rotation

³¹ *eng.* lattice

³² Stephen Butterworth (1885-1958), britanski inženjer i fizičar

³³ *eng.* elliptic selective

³⁴ Jun Ma, kineski inženjer i fizičar

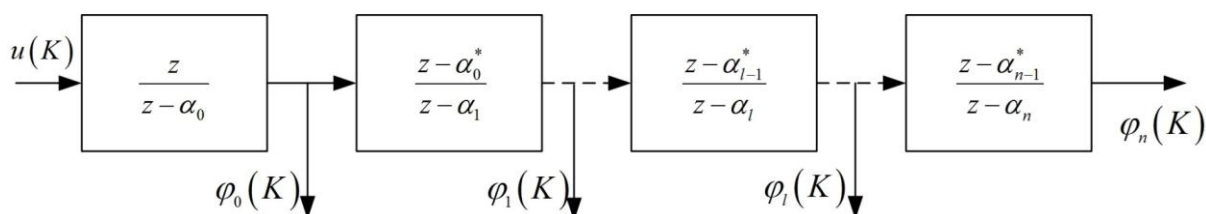
³⁵ *eng.* infinitive impulse response

³⁶ *eng.* digital signal processing

³⁷ *eng.* very large-scale integration

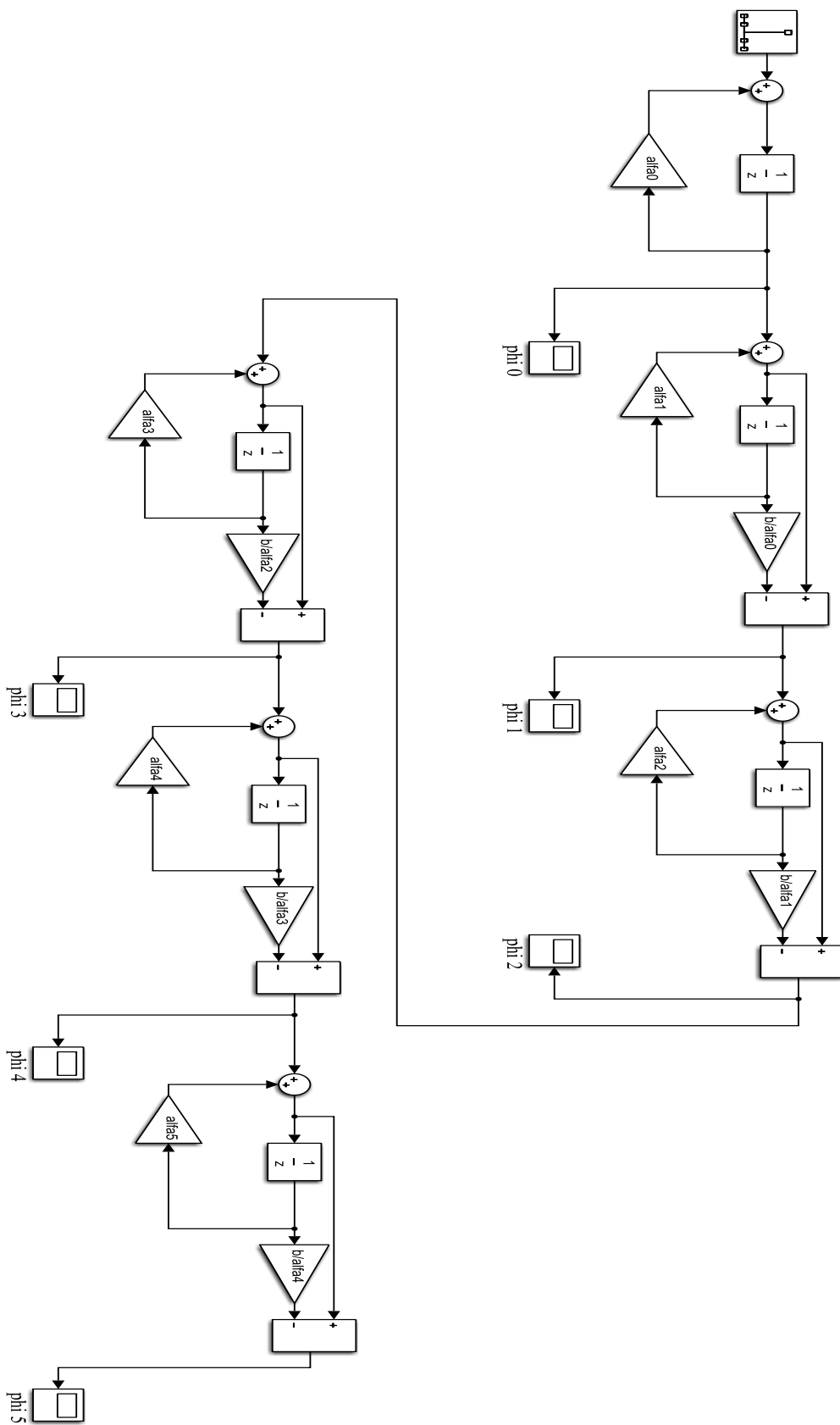
$$W_n(z) = \frac{z}{z - \alpha_0} \prod_{k=1}^n \frac{z - \alpha_{k-1}^*}{z - \alpha_k}, \quad \alpha_k^* = \frac{b}{\alpha_k}, \quad \alpha_k \in R. \quad (4.1)$$

Što se tiče teorijske postavke, razmatranja data za filtre projektovane u s -domenu važe i ovde. Međutim, u praktičnoj realizaciji, ovo je sasvim nova klasa filtera jer je kod analogne verzije bilo potrebno realizovati integratore ($1/s$), a kod digitalne biće to elementi za kašnjenje ($1/z$). Na osnovu (4.1) projektovana je kaskadna blok šema novog digitalnog ortogonalnog filtra (slika 4.1). Može se primetiti da je blok šema digitalnog ortogonalnog filtra strukturno odgovara onoj na slici 3.2 s tim što je s zamenjeno sa z , vreme t sa diskretnim vremenom KT , gde je K redni broj odabirka, T perioda odabiranja. Takođe, korektno je napomenuti da se u daljem tekstu uglavnom uzima jedinična perioda odabiranja, koja ne utiče na analizu, tj. smatramo da je $K \equiv KT$.



Slika 4.1 Blok šema generalizovanog digitalnog ortogonalnog filtra Malmkvistovog tipa

Korišćenjem blok dijagrama u okviru programskog paketa *Matlab/Simulink* napravljena je razvijena digitalna šema za generalizovani ortogonalni filter Malmkvistovog tipa sa šest sekcija prilagođena praktičnoj realizaciji (slika 4.2).

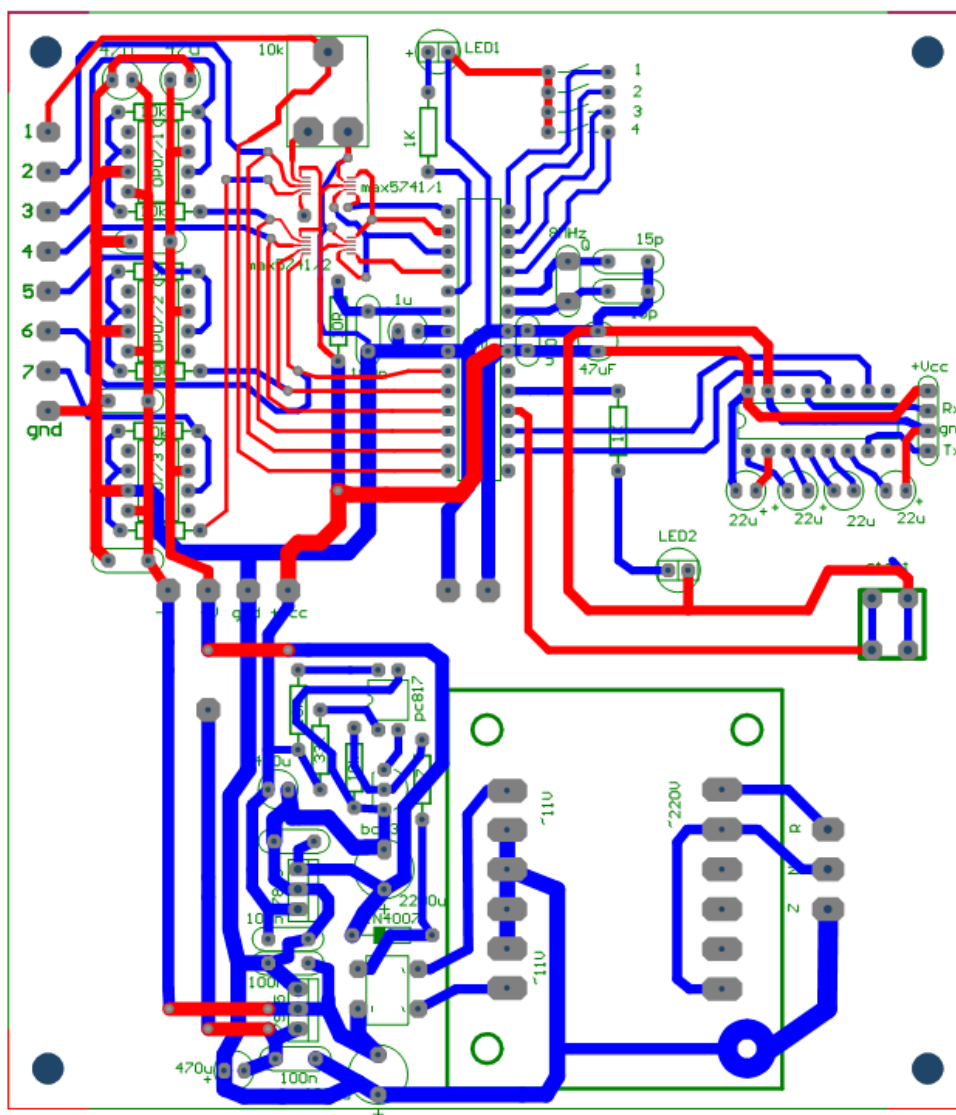


Slika 4.2 Razvijena *Simulink* blok šema generalizovanog ortogonalnog filtra Malmkvistovog tipa prilagođena praktičnoj realizaciji

Na slici 4.3 je prikazan izgled štampane (PCB) pločice realizovanog filtra u programskom paketu PROTEL, dok je na slici 4.4 data električna šema praktične realizacije. Filtar je realizovan na bazi mikrokontrolera *ATmega8* (Internet dokument, 2013). Hardversko-softverska realizacija je podeljena u šest sekcija. Na izlazu svake sekcije se dobija analogna vrednost napona pomoću D/A konvertora, dok je na ulazu svake sekcije A/D konvertor osim prve gde se pomoću potenciometra realizuje ulazni napon.

Matematički model filtra je deo softverske realizacije. Velike vrednosti napona koje se javljaju, a ne mogu da se realizuju, hardverski su za odgovarajući faktor umanjene, ali u softveru sve vreme figurišu realne vrednosti.

Početak i kraj snimanja se indikuje LED diodama.



Slika 4.3 Izgled štampane pločice realizovanog ortogonalnog filtra, projektovane u programu *PROTEL*

Praktična realizacija novog digitalnog ortogonalnog filtra je, kao i u slučaju analogne verzije, je realizovana u Laboratoriji za modeliranje, simulaciju i upravljanje sistemima i data na slici 4.5. I ovaj filtar ima realne i podesive polove.



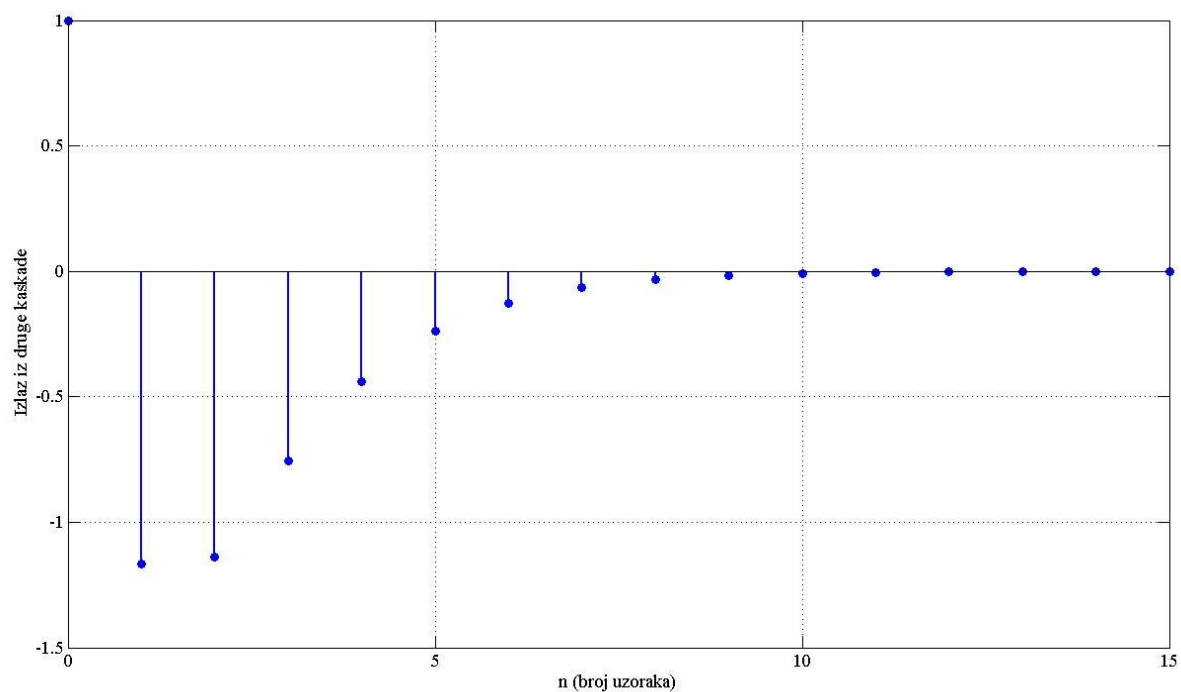
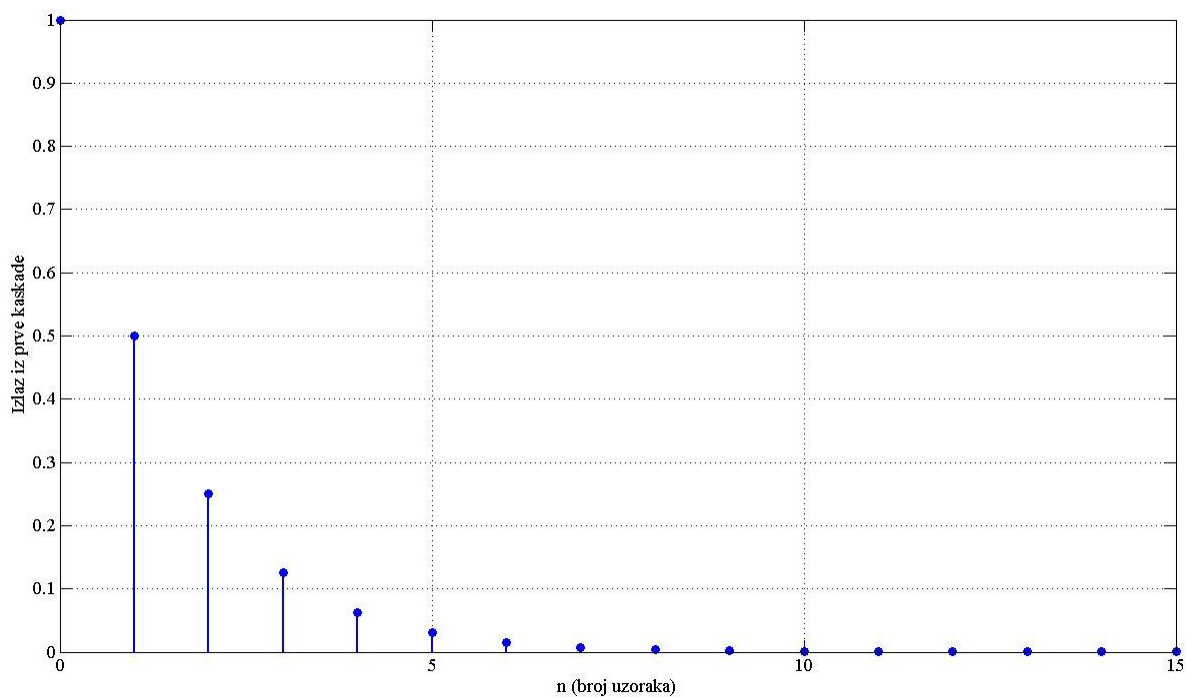
Slika 4.5 Praktična realizacija generalizovanog digitalnog ortogonalnog filtra Malmkvistovog tipa

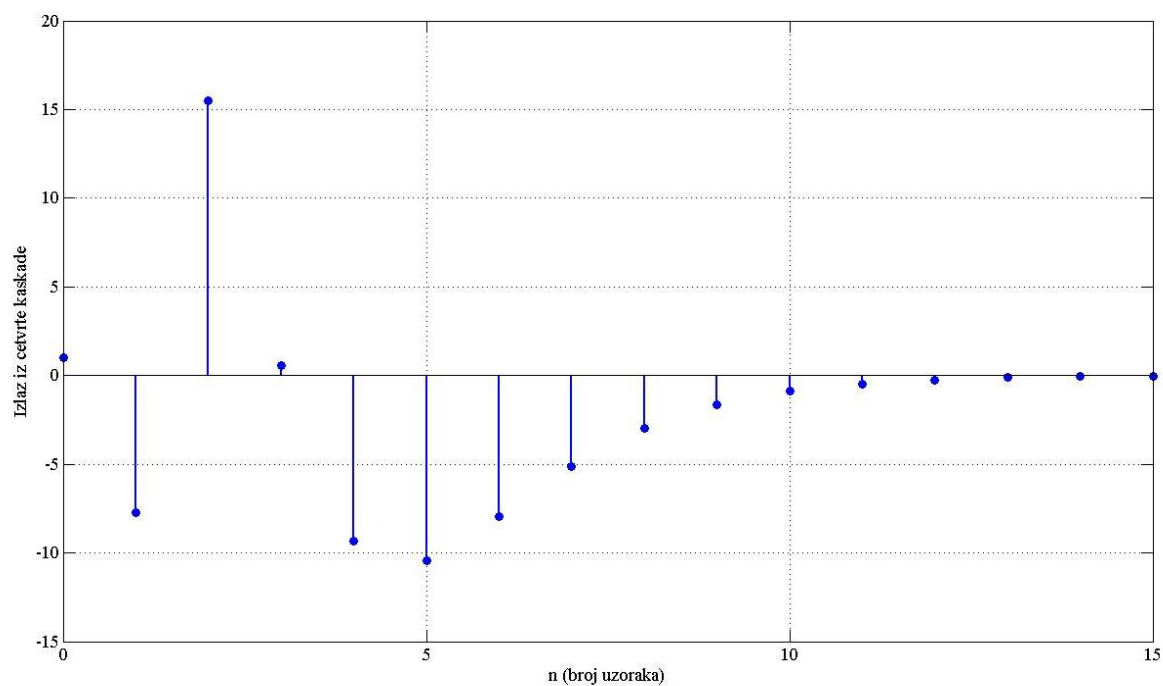
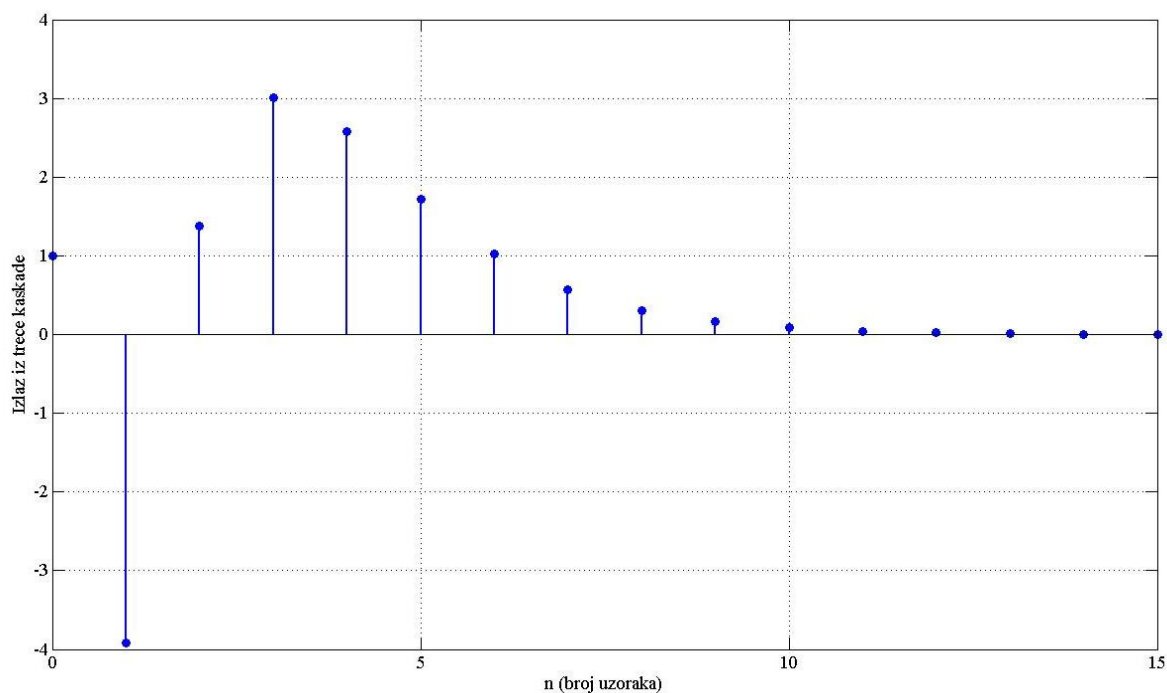
Kao i u slučaju analogne verzije filtra, date su matematički dobijene funkcije za prvih nekoliko izlaza iz sekcija filtra (4.1) za numeričke vrednosti parametara

$$b = 1, \alpha_0 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{1}{4}, \alpha_3 = \frac{1}{5} :$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(K) &= \left(\frac{1}{2}\right)^K, \\ \varphi_1(K) &= 10\left(\frac{1}{3}\right)^K - 9\left(\frac{1}{2}\right)^K, \\ \varphi_2(K) &= 231\left(\frac{1}{4}\right)^K - 320\left(\frac{1}{3}\right)^K + 90\left(\frac{1}{2}\right)^K, \\ \varphi_3(K) &= 9576\left(\frac{1}{5}\right)^K - 17325\left(\frac{1}{4}\right)^K + 8800\left(\frac{1}{3}\right)^K - 1050\left(\frac{1}{2}\right)^K. \end{aligned} \tag{4.2}$$

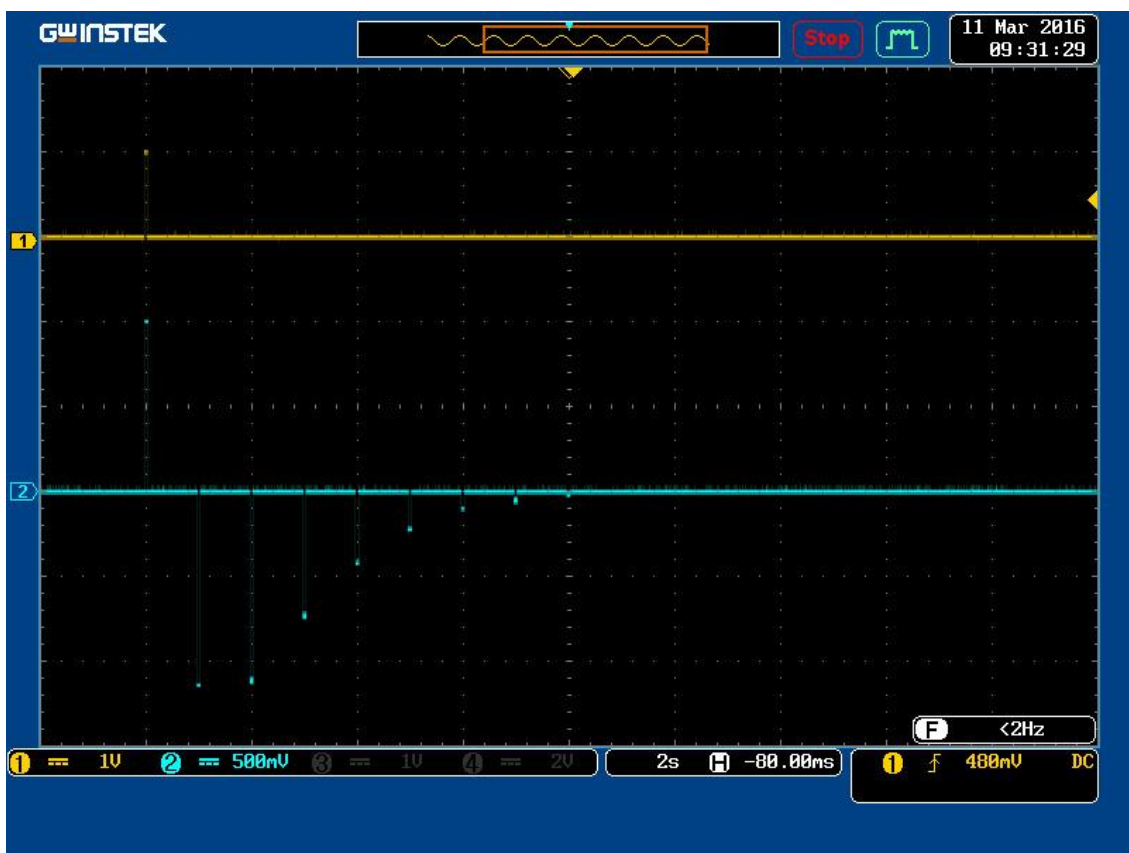
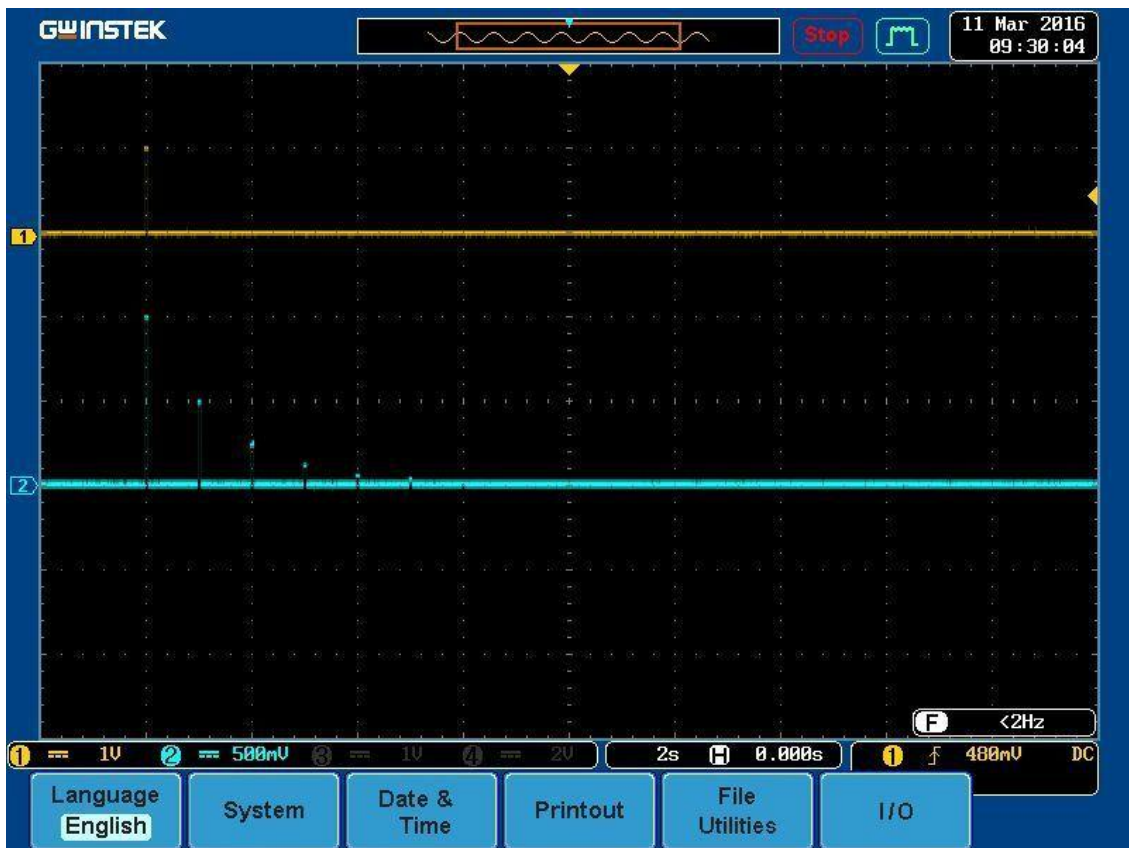
Ovi isti izlazi dobijeni simulacijom u programskom paketu Matlab/Simulink dati su na slici 4.6.

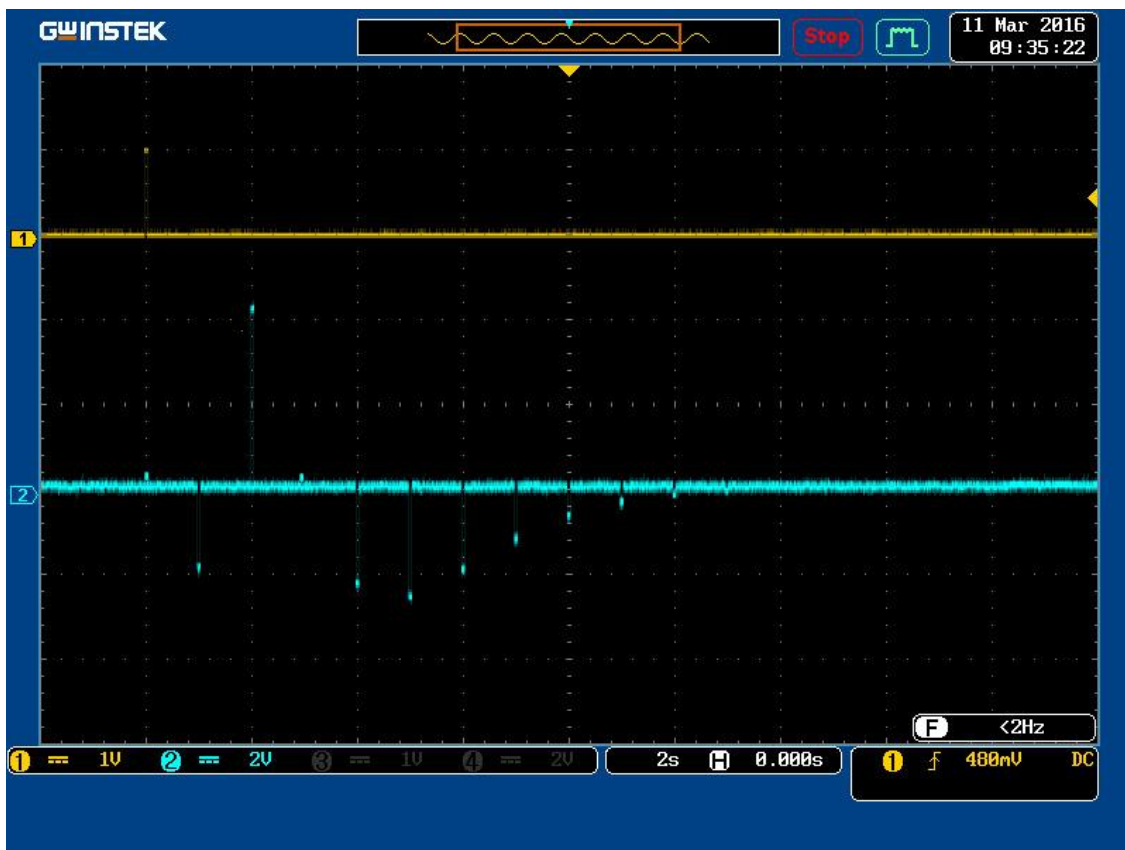
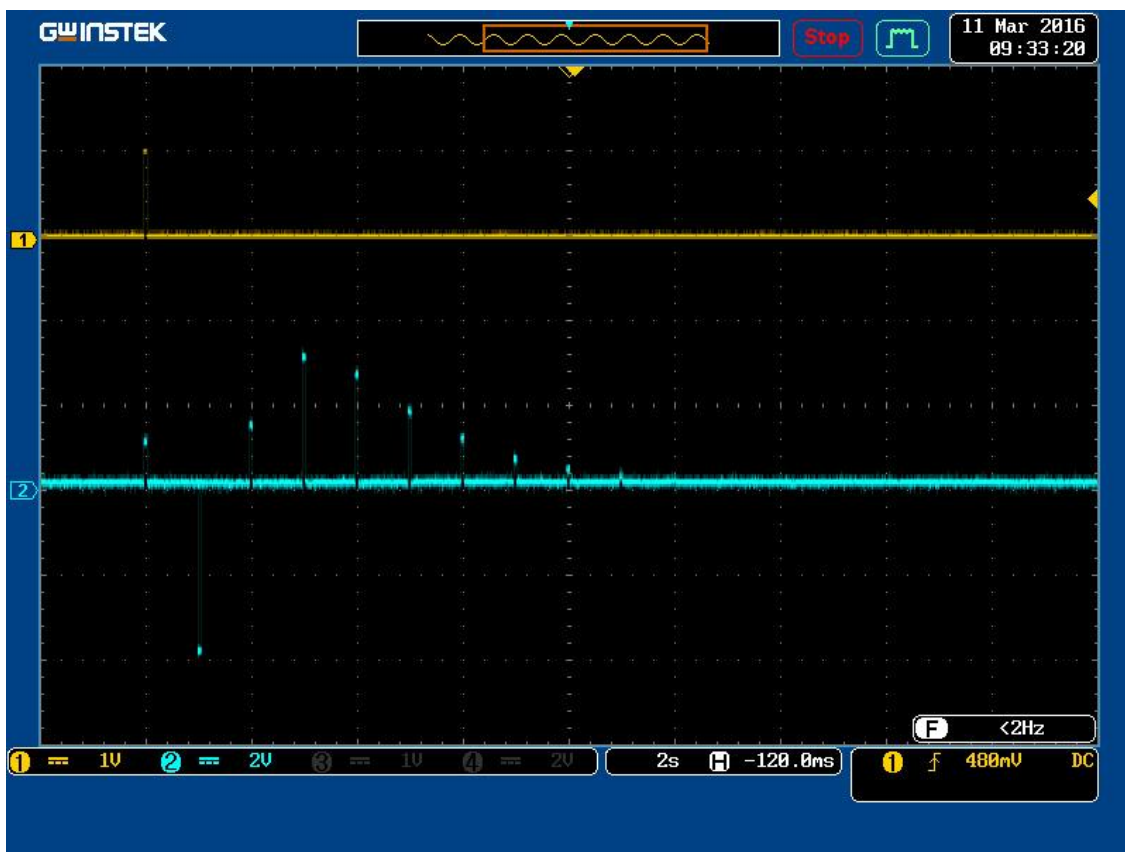




Slika 4.6 Izlazi $\varphi_l(K)$, $l = 0, 1, 2, 3$ iz novog digitalnog filtra (signali dobijeni u *Matlab/Simulink-u*)

Na slici 4.7 su dati isti signali smimljeni sa štampane ploče praktično realizovanog digitalnog ortogonalnog filtra.





Slika 4.7 Izlazi $\varphi_l(K)$, $l = 0, 1, 2, 3$ iz novog digitalnog filtra (signali snimljeni sa štampane ploče)

Signali su snimljeni pomoću digitalnog osciloskopa GW INSTEK (serija GDS-3254). Kanal 1 je iskorišćen za snimanje ulaza u filter (impulsni ulazni signal), dok su na kanalu 2 snimani izlazi iz odgovarajućih sekcija filtra.

Ovaj filter je ortogonalan u kompleksnoj ravni z :

$$(W_n(z)W_m(z)) = N_n^2 \delta_{n,m}, \quad (4.3)$$

gde je
$$W_n(z) = \frac{z}{z - \alpha_0} \prod_{k=1}^n \frac{z - \frac{b}{\alpha_{k-1}}}{z - \alpha_k}.$$

Dokaz ortogonalnosti je identičan onom u slučaju unutrašnjeg proizvoda u s -domenu (2.5).

Izlazi iz filtra u z -domenu $\Phi_l(z) = U(z)W_l(z)$, $l = 0, 1, 2, \dots, n$ su takođe ortogonalni:

$$(\Phi_n(z)\Phi_m(z)) = N_n^2 \delta_{n,m}. \quad (4.4)$$

Izlazi iz ovog digitalnog filtra u vremenskom domenu se dobijaju primenom inverzne z -transformacije (Stojić, 2004, 90 str.):

$$\varphi_n(K) = Z^{-1}\{\Phi_n(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \Phi_n(z) z^{K-1} dz, \quad (4.5)$$

gde kontura Γ obuhvata sve polove racionalne funkcije $W_l(z)$. Ova kontura može se dobiti preslikavanjem kruga s poluprečnikom \sqrt{b} iz s -ravni u z -domen korišćenjem bilinerne transformacije $s = \frac{z-1}{z+1}$ (Milovanović, 1998).

Iz relacije (4.5) dobija se:

$$\varphi_n(K) = \sum_{k=0}^n A_{n,k} \alpha_k^{-(K-1)}, \quad (4.6)$$

gde je
$$A_{n,k} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} \left(\alpha_k - \frac{b}{\alpha_j} \right)}{\prod_{j=0, j \neq k}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_j)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$
 Upotrebom izraza za konvoluciju originala

(Stojić, 2004, 94 str.) dobija se unutrašnji proizvod za izlaze iz uopštenog filtra Malmkvistovog tipa u vremenskom domenu:

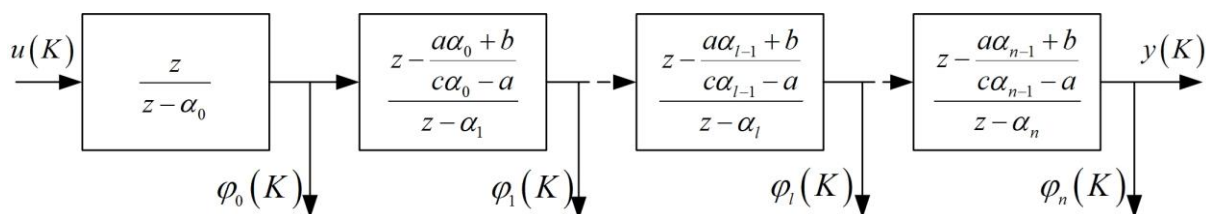
$$J_{n,m} = (\varphi_n(K), \varphi_m(K))_{\odot} = \sum_{K=1}^{\infty} \varphi_n(K) \varphi_m(K) = N_n^2 \delta_{n,m}. \quad (4.7)$$

4.3 Novi digitalni ortogonalni filtar zasnovan na bilinearnoj transformaciji

Kao i kod filtra zasnovanog na recipročnoj transformaciji može se realizovati i digitalna verzija filtra zasnovanog na bilinearnoj transformaciji. Princip zamene operatora s u operator z je već objašnjen. Dakle, šema digitalnog filtra zasnovanog na bilinearnoj transformaciji može se realizovati na osnovu funkcije prenosa

$$W_n(z) = \frac{z}{z - \alpha_0} \prod_{k=1}^n \frac{z - \alpha_{k-1}^*}{z - \alpha_k}, \quad \alpha_k^* = \frac{a\alpha_k + b}{c\alpha_k - a}, \quad \alpha_k \in R. \quad (4.8)$$

Opšta blok šema koja obuhvata i ovu klasu filtara je već data na slici 4.1, dok konkretno u ovom slučaju ona ima oblik dat na slici 4.8.



Slika 4.8 Blok šema digitalnog ortogonalnog filtra zasnovanog na bilinearnoj transformaciji

U praksi ovo je ustvari već realizovani digitalni filtar (slike 4.3-4.5) s tim što su vrednosti nula različite za iste polove i obrnuto, ali to se i inače podešava u programu mikrokontrolera. U simulacionoj šemi sa slike 4.2, u odgovarajućim pojačavačima u direktnim granama sekcija filtra sada stoji $\frac{a\alpha_k + b}{c\alpha_k - a}$ umesto b/α_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4$).

Funkcije na izlazima kaskada filtra, kao i odgovarajući simulacioni i eksperimentalni odzivi su za specijalan slučaj već dati pri opisu filtra sa inverznom transformacijom ($a = 0, b = 1, c = 1$) i za iste vrednosti polova: $\alpha_0 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \frac{1}{4}, \alpha_3 = \frac{1}{5}$.

Ovi filtri su ortogonalni u kompleksnoj ravni z :

$$(W_n(z) W_m(z)) = N_n^2 \delta_{n,m}, \quad (4.9)$$

gde je $W_n(z) = \frac{z}{z - \alpha_0} \prod_{k=1}^n \frac{z - \frac{a\alpha_{k-1} + b}{c\alpha_{k-1} - a}}{z - \alpha_k}$.

Dokaz ortogonalnosti je i ovde identičan onom u s -domenu (2.5).

Izlazi iz filtra u z -domenu $\Phi_l(z) = U(z)W_l(z)$, $l = 0, 1, 2, \dots, n$ su ortogonalni:

$$(\Phi_n(z)\Phi_m(z)) = N_n^2 \delta_{n,m}. \quad (4.10)$$

Izlazi iz ovog digitalnog filtra u vremenskom domenu se dobijaju pomoću inverzne z -transformacije:

$$\varphi_l(K) = Z^{-1}\{\Phi_l(z)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \Phi_l(z) z^{K-1} dz, \quad (4.11)$$

gde kontura Γ obuhvata sve polove racionalne funkcije $W_l(z)$. Ova kontura može se dobiti

preslikavanjem konture (2.25) korišćenjem bilinerne transformacije $s = \frac{z-1}{z+1}$.

Iz relacije (4.11) dobija se:

$$\varphi_n(K) = \sum_{k=0}^n A_{n,k} \alpha_k^{-(K-1)}, \quad (4.12)$$

gde je $A_{n,k} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} \left(\alpha_k - \frac{a\bar{\alpha}_j + b}{c\bar{\alpha}_j - a} \right)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (\alpha_k - \alpha_j)}$. Korišćenjem izraza za konvoluciju originala dobija se novi

unutrašnji proizvod za izlaze iz filtra zasnovanog na bilinearnoj transformaciji:

$$\begin{aligned} J_{n,m} &= (\varphi_n(K), \varphi_m(K))_{\otimes} = \sum_{K=1}^{\infty} \varphi_n(K) \varphi_m(K) \\ J_{n,m} &= \sum_{K=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{k=0}^n A_{n,k} \alpha_k^{-(K-1)} \right) \otimes \left(\sum_{j=0}^m A_{m,j} \alpha_j^{-(K-1)} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Operacija $\alpha_k \otimes \alpha_j$ dobija se smenom $z = e^{sT}$ i primenom konvolucije originala izlaznih signala (Stojić, 2004, str. 94). Inače, ovaj unutrašnji proizvod se u fizički realizovanom filtru generiše zahvaljujući samoj strukturi filtra.

Ovi filtri su podesivi, što znači da se preko potenciometra mogu menjati vrednosti parametara bilinerne transformacije. U slučaju da je: $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, dobijaju se dalja

uopštenja Malmkvistovih ortogonalnih funkcija, a na osnovu njih još opštiji ortogonalni digitalni filtri.

Digitalna verzija ovih novih klasa ortogonalnih kaskadnih filtara biće takođe praktično primenjena, i to na modeliranje jednog realnog digitalnog sistema, DPCM sistema, preciznije predikcionog (rekurzivnog) filtra u okviru njega. S obzirom na kaskadnu strukturu projektovanih filtara, odnosno mogućnosti proširivanja filtra određenim brojem sekcija, čini se da će to pogodavati modeliranju DPCM filtra koji teoretski može biti proizvoljno visokog reda. Kaskadna struktura se već pokazala pogodnom u slučaju analogne verzije filtara za sisteme visokog reda. Ali, pre toga, ovaj sistem biće detaljno opisan u narednom poglavlju, a naročito pomenuti predikcioni filter. U šestom poglavlju biće izvršena i detaljna analiza ovog sistema s stanovišta teorije automatskog upravljanja, što je, takođe, jedan od važnih doprinosa ove disertacije.

5 DPCM sistem - tipovi, koncept linearne predikcije

5.1 Kodne tehnike za prenos signala

Pretvaranje kontinualnog signala u digitalni signal impulsne kodovane modulacije³⁸ se sastoji od tri operacije:

- odabiranje (odmeravanje), tj. diskretizovanje signala po vremenu,
- kvantovanje, tj. diskretizovanje signala po amplitudi (trenutnim vrednostima) i
- kodovanje, tj. cifarsko predstavljanje diskretnih vrednosti signala grupom digita, odnosno impulsa.

Diskretizovanje po vremenu vrši se odabiranjem trenutnih vrednosti signala u određenim vremenskim trenucima. Ukoliko je frekvencijski opseg odabiranog signala ograničen, interval između susednih odabiraka može biti konačan, a da pri tome ipak ne dođe do gubitka informacije.

Kvantovanje je zaokruživanje izmerene trenutne vrednosti signala na najbližu dozvoljenu vrednost. Ako je ukupni broj dozvoljenih (tj. unapred definisanih) amplitudskih vrednosti mali, greška pri zaokruživanju je veća, tj. kvantovanje je grublje, ali je potreban manji broj cifara da bi se kvantovana vrednost numerički izrazila. Naravno, suprotno ovome, za veliki broj amplitudskih nivoa, kvantovanje je finije, ali to zahteva i utrošak većeg broja cifara (Lukatela, 1978, Jayant, 1984).

U procesu digitalizovanja kontinualnog signala kodovanje je završna operacija na predajnoj strani prenosnog sistema, a dekodovanje je polazna operacija na prijemnoj strani pri rekonstrukciji kontinualnog signala. Međutim, cifarsko predstavljanje kontinualnog signala nije jedina funkcija kodera. U digitalnoj telekomunikacionoj mreži česta je operacija transformacije kodova, pri čemu se ulazni digitalni signal pretvara na izlazu kodera u transformisani digitalni signal novih statističkih osobina. Ovo se čini da bi se PCM signal uspešnije prilagodio osobinama linije (Das, 2010).

Diferencijalno impulsno kodna modulacija (eng. *Differential Pulse-Code Modulation* – DPCM) predstavlja postupak pretvaranja analognog u digitalni signal, u kome se analogni signal odabira, zatim se razlika između prave odmerene vrednosti i njene procenjene vrednosti kvantuje, i naposljetku kodira formiranjem njene digitalne vrednosti. Procena ili

³⁸ eng. PCM – Pulse Code Modulation

predikcija sadašnje vrednosti ulaznog signala zasniva se na poznavanju njegovih prethodnih vrednosti. Ukoliko je ulazni signal redundantan, njegove prošle vrednosti su korelisane sa sadašnjim, pa je moguća dobra procena i ekonomičan rad DPCM sistema. Redundansa se u digitalnom signalu ogleda u broju kodnih simbola, koji je veći od minimalnog potrebnog broja za prenos informacije primarnog signala. DPCM reči predstavljaju razlike između odabiraka za razliku od PCM-a gde su kodne reči, u stvari, vrednosti odabiraka.

Signal razlike zauzima znatno uži interval mogućih vrednosti (tzv. dinamički opseg). Pri istoj veličini amplitudskog kvanta, kod DPCM-a, potreban je manji broj diskretnih vrednosti amplitude (kvantnih nivoa) nego kod PCM postupka. Druga prednost DPCM-a je finije kvantovanje amplitude signala razlike za isti broj kvantnih nivoa. Sve ovo rezultuje manjim brojem potrebnih kodnih simbola i manjim šumom kvantizacije u DPCM postupku.

Kod signala koji sadrže redundansu može se predvideti verovatna vrednost signala u nekom trenutku na osnovu poznavanja vrednosti signala u dovoljno velikom prethodnom vremenskom intervalu. Postupak predviđanja amplitude signala naziva se predikcijom, a odgovarajući sklop za predviđanje – prediktorom³⁹.

Broj odabiraka N , koji služi za predviđanje, određuje red postupka predikcije, odnosno red prediktora. Težinski koeficijenti biraju se tako da se minimizira funkcija greške između vrednosti odabiraka ulaznog signala i procenjene vrednosti. Ovo dovodi do povećanja dobitka predikcije, minimizacije kvantizacionog šuma i do poboljšanja odnosa signal-šum (SNR)⁴⁰.

Pri nestacionarnim ulaznim signalima optimalni rezultati se dobijaju pomoću DPCM postupka, kod kog se parametri predikcije menjaju sinhrono sa promenom statističkih obeležja signala. Takvi postupci predikcije i kvantovanja se nazivaju adaptivnom predikcijom i adaptivnim kvantovanjem, a odgovarajući postupak modulacije – adaptivno diferencijalnom impulsno kodovanom modulacijom (ADPCM)⁴¹.

Takođe, treba napomenuti i specijalan slučaj DPCM-a, tzv. delta modulaciju. Ovo je zapravo diferencijalno impulsno-kodna modulacija s predikcijom prvog reda (Steele, 1975, Das, 2010). Kvantizer je jednobitni (s dva nivoa). Modifikovana verzija delta modulacije je delta-sigma modulacija (Sadik, 2007). Ime potiče od toga što je u ovom slučaju integrator (sigma) ispred delta modulatora. Ovo daje novi kvalitet ovom sistemu (Das, 2010). Još jedna

³⁹ eng. predictor

⁴⁰ eng. Signal to-Noise-Ratio

⁴¹ eng. Adaptive Differential Pulse Code Modulation

poboljšana verzija delta modulacije je adaptivna delta modulacija (AI-korj, 2007, Das, 2010). Ipak, ovi sistemi nisu predmet posebne analize. Ali, neki zaključci izvedeni za DPCM sistem kao najviše zastupljen se mogu preneti i na ove specijalne varijante istog.

Širok je spektar primene DPCM/ADPMC sistema. Oblast telekomunikacija, govor (Despotović, 2010, Perić, 2013(a)) i kodovanje slike (Zschunke, 1977, Mitchell, 1997), zatim medicinske aplikacije (Jalaleddine, 1990, Fira, 2008, Perić, 2013(b), Jocić, 2014), itd.

Zato će u nastavku biti detaljnije opisan DPCM sistem sa linearnim prediktorom, a posebna pažnja biće posvećena upravo konceptu linearne predikcije.

5.2. Opis DPCM sistema

U ovom odeljku dat je opis tipičnog DPCM sistema sa standardno ugrađenim linearnim prediktorom. Najbolji odnos signal-šum daju postupci nelinearne predikcije, ali su dosta komplikovani pri realizaciji. Ovde biramo prostiju realizaciju uprkos malo slabijem odnosu SNR.

U cilju jednostavnije realizacije DPCM sistema, signal u kolu povratne sprege diskretizuje se po vremenu i po amplitudi. Takođe je bolje, da se na prijemnom kraju sistema, umesto signala procene, za rekonstrukciju, koristi digitalizovani ulazni signal. Na osnovu toga, model DPCM sistema, koji ćemo razmatrati, ima konfiguraciju kao na slici 5.1 (Lukatela, 1978).

Ulazni signal se prvo filtrira i odabira frekvencijom $f_0 = 2f_g$, pri čemu je f_g gornja granična frekvencija ulaznog filtra. Razliku odabiraka ulaznog signala, x_i , i odabiraka predviđenog signala, \hat{x}_i , nazvaćemo "odabirkom signala diferencije", tj:

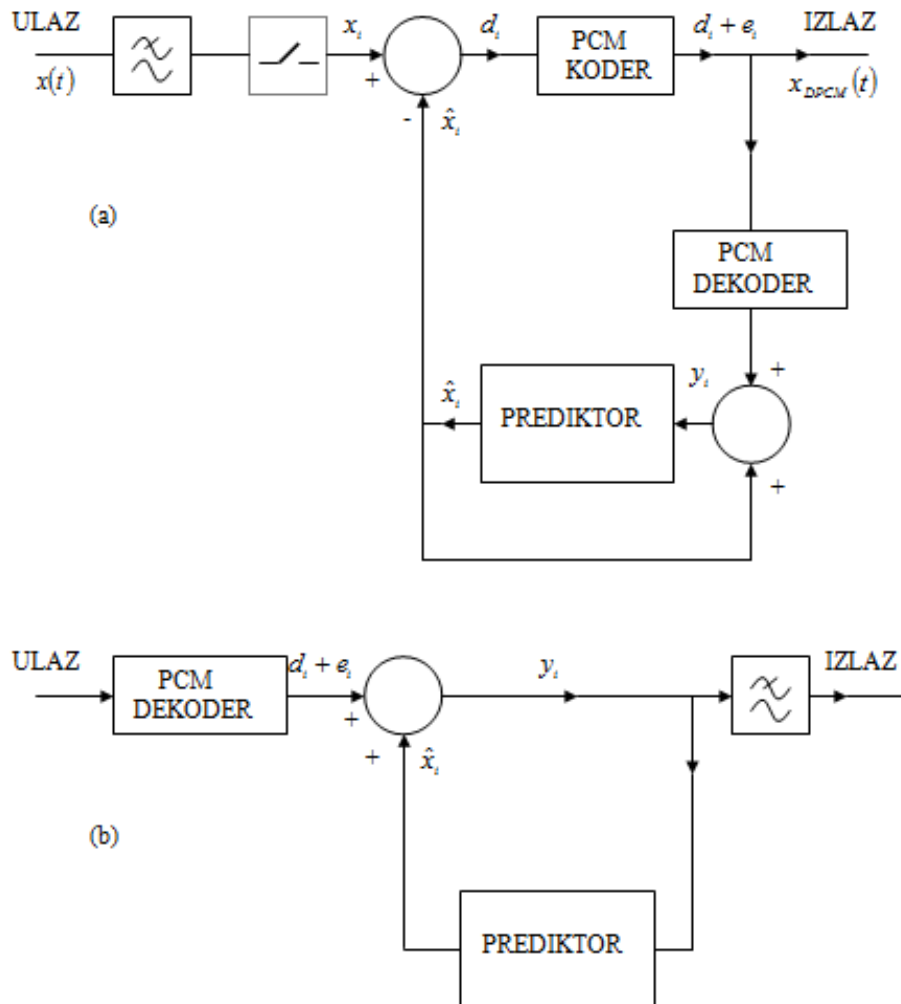
$$d_i = x_i - \hat{x}_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (5.1)$$

Ovaj odabirak se kvantuje u PCM koderu i pri tom mu se dodaje neka vrednost greške kvantovanja, e_i .

U prijemnom i u lokalnom PCM dekoderu vrši se dekodovanje odabirka diferencije i njemu pridodate greške kvantovanja. Sumi trenutnih vrednosti, $d_i + e_i$, dodaje se vrednost predviđenog (procenjenog) odabirka, \hat{x}_i , pa se dobija odabirak ulaznog signala sa aditivnom greškom kvantovanja (rekonstruisani odabirak y_i):

$$y_i = d_i + e_i + \hat{x}_i = x_i + e_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (5.2)$$

Ovaj odabirak signala uvećan za grešku ulazi u prediktor, a takođe i u prijemni niskopropusni filter granične frekvencije f_g . Na izlazu filtra dobijamo, dakle, kontinualan rekonstruisani signal $x(t)$ uvećan za talas greške kvantovanja $e_o(t)$. Pri tome, za sada, ne uzimamo u obzir dopunske šumove, koji se javljaju u prijemniku usled transmisionih grešaka.



Slika 5.1 Blok-šema DPCM sistema: a) predajnik; b) prijemnik

5.3. Linearni prediktor

Da bi matematička analiza prediktora bila jednostavnija, privremeno ćemo pretpostaviti da na slici 5.1, PCM koder i PCM dekodeer imaju dovoljno veliki broj nivoa, tako da šum kvantovanja možemo privremeno da zanemarimo $y_i = x_i$. Neka je ulazni signal, $x(t)$, stacionarni proces nulte srednje vrednosti, a efektivne vrednosti σ , i neka je ovaj signal

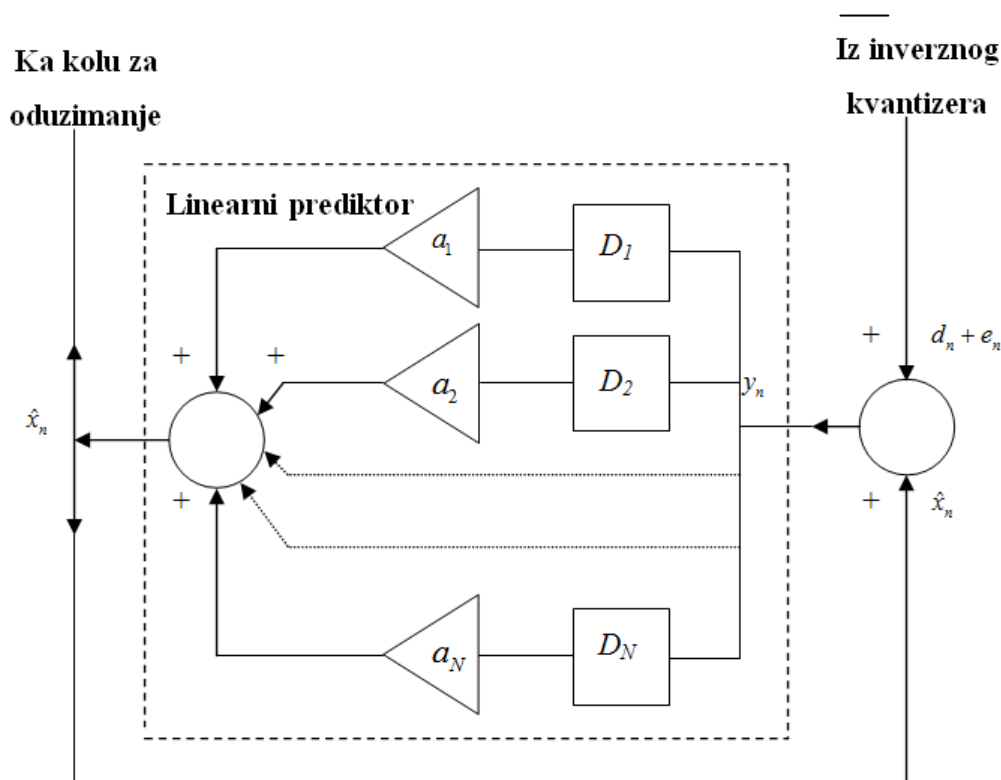
bio odmeren u jednakim intervalima T_0 u N prethodnih trenutaka $t = t_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Odgovarajuće vrednosti odabiraka su $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). U posmatranom trenutku $t = t_0$ stiže aktuelni (sadašnji) odabirak x_0 , i od njega se oduzima predviđena vrednost sadašnjeg odabirka, \hat{x}_0 . Odabirak signala diferencije:

$$d_0 = x_0 - \hat{x}_0. \quad (5.3)$$

Posle idealnog PCM kodovanja i dekodovanja (5.3) se sabira s predviđenom vrednošću \hat{x}_0 . Tako se na ulazu linearnog prediktora pojavljuje sadašnji odabirak x_0 .

Linearni prediktor N -tog reda (slika 5.2) sastoji se od N paralelnih grana. U svakoj grani sadrži po jednu liniju za kašnjenje (D_1, \dots, D_N) i po jedno kolo za vrednovanje (a_1, a_2, \dots, a_N). Linija za kašnjenje D_1 zadržava ulazni odabirak za jedan interval odabiranja T_0 , linija za kašnjenje D_2 zadržava odabirak za dva intervala $2T_0$, i na kraju, poslednja linija za NT_0 . Posle vrednovanja, odabirci iz N prethodnih intervala odabiranja pojavljuju se simultano na izlazu prediktora i daju vrednost linearne procene odabirka (Lukatela, 1978):

$$\hat{x}_0 = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_Nx_N. \quad (5.4)$$



Slika 5.2 Blok šema idealnog linearnog prediktora N -tog reda

Ako su vrednosti ulaznog signala korelisane i ako je prediktor dobro konstruisan, onda će procena \hat{x}_0 najčešće biti bliska pravoj vrednosti x_0 , pa će vrednost diferencije u jednačini (5.3) u statističkom proseku biti mala. Tada broj amplitudskih kvanata po odabirku signala diferencije u DPCM sistemu može biti manji, uz isti odnos signal-šum, od broja kvanata po odabirku ulaznog signala kod standardnog PCM sistema. Ovo je suština procesa diferencijalne impulsne kodne modulacije.

Da bi za zadati ulazni signal srednje-kvadratna vrednost signala diferencije bila najmanja, potrebno je da težinski koeficijenti, a_i , u jednačini (5.4) zadovolje uslov:

$$\frac{\overline{\delta[x_0 - \hat{x}_0]^2}}{\delta a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.5)$$

Posle nešto dužih proračuna nalazi se da je potreban uslov za optimizaciju linearnog prediktora (Jayant, 1984):

$$\overline{(x_0 - \hat{x}_0)x_i} = \overline{d_0 x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.6)$$

Ovaj uslov ima jasno fizičko značenje: ako su koeficijenti linearnog prediktora optimalno odabrani, onda neće postojati korelacija između posmatrane vrednosti signala diferencije i prošlih vrednosti ulaznog signala. To znači da je optimalni prediktor izvukao pravu informaciju odbacujući celokupnu redundansu.

Korelacija odabiraka x_i i x_j određena je autokorelacionom funkcijom ulaznog signala:

$$R_{ij} = R(t_i - t_j) = \overline{x(t_i)x(t_j)} = \overline{x_i x_j}. \quad (5.7)$$

Sada možemo jednačinu (5.6) napisati u obliku:

$$R_{0i} = a_1 R_{1i} + a_2 R_{2i} + \dots + a_N R_{Ni}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.8)$$

Ralacija (5.8) je zapravo skup od N linearnih jednačina sa N nepoznatih vrednosti a_i ($i = 1, 2, \dots, N$), koje se mogu odrediti, ako su korelacije R_{ij} poznate.

Ako je \hat{x}_0 najbolja linearna procena od x_0 , onda je varijansa signala diferencije:

$$\sigma_d^2 = \overline{(x_0 - \hat{x}_0)^2} = \overline{(x_0 - \hat{x}_0)x_0}, \quad (5.9)$$

pri čemu smo koristili (5.6). Dalje dobijamo:

$$\sigma_d^2 = R_{00} - [a_1 R_{01} + a_2 R_{02} + \dots + a_N R_{0N}]. \quad (5.10)$$

Pošto R_{00} predstavlja varijansu ulaznog signala, σ^2 , zaključujemo da je srednja snaga signala diferencije manja od srednje snage ulaznog signala za iznos vrednosti u zagradi na desnoj strani jednačine (5.10). Prema tome, možemo da definišemo "dobitak predikcije" kao logaritamski odnos:

$$G_p = 20 \log \frac{\sigma}{\sigma_d} [dB]. \quad (5.11)$$

U principu, što je veći red prediktora, utoliko je predikcija bolja. Međutim, ako ulazni niz odabiraka x_0, x_1, x_2, \dots predstavlja Markovljev niz N -tog reda, onda je dovoljno da uzmemo u obzir samo N odabiraka ulaznog signala za formiranje najbolje procene x_0 , a rezultujuća povorka odabiraka signala diferencije biće pri tome potpuno nekorelisana:

$$\overline{(d_i d_j)} = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ \sigma_d^2; & i = j \end{cases}. \quad (5.12)$$

U takvom idealnom slučaju signal diferencije imao bi osobine apsolutno slučajnog procesa s uniformnom spektralnom gustinom snage (Lukatela, 1978).

Uticao grešaka u prenosnom kanalu

Poznato je, iz teorije informacija, da samo redundantni signali mogu pouzdano da se prenose kroz šumni kanal. Zato je logično očekivati da će signal čija je redundansa smanjena biti manje otporan na transmisionu smetnju i izobličenja. To je upravo ono što se dešava sa DPCM signalom. Pošto smo postupkom predikcije iz ulaznog signala uklonili veći deo redundanse, greške do kojih dolazi u šumnom kanalu više će nauditi diferencijalnoj nego standardnoj impulsnoj kodnoj modulaciji.

U prijemnik DPCM sistema dolazi povorka odabiraka signala diferencije, čija je efektivna vrednost, σ_d , a proizvodi se izlazni signal efektivne vrednosti σ . Prema tome, prijemnik povećava nivo primljenog signala za vrednost dobitka predikcije, $20 \log \frac{\sigma}{\sigma_d} = k$ [dB], a za isti iznos povećava i nivo šuma, koji nastaje usled pogrešno prenesenog bita u prenosnom kanalu. Ovo možemo i strožije dokazati. Uzećemo kao primer, DPCM sistem s prediktorom prvog reda.

Neka je u jednom trenutku umesto pravilnog odabirka diferencije u prijemnik stigao netačan (neispravni) odabirak, koji unosi neki šum v u dekodovani signal. Povratnom spregom netačni odabirak vraća se na ulaz i sabira sa sledećim pravilnim odabirkom, pa će uz taj ispravni odabirak u prijemnik ući i šum a_1v . Ako su svi naredni odabirci ispravni, onda će oni uneti u prijemnik šumni niz v, a_1v, a_1^2v, \dots . Tako se izlaznom dekodovanom signalu pridružuje dekodovana snaga elementarnog šumnog niza:

$$\sum_v = v^2 + (a_1v)^2 + (a_1^2v)^2 + \dots = v^2 \frac{1}{1-a_1^2}. \quad (5.13)$$

Pošto je a_1 koeficijent prediktora prvog reda, na osnovu jednačine $a_1 = \frac{R_{01}}{R_{00}}$, sledi da je

$a_1 = \frac{R_{01}}{\sigma^2}$. Smenom ovog izraza za a_1 (5.13) i koristeći relaciju (5.10), dobija se:

$$\sum_v = v^2 \frac{1}{1 - a_1 \frac{R_{01}}{\sigma^2}} = v^2 \frac{\sigma^2}{\sigma_d^2}. \quad (5.14)$$

Iz (5.14) može se videti da je snaga šuma v^2 na ulazu u DPCM prijemnik, posle dekodovanja na izlazu prijemnika, uvećana upravo za iznos dobitka predikcije, $10 \log \frac{\sigma^2}{\sigma_d^2}$.

Prednost DPCM sistema u odnosu na PCM sistem je baš u smanjenju šuma kvantovanja za iznos dobitka predikcije. Međutim, sada smo pokazali da se u DPCM sistemu snaga kanalnog šuma povećava za istu vrednost dobitka predikcije, pa bi se moglo postaviti pitanje kakav je praktičan smisao DPCM-a. Zato, treba imati u vidu, da u digitalnom sistemu, šum u prenosnom kanalu nije presudan faktor, jer se pravilnim projektovanjem sistema verovatnoća transmisiona greške može učiniti po volji malom. Nasuprot tome, šum kvantovanja ja zaista osnovni faktor koji ograničava brzinu i kvalitet digitalnog sistema. Prema tome, povećanje odnosa signal-šum kvantovanja na račun smanjenja odnosa signal-osnovni šum potpuno je opravdano i poželjno sve dok osnovni šum ne pređe kritični prag.

5.4 Koncept adaptivne predikcije i kvantovanja u prenosu signala

Primena DPCM-a pretpostavlja da je ulazni signal stacionaran, tj. da se tokom vremena ne menjaju statističke osobine signala. Za televizijski signal ova pretpostavka nije

tačna, ali nije ni suviše gruba greška. Međutim, za govorni signal se ne može ni približno reći da je stacionaran. Kod govornog signala menjaju se u vremenu sledeće vrednosti:

- dugotrajni srednji nivo od govornika do govornika,
- trenutni nivo od glasa do glasa pri zadanom srednjem nivou i
- korelacija između sukcesivnih odabiraka usled promene glasova.

Zbog toga određivanje vrednosti koeficijenata u prediktoru za govorni signal može da se zasniva samo na dugotrajnim usrednjenim vrednostima, koje su podoptimalne.

Da bi diferencijalna impulsno kodna modulacija pri prenosu govornog signala dala optimalne rezultate, danas se koriste postupci adaptivne predikcije i adaptivnog kvantovanja. U sledeća dva odeljka biće ukratko opisan princip adaptivne predikcije, dok će adaptivnom kvantovanju biti posvećena malo veća pažnja.

5.4.1 Adaptivna predikcija

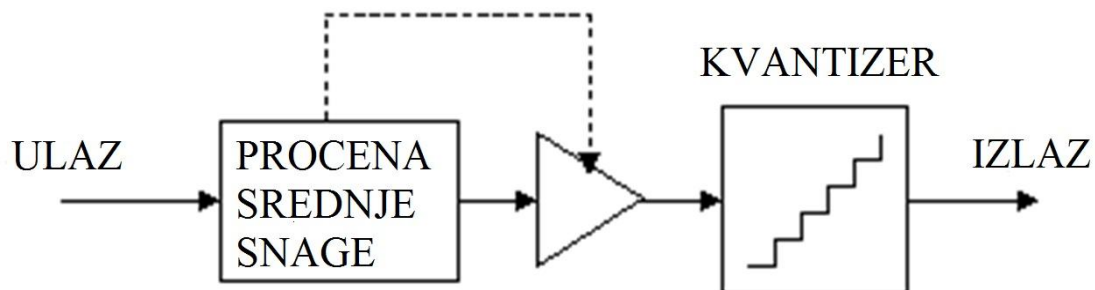
U idealnom DPCM postupku s adaptivnom predikcijom, vrednosti koeficijenata u prediktoru treba kontinualno da se menjaju u skladu sa kontinualnom promenom statističkih i spektralnih osobina ulaznog signala. Međutim, u realnom DPCM sistemu s adaptivnom predikcijom procena vrednosti koeficijenata vrši se u konačnim vremenskim intervalima adaptacije, T_{AD} . Što je kraći interval T_{AD} , povećava se dobitak predikcije, a komplikovanja realizacija terminala. S druge strane, duži interval adaptacije uprošćava sistem uz manji kapacitet pomoćnog kanala za prenos informacija o promenjenim vrednostima koeficijenata prediktora. Kao kompromisno rešenje, u praksi, se usvaja da interval adaptacije bude oko 10 ms ili više. To odgovara trajanju jedne, dve ili tri periode osnovnog harmonika u govornom signalu.

Adaptacija se ostvaruje tako što se u intervalima T_{AD} odabirci ulaznog signala memorišu i izračunava autokorelaciona funkcija, a onda se na osnovu jednačina (5.8) određuju vrednosti koeficijenata u prediktoru. Posebnim kanalom nove vrednosti koeficijenata prenose se do prijemnog terminala, da bi linearni prediktori na predaji i prijemu bili usklađeni.

5.4.2 Adaptivno kvantovanje

Govorni signal nije pogodan za primenu optimalnog zakona trenutne kompresije, jer nije stalnog volumena. Prema tome, trenutnom kompresijom ne može se za govor postići najbolji mogući odnos signal-šum kvantovanja.

U nastojanju da se signal optimalno prilagodi opsegu kvantizera predloženo je trenutno adaptivno kvantovanje. Zamisao je da se radi sa prostim, eventualno uniformnim kvantizerom, ali da se menja veličina njegovog amplitudskog kvanta (kod svakog novog odabirka) za određeni faktor. Vrednost tog faktora zavisi od kvantnog nivoa do kojeg je dopro prethodni odabirak. Pošto je prema ovoj ideji promena veličine amplitudskog kvanta trenutna, postupak se može kvalifikovati kao "trenutno adaptivno kvantovanje". Nasuprot tome, predložen je postupak slogovno adaptivnog kvantovanja, kod kojeg se veličina amplitudskog kvanta adaptira prema srednjoj snazi govornog signala s vremenskom konstantom od 10 do 20 ms. Na slici 5.3 je data principijelna šema adaptivnog kvantovanja (s procenom unapred) (Lukatela, 1978).



Slika 5.3 Blok šema adaptivnog kvantovanja s procenom unapred

U toku jednog relativno kratkog segmenta govornog signala (reda 10 ms) u baferu s estimatorom procenjuje se kratkotrajna srednja snaga govornog signala (σ^2). Proporcionalno kvadratnom korenu te snage koriguje se pojačanje pojačavača (ili opseg kvantizera), tako da ulazni signal uvek do maksimuma (sa $\pm k\sigma$) opterećuje kvantizer. Faktor k određuje opseg kvantizera tako da se dobije maksimalna vrednost odnosa signal-šum kvantovanja (SNR_q^{42}). Vrednost SNR_q je i funkcija broja kvantnih nivoa kvantizera, a i statistike ulaznog signala.

U slučaju kada je bafer sa estimatorom ispred kvantizera, tj. kada se radi o adaptivnom kvantovanju unapred, potrebno je posebnim kanalom saopštiti prijemniku informaciju o trenutnom faktoru pojačanja. Napomenimo da postoji i tzv. tehnika adaptivnog kvantovanja unazad, o kojoj ovde neće biti reči.

Pored primene kod konvencionalne impulsne kodne modulacije, adaptivno kvantovanje može se naročito efikasno primeniti kod DPCM-a i kod ADPCM-a. Tako razlikujemo PCM – AQ, DPCM – AQ i ADPCM – AQ sisteme.

⁴² eng. Signal to-Noise-Ratio quantization

5.5 Linearna predikcija – značaj i primena

Linearna predikcija (LP)⁴³ igra veoma važnu ulogu u mnogim naučnim i tehničkim oblastima, kao što su ekonomija, geofizika, identifikacija sistema, adaptivna filtracija, spektralna procena, procesiranje signala (Benesty, 2008). Naročito je značajna njena uloga kod govornog signala. To je sasvim razumljivo imajući u vidu da se trenutna vrednost signala (sadašnjeg uzorka) može dobro modelirati kao linearna kombinacija prethodnih vrednosti (Jayant, 1984). Istorijski pregled razvoja linearne predikcije u kodovanju govornog signala je dat u (Atal, 2006). Linearna predikcija je široko zastupljena kod procesiranja govornog signala (prepoznavanje, kompresija, modeliranje, itd.) (Markel, 1976).

Prediktor u zatvorenoj sprezi čini jedan svojevrsan filter koji je dobar model ljudskog govornog aparata. Glavni zadatak je odrediti koeficijente prediktora i proučiti osobine filtra. Mi ćemo se u ovom poglavlju baviti prvim, a ispitivanje osobina tzv. predikcionog filtra biće predmet temeljne studije u narednom poglavlju.

Kao što smo već rekli, primena linearne predikcija je raznolika. Kod procesiranja signala (potiskivanje šuma, izdvajanje govornog signala, odjek, kodovanje govora, itd.) vrlo je važno poređenje envelope dva govorna signala (željenog i procesiranog) (Quackenbush, 1988, Huang, 2006). Jedan način za to, je poređenje njihovih koeficijenata predikcije. Posmatraćemo dva govorna signala $x(n)$ (željeni) i $\hat{x}(n)$ (procenjeni). Bez ulaženja u detaljniju analizu, jedna od mera za procenu bliskosti ova dva signala je *Itakura*⁴⁴ rastojanje:

$$ID_{x\hat{x}} = \ln \frac{E_x}{E_{\hat{x}}}, \quad (5.15)$$

gde su E_x i $E_{\hat{x}}$ snage greške predikcije⁴⁵ signala $x(n)$ i $\hat{x}(n)$, respektivno. Treba primetiti da *Itakura* rastojanje nije simetrično, tj:

$$ID_{x\hat{x}} \neq ID_{\hat{x}x}. \quad (5.16)$$

Bez obzira, ova mera može dobro poslužiti, npr. u proceni kvaliteta govornog signala.

Još kvalitetnije rešenje su predložili Itakura i Saito⁴⁶ (Itakura, 1970) u sledećem obliku:

⁴³ eng. linear prediction

⁴⁴ Fumitada Itakura (1940-), japanski naučnik u oblasti procesiranja signala

⁴⁵ eng. prediction-error power

$$ISD_{\hat{x}} = \frac{E_{\hat{x}}}{E_x} - \ln \frac{E_{\hat{x}}}{E_x} - 1. \quad (5.17)$$

Kao i prethodno i ovo rastojanje nije simetrično.

Itakura-Saito rastojanje ima mnogo zanimljivih osobina. Pokazano je da ova mera ima veliko slaganje sa subjektivnom ocenom kvaliteta (Quackenbush, 1988). Zato se *Itakura-Saito* rastojanje, zasnovano na linearnoj predikciji, često koristi kao objektivna mera kvaliteta govornog signala i najraširenija je mera za ocenu slaganja (bliskosti) dva govorna signala. Sve ovo jasno pokazuje važnost linearne predikcije u govornim aplikacijama.

5.5.1 Linearna predikcija unapred

Cilj linearne predikcije jeste da se unapred predvidi vrednost uzorka stacionarnog slučajnog signala, $x(n)$ na osnovu njegovih prethodnih vrednosti, $x(n-1)$, $x(n-2)$,... Greška predikcije unapred se definiše kao (Haykin, 2002):

$$e^N(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) - \sum_{i=1}^N a_i^N x(n-i) = x(n) - \mathbf{a}^T x(n-1), \quad (5.18)$$

gde je $\hat{x}(n)$ procenjena vrednost odabirka, T je operator transponovanja,

$\mathbf{a}^N = [a_1^N \ a_2^N \ \dots \ a_N^N]^T$ je prediktor unapred dužine N .

$x(n-1) = [x(n-1) \ x(n-2) \ \dots \ x(n-N)]^T$ je vektor sa N poslednjih odabiraka. Kako bi projektovali optimalni Vinerov⁴⁷ prediktor, treba minimizirati srednje-kvadratnu grešku:

$$J(\mathbf{a}^N) = E[e^2(n)], \quad (5.19)$$

gde je $E[\cdot]$ matematičko očekivanje. Uzimajući gradijent $J(\mathbf{a}^N)$ u odnosu na \mathbf{a}^N i izjednačavajući ga sa $\mathbf{0}_{N \times 1}$ (vektor dužine N koji sadrži samo nule), dobijamo Viner-Hof⁴⁸-ovu jednačinu:

$$\mathbf{R}^N \mathbf{a}_o^N = \mathbf{r}^N, \quad (5.20)$$

gde su \mathbf{A}_o^N optimalne vrednosti koeficijenata prediktora,

⁴⁶ Shuzo Saito, japanski naučnik u oblasti procesiranja signala

⁴⁷ Norbert Wiener (1894-1964), američki matematičar i filozof

⁴⁸ Eberhard Frederich Ferdinand Hoph (1902-1983), nemački matematičar i astronom

$$\mathbf{R}^N = E[x(n-1)x^T(n-1)] = E[x(n)x^T(n)] = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(N-1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(N-1) & r(N-2) & & r(0) \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

je korelaciona matrica, a:

$$\mathbf{r}^N = E[x(n-1)x(n)] = [r(1)r(2)\cdots r(N)]^T, \quad (5.22)$$

je korelacioni vektor. Matrica \mathbf{R}^N se naziva Teplicova⁴⁹ matrica (Benesty, 2008). Konačno, Viner-Hofova jednačina se može zapisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(N-1) \\ r(1) & r(0) & \cdots & r(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(N-1) & r(N-2) & & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(N) \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Nameće se pitanje kako najlakše rešiti ovu jednačinu odnosno sračunati koeficijente prediktora. U nastavku dajemo jedan često korišćen metod.

Levinson-Durbin-ov algoritam

Levinson-Durbin-ov algoritam je efikasan način za rešavanje Viner-Hof-ove jednačine za koeficijente prediktora. Ovaj algoritam je prvi predložen od strane Levinsona⁵⁰ (Levinson, 1947). Kasnije ga je nezavisno od njega Darbin⁵¹ preformulisao (Durbin, 1959). Burg⁵² je dao elegantniju prezentaciju istog (Burg, 1975). To je način kojim se iz autokorelacione funkcije, odnosno od poznatih koeficijenata korelacije $r(i)$ iterativno računaju koeficijenti prediktora a_i proizvoljnog reda. Naravno red prediktora se može povećavati sve dok se ne zadovolje postavljeni uslovi u pogledu veličine greške predikcije. To je vrlo važno i za našu kasniju analizu prediktora, pa ovde dajemo i ovaj algoritam u sedam koraka:

⁴⁹ Otto Toeplitz (1881-1940), jevrejsko-nemački matematičar

⁵⁰ Norman Levinson (1912-1975), američki matematičar

⁵¹ James Durbin (1923-2012), britanski statističar i ekonomista

⁵² John Burg, američki inženjer i naučnik

1. $E_0 = r(0), i = 0$
2. $i = i + 1$
3. $k_i = \frac{1}{E_{i-1}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_j^{i-1} r(i-j) - r(i) \right)$
4. $a_i^i = -k_i$
5. $a_j^i = a_j^{i-1} + k_i a_{i-j}^{i-1}, za j = 1, 2, \dots, i-1$
6. $E_i = (1 - k_i^2) E_{i-1}$
7. Ako je $i < n$ ići na korak 2.

(5.24)

gde su a_j^n koeficijenti prediktora n -tog reda.

Za prediktor reda većeg od dva već postaje naporno ručno računati ove koeficijente. Srećom u današnje vreme ubrzanog razvoja informacionih tehnologija, softverski paket Matlab/Simulink u okviru svoje biblioteke za digitalno procesiranje signala⁵³ sadrži i podbiblioteku za linearnu predikciju i u okviru nje Levinson-Darbin blok. On se konfigurira prema potrebama. U svakom slučaju, ulaz je vektor koeficijenata korelacije, gde se za prvi element stavlja 0, a kao izlaz pored koeficijenata prediktora mogu se staviti i koeficijenti refleksije k_i i snaga greške predikcije E_i .

Napomena 1: Treba naglasiti da postoji i linearna predikcija unazad (Benesty, 2008), ali ona nije od interesa za razmatranje u ovoj disertaciji.

⁵³ DSP System Toolbox

6 Analiza DPCM sistema sa stanovišta teorije automatskog upravljanja

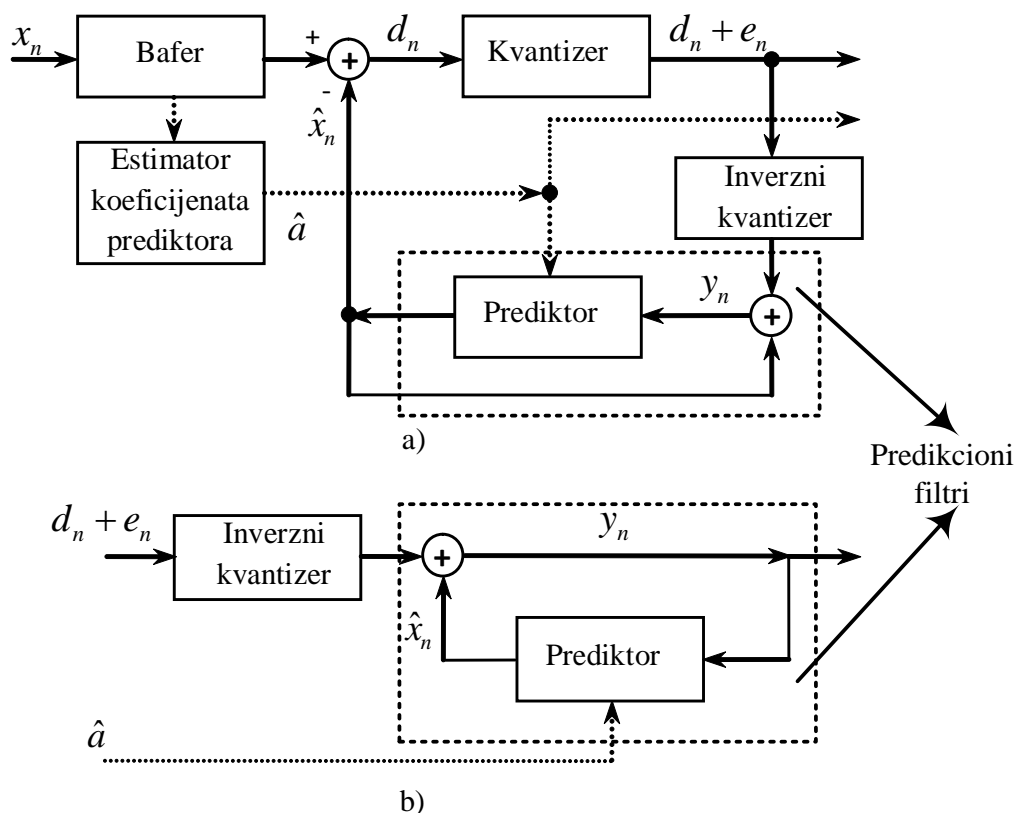
DPCM sistem je, kao što je već rečeno u prethodnom poglavlju, nelinearan sistem s negativnom povratnom spregom. Ovaj sistem je, kao takav, sa aspekta teorije automatskog upravljanja je pogodan za analizu njegovih osobina poput stabilnosti, osetljivosti, robustnosti, itd.

Diferencijalno impulsno kodna modulacija – DPCM predstavlja postupak pretvaranja analognog u digitalni signal, u kome je analogni signal odmeren, zatim je razlika između prave odmerene vrednosti i njene procenjene vrednosti kvantovana, i na kraju kodovana formiranjem njene digitalne vrednosti. Procena ili predikcija sadašnje vrednosti ulaznog signala zasniva se na poznavanju njegovih prethodnih vrednosti. Ukoliko je ulazni signal redundantan, njegove prethodne vrednosti su korelisane sa sadašnjim, pa je moguća dobra procena i ekonomičan rad DPCM sistema. Redundansa se u digitalnom signalu ogleda u broju kodnih simbola, koji je veći od minimalnog potrebnog broja za prenos informacije primarnog signala. DPCM reči predstavljaju razlike između odabiraka.

Mada je principijelna blok šema jednog DPCM sistema data u prošlom poglavlju, ovom prilikom predstavljamo šemu s mogućim dodatkom za adaptivnu predikciju, kao i jasno označene predikcione filtre, delove ovog sistema od posebnog interesa za ovu analizu (slika 6.1)

DPCM enkoder (slika 6.1a)) se sastoji od kvantizera, inverznog kvantizera, i prediktora. Kao što se može videti, po jedan predikcioni (rekurzivni) filter se nalazi i na predaji (u enkoderu) i na prijemu (u dekoderu, 6.1b)). Na slici 6.1a) je, takođe, prikazan dodatak za adaptivnu predikciju (bafer i estimator koeficijenata prediktora, koji su povezani tačkastim linijama), kojim se zaokružuje blok šema ADPCM enkodera. Ulazni signal se odabira (odmerava) u jednakim vremenskim intervalima, T_0 , tako da imamo uzorke signala u N prethodnih trenutaka ($x_i, i=1,2,\dots,N$). Odabirak signala difference predstavlja razliku sadašnjeg odabirka, x_n i njegove predviđene vrednosti, \hat{x}_n : $d_n = x_n - \hat{x}_n$. Ova razlika se kvantuje i prenosi, pri čemu se javlja i greška kvantizacije e_n . Upravo ovaj signal greške se pridodaje odabirku signala i zajedno daju rekonstruisani odabirak: $y_n = d_n + e_n + \hat{x}_n = x_n + e_n$.

Ovo je ujedno ulazni signal u linearni prediktor, koji je od posebnog interesa za našu dalju analizu.



Slika 6.1 DPCM/ADPCM sistem, a) enkoder, b) dekoder

O linearnom prediktoru i principu rada bilo je reči u poglavlju 5.2. Vrednost linearne predikcije odabirka (2.4) možemo napisati za N -ti red prediktora u obliku sume:

$$\hat{x}_n = \sum_{i=1}^N a_i y_{n-i}, \quad (6.1)$$

gde su a_i koeficijenti prediktora. Kao što je već rečeno, upravo ovi koeficijenti presudno utiču na kvalitet prenosa, odnosno na grešku koja se javlja pri proceni. Od pravilnog izbora ovih koeficijenata zavisi tačnost procene vrednosti odabirka ulaznog signala, što dalje utiče na grešku kvantizacije i dobitak predikcije. Dobra procena garantuje manju amplitudsku dinamiku signala razlike d_n u odnosu na x_n . Time se omogućava kvantovanje signala razlike manjim brojem amplitudskih nivoa, što predstavlja uštedu u bitskoj brzini, tj. dobitak predikcije. S druge strane, ako se koeficijenti predikcije loše izaberu, signal razlike može postati i veći od ulaznog odabirka x_n , izazvati veću grešku kvantizacije i kroz povratnu petlju

multiplikovati ukupnu grešku, što može dovesti u krajnjem slučaju i do otkaza sistema. Dakle, na stabilnost DPCM sistema presudno utiče pravilni izbor koeficijenata prediktora. Oni se unapred definišu u zavisnosti od klase signala koji se prenosi (tačnije koeficijenti korelacije iz kojih se preko poznatih relacija računaju koeficijenti predikcije).

Pored prediktora, odnosno predikcionog filtra (slika 5.2), svaki DPCM sistem sadrži i kvantizer kao nelinearni element. Dok je linearni deo DPCM dinamički, nelinearni deo je statički deo sistema (ne zavisi od vremena). Dinamički deo sistema može biti stabilan ili nestabilan. Ako je on stabilan i ceo sistem je stabilan. Naime, kvantizer je opisan nelinearnom statičkom karakteristikom sa zasićenjem. Kao takav, on stabilše rad celog sistema, odnosno stabilnost linearnog dela DPCM sistema (predikcioni filter) je dovoljan uslov za stabilnost celog sistema (Milosavljević, 2002). Iz svega ovog proističe da je analiza stabilnosti predikcionog filtra vrlo važna za projektovanje ovog kompleksnog sistema. Osnovni zahtev je da koeficijenti prediktora budu unutar oblasti stabilnosti ili u nekim slučajevima veoma blizu te oblasti.

Treba reći da DPCM sistem može biti stabilan i u slučaju kada je predikcioni filter nestabilan. Ipak, u ovom slučaju se mogu pojaviti neželjene oscilacije. Da bi se one izbegle, potrebna je dublja analiza predikcionog filtra, To zapravo znači da koeficijenti prediktora treba da imaju takve vrednosti za koje je predikcioni filter stabilan ili relativno blizu oblasti stabilnosti. I na kraju, da zaključimo, stabilnost predikcionog filtra je dovoljan ali ne i neophodan uslov za stabilnost celog DPCM sistema (Macchi, 1992, Uhl, 1993).

To je razlog zašto ćemo u ovom poglavlju najviše obratiti pažnju na analizu samog predikcionog filtra u pogledu njegove stabilnosti, a kasnije i na neke njegove druge osobine (osetljivost, robustnost). Štaviše, biće izvršeno modeliranje i identifikacija predikcionog filtra jednog DPCM sistema pomoću novih digitalnih filtera razvijenih u poglavlju 4.

6.1 Analiza stabilnosti predikcionog filtra i celog DPCM sistema

S obzirom da DPCM sistem poseduje negativnu povratnu spregu, on može da se tretira kao sistem automatskog upravljanja, pa u ovom poglavlju dajemo analizu stabilnosti ovog sistema s akcentom na njegov najvažniji deo, predikcioni filter. Analiza je sprovedena za prediktore nižeg reda (prvog i drugog), ali i za prediktore višeg reda, kod kojih su predložene nove metode, do sada neprimenjivane u analizi ovog sistema. Pored konvencionalnog ispitivanja stabilnosti sistema, biće data generalizacija pojma stabilnosti za

sisteme sa stohastičkim parametrima. Sva teorijska osnova biće potkrepljena serijom simulacionih eksperimenata i biće dati adekvatni zaključci na osnovu dobijenih rezultata.

6.1.1 Analiza stabilnosti DPCM predikcionog filtra prvog reda

U ovom potpoglavlju daćemo analizu stabilnosti rekurzivnog predikcionog filtra sa prediktorom prvog reda. Procenjena vrednost odabirka ulaznog signala \hat{x}_n se računa na osnovu kvantovane vrednosti y_{n-1} odabirka signala u prethodnom trenutku vremena x_{n-1} , tj:

$$\hat{x}_n = a_1 y_{n-1}. \quad (6.2)$$

Treba napomenuti da je kod prediktora prvog reda koeficijent prediktora jednak korelacionom koeficijentu ρ , koji ustvari predstavlja stepen slaganja između dva susedna odabirka (Jayant, 1984):

$$\rho = \frac{\sum_{j=1}^{S-1} x_j x_{j+1}}{\sum_{j=1}^S x_j^2}, \quad (6.3)$$

gde je S ukupan broj uzoraka signala. Vrednost koeficijenta korelacije u DPCM sistemu se određuje unapred u zavisnosti od tipa signala i to za koder i enkoder.

U opštem slučaju, koeficijenti korelacije ρ_i predstavljaju stepen slaganja između i susednih odabiraka (Jayant, 1984, Perić, 2013(a), Jocić, 2014). U DPCM sistemu, vrednosti koeficijenata prediktora se određuju unapred, u zavisnosti od tipa razmatranog signala, i za koder i enkoder, ali su oni podoptimalno određeni. Na slici 6.1, koeficijenti prediktora, a_i , $i=1,2,\dots,k$ su adaptirani prema ρ_i , $i=1,2,\dots,k$ za svaki frejm. Funkcijska zavisnost između ovih koeficijenata za prvi i drugi red prediktora je dobro poznata (Jayant, 1984), a može se, kao što je već rečeno, izračunati pomoću Levinson-Darbinovog algoritma s tim da je $r(1) = \rho_1$ i $r(2) = \rho_2$ (5.24):

$$a_1 = \rho_1 \quad (6.4)$$

$$a_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \quad a_2 = \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}. \quad (6.5)$$

Prelaskom u z -domen relacija koja opisuje prediktor prvog reda se transformiše u sledeći oblik:

$$\hat{X}(z) = a_1 z^{-1} Y(z). \quad (6.6)$$

Funkcija prenosa prediktora prvog reda je:

$$W_p(z) = a_1 z^{-1}. \quad (6.7)$$

Funkcija prenosa prediktivnog (rekurzivnog) filtra u enkoderu je:

$$W_R(z) = \frac{W_p(z)}{1 - W_p(z)} = \frac{a_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}, \quad (6.8)$$

dok funkcija prenosa prediktivnog filtra u dekoderu ima sledeći oblik:

$$W_R^D(z) = \frac{1}{1 - W_p(z)} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}. \quad (6.9)$$

6.1.1.1 Klasičan pristup određivanja stabilnosti

Predikcioni filtri u enkoderu i dekoderu su stabilni ako svi polovi funkcija prenosa (6.8) i (6.9) leže unutar jediničnog kruga. To znači da je uslov stabilnosti za oba predikciona filtra u DPCM sistemu isti i glasi:

$$-1 < a_1 < 1. \quad (6.10)$$

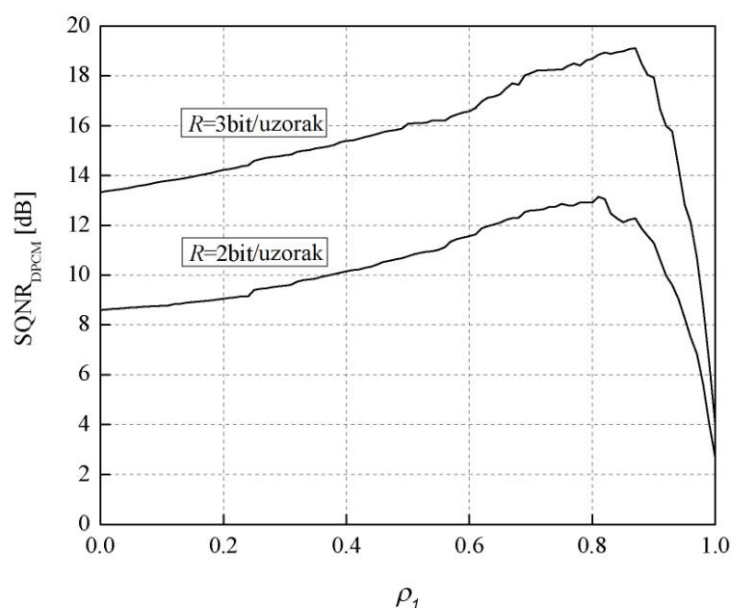
Označimo oblast stabilnosti datu nejednačinom (6.10) sa S_1 .

Kao što smo već rekli, kod prediktora prvog reda koeficijent korelacije je jednak koeficijentu prediktora, odnosno: $a_1 = \rho_1$. Poznato je da je maksimalna vrednost koeficijenta korelacije 1 (Benesty, 2008). To praktično znači da je predikcioni filter uvek u oblasti stabilnosti S_1 . Ipak veoma je bitno kod razmatranja stabilnosti u klasičnom smislu da li je vrednost koeficijenta prediktora blizu granice oblasti stabilnosti ili duboko u unutrašnjosti, jer to presudno utiče na performanse sistema.

Jedna od najbitnijih osobina kod komunikacionih sistema za ocenu kvaliteta istih je odnos signal-šum, SNR (Lukatela, 1978, Jayant, 1984). Ova mera kvaliteta signala u stvari predstavlja razliku u nivoima korisnog signala, koji se prenosi, i neželjenog šuma, koji se pri tome javlja i obično se izražava u dB.

Funkcionalna zavisnost SNR od koeficijenta korelacije ρ_1 za govorni signal od 12000 uzoraka (frekvencija odabiranja 8 kHz, dužina frejma $M \leq 200$) (Perić, 2013(a)) je data na

slici 6.2. Prikazane su zavisnosti za dve različite bitske brzine kvantizera⁵⁴ $R = 2\text{bit} / \text{uzorak}$ i $R = 3\text{bit} / \text{uzorak}$.



Slika 6.2 Zavisnost SNR od ρ_1 u DPCM sistemu za uzorkovani govorni signal

Vrednost SNR-a dostiže maksimalnu vrednost za $\rho_1 = 0.81$ i $\rho_1 = 0.87$, za manju i veću bitsku brzinu, respektivno. Može se zaključiti da optimalne vrednosti koeficijenta prediktora uvek odgovaraju vrednostima koeficijenta prediktora, koji leže u oblasti stabilnosti (6.10), tj. $-1 < \{0.81, 0.87\} < 1$. Primećuje se da vrednost SNR-a naglo opada kada se vrednost koeficijenta korelacije (samim tim i koeficijenta prediktora) približava graničnoj vrednosti 1.

S obzirom da je koeficijent prediktora a_1 uvek pozitivan za prvi red prediktora i ne može imati veću vrednost od 1, klasična analiza stabilnosti se praktično ovde završava, jer je predikcioni filter, a samim tim i ceo DPCM sistem uvek stabilan.

6.1.1.2 Uopštenje analize stabilnosti

Prethodna analiza stabilnosti izvedena je pod pretpostavkom da su vrednosti koeficijenta korelacije, odnosno predikcije konstantne i nepromenljive, tj. razmatran je deterministički slučaj. Pošto svaki realan sistem nije savršen, ne može da se projektuje s apsolutnom tačnošću, pa se koeficijent prediktora a_1 ne može da idealno podesi da odgovara

⁵⁴ eng. bit rate

u potpunosti vrednosti koeficijenta korelacije. U praksi ni vrednost koeficijenta prediktora nema egzaktnu vrednost, već uvek ima odstupanja u nekoj meri od nominalne vrednosti.

Nesavršeni sistemi, normalna raspodela

Parametri sistema, u našem slučaju koeficijenti prediktora, kao što je već rečeno, nisu determinističke veličine sa konkretnim, precizno zadatim vrednostima. Naime, DPCM sistem nije savršen, tj. idealan sistem. Realni sistemi imaju svoja odstupanja od idealnih stanja, odnosno izvesne nesavršenosti. Ponekad te nesavršenosti nemaju vidljiv uticaj na performanse sistema, ali se često ne mogu zanemariti. Neke osobine sistema poput stabilnosti, robustnosti, odzivi direktno zavise od toga. Matematički, ove nesavršenosti se mogu izraziti u odstupanjima parametara sistema od nominalnih vrednosti istih (Borrie, 1996)

Sistem može biti stabilan ili nestabilan za konstantne vrednosti parametara. Međutim, u realnom slučaju koeficijenti prediktora su stohastičke promenljive, tj. imaju svoju raspodelu. Ona odgovara, kao i u mnogim sistemima, normalnoj Gausovoj raspodeli. U tom slučaju, klasične metode za analizu stabilnosti nisu primenljive. Zato u ovom odeljku predložimo nov pristup rešavanju ovog problema.

Odradićemo opštu analizu, tj. razmatramo sistem koji može biti stabilan s određenom verovatnoćom. To je razlog zašto uvodimo termin i razmatramo verovatnoću stabilnosti⁵⁵ sistema, umesto tradicionalne stabilnosti sistema (Ajsagaliev, 1981).

Generalno, u praksi se izvesno odstupanje između realizovane i željene (projektovane) vrednosti parametara sistema uvek pojavljuje. Ovo rasipanje oko željene vrednosti ima normalnu raspodelu (Pauše, 1974):

$$f(a_1) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a_1 - \bar{a}_1}{\sigma_1} \right)^2 \right], \quad (6.11)$$

gde je $f(a_1)$ funkcija gustine raspodele parametra (PDF⁵⁶) a_1 , \bar{a}_1 je srednja vrednost⁵⁷ parametra a_1 i σ_1 varijansa⁵⁸ parametra a_1 .

⁵⁵ eng. probability of stability

⁵⁶ eng. probability density function

⁵⁷ eng. mean

⁵⁸ eng. variance

Verovatnoća stabilnosti predikcionog filtra prvog reda

U ovoj disertaciji po prvi put uvodimo pojam verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra (linearni deo DPCM sistema) i celog DPCM sistema. Dakle, kao meru za ocenu kvaliteta sistema razmatramo verovatnoću da sistem bude stabilan.

Treba napomenuti da je, do sada izložena, analiza stabilnosti prediktora prvog reda tačna samo u specijalnom slučaju za $\sigma = 0$, kada je verovatnoća stabilnosti jednaka 1 (100%) tj., kao što smo već konstantovali, predikcioni filter je uvek stabilan.

U opštem slučaju, verovatnoća stabilnosti nekog sistema se definiše kao odnos između svih povoljnih slučajeva (kada je sistem stabilan) i svih mogućih slučajeva (Ajsagaliev, 1981):

$$P_{\alpha,\beta} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}, \quad (6.12)$$

gde su sa α i β označene granice oblasti stabilnosti.

Verovatnoća stabilnosti se, sada, može računati na sledeći način u skladu s relacijama (6.10)-(6.12):

$$P_{S_1} = \frac{\int_{-1}^1 f(a_1) da_1}{\int_{-\infty}^{\infty} f(a_1) da_1} = \frac{\frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a_1 - \bar{a}_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] da_1}{\frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a_1 - \bar{a}_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] da_1}, \quad (6.13)$$

odnosno:

$$P_{S_1} = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a_1 - \bar{a}_1}{\sigma_1} \right)^2 \right] da_1. \quad (6.14)$$

Napomena 2: Izraz (6.14) je dovoljan za računanje verovatnoća stabilnosti. Ipak, za prediktor prvog reda, predložićemo jedan inženjerski način računanja odgovarajućih verovatnoća korišćenjem tablica specijalnih funkcija.

Ukoliko uvedemo smenu $\frac{a_1 - \bar{a}_1}{\sigma_1} = t$ u (6.14), verovatnoća stabilnosti predikcionog

filtra ima sledeći oblik:

$$P_{S_1} = \int_{\frac{1-\bar{a}_1}{\sigma}}^{\frac{1+\bar{a}_1}{\sigma}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt = \Phi\left(\frac{1-\bar{a}_1}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{1+\bar{a}_1}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1-\bar{a}_1}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{1+\bar{a}_1}{\sigma}\right) - 1, \quad (6.15)$$

gde je $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ Laplasova⁵⁹ funkcija (Pauše, 1974). Sada je samo potrebno naći iz tablica vrednost Laplasove funkcije za određeni argument x , na taj način, dobija se vrednost za verovatnoću stabilnosti.

Verovatnoće stabilnosti za različite vrednosti koeficijenta prediktora a_1 i za tri različite varijanse date su u tabeli 6.1. Boldirane su optimalne vrednosti koeficijenta prediktora za dve date vrednosti bitske brzine kvantizera.

Tabela 6.1 Verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra za razne vrednosti σ

$\sigma \backslash \bar{a}_1$	0.2	0.4	0.6
0.30	0.9997	0.9593	0.8632
0,60	0.9772	0.8413	0.7426
0.81	0.8289	0.6826	0.6228
0.87	0.7422	0.6274	0.5857
0.90	0.6915	0.5987	0.5661

Na osnovu dobijenih vrednosti za verovatnoće stabilnosti date u tabeli 6.1, može se uočiti da u slučaju preciznog podešavanja koeficijenta prediktora a_1 ($\sigma_1 = 0.2$) verovatnoće stabilnosti su veće. Takođe, mi smo procenjivali verovatnoću u širokom opsegu vrednosti koeficijenta prediktora. U slučaju nisko-korelisanog govornog signala (npr. za $\bar{a}_1 = 0.3$, $\sigma_1 = 0.2$) verovatnoća stabilnosti je visoka (99.97%). S druge strane, za visoko-korelisan signal (npr. za $\bar{a}_1 = 0.9$, $\sigma_1 = 0.2$) linearni deo DPCM sistema može ući u oblast nestabilnosti (verovatnoća za to je 30.85%). To se ne može desiti ako se analizira stabilnost na klasičan način, kao na početku ovog poglavlja. Tada je, kao što je već rečeno, važila pretpostavka da je dati sistem idealan.

⁵⁹ Pierre-Simon Laplace (1749-1827), francuski matematičar, fizičar i astronom

6.1.1.3 Razmatranje stabilnosti celog sistema

Prethodna razmatranja su važna, jer je ispitivanje verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra osnova za ispitivanje stabilnosti celog DPCM sistema. Naime, kao što smo već napomenuli kvantizer ima nelinearnu karakteristiku (sa zasićenjem), tako da stabilišće ceo sistem.

Ispitivanje verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra je osnova za ispitivanje verovatnoće stabilnosti celog DPCM sistema. Pošto je kvantizer opisan nelinearnom karakteristikom sa zasićenjem, jedan od mogućih načina za procenu verovatnoće stabilnosti celog sistema je transformisanje oblasti stabilnosti predikcionog filtra u novu oblast množeći postojeću s faktorom $\frac{1}{1-q}$, gde je q nagib linearizovane karakteristike kvantizera oko koordinatnog početka (Taralova, 2002) Tada je oblast stabilnosti za prediktor prvog reda $[-(1-q)^{-1}, (1-q)^{-1}]$. Ove vrednosti postaju sada granice u integralu (6.14) pri proceni verovatnoće stabilnosti celog sistema. S obzirom da je analiza predikcionog filtra sasvim dovoljna za kvalitetno projektovanje celog sistema, što će kasnije biti pokazano i za prediktore višeg reda, u nastavku se bavimo prvenstveno analizom stabilnosti predikcionog filtra.

6.1.2 Analiza stabilnosti DPCM predikcionog filtra drugog reda

U ovom odeljku razmatraćemo stabilnost predikcionog filtra s najčešće korišćenim prediktorom drugog reda. Ovo je optimalni red prediktora, zato što dobitak predikcije često ulazi u zasićenje s daljim povećanjem reda predikcije (Jayant, 1984, Perić, 2013(a)).

Kompletna studija stabilnosti podrazumeva klasičan, deterministički pristup, kao i već opisani generalizovani prilaz, kada parametri imaju određenu raspodelu. Za potrebe ove analize odrađeni su svi potrebni eksperimenti, kako bi se mogli dobiti kompletni rezultati za konkretne odabirke govornog signala i to za različite dužine frejmova.

Kao što smo već pokazali, predikcioni filter je značajan deo svakog DPCM/ADPCM sistema i njegovi koeficijenti imaju veliki uticaj na performanse istih. Analiza koja će biti urađena za drugi red primenljiva je i za prediktore višeg reda, s tim što su, u cilju lakšeg dobijanja traženih rezultata za više redove, korišćene i alternativne, odnosno pomoćne metode. Zato ćemo započeti izvođenje u opštem slučaju, za k -ti red prediktora.

Model prediktora k -tog reda u z -domenu je dat sa:

$$\hat{X}(z) = \left(\sum_{i=1}^k a_i z^{-i} \right) Y(z). \quad (6.16)$$

pa je funkcija prenosa prediktora:

$$W_P(z) = \sum_{i=1}^k a_i z^{-i}. \quad (6.17)$$

Funkcije prenosa predikcionog filtra u enkoderu i dekoderu (slika 6.1) imaju sledeće oblike, respektivno:

$$W_R(z) = \frac{W_P(z)}{1 - W_P(z)} = \frac{\sum_{i=1}^k a_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^k a_i z^{-i}}, \quad (6.18)$$

$$W_R^D(z) = \frac{1}{1 - W_P(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^k a_i z^{-i}}. \quad (6.19)$$

Predikcioni filtri, kao što je već poznato, su stabilni ako svi polovi u funkcijama prenosa (6.18) i (6.19) leže u jediničnom krugu, tj. ako karakteristična jednačina, koja je ista za oba filtra:

$$1 - \sum_{i=1}^k a_i z^{-i} = 0, \quad (6.20)$$

ima sve nule unutar jediničnog kruga u z -ravni. Jednačina (6.20) može se napisati i kao:

$$z^k - \sum_{i=1}^k a_i z^{k-i} = 0. \quad (6.21)$$

Uslovi stabilnosti za sistem opisan sa (6.21) mogu se odrediti na osnovu više poznatih kriterijuma stabilnosti. U nastavku koristimo Hurvicov⁶⁰ kriterijum stabilnosti. Bilinearna transformacija $z = \frac{1+s}{1-s}$ vrši preslikavanje jediničnog kruga u z -ravni u levu s -ravan. Kada primenimo datu transformaciju na (6.21) imamo:

$$b_k s^k + b_{k-1} s^{k-1} + \dots + b_1 s + b_0 = 0, \quad (6.22)$$

⁶⁰ Adolf Hurwitz (1859-1919), nemački matematičar

gde su b_0, b_1, \dots, b_k funkcije koeficijenata prediktora a_1, a_2, \dots, a_k , tj.:
 $b_0 = \phi_0(a_1, \dots, a_k), \dots, b_k = \phi_k(a_1, \dots, a_k)$.

Predikcioni filter (6.21) je stabilan ako sve nule karakteristične jednačine (6.22) leže u levoj poluravni s -ravni. Potreban uslov stabilnosti predikcionog filtra (6.21) je da svi koeficijenti b_0, b_1, \dots, b_k budu istog znaka, dok je dovoljan uslov da su sve dijagonalne subdeterminante $D_i, i = 1, \dots, k$ Hurvicove determinante formirane na osnovu (6.22):

$$D_k = \begin{vmatrix} b_{k-1} & b_{k-3} & b_{k-5} & \cdots & 0 \\ b_k & b_{k-2} & b_{k-4} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{k-1} & b_{k-3} & \cdots & 0 \\ 0 & b_k & b_{k-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{vmatrix}. \quad (6.23)$$

veće od nule:

$$\begin{aligned} D_1 &= b_{k-1} > 0, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} b_{k-1} & b_{k-3} \\ b_k & b_{k-2} \end{vmatrix} > 0, \\ &\vdots \\ D_k &> 0. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Oblast stabilnosti predikcionog filtra (6.21), S_k , se zavisno od reda prediktora može definisati preko određenog sistema nejednačina.

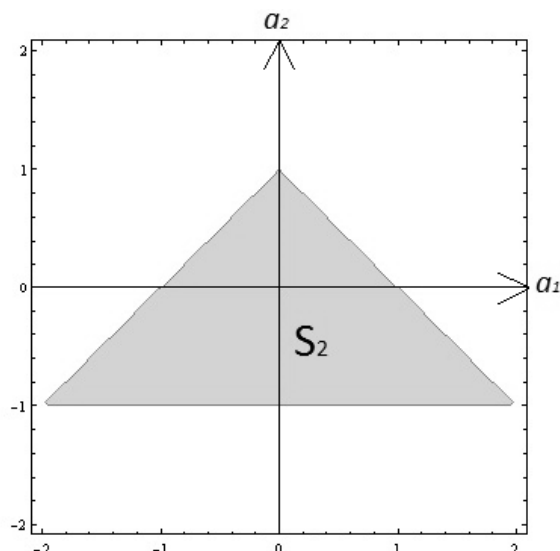
Za slučaj prvog reda to je nejednakost koju smo već ranije izveli:

$$-1 < a_1 < 1. \quad (6.25)$$

Za prediktor drugog reda, oblast stabilnosti S_2 u parametarskoj ravni a_1, a_2 data je preko sledećih nejednačina:

$$1 + a_1 - a_2 \geq 0, \quad 1 - a_1 - a_2 \geq 0, \quad a_2 \geq -1. \quad (6.26)$$

koje definišu trougao prikazan na slici 6.3.



Slika 6.3 Oblast stabilnosti S_2 za predikcioni filter drugog reda

Kao i za slučaj prediktora prvog reda, proširićemo datu analizu, uzimajući u obzir stohastičku prirodu koeficijenata prediktora, tj. nesavršenost realnog DPCM sistema na verovatnoću stabilnosti. Ona se u opštem slučaju za k -ti red prediktora (Jovanović, 2011) definiše kao:

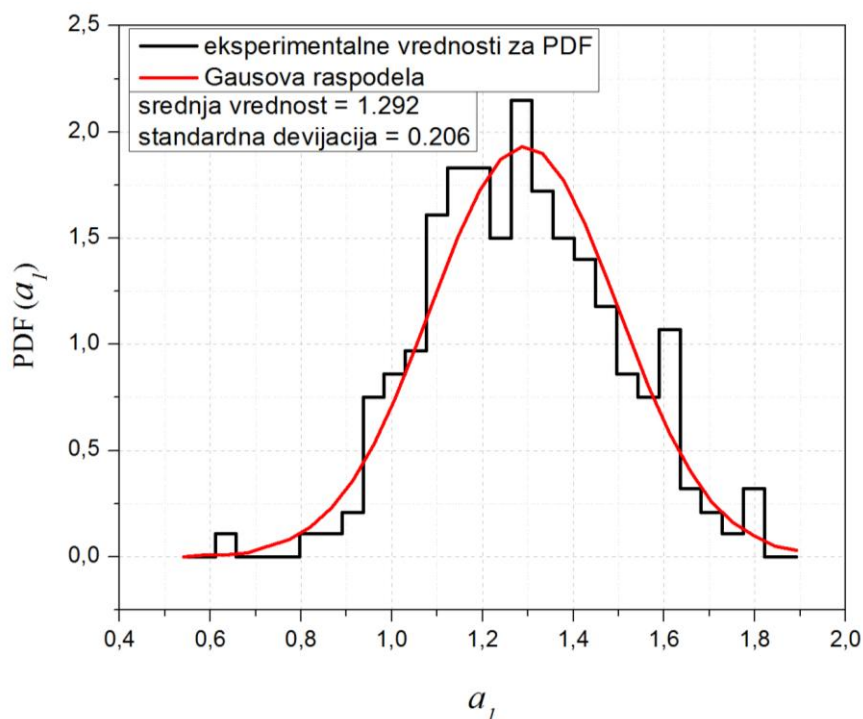
$$P = \int_{S_k} \dots \int f(a_1, \dots, a_k) da_1 \dots da_k, \quad (6.27)$$

gde je $f(a_1, \dots, a_k) = \prod_{i=1}^k f_i(a_i)$ ukupna gustina verovatnoće i S_k je oblast stabilnosti za k -ti red sistema. Na osnovu ovoga, možemo proceniti verovatnoću stabilnosti predikcionog filtra proizvoljnog reda, s tim što se za više redove značajno komplikuje postupak izračunavanja određenog intergala tj. definisanje granica oblasti integracije. Zbog toga, daćemo vrlo efikasne alternativne metode kojima se dobijaju vrednosti verovatnoće stabilnosti s traženom tačnošću, pri analizi predikcionih filtera viših redova.

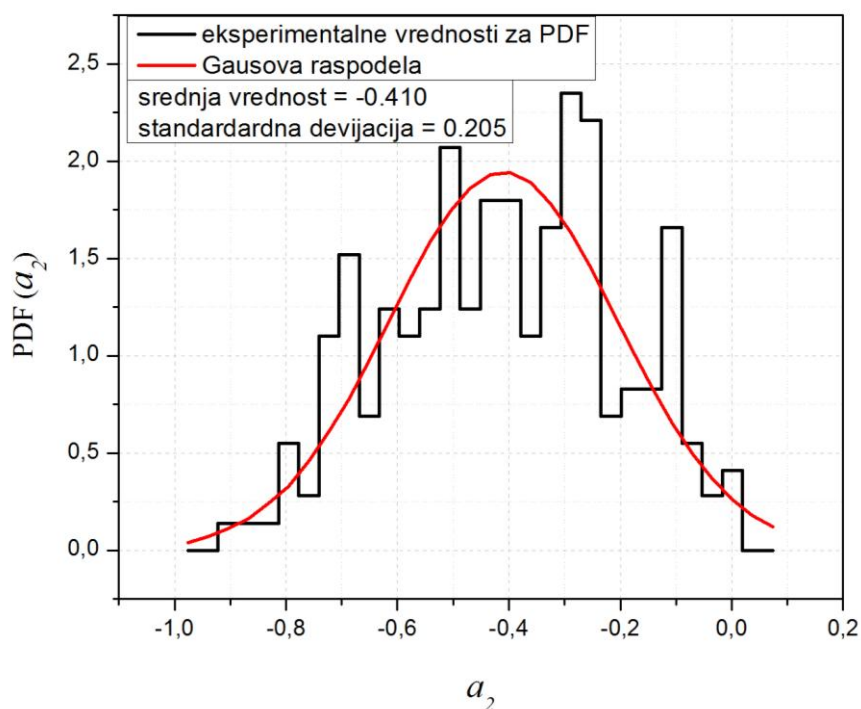
6.1.2.1 Numerički rezultati

U ovom odeljku izvršićemo analizu verovatnoće stabilnosti za prediktor drugog reda. Analizu izvodimo za konkretan signal i različite dužine frejmova. Snimljeni govorni signal smplovan je sa 10000 uzoraka frekvencijom od 8KHz i sa rezolucijom od 16 bita po odabirku. Raspoloživi uzorak signala je podeljen na frejmove različitih dužina ($M = 10, 50, 100, 150$ uzoraka). Za svaki frejm su izračunate optimalne vrednosti koeficijenata prediktora, i eksperiment ponavljan kako bi se izračunala funkcija gustine

raspodele (srednje vrednosti i standardne devijacije su dobijene) (videti tabelu 6.2). Raspodele koeficijenta a_1 i a_2 za izabranu dužinu frejma $M = 50$ su date na slikama 6.4 i 6.5. Prikazana je teoretska normalna (Gausova) raspodela sa istom srednjom vrednošću i istom standardnom devijacijom radi poređenja.



Slika 6.4 Funkcija gustine verovatnoće za koeficijent prediktora a_1



Slika 6.5 Funkcija gustine verovatnoće za koeficijent prediktora a_2

S prethodnih slika, kao i iz tabele 6.2, možemo lako pokazati da srednje (nominalne) vrednosti koeficijenata prediktora (\bar{a}_1, \bar{a}_2) se nalaze unutar oblasti određene sa (6.26). Ovo znači da je linearni predikcioni filter stabilan, ako su koeficijenti prediktora deterministički, tj. ako izaberemo njegove željene odnosno nominalne vrednosti.

Pošto DPCM sistem nije savršen u praksi, o čemu smo ranije već diskutovali, koeficijenti prediktora se ne poklapaju s projektovanim, željenim vrednostima. Funkcija gustine verovatnoće za normalnu raspodelu za prediktora drugog reda (Antić, 2012(b)) je:

$$f(a_1, a_2) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{a_1 - \bar{a}_1}{\sigma_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{a_2 - \bar{a}_2}{\sigma_2} \right)^2 \right], \quad (6.28)$$

gde su σ_1 i σ_2 standardne devijacije, dok su \bar{a}_1 i \bar{a}_2 srednje vrednosti koeficijenata prediktora a_1 i a_2 , respektivno.

Verovatnoća stabilnosti se sada izvodi iz:

$$P_{S_2} = \frac{\iint_{S_2} f(a_1, a_2) da_1 da_2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a_1, a_2) da_1 da_2}, \quad (6.29)$$

gde je S_2 oblast stabilnosti predikcionog filtra definisana sa (6.26).

Integral u imeniocu je ukupna verovatnoća na celom opsegu vrednosti parametara i jednaka je jedinici. Koristeći ovu relaciju možemo lako izračunati verovatnoće stabilnosti za različite dužine frejmova. Izračunate vrednosti su date u tabeli 6.2.

Tabela 6.2 Verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra drugog reda za različite dužine frejmova

M [broj uzoraka]	10	50	100	150
\bar{a}_1	0.990	1.292	1.398	1.439
σ_1	0.224	0.206	0.178	0.172
\bar{a}_2	-0.232	-0.410	-0.503	-0.536
σ_2	0.196	0.205	0.191	0.180
P_{S_2}	0.792	0.656	0.652	0.647

Kao što se može videti iz rezultata datih u tabeli 6.2, predikcioni filter je stabilan s određenom verovatnoćom za razliku od idealnog slučaja kada bi vrednosti koeficijenata

prediktora bile idealno podešene. Kada rasipanje (devijacija) oko projektovane vrednosti raste, verovatnoća stabilnosti predikcionog filtra opada. Takođe sa približavanjem nominalnih vrednosti koeficijenata prediktora granicama oblasti stabilnosti S_2 , verovatnoća stabilnosti opada. Tako vidimo da je verovatnoća stabilnosti najviša za $M = 10$ uzoraka (oko 79.2%), iako standardne devijacije nisu toliko male, ali su srednje vrednosti duboko u oblasti stabilnosti. Za $M = 100$ standardne devijacije su najmanje (0.178, 0.191), ali je verovatnoća stabilnosti predikcionog filtra manja nego u prethodnom slučaju, 65.2%. Ovo je, naravno, iz razloga što su srednje vrednosti koeficijenata prediktora bliže granicama oblasti stabilnosti.

Napomena 3: Analiza stabilnosti data u ovom odeljku je generalizacija klasičnog pristupa analize stabilnosti. U determinističkom slučaju ($\sigma = 0$) dobijamo verovatnoću stabilnosti od 100%, o čemu je već bilo reči kada smo pretpostavili da je sistem idealan.

6.1.3 Analiza stabilnosti predikcionih filtara viših redova u DPCM sistemima - klasični pristupi, alternativne metode

Kao što smo već naglasili, metod za procenu stabilnosti predikcionog filtra koji je izložen u prethodnim odeljcima i praktično primenjen na predikcioni filter sa prediktorom prvog i drugog reda, može se primenjivati i u slučajevima kada predikcioni filter ima prediktor višeg reda. Međutim, za više redove se javljaju problemi kod klasičnih integracionih metoda za računanje verovatnoća stabilnosti. Uprkos nekim pokušajima, samo teoretski pristup pri analizi stabilnosti za predikcione filtre višeg reda je dat u literaturi do sad bez odgovarajućih numeričkih rezultata (Shlien, 1985, Combettes, 1988).

U ovom poglavlju, predlažemo primenu Monte Karlo metode⁶¹ (Gentle, 1988, Vidojković, 2006) za numeričku integraciju. Naime, iako teroretski možemo proceniti verovatnoću stabilnosti za proizvoljni red prediktora, granice oblasti stabilnosti postaju veoma složene i uz to nisu konveksne za $k \geq 3$ (Goldstein, 1977, Shlien 1985, Danković, 2007). Neke geometrijske osobine oblasti stabilnosti S_k su date u (Fishman, 1996). Oblik oblasti S_k je određen za niže redove prediktora, a za više redove su dati samo neki opšti zaključci. Imajuću u vidu da ovde za razliku od svih ranijih studija razmatramo stohastičku stabilnost (Danković, 2005) predikcionog filtra, a ne klasičnu, još je teže izvršiti kompletnu analizu predikcionog filtra višeg reda i na kraju, dobiti konkretne numeričke rezultate. To je

⁶¹ eng. Monte Carlo method

razlog zašto u ovoj disertaciji predlažemo novi poboljšani metod za računanje verovatnoće stabilnosti pomoću Monte Karlo integracije.

Najpre ćemo primeniti Monte Karlo metodu na slučajeve gde smo koristili klasičnu integraciju za računanje verovatnoća stabilnosti. Izvršićemo ispitivanja za prediktore prvog i drugog reda i uporediti rezultate sa već dobijenim u prethodnom delu disertacije. Nakon ove verifikacije predložene Monte Karlo metode primenićemo istu na treći i četvrti red sistema i odrediti verovatnoće stabilnosti. Takođe, daćemo uporednu analizu s nekim alternativnim aproksimativnim metodama za procenu verovatnoće stabilnosti u pogledu greške i preciznosti metoda.

6.1.3.1 Monte Karlo metoda

Monte Karlo metoda omogućava približno numeričko rešavanje čitavog spektra različitih problema izvođenjem statističkih eksperimenata pomoću računara. Ova metoda je posebno korisna za rešavanje matematičkih problema koji su isuviše složeni da bi se rešavali analitički (Fishman, 1996, Gentle, 1998). Inače sam pojam je nastao u Nacionalnoj laboratoriji u Los Alamosu kasnih 40-tih godina prošlog veka, za vreme razvoja atomske bombe (Metropolis, 1949). Razvoj ove metode poklapa se s pojavom prvih računara, koji su u ogromnoj meri ubrzali iterativne numeričke proračune.

U ovoj disertaciji korišćićemo Monte Karlo metodu za numeričko približno izračunavanje višestrukih određenih integrala, čije vrednosti je jako teško dobiti primenom klasične integracije, naročito za veće dimenzije istih. U nekim slučajevima, granice integracije je jako teško odrediti, a samim tim i rešiti integrale, pa se javlja potreba za nekim aproksimativnim metodama. Koristeći Monte Karlo integraciju, možemo dobiti numerička rešenja traženih integrala proizvoljnih dimenzija s traženom tačnošću.

U ovoj disertaciji iskoristićemo Monte Karlo metodu za proveru rezultata koje smo već dobili klasičnom integracijom. Naravno, ova provera u vidu serije simulacionih eksperimenata je urađena za prediktore prvog i drugog reda. Nakon toga, predložena i oprobana Monte Karlo metoda biće primenjena za procenu verovatnoća stabilnosti predikcionih filtara viših redova, gde klasična integracija postaje praktično nemoguća, naročito imajući u vidu da su u opštem slučaju parametri stohastičke promenljive. Generator slučajnih brojeva biće iskorišćen za dobijanje vrednosti koeficijenata prediktora, koje se nalaze po normalnoj raspodeli oko nominalne. Eksperimenti će biti izvođeni za različit broj

uzoraka⁶² sve dok se ne dostigne zadovoljavajuća tačnost. Metoda je jako dobra jer izbegavamo integraljenje po oblasti stabilnosti (Goldstein, 1977, Gould, 2001), već su nam samo potrebne granice te oblasti. Verovatnoća stabilnosti se računa kao količnik između broja povoljnih slučajeva (uzorci koji pripadaju oblasti stabilnosti) i ukupnog broja uzoraka.

6.1.3.2 Verifikacija Monte Karlo metode za predikcione filtre prvog i drugog reda

U ovom potpoglavlju testiraćemo Monte Karlo metodu za izračunavanje verovatnoće stabilnosti upoređujući je s već dobijenim rezultatima korišćenjem klasične integracije za predikcione filtre prvog i drugog reda.

Za prediktor prvog reda i vrednosti parametara $\bar{a}_1 = 0.81$ i $\sigma_1 = 0.2$, već smo izračunali vrednost za verovatnoću stabilnosti klasičnom integracijom (6.14) (videti odeljak 6.1.1.2) i ona iznosi 0.8289 (82.89%).

Sada ćemo primeniti Monte Karlu metod. Generator slučajnih brojeva je iskorišćen za generisanje vrednosti koeficijenata prediktora s normalnom raspodelom. Verifikacioni eksperiment najpre radimo sa 10,000 uzoraka. Povoljni slučajevi su kada vrednosti parametara zadovoljavaju (6.25). Po Monte Karlo metodi dobijamo vrednost za verovatnoću stabilnosti od 0.8331 (83.31%). Kao što se može videti, odstupanje od vrednosti dobijene klasičnom integracijom je manje od 0.005. Ako nam je potrebna veća preciznost, sve što je potrebno je da se eksperiment izvrši s većim brojem uzoraka. Ako izvedemo eksperiment sa 100,000 uzoraka, dobijamo verovatnoću od 0.8279 (82.79%). Sada je greška manja u skladu sa očekivanjima. U cilju dobijanja još veće tačnosti odrađeni su dodatni eksperimenti. Cilj je dostići tačnost od tri decimalne cifre. Ovog puta uzimamo 1,000,000 uzoraka i dobijamo vrednost verovatnoće od 0.8281. Pošto još nismo dobili vrednost s traženom tačnošću od tri decimalne cifre, ponavljamo eksperiment sa 10,000,000 uzoraka i dobijamo vrednost od 0.8290 (82.90%) sa željenom tačnošću (Danković, 2017)

Tačnost Monte Karlo metode zavisi od broja uzoraka ($\sim \frac{1}{\sqrt{N}}$), ali i od standardne devijacije (Gould, 2001):

$$e \approx \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (6.30)$$

⁶² eng. trials

Detaljnija analiza greške koja se javlja pri Monte Karlo simulaciji nije potrebna za procenu verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra u DPCM sistemu. Kao što smo videli, lako možemo postići željenu tačnost povećanjem broja uzoraka u Monte Karlo simulaciji. Pošto i za predikcioni filter drugog reda već imamo dobijene rezultate, takođe ćemo izvršiti seriju eksperimenata, dok ne postignemo tačnost koju smo unapred zadali. Kasnije za predikcione filtre višeg reda odradićemo po jedan eksperiment s dovoljno velikim brojem uzoraka za potrebe analize stabilnosti.

Sada ćemo testirati Monte Karlo metodu za prediktor drugog reda. Izvršićemo četiri eksperimenta za iste brojeve uzoraka (10,000, 100,000, 1,000,000 i 10,000,000). Dobijene vrednosti su date u tabeli 6.3. Može se videti da je za 10^7 uzoraka greška manja od 0.001.

Tabela 6.3 Izračunate verovatnoće stabilnosti pomoću klasične integracije Monte Karlo metodom za srednje vrednosti $\bar{a}_1 = 1.292$, $\bar{a}_2 = -0.410$ i standardne devijacije

$\sigma_1 = 0.206$, $\sigma_2 = 0.205$ za prediktor drugog reda

Metoda	Klasična	Monte Karlo			
Br. uzoraka	/	10^4	10^5	10^6	10^7
Verovatnoća stabilnosti	0.6556	0.6542	0.6545	0.6559	0.6558
Greška	/	0.0014	0.0011	0.0003	0.0002

U skladu sa zaključcima u ovom odeljku, za prediktore višeg reda eksperimenti će odmah biti izvođeni sa 10^7 uzoraka (tačnost od približno tri decimalne cifre), što je sasvim dovoljno za naša ispitivanja.

Kao što smo već naglasili, tek za prediktore višeg reda uvođenje Monte Karlo metode dobija svoju opravdanost, jer znatno olakšava procenu verovatnoće stabilnosti i postaje najbolja, a nekada i jedina prava alternativa klasičnom pristupu. Ovde smo samo verifikovali i proverili njenu tačnost na poznatim slučajevima.

6.1.3.2 Primena Monte Karlo metode za procenu verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra sa prediktorima viših redova

U opštem slučaju za prediktor k -tog reda ($k \geq 3$), verovatnoća stabilnosti može da se odredi koristeći izraz (6.27). Međutim, proračun je vrlo složen. Granice stabilnosti oblasti S_k su obično složeni matematički izrazi i postaje jako teško odrediti verovatnoću stabilnosti, pošto je potrebno integraliti po oblasti stabilnosti (Vidojković, 2006, Danković, 2007). To je razlog zašto ćemo vršiti procenu verovatnoće stabilnosti korišćenjem Monte Karlo metode.

U tu svrhu koristićemo Šur⁶³-Konov⁶⁴ kriterijum stabilnosti (Kailath, 1986). Prilagodili smo Šur-Konovu determinantu, tačnije koeficijente karakterističnoj jednačini (6.21). Odgovarajuća determinanta sada ima sledeći oblik:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} -a_k & 0 & \cdots & 0 & | & 1 & -a_1 & \cdots & -a_{i-1} \\ -a_{k-1} & -a_k & \cdots & 0 & | & 0 & 1 & \cdots & -a_{i-2} \\ -a_{k-2} & -a_{k-1} & \cdots & 0 & | & 0 & 0 & \cdots & -a_{i-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{k-(i-1)} & -a_{k-(i-2)} & \cdots & -a_k & | & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & | & -a_k & -a_{k-1} & \cdots & -a_{k-(i-1)} \\ -a_1 & 1 & \cdots & 0 & | & 0 & -a_k & \cdots & -a_{k-(i-2)} \\ -a_2 & -a_1 & \cdots & 0 & | & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i-1} & -a_{i-2} & \cdots & 1 & | & 0 & 0 & \cdots & -a_k \end{vmatrix} \quad (6.31)$$

gde i predstavlja red determinante ($i=1,2,3,\dots,k$). Sistem je stabilan ako i samo ako je $\Delta_i \leq 0$ za parne vrednosti i , i $\Delta_i \geq 0$ za neparne vrednosti i .

Predikcioni filter trećeg reda

Za slučaj prediktora trećeg reda ($k=3$), oblast stabilnosti S_3 je definisana preko sledećih uslova:

⁶³ Issai Schur (1875-1941), jevrejski matematičar

⁶⁴ Arthur Cohn, nemački matematičar

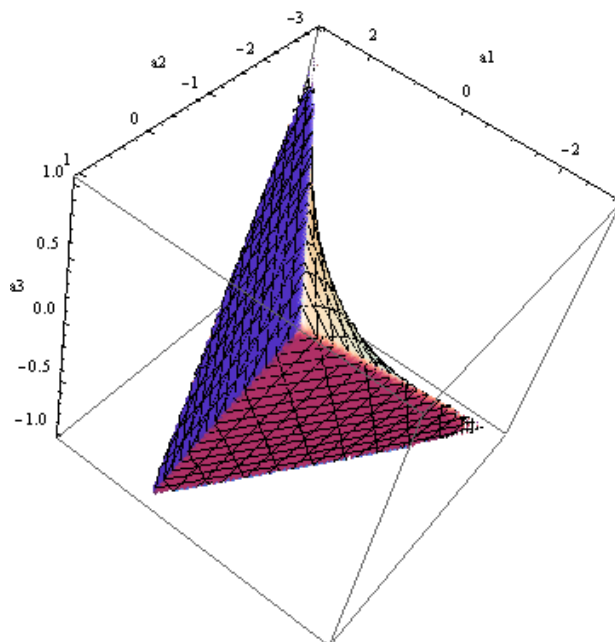
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -a_3 & 1 \\ 1 & -a_3 \end{vmatrix} \leq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -a_3 & 0 & 1 & -a_1 \\ -a_2 & -a_3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -a_3 & -a_2 \\ -a_1 & 1 & 0 & -a_3 \end{vmatrix} \geq 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -a_3 & 0 & 0 & 1 & -a_1 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \\ -a_1 & 1 & 0 & 0 & -a_3 & -a_2 \\ -a_2 & -a_1 & 1 & 0 & 0 & -a_3 \end{vmatrix} \leq 0. \tag{6.32}$$

Oblast stabilnosti S_3 je data na slici 6.6. Uslovi (6.32) mogu se svesti i na sledeći sistem nejednačina:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &\leq 1 \\ a_1 - a_2 + a_3 &> -1 \\ a_1 a_3 + 1 &> -a_2 + a_3^2 \end{aligned} \tag{6.33}$$



Slika 6.6 Oblast stabilnosti S_3 predikcionog filtra trećeg reda

Funkcija gustine verovatnoće za treći red prediktora data je sledećim izrazom:

$$f_3(a_1, a_2, a_3) = \prod_{i=1}^3 \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{a_i - \bar{a}_i}{\sigma_i} \right)^2 \right]. \quad (6.34)$$

Vrednost verovatnoće stabilnosti se teoretski izračunava preko izraza:

$$P_{S_3} = \frac{\iiint_{-\infty}^{\infty} f_3(a_1, a_2, a_3) da_1 da_2 da_3}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_3(a_1, a_2, a_3) da_1 da_2 da_3}. \quad (6.35)$$

Kao što smo to naglasili ranije, već za treći red postaje vrlo složeno izračunavanje ovih integrala, to jest granica oblasti integracije. Zato ćemo primeniti već opisani Monte Karlo integracioni metod.

Eksperiment pomoću koga su dobijene vrednosti koeficijenata prediktora izvršen je na snimljenom govornom signalu dužine 10,200 odabiraka odmerenog frekvencijom 8KHz i rezolucijom od 16 bita po odabirku. Raspoloživi uzorak signala je deljen na frejmove dužine M , i za svaki frejm su proračunate optimalne vrednosti koeficijenata prediktora koristeći metod adaptivne diferencijalne impulsne kodne modulacije (ADPCM) (Jayant, 1984). Eksperiment je ponavljan za različite dužine frejmova i računane su funkcije gustine verovatnoće koeficijenata prediktora a_i , srednje vrednosti \bar{a}_i , i standardne devijacije σ_i ($i = 1, 2, 3$).

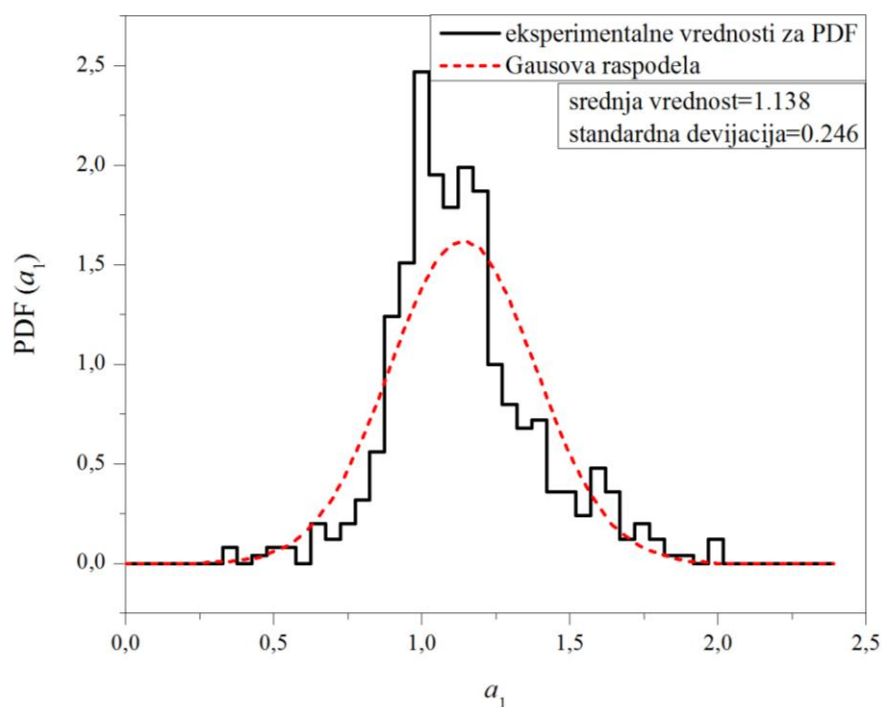
Sada, konačno, možemo odraditi procenu stabilnosti predikcionog filtra trećeg reda. U skladu s već datim zaključcima u vezi tačnosti Monte Karlo metode, svi Monte Karlo simulacioni eksperimenti biće izvršeni za $N_3 = 10^7$ uzoraka. Napravili smo jednostavni kod u softverskom paketu Matlab za Monte Karlo 3D numeričku integraciju. Jedan od ovih kodova dat je u dodatku 3. Da bi dobili tražene verovatnoće stabilnosti sistema računamo odnos između povoljnih slučajeva (vrednosti koeficijenata prediktora koje zadovoljavaju uslove (6.32)) i ukupnog broja uzoraka. Dobijene vrednosti za verovatnoću stabilnosti za pet različitih dužina frejmova date su u tabeli 6.4 (Danković, 2017).

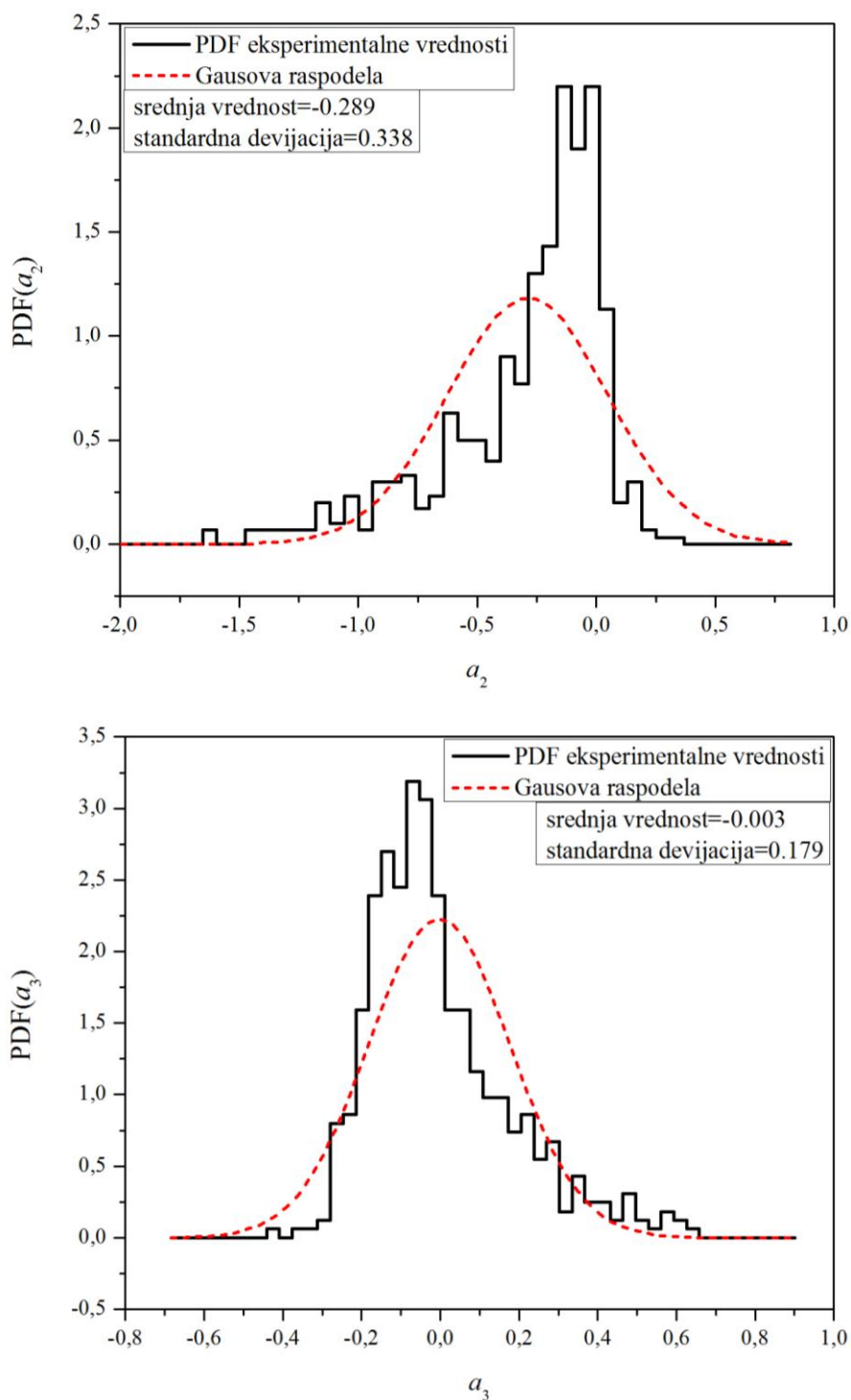
Tabela 6.4 Verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra

trećeg reda za pet različitih vrednosti M

M [uzorci]	10	20	50	100	150
\bar{a}_1	0.983	1.138	1.316	1.444	1.510
σ_1	0.237	0.246	0.258	0.254	0.260
\bar{a}_2	-0.191	-0.289	-0.462	-0.635	-0.718
σ_2	0.276	0.338	0.385	0.392	0.410
\bar{a}_3	-0.037	-0.003	0.042	0.103	0.126
σ_3	0.156	0.179	0.192	0.199	0.205
$P (N_3=10^7)$	0.718	0.584	0.477	0.411	0.391

Raspodele koeficijenta prediktora a_1 , a_2 , i a_3 samo za $M = 20$ su prikazane na slici 6.7 radi ilustracije. Normalna (Gausova) raspodela sa istom srednjom vrednošću i standardnom devijacijom je, takođe, prikazana na istoj slici radi poređenja.





Slika 6.7 Funkcija gustine verovatnoće za koeficijente prediktora a_1 , a_2 , i a_3 , respektivno (za $M = 20$)

Komparativna analiza s drugim aproksimativnim metodama za određivanje verovatnoće stabilnosti

Kako bi pokazali tačnost i efektivnost predložene metode, uradićemo par eksperimenata s drugim aproksimativnim metodama za procenu verovatnoće stabilnosti (Danković, 2005, Danković, 2007, Zlatković, 2012). Koristeći dve teoreme, date i dokazane u Danković, 2007, Zlatković, 2012), određene su dve oblasti stabilnosti, gornja \overline{S}_k i donja \underline{S}_k pomoću odgovarajućih relacija. Oblast stabilnosti S_k je ograničena sa gornje i donje strane sa ove dve oblasti relacijom: $\underline{S}_k \in S_k \in \overline{S}_k$. Ovo zapravo znači da možemo odrediti ove dve granice, tj. imati informaciju u kojim granicama je tačna oblast stabilnosti. Primena ove aproksimativne metode je veoma laka za deterministički slučaj, međutim u našem slučaju kada određujemo verovatnoću, proračun, takođe, može postati složen iako su granične oblasti stabilnosti mnogo prostije strukture nego stvarna oblast, što i jeste glavna prednost. Zbog toga su date sledeće relacije (Zlatković, 2012):

$$P_{\overline{S}_k} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \prod_{i=1}^k \left(\Phi \left(\frac{-\binom{k}{i} - \overline{a}_i}{\sqrt{2\sigma_i}} \right) - \Phi \left(\frac{\binom{k}{i} - \overline{a}_i}{\sqrt{2\sigma_i}} \right) \right), \quad (6.36)$$

$$P_{\underline{S}_k} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \prod_{i=1}^k \left(\Phi \left(\frac{-\frac{1}{n} - \overline{a}_i}{\sqrt{2\sigma_i}} \right) - \Phi \left(\frac{\frac{1}{n} - \overline{a}_i}{\sqrt{2\sigma_i}} \right) \right), \quad (6.37)$$

gde je $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-z^2) dz$ Laplasova funkcija, a $P_{\overline{S}_k}$ i $P_{\underline{S}_k}$ su verovatnoće za gornju i donju graničnu oblast stabilnosti, respektivno, tako da važi: $P_{\underline{S}_k} \leq P_{S_k} \leq P_{\overline{S}_k}$.

U radovima (Danković, 2005, Danković, 2007) vrednost verovatnoće stabilnosti je aproksimirana gornjom granicom, odnosno, pretpostavljeno je da važi: $P_{S_k} \approx P_{\overline{S}_k}$. Sada možemo izračunati približne vrednosti za verovatnoće koristeći ove relacije. Za $M = 20$, na primer i za date parametre (videti tabelu 6.4) dobijamo sledeće verovatnoće stabilnosti: $P_{\overline{S}_3} = 0.785$ i $P_{\underline{S}_3} = 2 \cdot 10^{-4}$. Kao što se može videti, koristeći ovaj metod nemamo dovoljno informacija o tačnoj vrednosti verovatnoće, već samo znamo da je ona između 0.0002 i

0.785. Opseg je, nažalost, isuviše veliki. Za ostale dužine frejmova, predložena aproksimacija je, takođe, veoma gruba i ne daje zadovoljavajuće rezultate.

Napomena 4: Iako za prediktore nižih redova nema potrebe koristiti aproksimativne metode, ipak možemo proveriti tačnost i ove metode za već odrađene slučajeve. Tako u slučaju prediktora drugog reda i već poznatih vrednosti parametara, dobijamo $P_{S_2} = 0.8842$ i $P_{S_2} < 0.0001$ (neznatno mala vrednost) koristeći aproksimacije date relacijama (6.36) i (6.37). Opseg je opet veoma širok. Za prediktor drugog reda smo već dobili tačnu vrednost verovatnoće stabilnosti 0.6556. Ako aproksimiramo verovatnoću gornjom vrednošću 0.88421, kao što je predloženo u (Danković, 2005, Danković, 2007), greška je 0.2286, tj. mnogo veća nego korišćenjem Monte Karlo metode, čak i sa manjim brojem uzoraka (videti tabelu 6.3).

Predikcioni filter četvrtog reda

U slučaju DPCM filtra s prediktorom četvrtog reda, verovatnoća stabilnosti može da se izračuna na sličan način. Eksperimenti su izvršeni za isti uzorak signala i podeljeni na iste dužine frejmova ($M = 10, 20, 50, 100, 150$). Takođe, korišćemo Šur-Konov kriterijum stabilnosti za određivanje oblasti stabilnosti za prediktora četvrtog reda, S_4 (6.31). Verovatnoća stabilnosti za četvrti red sistema je:

$$f_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = \prod_{i=1}^4 \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{a_i - \bar{a}_i}{\sigma_i} \right)^2 \right]. \quad (6.38)$$

Teoretska vrednost za verovatnoću stabilnost može da se izračuna preko opšte formule:

$$P_{S_4} = \frac{\int \int \int \int_{S_4} f_4(a_1, a_2, a_3, a_4) da_1 da_2 da_3 da_4}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_4(a_1, a_2, a_3, a_4) da_1 da_2 da_3 da_4}. \quad (6.39)$$

Koristeći Monte Karlo simulacioni eksperiment sa istim brojem uzoraka kao i u prethodnom eksperimentu ($N_4 = 10^7$), dobijamo sledeće vrednosti za verovatnoću stabilnosti date u tabeli 6.5 (Danković, 2017).

Tabela 6.5 Verovatnoće stabilnosti za predikcioni filter četvrtog reda za različite dužine frejmova M

M [uzorci]	10	20	50	100	150
\bar{a}_1	0.980	1.140	1.340	1.474	1.540
σ_1	0.246	0.257	0.283	0.269	0.275
\bar{a}_2	-0.203	-0.318	-0.543	-0.763	-0.860
σ_2	0.312	0.396	0.506	0.501	0.507
\bar{a}_3	0.035	0.105	0.233	0.377	0.430
σ_3	0.213	0.272	0.374	0.363	0.388
\bar{a}_4	-0.074	-0.094	-0.142	-0.194	-0.211
σ_4	0.133	0.141	0.172	0.170	0.193
$P (N_4=10^7)$	0.648	0.480	0.301	0.263	0.231

Napomena 5: Koristeći aproksimacije (6.36) i (6.37) dobijaju se gornja i donja granična vrednost za verovatnoće stabilnosti ($M = 20$) 0.69604 i 0.00003, respektivno. Dakle korišćenjem nekih već postojećih metoda za procenu oblasti stabilnosti javlja se velika nepreciznost, tako da su ti rezultati praktično neprimenljivi u praksi. Ovo je još jedan dokaz opravdanosti, ali i kvaliteta predloženog metoda za ocenu verovatnoće stabilnosti ovog sistema za prediktore višeg reda.

Predloženi metod se može lako primeniti i za bilo koji prediktor višeg reda od četvrtog, kada se klasična integracija vrlo teško može primeniti i kada druge metode daju nezadovoljavajuće rezultate u pogledu greške i efikasnosti. Ali, u praksi nema neke velike potrebe razmatrati sisteme još višeg reda zbog sve veće složenosti, a zanemarljivog dobitka predikcije.

6.2 Osetljivost DPCM sistema

Analiza osetljivosti se bavi uticajem promena parametara sistema ili delovanja nekih merljivih poremećaja na promenu koordinata stanja sistema (Deif, 1986, Adelman, 1986, Kamavas, 1993). Parametarska osetljivost (Tomović, 1986, Gumovski, 1993, Antić, 2011), koja će biti razmatrana u ovom odeljku, veoma je bitna pri projektovanju nekog sistema, jer je važno znati kako se sistem ponaša pri promenama pojedinih parametara sistema (Karnavas,

1993). Konkretno, osetljivost telekomunikacionih sistema je razmatrana u (Danković, 2010(b)), i to kako za kontinualne tako i za diskretne sisteme.

6.2.1 Parametarska osetljivost predikcionog filtra proizvoljnog reda

U ovoj disertaciji biće razmatrana parametarska osetljivost predikcionog (rekurzivnog) filtra s prediktorom proizvoljnog reda. Osetljivost biće izračunata u odnosu na koeficijente prediktora. S obzirom da vrednost koeficijenata prediktora direktno utiče na performanse sistema, njihovo podešavanje je veoma važno. S boljim podešavanjem koeficijenata, odstupanje stvarne vrednosti signala od procenjene se smanjuje. U tom pogledu, važno je znati kolika je osetljivost od svakog koeficijenata pri njegovoj promeni i za koji je parametar sistem najosetljiviji.

Označimo ulazni signal rekurzivnog filtra sa e_n^* (slika 6.1), odnosno $e^*(z) = d(z) + e(z)$. Tada je procenjena vrednost signala $\hat{X}(z)$, tj. izlaz iz rekurzivnog filtra:

$$\hat{X}(z) = W_R(z) e^*(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_N z^{-N}} e^*(z). \quad (6.40)$$

Parametarska osetljivost diskretnog sistema (Tomović, 1983, Danković, 2010(a)) za određeni parametar a_i se u opštem slučaju definiše kao:

$$u_{a_i}(z) = \frac{\partial y(z, a_0, a_1, \dots, a_N)}{\partial a_i}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (6.41)$$

Na osnovu prethodne relacije možemo izračunati osetljivost rekurzivnog filtra jednog DPCM sistema u odnosu na određeni parametar (koeficijent) prediktora proizvoljnog reda:

$$\begin{aligned} u_{a_1}(z) &= \frac{-z^{-1}}{(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_N z^{-N})^2} e^*(z) \\ u_{a_2}(z) &= \frac{-z^{-2}}{(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_N z^{-N})^2} e^*(z) \\ u_{a_3}(z) &= \frac{-z^{-3}}{(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_N z^{-N})^2} e^*(z), \end{aligned} \quad (6.42)$$

odnosno za i -ti koeficijent prediktora:

$$u_{a_i}(z) = \frac{-z^{-i}}{(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_N z^{-N})^2} e^*(z), \quad (6.43)$$

$$|u_{a_i}|(z) = \frac{|z|^{-i}}{|1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_N z^{-N}|^2} e^*(z), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.44)$$

Ako je rekurzivni filter stabilan, tj. $|z| \leq 1$ ($|z^{-i}| \geq 1$), važi sledeće:

$$|u_{a_1}| \leq |u_{a_2}| \leq \dots \leq |u_{a_N}|. \quad (6.45)$$

Dakle, kada se rekurzivni filter nalazi u oblasti stabilnosti, osetljivost raste s porastom indeksa koeficijenta prediktora. Sistem je najosetljiviji za najviši koeficijent prediktora, a najmanje osetljiv za koeficijent a_1 .

Za nestabilan rekurzivni filter važe potpuno obrnuti zaključci u pogledu osetljivosti rekurzivnog filtra, ali to nije od interesa za razmatranje.

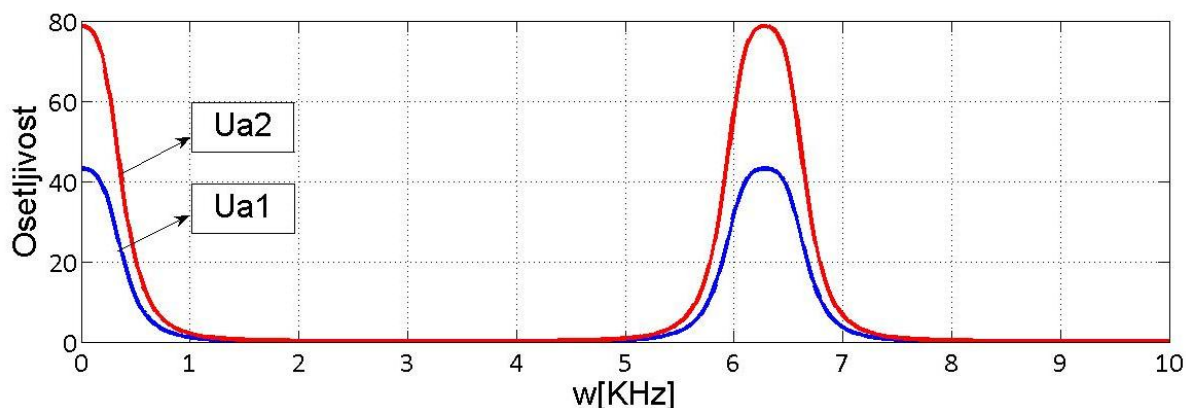
6.2.1.1 Eksperimentalni rezultati

Razmatraćemo DPCM sistem s prediktorom drugog, trećeg i petog reda. Izvršićemo analizu na snimljenom govornom signalu, tj. niskopropusnom filtriranom govoru u frekvencijskom opsegu od 65-3400 Hz, trajanja 1275 ms (10200 odabiraka).

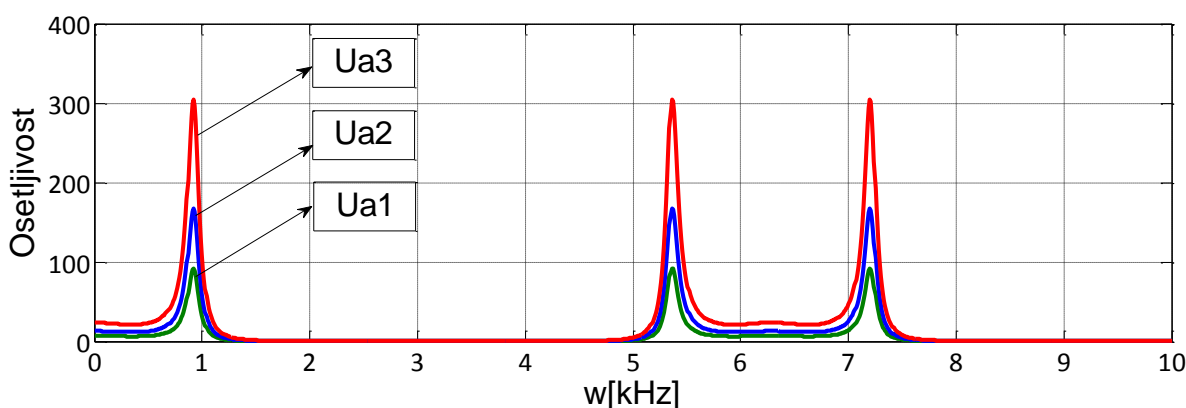
Snimaćemo funkcije osetljivosti za svaki koeficijent prediktora. Razmatramo slučaj kada je rekurzivni filter stabilan, za: $\sigma = -0.6 \text{ KHz}$, $\omega \in [0 \text{ KHz} - 10 \text{ KHz}]$, $T = 10^{-3} \text{ s}$. U oblasti stabilnosti ($|z| = e^{|\sigma T|} e^{j(\sigma + j\omega)T} < 1$), parametarska osetljivost bi prema (6.45) trebala da raste sa povećanjem indeksa koeficijenta prediktora.

Koeficijenti prediktora su unapred izračunati kao adaptivni za jedan (deseti) interval adaptacije ($M=20\text{ms}$). Za prediktor drugog reda koeficijenti prediktora su: $a_1 = 1.42$, $a_2 = -0.54$, dok su za treći red odgovarajući koeficijenti: $a_1 = 1.58$, $a_2 = -0.96$, i $a_3 = 0.30$.

Dobijene krive osetljivosti za drugi i treći red prediktora u odnosu na odgovarajuće koeficijente su date na slikama 6.8 i 6.9, respektivno.



Slika 6.8 Osetljivosti za prediktor drugog reda



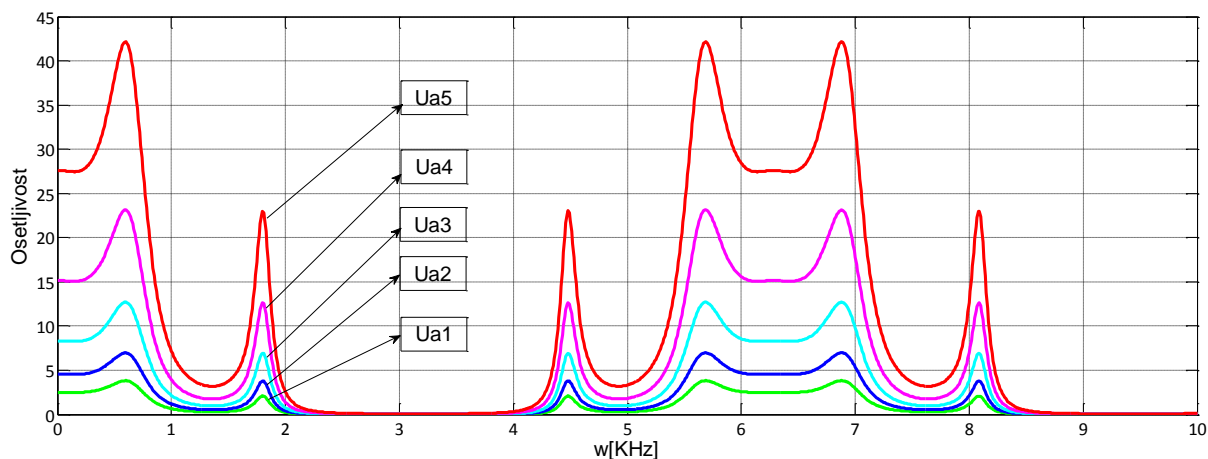
Slika 6.9 Osetljivosti za prediktor trećeg reda

Kao što se i očekivalo na osnovu teorijske postavke problema, osetljivost u odnosu na koeficijent a_1 je najmanja i to na celom posmatranom opsegu, za a_2 je veća (slike 6.8 i 6.9) i najveća za a_3 (slika 6.9) pa je relacija (6.45) potvrđena i u praksi.

Dobitak predikcije značajno raste do drugog, eventualno trećeg reda, a posle ulazi u zasićenje (Jayant, 1984, Jocić, 2014). Međutim, u cilju potvrde tačnosti izvedenih relacija, razmatraćemo i rekurzivni filter s prediktorom višeg reda. Konkretno uzimamo prediktor petog reda. Koeficijenti prediktora $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ imaju sledeće vrednosti 1.65, -1.19, 0.69, -0.38, 0.14, respektivno. To znači da relacija koja opisuje prediktor u z -domenu (6.6) postaje:

$$\hat{X}(z) = (1.65z^{-1} - 1.19z^{-2} + 0.69z^{-3} - 0.38z^{-4} + 0.14z^{-5})Y(z). \quad (6.46)$$

Dobijene osetljivosti u odnosu na odgovarajuće parametre su prikazane na slici 6.10.



Slika 6.10 Osetljivosti za prediktora petog reda

Treba napomenuti da je zbog preglednosti uvedena oznaka U_{a_i} za osetljivost koeficijenta prediktora pri čemu je:

$$U_{a_i} = \frac{u_{a_i}(z)}{e^*(z)}. \quad (6.47)$$

Kao što se može videti sa slike 6.10, parametarska osetljivost u odnosu na koeficijent a_1 je najmanja, zatim sledi osetljivost u odnosu na a_2 , i tako dalje do koeficijenta a_5 za koji je sistem najosetljiviji u celom opsegu učestanosti. Tako smo, konačno, verifikovali matematički izvedenu relaciju (6.45) i za više redove u praksi. Ovo je vrlo važna informacija pri projektovanju svakog sistema. Od ogromnog značaja je znati za koji parameter (koeficijent prediktora) pri malim promenama istog dolazi do značajnih promena u sistemu, a za koji te promene praktično uopšte ne utiču na performanse sistema.

6.2.2.2 Logaritamska osetljivost

Logaritamske funkcije osetljivosti se češće koriste u teoriji signala i uopšte u tehnici, gde je potrebno opisati subjektivni osećaj neke fizičke veličine (npr. u akustici). Naime, poznato je da subjektivni osećaj o intenzitetu neke veličine, koja se određuje čulima, nije proporcionalan snazi koju ta veličina poseduje, već logaritmu snage. Tako se, na primer, intenzitet zvuka doživljava logaritamski (Danković, 2010(a)).

Logaritamska funkcija osetljivosti se u opštem slučaju definiše kao:

$$u_{a_i}^l(z) = \frac{\partial \ln y(z, a_0, a_1, \dots, a_N)}{\partial \ln a_i}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (6.48)$$

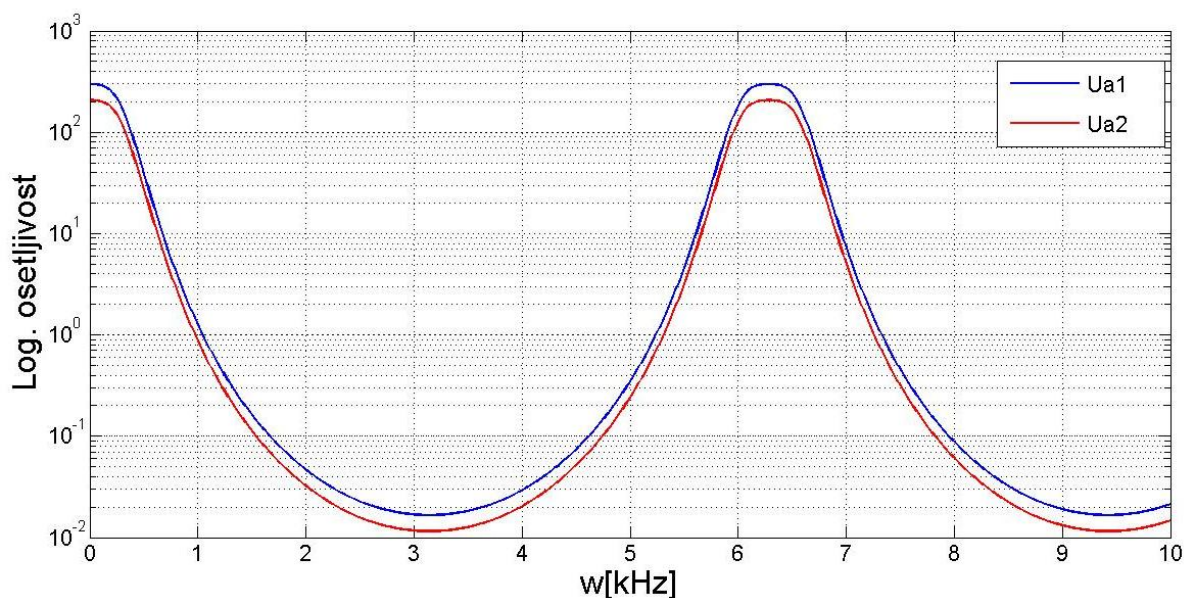
Veza između obične i logaritamske funkcije osetljivosti je:

$$u_{ai}^l(z) = \frac{a_i}{y} u_{ai}(z). \quad (6.49)$$

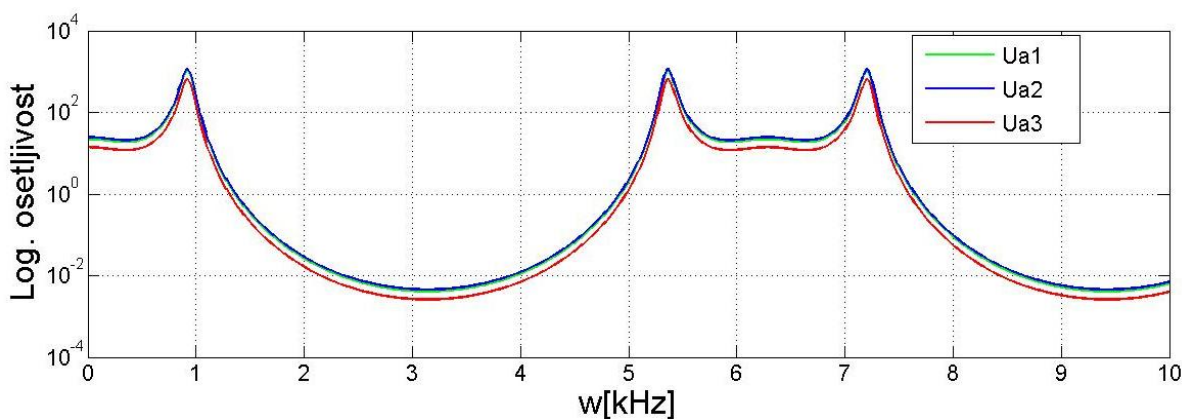
Na osnovu (6.44), (6.47) i (6.49), logaritamska osetljivost za i -ti koeficijent prediktora se računa po:

$$U_{a_i}^l = \frac{|a_i||z|^{-i}}{|1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2} - \dots - a_Nz^{-N}|^3}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.50)$$

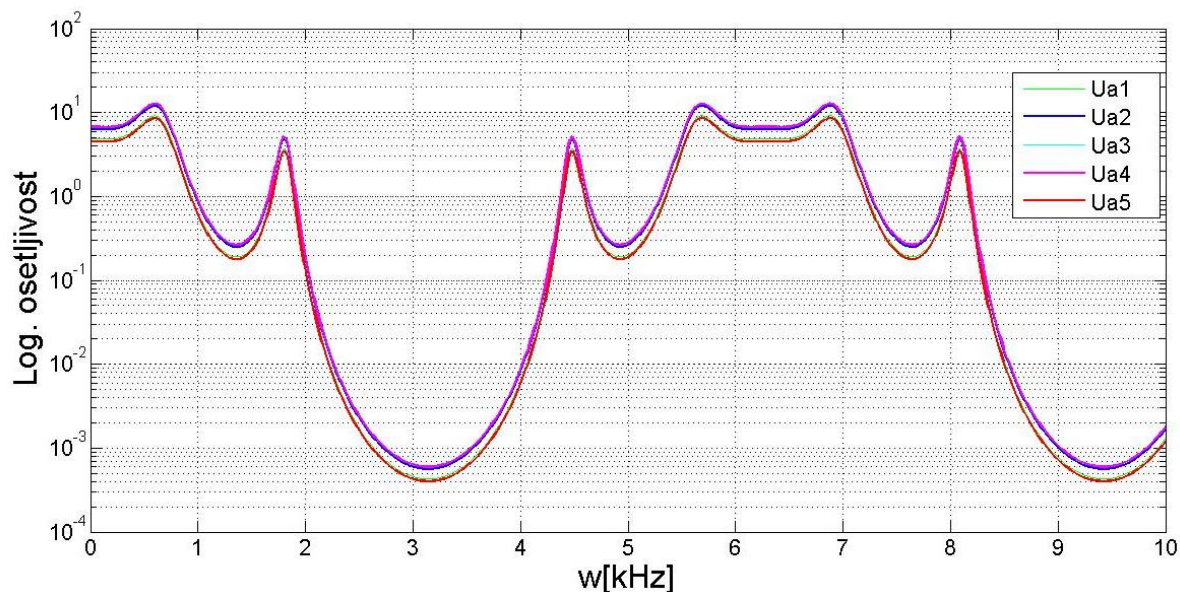
Ponavljanjem već opisanog eksperimenta s istim vrednostima parametara dobijamo logaritamske krive osetljivosti za prediktor drugog, trećeg i petog reda prediktora, respektivno (slike 6.11-6.13).



Slika 6.11 Logaritamska osetljivosti za drugi red prediktora



Slika 6.12 Logaritamska osetljivosti za prediktor trećeg reda



Slika 6.13 Logaritamska osetljivosti za peti red prediktora

6.3 Robustnost DPCM predikcionog filtra

Pored stabilnosti i osetljivosti, robustnost je još jedna važna osobina svakog realnog sistema. Sposobnost sistema da ostane stabilan u slučaju nekih poremećaja ili promena pojedinih parametara sistema je vrlo važna karakteristika sistema u upravljačkom smislu (Zhou, 1995). Parametarska robustnost je specijalan tip robustnosti, kod koje je sistem robustan ako ostaje stabilan posle promena vrednosti parametara u okviru određenih granica (Mansour, 1992).

Što se tiče DPCM sistema i linearnog predikcionog filtra u okviru njega, izvesna analiza robustnosti prediktora u odnosu na grešku pri prenosu je već razmatrana u (Song, 1996). Kada je reč o parametarskoj robustnosti, najvažnija je ona koja se odnosi na stabilnost sistema. Smatra se da je sistem robustan (u klasičnom smislu) u odnosu na promene parametara onda ako ostane stabilan pri promeni parametara u zadatom opsegu (Danković, 2010(a)). U ovoj disertaciji, obradićemo parametarsku robustnost u odnosu na koeficijente prediktora. Kao i u slučaju analize stabilnosti, prvo primenjujemo klasičan pristup, a zatim ćemo predložiti i uopštenje za realne tehničke sisteme sa stohastičkim parametrima.

Dakle, razmatraćemo robustnu stabilnost predikcionog filtra. Koristićemo poznati Haritonovljev⁶⁵ princip za procenu parametarske robustnosti (Kharitonov, 1978, Kharitonov,

⁶⁵ Vladimir Leonidovich Kharitonov, ruski matematičar i automatičar

1990). Za početak ćemo odraditi analizu robustnosti za predikcioni filter prvog i drugog reda, a kasnije i za više redove.

6.3.1 Robustnost predikcionog filtra prvog reda

Karakteristična jednačina (6.21) za prediktor prvog reda ima oblik:

$$a_0 z - a_1 = 0, \quad a_0 = 1. \quad (6.51)$$

Iako je za slučaj prvog reda sistema trivijalno primenjivati Haritonovljevu teoremu, četiri karakteristična polinoma imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} R_1(z) &= \underline{a_0} z - \underline{a_1}, \\ R_2(z) &= \overline{a_0} z - \underline{a_1}, \\ R_3(z) &= \underline{a_0} z - \overline{a_1}, \\ R_4(z) &= \overline{a_0} z - \overline{a_1}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Možemo primetiti da za prvi red ustvari imamo samo dva polinoma zato što je: $a_0 = 1$:

$$R_1(z) = z - \underline{a_1}, \quad R_2(z) = z - \overline{a_1}. \quad (6.53)$$

Kao što znamo, predikcioni filter je stabilan ako su koreni oba polinoma unutar jediničnog kruga, tj. važi nejednakost: $-1 \leq \{ \underline{a_1}, \overline{a_1} \} \leq 1$.

Ovde se završava klasična analiza robustnosti za prvi red prediktora pošto se podrazumeva da koeficijenti prediktora imaju determinisane vrednosti sve vreme.

U praksi, kao što je već rečeno DPCM sistem i predikcioni filter kao njegov sastavni deo su nesavršeni i koeficijenti prediktora imaju stohastičke vrednosti sa normalnom raspodelom. Dakle, ne možemo dati zaključak da li je sistem robustno stabilan ili ne, već samo sa kolikom verovatnoćom je stabilan.

Izvršićemo procenu robustne stabilnosti za dobijene vrednosti koeficijenata prediktora. Analiziran je govorni signal semplovan sa 10200 uzoraka i za različite dužine frejmova $M = 10, 20, 50, 100, 150, 200$ uzoraka. Za dobijene vrednosti koeficijenata prediktora a_1 sračunali smo srednje vrednosti i standardne devijacije za sve vrednosti M (tabela 6.6).

Tabela 6.6 Srednja vrednost i standardna devijacija koeficijenata prediktora prvog reda za različite dužine frejmova

M [broj uzoraka]	10	20	50	100	150	200
a_{1m}	0.803	0.874	0.917	0.928	0.932	0.929
σ_1	0.126	0.089	0.067	0.064	0.066	0.061

Iz tabele 6.6 može se videti da koeficijenti prediktora imaju maksimalnu vrednost za $M = 150$ i minimalnu vrednost za $M = 10$, tako da je: $\overline{a_{1m}} = 0.932$, $\underline{a_{1m}} = 0.803$.

Odgovarajuće funkcije gustine verovatnoće su:

$$f(\overline{a_1}) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\overline{a_1} - \overline{a_{1m}}}{\sigma_1} \right)^2 \right], \quad (6.54)$$

$$f(\underline{a_1}) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\underline{a_1} - \underline{a_{1m}}}{\sigma_1} \right)^2 \right], \quad (6.55)$$

gde su $\overline{a_{1m}}$ i $\overline{\sigma_1}$ su srednja vrednost i standardna devijacija za maksimalnu vrednost koeficijenta prediktora $\overline{a_1}$, respektivno, $\underline{a_{1m}}$ i $\underline{\sigma_1}$ su srednja vrednost i standardna devijacija za najmanji koeficijent prediktora $\underline{a_1}$, respektivno. Trebalo bi primetiti da $\overline{\sigma_1}$ i $\underline{\sigma_1}$ nisu maksimalna i minimalna vrednost standardne devijacije već standardne devijacije koje odgovaraju koeficijentima $\overline{a_1}$ i $\underline{a_1}$, respektivno.

Sada možemo izvršiti procenu robustne stabilnosti na osnovu sledećih formula:

$$P_1 = \frac{\int_{-\infty}^1 f(\overline{a_1}) d\overline{a_1}}{\int_{-\infty}^1 f(\overline{a_1}) d\overline{a_1}} = \int_{-\infty}^1 f(\overline{a_1}) d\overline{a_1}, \quad (6.56)$$

$$P_2 = \frac{\int_{-\infty}^1 f(\underline{a_1}) d\underline{a_1}}{\int_{-\infty}^1 f(\underline{a_1}) d\underline{a_1}} = \int_{-\infty}^1 f(\underline{a_1}) d\underline{a_1}. \quad (6.57)$$

Napomena 6: Integrali u imeniocima (6.56) i (6.57) predstavljaju ukupne verovatnoće i njihova vrednost je jedan.

Nakon rešavanja integrala dobijamo sledeće vrednosti za verovatnoću robustne stabilnosti $P_1 = 0.864$ i $P_2 = 0.941$.

Ukupna robustnost (verovatnoća robustnosti) za predikcioni filter prvog reda je: $P = P_1 \cdot P_2 = 0.813$.

Napomena 7: Treba primetiti da postoji predznak minus u polinomima (6.52) ispred koeficijenta a_1 . Haritonovljevi polinomi (6.53) bi se mogli napisati i kao:

$$R_1^*(z) = z + \overline{a_1^*}, \quad R_2^*(z) = z + \underline{a_1^*}, \quad (6.58)$$

gde je: $\overline{a_1^*} = -\underline{a_{1m}}$ i $\underline{a_1^*} = -\overline{a_{1m}}$, jer su sada negativni predznaci uključeni u koeficijente pa to obrće donje i gornje granice. To ne menja zaključak i rezultate ne samo za prvi red već i za više redove, a insistirali smo na prvobitnom zapisu kako bi u polinomima i dalje figurisali stvarni koeficijenti prediktora kao realni parametri (Danković, 2016(a)).

6.3.2 Robustnost predikcionog filtra drugog reda

Prediktori drugog reda su kao što je već rečeno vrlo često zastupljeni u DPCM sistemima. Koristeći već opisanu metodu možemo proceniti robustnost predikcionog filtra drugog reda, takođe.

Karakteristična jednačina (6.21) za predikcioni filter drugog reda dobija sledeći oblik:

$$z^2 - a_1 z - a_2 = 0. \quad (6.59)$$

Skup od četiri karakteristična polinoma po Haritonovljevom principu prilagođena karakterističnoj jednačini (6.59) je:

$$\begin{aligned} R_1(z) &= z^2 - \underline{a_1} z - \underline{a_2}, \\ R_2(z) &= z^2 - \overline{a_1} z - \underline{a_2}, \\ R_3(z) &= z^2 - \underline{a_1} z - \overline{a_2}, \\ R_4(z) &= z^2 - \overline{a_1} z - \overline{a_2}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

U skladu s napomenom 7 imamo $R_1^*(z) = R_4(z)$, $R_2^*(z) = R_3(z)$, $R_3^*(z) = R_2(z)$ i $R_4^*(z) = R_1(z)$.

Oblast stabilnosti, S_2 , za drugi red prediktora u parametarskoj ravni (a_1, a_2) je određena uslovima datim sa (6.26).

Dovoljan uslov za robustnu stabilnost je da parovi koeficijenata u sva četiri polinoma (6.60) zadovoljavaju relaciju (6.26). Međutim, koeficijenti prediktora su stohastičke promenljive. Izvedeni su eksperimenti na istom uzorku govornog signala i ponovljeni opet za iste dužine frejmova kao i kod prediktora prvog reda. Dobijene vrednosti za srednju vrednost i standardnu devijaciju koeficijenata prediktora su date u tabeli 6.7 (Danković, 2016(a)).

Tabela 6.7 Srednja vrednost i standardna devijacija koeficijenata prediktora drugog reda za različite dužine frejmova

M [broj uzoraka]	10	20	50	100	150	200
a_{1m}	0.988	1.131	1.288	1.385	1.431	1.438
σ_1	0.224	0.220	0.211	0.203	0.191	0.205
a_{2m}	-0.230	-0.293	-0.405	-0.493	-0.536	-0.546
σ_2	0.197	0.211	0.211	0.204	0.180	0.192

Iz tabele 6.7 može se videti da koeficijent prediktora a_1 ima maksimalnu vrednost za $M = 200$ i minimalnu vrednost za $M = 10$. Takođe, koeficijent prediktora a_2 ima maksimalnu vrednost za $M = 10$ a minimalnu za $M = 200$. To znači da u skladu sa uvedenom notacijom važi: $\overline{a_{1m}} = 1.438$, $\underline{a_{1m}} = 0.988$, $\overline{a_{2m}} = -0.230$, $\underline{a_{2m}} = -0.546$.

Odgovarajuća funkcija gustine verovatnoće za polinom R_1 u skladu s napomenom 7, tj. da se zbog negativnog predznaka obrću granične vrednosti je:

$$f(\overline{a_1}, \overline{a_2}) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\overline{a_1} - \underline{a_{1m}}}{\sigma_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{a_2} - \underline{a_{2m}}}{\sigma_2} \right)^2 \right], \quad (6.61)$$

gde su $\overline{a_{1m}}$ i σ_1 srednja vrednost i standardna devijacija za maksimalnu vrednost koeficijenta prediktora a_1 ($\overline{a_1}$), respektivno dok su $\overline{a_{2m}}$ i σ_2 srednja vrednost i standardna devijacija za minimalnu vrednost koeficijenta prediktora a_2 ($\overline{a_2}$), respektivno. Na isti način mogu se izvesti i funkcije gustine verovatnoće za ostala tri polinoma, $R_2 : f(\underline{a_1}, \overline{a_2})$, $R_3 : f(\overline{a_1}, \underline{a_2})$ i $R_4 : f(\underline{a_1}, \underline{a_2})$.

Sada možemo izvršiti procenu robustne stabilnosti. Za polinom R_1 dobijamo:

$$P_1 = \frac{\iint_{S_2} f(\bar{a}_1, \bar{a}_2) d\bar{a}_1 d\bar{a}_2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{a}_1, \bar{a}_2) d\bar{a}_1 d\bar{a}_2} = \iint_{S_2} f(\bar{a}_1, \bar{a}_2) d\bar{a}_1 d\bar{a}_2. \quad (6.62)$$

Na isti način izrazi za verovatnoću robustnosti ostala tri karakteristična polinoma imaju oblike:

$$P_2 = \iint_{S_2} f(\underline{a}_1, \bar{a}_2) d\underline{a}_1 d\bar{a}_2, \quad (6.63)$$

$$P_3 = \iint_{S_2} f(\bar{a}_1, \underline{a}_2) d\bar{a}_1 d\underline{a}_2, \quad (6.64)$$

$$P_4 = \iint_{S_2} f(\underline{a}_1, \underline{a}_2) d\underline{a}_1 d\underline{a}_2, \quad (6.65)$$

gde je S_2 definisano sa (6.26).

Konačno, možemo sračunati odgovarajuće vrednosti za verovatnoću robustnosti:

$$P_1 = 0.232, \quad (6.66)$$

$$P_2 = 0.791, \quad (6.67)$$

$$P_3 = 0.641, \quad (6.68)$$

$$P_4 = 0.962. \quad (6.69)$$

Ukupna robustnost za predikcioni filter drugog reda je:

$$P = \prod_{i=1}^4 P_i = 0.113. \quad (6.70)$$

Kao što se može videti predikcioni filter je robustno stabilan sa određenom verovatnoćom nasuprot idealnom slučaju u kom su koeficijenti prediktora savršeno podešeni. U ovom slučaju je ukupna verovatnoća dosta mala (6.70). Verovatnoća robustnosti opada kada se srednje vrednosti koeficijenata prediktora približavaju granicama oblasti stabilnosti S_2 sa unutrašnje strane. Ovaj pad je još više naglašen kada su neke vrednosti koeficijenata prediktora izvan granica oblasti stabilnosti i udaljavaju se od njih, što je ovde slučaj.

Napomena 8: Analiza robustnosti data u ovom potpoglavlju predstavlja uopštenje klasičnog pristupa robustnosti. U determinističkom slučaju ($\sigma = 0$) dobijamo vrednosti verovatnoće robustnosti jednake jedinici (stabilan u pogledu robustnosti) ili 0 (nestabilan). U

slučaju prvog reda prediktora verovatnoća robustnosti je 1, dok je za slučaj koeficijenata prediktora drugog reda ona 0, zato što vrednosti koeficijenata prediktora u polinomu R_1 ne zadovoljavaju uslove (6.26), pa je odgovarajuća verovatnoća P_1 mala (6.66).

6.3.3 Analiza robustnosti predikcionih filtara viših redova

Analiza robustne stabilnosti predikcionih filtra viših redova se, takođe, može raditi na opisani način s tim što se tu javlja već spomenuti problem rešavanja višestrukih integrala po oblastima stabilnosti. Zato se ponovo nameće potreba za korišćenjem već predložene i opisane Monte Karlo metode. Simulacione eksperimente vršićemo za već usvojeni broj od 10,000,000 uzoraka. Takođe, biće ponovo korišćen Haritonovoljev princip koji tek sada dobija na pravom značaju. Usvojena je notacija objašnjena u napomeni 7 zbog negativnog predznaka ispred koeficijenata prediktora.

6.3.3.1 Robustnost predikcionog filtra trećeg reda

Karakteristična jednačina (6.21) za predikcioni filter trećeg reda ima sledeći oblik:

$$z^3 - a_1 z^2 - a_2 z - a_3 = 0. \quad (6.71)$$

U skladu s napomenom 7 jednačina (6.71) se može svesti na oblik:

$$z^3 + a_1^* z^2 + a_2^* z + a_3^* = 0. \quad (6.72),$$

gde je: $a_1^* = -a_1$, $a_2^* = -a_2$, $a_3^* = -a_3$.

Skup od četiri karakteristična polinoma po Haritonovljevom principu (Kharitonov, 1990) je sada (u našem slučaju svi koeficijenti su realni brojevi pa se početni sistem od osam polinoma svodi na četiri, a minusi su ostavljeni kako bi se sačuvala predstava o fizičkim koeficijentima prediktora) (videti dodatak 4).

$$\begin{aligned} R_1(z) &= z^3 - \overline{a_1} z^2 - \underline{a_2} z - \underline{a_3}, \\ R_2(z) &= z^3 - \overline{a_1} z^2 - \overline{a_2} z - \underline{a_3}, \\ R_3(z) &= z^3 - \underline{a_1} z^2 - \overline{a_2} z - \underline{a_3}, \\ R_4(z) &= z^3 - \underline{a_1} z^2 - \underline{a_2} z - \overline{a_3}. \end{aligned} \quad (6.73)$$

ili ako izbacimo negativne predznake:

$$\begin{aligned}
 R_1^*(z) &= z^3 + \overline{a_1^*} z^2 + \underline{a_2^*} z + \underline{a_3^*}, \\
 R_2^*(z) &= z^3 + \overline{a_1^*} z^2 + \overline{a_2^*} z + \underline{a_3^*}, \\
 R_3^*(z) &= z^3 + \underline{a_1^*} z^2 + \overline{a_2^*} z + \overline{a_3^*}, \\
 R_4^*(z) &= z^3 + \underline{a_1^*} z^2 + \underline{a_2^*} z + \overline{a_3^*}.
 \end{aligned}
 \tag{6.74}$$

Može se primetiti da važi: $R_1^*(z) = R_3(z)$, $R_2^*(z) = R_4(z)$, $R_3^*(z) = R_1(z)$ i $R_4^*(z) = R_2(z)$. Iako sada Haritonovljevim polinomima nisu obuhvaćeni svi slučajevi (4 polinoma, a ima osam kombinacija), zbog simetričnosti već pomenuti negativan predznak neće uticati na ukupnu verovatnoću robustnosti.

Oblast stabilnosti, S_3 , za prediktor trećeg reda u parametarskoj ravni (a_1, a_2, a_3) je određena uslovima datim sa (6.32) (slika 6.6).

Dovoljni uslov za robustnu stabilnost je da parovi koeficijenata u sva četiri polinoma (6.73) zadovoljavaju (6.32). Međutim, koeficijenti prediktora su stohastičke promenljive. Izvedeni su eksperimenti na istom uzorku govornog signala i ponovljeni opet za iste dužine frejmova, kao i kod prediktora nižih redova. Dobijene vrednosti za srednju vrednost i standardnu devijaciju koeficijenata prediktora su date u tabeli 6.4, s tim što sada zbog uvođenja graničnih vrednosti je promenjena oznaka za srednje vrednosti parametara u normalnoj raspodeli ($\overline{a_1} \rightarrow a_{1m}, \overline{a_2} \rightarrow a_{2m}, \overline{a_3} \rightarrow a_{3m}$), pa radi bolje preglednosti dajemo ponovo tabelu s vrednostima parametata (tabela 6.8).

Tabela 6.8 Srednja vrednost i standardna devijacija koeficijenata prediktora trećeg reda za različite dužine frejmova

M [broj uzoraka]	10	20	50	100	150	200
a_{1m}	0.983	1.138	1.316	1.444	1.510	1.529
σ_1	0.237	0.246	0.258	0.254	0.260	0.250
a_{2m}	-0.191	-0.289	-0.462	-0.635	-0.718	-0.762
σ_2	0.276	0.338	0.385	0.392	0.410	0.378
a_{3m}	-0.037	-0.003	0.042	0.103	0.126	0.152
σ_3	0.156	0.179	0.192	0.199	0.205	0.192

Iz table 6.8 se može zaključiti da koeficijent prediktora a_1 ima maksimalnu vrednost za $M = 200$ i minimalnu vrednost za $M = 10$ (za koeficijent a_1^* je obrnut zaključak). Po

sličnom principu, koeficijent a_2 ima maksimalnu vrednost za $M=10$, a minimalnu za $M=200$. Konačno, koeficijent a_3 ima maksimalnu vrednost za $M=200$ i minimalnu vrednost za $M=10$. To znači da u skladu sa uvedenom notacijom važi:

$$\overline{a_{1m}} = -\underline{a_{1m}}^* = 1.529, \quad \underline{a_{1m}} = -\overline{a_{1m}}^* = 0.983, \quad \overline{a_{2m}} = -\underline{a_{2m}}^* = -0.191, \quad \underline{a_{2m}} = -\overline{a_{2m}}^* = -0.762, \\ \overline{a_{3m}} = -\underline{a_{3m}}^* = 0.152, \quad \underline{a_{3m}} = -\overline{a_{3m}}^* = -0.037.$$

Odgovarajuća funkcija gustine verovatnoće za polinom $R_1(R_3^*)$ je:

$$f(\overline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}) = \frac{1}{\overline{\sigma_1}\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\underline{\sigma_2}\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\underline{\sigma_3}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\overline{a_1} - \overline{a_{1m}}}{\overline{\sigma_1}}\right)^2 + \left(\frac{\underline{a_2} - \underline{a_{2m}}}{\underline{\sigma_2}}\right)^2 + \left(\frac{\underline{a_3} - \underline{a_{3m}}}{\underline{\sigma_3}}\right)^2\right)\right], \quad (6.75)$$

gde su $\overline{a_{im}}$ i $\overline{\sigma_i}$ srednja vrednost i standardna devijacija za maksimalnu vrednost koeficijenta a_i ($\underline{a_i}$), respektivno dok su $\underline{a_{im}}$ i $\underline{\sigma_i}$ srednja vrednost i standardna devijacija za minimalnu vrednost koeficijenta a_i ($\overline{a_i}$), respektivno $i=1,2,3$. Na isti način, mogu se izvesti i funkcije gustine verovatnoće za ostala tri polinoma, $R_2: f(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \underline{a_3})$, $R_3: f(\underline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ i $R_4: f(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \overline{a_3})$.

Sada možemo izvršiti procenu robustne stabilnosti. Za polinom R_1 dobijamo:

$$P_1 = \frac{\iiint_{S_3} f(\overline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}) d\overline{a_1} d\underline{a_2} d\underline{a_3}}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\overline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}) d\overline{a_1}^* d\underline{a_2}^* d\underline{a_3}^*} = \iiint_{S_3} f(\overline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}) d\overline{a_1} d\underline{a_2} d\underline{a_3}. \quad (6.76)$$

Na isti način, izrazi za verovatnoću robustnosti ostala tri karakteristična polinoma imaju oblike:

$$P_2 = \iiint_{S_3} f(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \underline{a_3}) d\overline{a_1} d\overline{a_2} d\underline{a_3}, \quad (6.77)$$

$$P_3 = \iiint_{S_3} f(\underline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}) d\underline{a_1} d\overline{a_2} d\overline{a_3}, \quad (6.78)$$

$$P_4 = \iiint_{S_3} f(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \overline{a_3}) d\underline{a_1} d\underline{a_2} d\overline{a_3}, \quad (6.79)$$

gde je S_3 definisano sa (6.32).

Napomena 9: Treba naglasiti da se verovatnoća P_1 zapravo odnosi na polinom R_3 a ne R_1^* jer su oblasti integracije kao i sam Šur-Konov kriterijum prilagođeni karakterističnoj jednačini (6.71) tj. negativnim koeficijentima. Po istoj logici P_2 odgovara polinomu R_4 , P_3 ide uz R_1 , a P_4 uz R_2 .

Konačno možemo izračunati odgovarajuće vrednosti za verovatnoću robustnosti:

$$P_1 = 0.362, \quad (6.80)$$

$$P_2 = 0.204, \quad (6.81)$$

$$P_3 = 1.000, \quad (6.82)$$

$$P_4 = 0.693. \quad (6.83)$$

Ukupna robustnost za predikcioni filter trećeg reda je:

$$P = \prod_{i=1}^4 P_i = 0.051. \quad (6.84)$$

Možemo primetiti da je verovatnoća robustnosti dosta mala (oko 5%). U klasičnom smislu ovaj predikcioni filter trećeg reda nije robustno stabilan. Naime tri od četiri polinoma jesu stabilna u klasičnom smislu, ali jedan od Haritonovljevih polinoma nije, tj. ne zadovoljava uslove (6.32) (prethodno izračunata verovatnoća za njega je data sa (6.81)).

6.3.3.2 Robustnost predikcionog filtra četvrtog reda

Karakteristična jednačina (6.21) za predikcioni filter četvrtog reda je:

$$z^4 - a_1 z^3 - a_2 z^2 - a_3 z - a_4 = 0. \quad (6.85)$$

U skladu s napomenom 7 jednačina (6.85) se može svesti na oblik:

$$z^4 + a_1^* z^3 + a_2^* z^2 + a_3^* z + a_4 = 0. \quad (6.86),$$

gde je: $a_1^* = -a_1$, $a_2^* = -a_2$, $a_3^* = -a_3$, $a_4^* = -a_4$.

Skup od četiri karakteristična polinoma po Haritonovljevom za slučaj četvrtog reda prilagođen našem sistemu je (dodatak 4):

$$\begin{aligned}
 R_1(z) &= z^4 - \overline{a_1}z^3 - \overline{a_2}z^2 - \overline{a_3}z - \overline{a_4}, \\
 R_2(z) &= z^4 - \underline{a_1}z^3 - \underline{a_2}z^2 - \underline{a_3}z - \underline{a_4}, \\
 R_3(z) &= z^4 - \underline{a_1}z^3 - \overline{a_2}z^2 - \overline{a_3}z - \overline{a_4}, \\
 R_4(z) &= z^4 - \overline{a_1}z^3 - \underline{a_2}z^2 - \underline{a_3}z - \underline{a_4}.
 \end{aligned}
 \tag{6.87}$$

Ako se ipak izbace negativni predznaci imamo:

$$\begin{aligned}
 R_1^*(z) &= z^4 + \overline{a_1^*}z^3 + \overline{a_2^*}z^2 + \overline{a_3^*}z + \overline{a_4^*}, \\
 R_2^*(z) &= z^4 + \underline{a_1^*}z^3 + \underline{a_2^*}z^2 + \underline{a_3^*}z + \underline{a_4^*}, \\
 R_3^*(z) &= z^4 + \underline{a_1^*}z^3 + \overline{a_2^*}z^2 + \overline{a_3^*}z + \overline{a_4^*}, \\
 R_4^*(z) &= z^4 + \overline{a_1^*}z^3 + \underline{a_2^*}z^2 + \underline{a_3^*}z + \underline{a_4^*}.
 \end{aligned}
 \tag{6.88}$$

Opet važi: $R_1^*(z) = R_3(z)$, $R_2^*(z) = R_4(z)$, $R_3^*(z) = R_1(z)$ i $R_4^*(z) = R_2(z)$.

Dovoljni uslov za robustnu stabilnost je da parovi koeficijenata u sva četiri polinoma (6.87) zadovoljavaju uslove prema Šur-Konu (6.31). Izvedeni su eksperimenti na istom uzorku govornog signala i ponovljeni opet za iste dužine frejmova, kao i kod prediktora nižih redova. Dobijene vrednosti za srednju vrednost i standardnu devijaciju koeficijenata prediktora su date u tabeli 6.5 ali zbog malo promenjene notacije dajemo sredene rezultate u tabeli 6.9. ($\overline{a_i} \rightarrow a_{im}$, $i = 1, 2, 3, 4$).

Tabela 6.9 Srednja vrednost i standardna devijacija koeficijenata prediktora četvrtog reda za različite dužine frejmova

<i>M</i> [broj uzoraka]	10	20	50	100	150
a_{1m}	0.980	1.140	1.340	1.474	1.540
σ_1	0.246	0.257	0.283	0.269	0.275
a_{2m}	-0.203	-0.318	-0.543	-0.763	-0.860
σ_2	0.312	0.396	0.506	0.501	0.507
a_{3m}	0.035	0.105	0.233	0.377	0.430
σ_3	0.213	0.272	0.374	0.363	0.388
a_{4m}	-0.074	-0.094	-0.142	-0.194	-0.211
σ_4	0.133	0.141	0.172	0.170	0.193

Na istom principu opisanom u slučaju prediktora trećeg reda imamo sledeće:

$$\begin{aligned} \overline{a_{1m}} = -\underline{a_{1m}}^* = 1.540, \quad \underline{a_{1m}} = -\overline{a_{1m}}^* = 0.980, \quad \overline{a_{2m}} = -\underline{a_{2m}}^* = -0.203, \quad \underline{a_{2m}} = -\overline{a_{2m}}^* = -0.860, \\ \overline{a_{3m}} = -\underline{a_{3m}}^* = 0.430, \quad \underline{a_{3m}} = -\overline{a_{3m}}^* = 0.035, \quad \overline{a_{4m}} = -\underline{a_{4m}}^* = -0.074, \quad \underline{a_{4m}} = -\overline{a_{4m}}^* = -0.211. \end{aligned}$$

Odgovarajuća funkcija gustine verovatnoće za polinom R_1 je:

$$\begin{aligned} f(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_3 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_4 \sqrt{2\pi}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\overline{a_1} - \overline{a_{1m}}}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{\overline{a_2} - \overline{a_{2m}}}{\sigma_2} \right)^2 + \left(\frac{\overline{a_3} - \overline{a_{3m}}}{\sigma_3} \right)^2 + \left(\frac{\overline{a_4} - \overline{a_{4m}}}{\sigma_4} \right)^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (6.89)$$

gde su $\overline{a_{im}}$ i $\overline{\sigma_i}$ srednja vrednost i standardna devijacija za maksimalnu vrednost koeficijenta a_i ($\underline{a_i}$), respektivno dok su $\underline{a_{im}}$ i $\underline{\sigma_i}$ srednja vrednost i standardna devijacija za minimalnu vrednost koeficijenta a_i ($\overline{a_i}$), respektivno, $i=1,2,3,4$. Na isti način mogu se izvesti i funkcije gustine verovatnoće za ostala tri polinoma, $R_2 : f(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, \underline{a_4})$, $R_3 : f(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4})$ i $R_4 : f(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4})$.

Sada možemo izvršiti procenu robustne stabilnosti i ona je redom za karakteristične polinome R_1 do R_4 :

$$P_1 = \int \int \int \int_{S_4} f(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}) d\overline{a_1} d\overline{a_2} d\overline{a_3} d\overline{a_4}. \quad (6.90)$$

$$P_2 = \int \int \int \int_{S_4} f(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, \underline{a_4}) d\underline{a_1} d\underline{a_2} d\underline{a_3} d\underline{a_4}, \quad (6.91)$$

$$P_3 = \int \int \int \int_{S_4} f(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}) d\underline{a_1} d\underline{a_2} d\overline{a_3} d\overline{a_4}, \quad (6.92)$$

$$P_4 = \int \int \int \int_{S_4} f(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}) d\overline{a_1} d\overline{a_2} d\overline{a_3} d\overline{a_4}, \quad (6.93)$$

gde je S_4 oblast stabilnosti predikcionog filtra 4-tog reda.

Konačno možemo sračunati odgovarajuće vrednosti za verovatnoću robustnosti:

$$P_1 = 0.139, \quad (6.94)$$

$$P_2 = 0.426, \quad (6.95)$$

$$P_3 = 0.461, \quad (6.96)$$

$$P_4 = 0.239. \quad (6.97)$$

Ukupna robustnost za predikcioni filter četvrtog reda je:

$$P = \prod_{i=1}^4 P_i = 0.007. \quad (6.98)$$

Možemo primetiti da je verovatnoća robustnosti izuzetno mala (oko 0.7%). Kao i u prethodnom slučaju, u klasičnom smislu ovaj predikcioni filter četvrtog reda nije robustno stabilan. Naime tri od četiri polinoma jesu stabilna u klasičnom smislu, ali jedan od Haritonovljevih polinoma nije. To je naravno u prethodnoj analizi robustnosti polinom sa najmanjom dobijenom vrednošću verovatnoće robustnosti (6.94).

Treba napomenuti da kao što je u prethodnim poglavljima 6.1, 6.2 i 6.3 ispitivana stabilnost, osetljivost i robustnost ovog sistema, moguće je ispitivati i neke druge osobine poput opservabilnosti, kontrolabilnosti, pouzdanosti DPCM sistema. Ovo nije od interesa u ovoj disertaciji, ali je mogući pravac daljeg istraživanja ka uspostavljanju određenih korelacija između verovatnoće stabilnosti i pouzdanosti sistema (Zlatković, 2015). Treba reći da je za ispitivanje osobina poput opservabilnosti i kontrolabilnosti pogodniji model datog sistema u prostoru stanja od ovde korišćenog modela u obliku funkcije prenosa.

6.4 Modeliranje DPCM predikcionog filtra pomoću novih klasa digitalnih kaskadnih ortogonalnih filtera

Kao što je već napomenuto na kraju četvrtog poglavlja, razvijene i praktično realizovane dve nove klase digitalnih ortogonalnih filtera primenićemo sada u modeliranju telekomunikacionog sistema, čiji smo detaljnu analizu dali u ovom poglavlju.

6.4.1 Generalizovani digitalni ortogonalni filter Malmkvistovog tipa

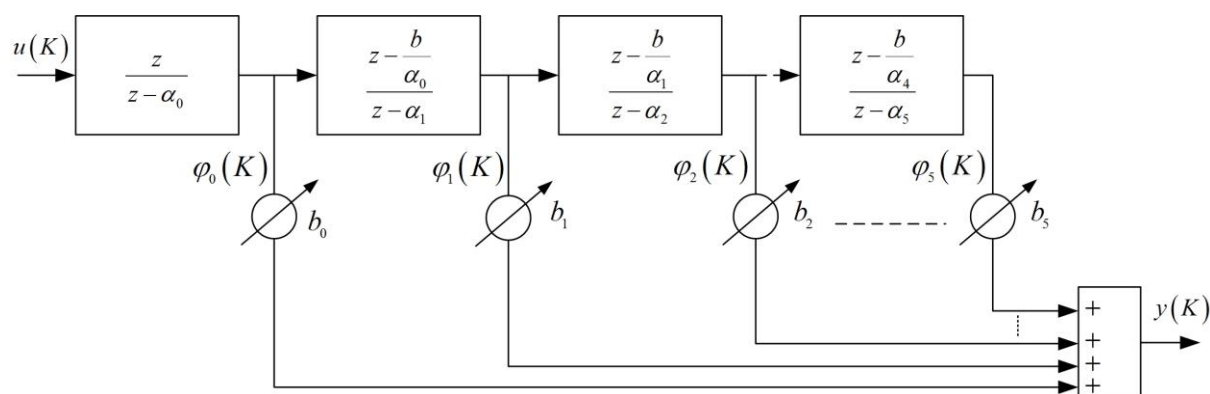
Novi digitalni kaskadni ortogonalni filter Malmkvistovog tipa biće primenjen za modeliranje i identifikaciju odziva iz linearnog dela DPCM sistema. Filter koji se identifikuje je rekurzivni (predikcioni) filter u DPCM enkoderu (prediktor se nalazi u direktnoj grani pozitivne povratne petlje) (videti sliku 6.1a).

Za modeliranje predikcionog filtra koristimo podesivi model baziran na novom digitalnom ortogonalnom filtru (slika 6.14). Na osnovu (4.1) dobija se strukturna blok šema digitalnog ortogonalnog filtra Malmkvistovog tipa koji je sastavni deo modela sa slike 6.14. U našem slučaju koristimo ovaj filter sa šest sekcija sa realnim polovima ($\alpha_k^* = \frac{b}{\alpha_k}$, $k = 0, 1, \dots, n$).

Na osnovu slike 6.14, primetimo da je izlaz iz ortogonalnog modela:

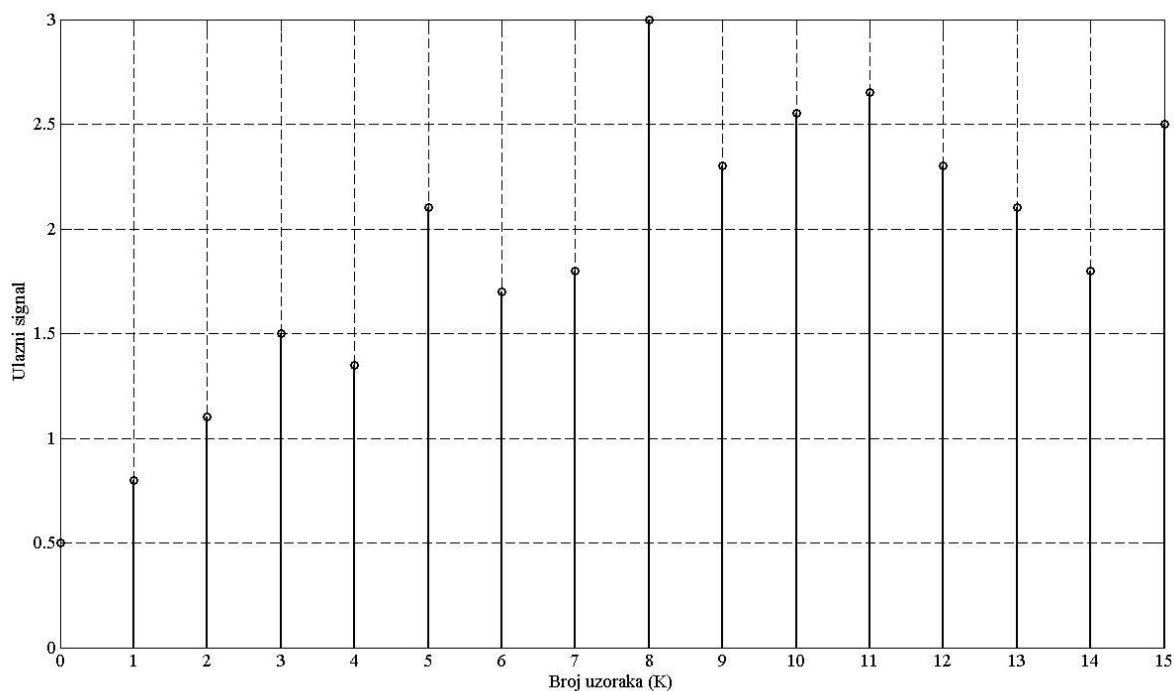
$$y_M(K) = \sum_{k=0}^n b_k \varphi_k(K), \quad (6.99)$$

gde je K broj odabirka, $n = 5$.



Slika 6.14 Blok šema podesivog modela s predloženim novim digitalnim ortogonalnim filtrom Malmkvistovog tipa

Željeni model linearnog dela DPCM sistema (tačnije predikcionog filtra u enkoderu) se dobija podešavanjem sledećih parametara: polova ortogonalnog filtra α_k ($k=0, 1, \dots, 5$), sumarnih koeficijenata b_k ($k=0, 1, \dots, 5$) i parametra preslikavanja b . Kada se modelira nepoznat system, parametri modela treba da se podese tako da model (slika 6.14) odgovara što je više moguće (nepoznatom) sistemu koji se modelira. Proces modeliranja se vrši metodom dovođenja istog signala na ulaz u i u objekat, čiji se model određuje, i u sam podesivi model, zasnovan na novim digitalnim kaskadnim ortogonalnim filtrima (slika 6.15) (Antić, 2011, Antić, 2012(a),(c), Milojković, 2015).



Slika 6.15 Ulaz u prediktivni filter DPCM sistema i u podesivi filter

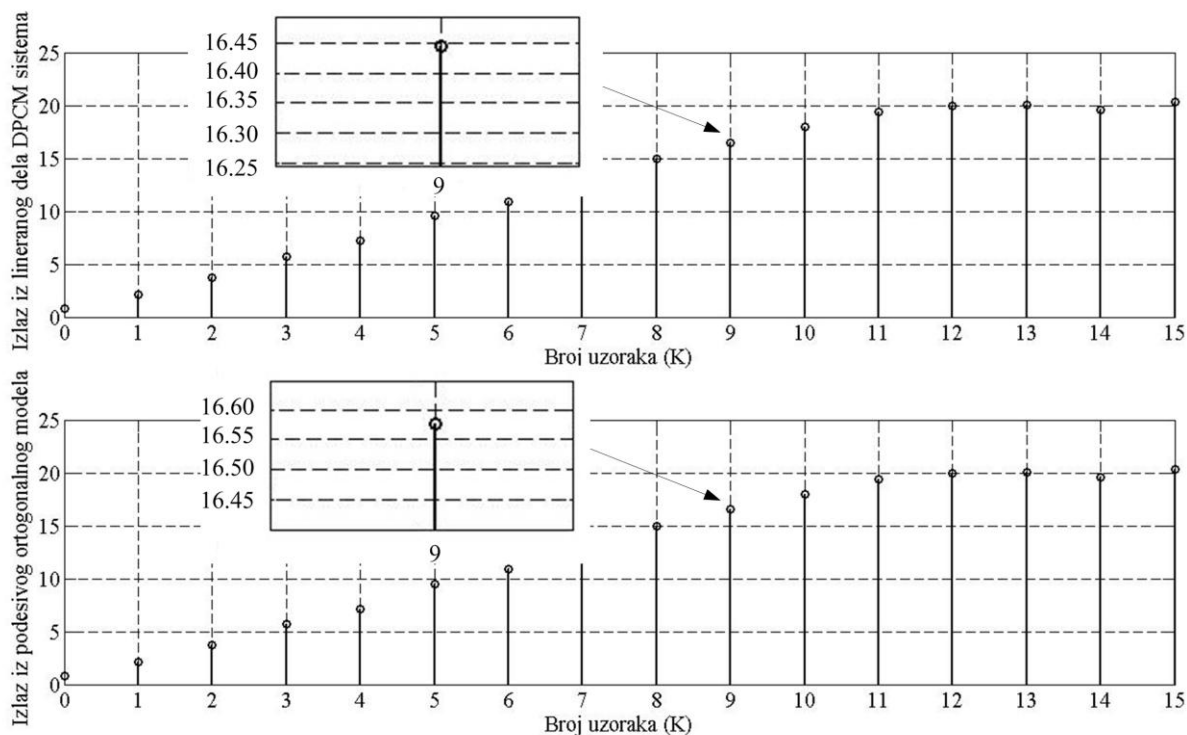
Sledeći korak je snimanje izlaza iz sistema $y_s(t)$ i filtra $y_M(t)$ i računanje srednje-kvadratne greške (kriterijumske funkcije):

$$J = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^N (y_s(K) - y_M(K))^2. \quad (6.100)$$

Nepoznati parametri se dobijaju minimizacijom kriterijumske funkcije J .

Genetički algoritam, koji je iskorišćen u eksperimentu, ima sledeće parametre: populaciju od 1000 jedinki, broj generacija 600, stohastičku uniformnu selekciju, reprodukciju uz 6 elitnih jedinki i Gausovu mutaciju sa skupljanjem. Izabrani hromozom ima strukturu koja se sastoji od 13 parametara kodiranih realnim brojevima (filter sa šest sekcija, $n=5$): $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$ i b_5 . Ukupno vreme trajanja eksperimenta je 15 sekundi.

Originalni signal (izlaz iz predikcionog filtra) i signal koji se dobija iz podesivog modela baziranog na novim ortogonalnim filtrom prikazan je na slici 6.16.



Slika 6.16 Izlazi iz predikcionog filtra DPCM sistema i podesivog modela

Pored ortogonalnog filtra sa šest sekcija, odrađeni su eksperimenti sa ortogonalnim digitalnim filtrima sa četiri i pet sekcija, ali na slici je prikazan izlaz samo za onaj sa šest sekcija ilustrativno (naime na zadatom opsegu snimanja vrlo su teško uočljive razlike). Zbog toga su u tabeli 6.10 dati snimljeni izlazi u određenim vremenskim trenucima (trenucima odabiranja) za predikcioni filter i za podesivi model baziran na ortogonalnim digitalnim filtrima sa četiri, pet i šest sekcija.

Tabela 6.10 Dobijene vrednosti izlaza u trenucima odabiranja iz DPCM predikcionog filtra i podesivog modela zasnovanog na ortogonalnim digitalnim filtrima generalizovanog Malmkvistovog tipa

Br. odabirka	Izlaz iz DPCM predikcionog filtra	Izlaz iz podesivog ortogonalnog modela		
		4	5	6
K				
0	0.82500	0.83323	0.82018	0.82501
1	2.09125	2.11615	2.08105	2.09211
2	3.68806	3.71247	3.67668	3.69135
3	5.71962	5.71122	5.69059	5.70912
4	7.18302	7.13708	7.15114	7.18152
5	9.53761	9.48018	9.52313	9.52801
6	10.89502	10.85243	10.90970	10.89404
7	12.05639	12.03424	12.12126	12.03568
8	14.99215	14.99946	15.05473	14.95833
9	16.44441	16.50661	16.52521	16.57502
10	17.93314	17.99092	18.02966	17.94077
11	19.39597	19.39147	19.42656	19.48815
12	19.98442	19.97650	20.00979	19.97708
13	20.04930	20.05282	20.09403	20.03519
14	19.59736	19.58753	19.62890	19.58641
15	20.33942	20.34243	20.35543	20.31998

Dobijene optimalne vrednosti parametara podesivog ortogonalnog modela su date u tabeli 6.11

Tabela 6.11 Dobijene vrednosti parametara ortogonalnog modela

Parametri	Broj sekcija ortogonalnog digitalnog filtra		
	4	5	6
b_0	0.76838	0.88441	0.80535
b_1	0.75838	0.67209	0.55137
b_2	0.24511	0.42531	0.30523
b_3	-0.10541	-0.39439	0.05137
b_4		0.05206	-0.10907
b_5			0.02849
α_0	0.94076	0.89655	0.89880
α_1	0.89556	0.78045	0.80415
α_2	0.36626	0.69289	0.95560
α_3	0.50597	0.49303	0.71041
α_4		0.99065	-0.16135
α_5			0.86723
b	0.97711	0.82475	0.81845
J_{\min}	$47.9821 \cdot 10^{-3}$	$42.5591 \cdot 10^{-3}$	$13.1892 \cdot 10^{-3}$

Sa slike 6.16 i iz tabele 6.11, može se primetiti odlično slaganje između signala snimljenih iz DPCM predikcionog filtra i predloženog digitalnog filtra sa šest sekcija.

Konačno možemo dati model predikcionog filtra u enkoderu DPCM sistema u sledećem obliku:

$$W_M(z) = \sum_{k=0}^n b_k \prod_{i=0}^k \frac{z - \alpha_{i-1}^*}{z - \alpha_i}, \quad \alpha_{-1}^* = 0, \quad n = 5, \quad (6.101)$$

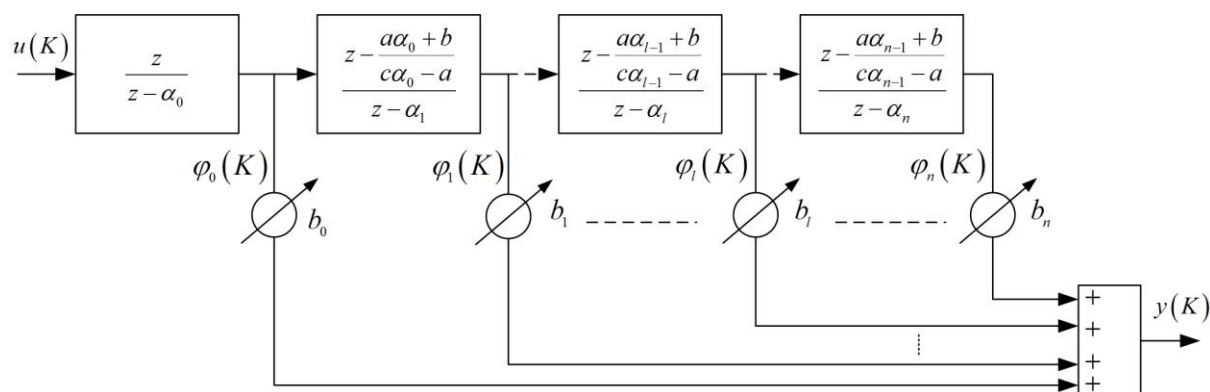
gde je $\alpha_k^* = b/\alpha_k$, a odgovarajuće vrednosti parametara su date u tabeli 6.12 (poslednja kolona).

Model linearnog dela DPCM sistema može se odrediti i pomoću drugih metoda, ali smo mi iskoristili novi ortogonalni filter da bi pokazali njegovu efikasnost, izuzetno visok stepen slaganja modela sa realnim sistemom, a ujedno uporedili sa poznatim filterima koji su već našli svoju primenu u oblasti modeliranja i identifikacije sistema.

6.4.2 Digitalni ortogonalni filter baziran na bilinearnoj transformaciji

Novi digitalni kaskadni ortogonalni filter zasnovan na bilinearnoj transformaciji će, takođe, biti primenjen za modeliranje i identifikaciju odziva iz linearnog dela DPCM sistema na isti način, kao što je već opisano u prethodnom odeljku za slučaj uopštenog filtra Malmkvistovog tipa.

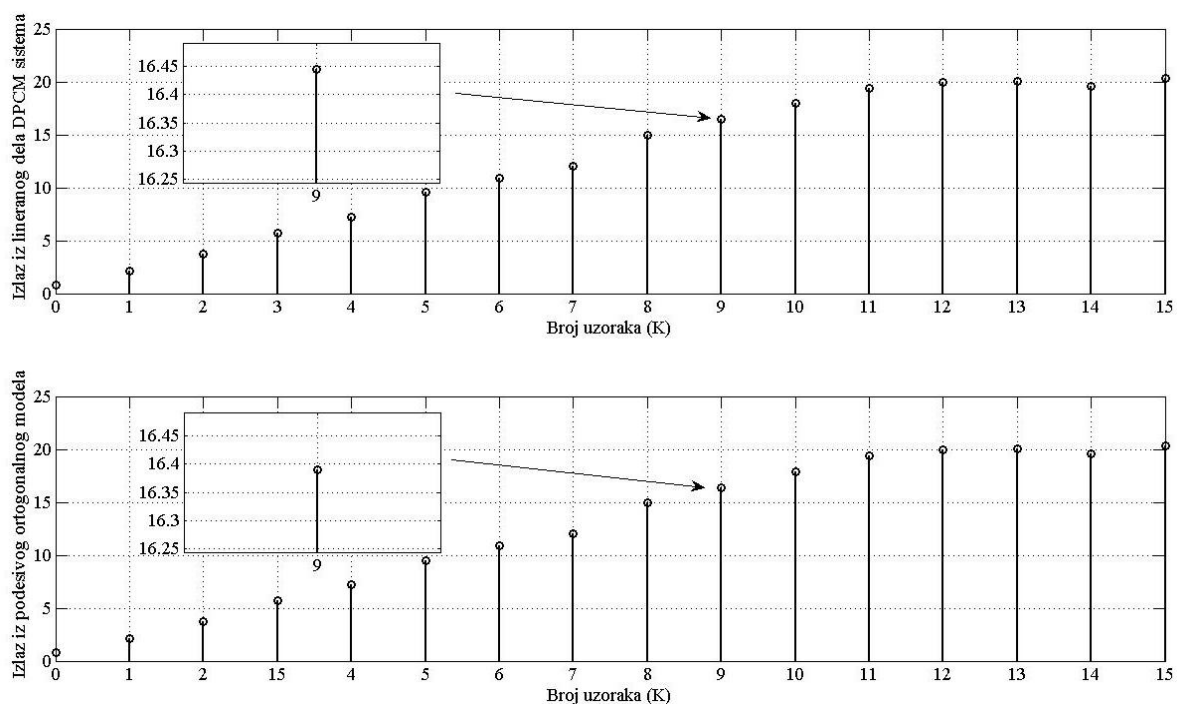
Za modeliranje predikcionog filtra koristimo podesivi model (slika 6.17) baziran na novom digitalnom ortogonalnom filtru s bilinearnom transformacijom. Na osnovu izraza (4.8) dobija se strukturna blok šema digitalnog ortogonalnog filtra baziranog na bilinearnoj transformaciji, koji je sastavni deo podesivog modela. U našem slučaju koristimo ovaj filter sa šest sekcija i to sa realnim polovima ($\alpha_k^* = \frac{a\alpha_k + b}{c\alpha_k - a}$, $k = 0, 1, \dots, n$).



Slika 6.17 Blok šema podesivog modela sa predloženim novim digitalnim ortogonalnim filtrom baziranog na bilinearnoj transformaciji

Željeni model linearnog dela DPCM sistema (tačnije predikcionog filtra u enkoderu) se dobija podešavanjem sledećih parametara: polova ortogonalnog filtra α_k ($k=0, 1, \dots, 5$), sumarnih koeficijenata b_k ($k=0, 1, \dots, 5$) i parametara bilinearne transformacije a , b i c . Uzećemo isti ulaz u predikcionom filtru kao u prethodnom ekperimentu. Takođe, osnovna parametarska podešavanja u genetičkom algoritmu su ponovo ista, s tim što sada izabrani hromozom ima strukturu koja se sastoji od 15 parametara kodiranih realnim brojevima (filter sa šest sekcija, $n=5$): $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a, b, c, b_0, b_1, b_2, b_3, b_4$ i b_5 , (4.8). Ukupno vreme eksperimenta je 15 sekundi.

Originalni signal (izlaz iz predikcionog filtra) i signal koji se dobija iz podesivog modela baziranog na novom digitalnom otgonalnim filtrom prikazan je na slici 6.18.



Slika 6.18 Izlazi iz predikcionog filtra DPCM sistema i podesivog modela

I ovog puta izveli smo eksperiment sa šest sekcija filtra (koji se očekivano pokazao kao najbolji u prošlom eksperimentu) i na kraju uporedili dobijenu grešku sa prethodno realizovanim digitalnim filtrom. Na slici 6.18 je, kao i u prethodnom slučaju, zbog male razlike između signala uvećan iz ilustrativnih razloga jedan od odabiraka. U tabeli 6.12 su dati snimljeni izlazi u određenim vremenskim trenucima (trenucima odabiranja) za predikcioni filter i za podesivi model baziran na ortogonalnim digitalnom filteru baziranom transformaciji.

Tabela 6.12 Dobijene vrednosti izlaza u trenucima odabiranja iz DPCM predikcionog filtra i podesivog modela zasnovanog na ortogonalnim digitalnom filtru sa bilinearnom transformacijom

	Izlaz iz DPCM predikcionog filtra	Izlaz iz podesivog ortogonalnog modela
<i>K</i>		
0	0.82500	0.82500
1	2.09125	2.09215
2	3.68806	3.68806
3	5.71962	5.70912
4	7.18302	7.18302
5	9.53761	9.51500
6	10.89502	10.86011
7	12.05639	12.03209
8	14.99215	14.97022
9	16.44441	16.39001
10	17.93314	17.91510
11	19.39597	19.36826
12	19.98442	19.97384
13	20.04930	20.03347
14	19.59736	19.57832
15	20.33942	20.31451

Dobijene optimalne vrednosti parametara podesivog ortogonalnog modela su date u tabeli 6.13.

Tabela 6.13 Dobijene vrednosti parametara ortogonalnog modela

Parametri	Numeričke vrednosti
b_0	0.56713
b_1	0.59111
b_2	0.32604
b_3	0.61674
b_4	-0.21408
b_5	0.25053
α_0	0.91286
α_1	0.87552
α_2	0.77119
α_3	0.82101
α_4	-0.15647
α_5	0.79444
a	0.28327
b	0.09449
c	0.73071
J_{\min}	$5.7216 \cdot 10^{-3}$

Sa slike 6.18 i tabele 6.12, može se primetiti odlično slaganje između signala snimljenih iz DPCM predikcionog filtra i predloženog digitalnog filtra, kao što je uostalom bio slučaj i kod prostijeg digitalnog filtra sa običnom recipročnom transformacijom. Ali, sada je greška još više smanjena.

Konačno, možemo dati model predikcionog filtra u enkoderu DPCM sistema u sledećem obliku:

$$W_M(z) = \sum_{k=0}^5 b_k \prod_{i=0}^k \frac{z - \alpha_{i-1}^*}{z - \alpha_i}, \quad \alpha_{-1}^* = 0, \quad (6.102)$$

gde je $\alpha_k^* = \frac{a\alpha_k + b}{c\alpha_k - a}$, a odgovarajuće vrednosti parametara su date u tabeli 6.13.

Zaključci i mogući pravci daljeg istraživanja

Predmet proučavanja ove doktorske disertacije, kao i rezultati proistekli iz nje, mogu se podeliti u dve grupe. Prva grupa se karakteriše razvojem novih klasa ortogonalnih filtara, u analognoj i digitalnoj tehnici, dok je druga grupa predstavljena sveobuhvatnom analizom i sintezom DPCM sistema. U ispitivanju ovog sistema su iskorišćeni i digitalni filtri, upravo razvijeni u ovoj disertaciji.

Naime, iako se razvoj ortogonalnih racionalnih funkcija proteže kroz ceo prošli vek, a sam pojam ortogonalnosti je definisan još u XVIII veku, tek poslednjih decenija je uočena mogućnost praktične primene ovih funkcija u tehnici. Ovo se poslednjih godina pokazalo kao vrlo dobro i efikasno rešenje, naročito kod realizacije odgovarajućih ortogonalnih filtara koji mogu imati široku primenu u modeliranju, identifikaciji, ali i u upravljanju procesima. Upravo ovo je bio motiv da se razviju filtri koji će na neki način objединiti sve dobre osobine već postojećih, a samim tim i omogućiti njihovu još kvalitetniju primenu u praksi.

U drugom poglavlju je data kompletna matematička osnova za razvoj ovih novih filtara. Uspostavljena je veza između Malmkvistovih funkcija i Mincovih polinoma, koji su osnova za projektovanje ovih filtara, i uvedeni specijalni unutrašnji proizvodi preko kojih se definiše ortogonalnost istih. Ovi unutrašnji proizvodi su dobijeni na osnovu opštijih simetričnih transformacija. Naime, i već postojeće klase filtara koriste linearnu simetričnu transformaciju, ali u ovoj disertaciji je uvedena recipročna i na kraju opštija, bilinearna transformacija za preslikavanje polova u nule filtara.

Shodno izloženom postupku, dve klase novih filtara zasnovanih na recipročnoj i bilinearnoj transformaciji su projektovane u trećem poglavlju, a i praktično realizovane u Laboratoriji za modeliranje, simulaciju i upravljanje sistemima na Elektronskom fakultetu. Pored ove dve klase analognih filtara, u četvrtom poglavlju je objašnjen i način dobijanja odgovarajućih digitalnih filtara ovog tipa. Ovi novi digitalni filtri su, takođe, projektovani i praktično realizovani.

Dve nove klase analognih filtara je bilo potrebno i proveriti u praksi, odnosno pokazati da njihove performanse zadovoljavaju sve postavljene kriterijume, a ujedno da su bolje od već postojećih klasa ortogonalnih filtara. Obe nove klase analognih ortogonalnih filtara su primenjene u modeliranju sistema za hlađenje gumene trake, dobro poznatog procesa u industriji auto guma. Pokazalo se da modeli, dobijeni na osnovu ovih novih filtara, odlično opisuju ponašanje realnog sistema, odnosno modeli pojedinih kaskada sistema

pokazuju izuzetno slaganje sa kaskadama realnog sistema. Izvršena je i komparativna analiza s modelima zasnovanim na nekim klasičnim ortogonalnim filtrima.

Velika prednost ovih filtara je što su parametarski adaptivni, odnosno što se mogu menjati vrednosti polova, kao i parametara simetrične transformacije. Takođe, pokazano je da podešavanjem konkretnih vrednosti parametara bilinearne transformacije u filtru zasnovanom na njoj, može dobiti većina postojećih klasa ortogonalnih filtara. Dakle, cilj zadat na početku, da se obuhvate sve dobre osobine postojećih klasa filtara je ostvariv i pokazano je kako se to i u praksi manifestuje.

Drugi predmet istraživanja ove doktorske disertacije je sistem za impulsno kodnu modulaciju (DPCM sistem). Ovom sistemu je posvećeno peto i šesto poglavlje ove teze. Ovo je dobro poznata kodna tehnika za prenos signala. Međutim, do sada nije data jedna kompletna analiza i sinteza ovog sistema. Ispitivana je stabilnost ovog sistema s najčešće korišćenim prediktorima prvog i drugog reda, ali je kasnije data i analiza stabilnosti za proizvoljno visoke redove prediktora. Ono što je jedinstveno, uzeta je u obzir stohastičnost koeficijenta prediktora, kao najvažnijih parametara ovog sistema. U skladu s tim, uvedena je tzv. verovatnoća stabilnosti i procena verovatnoće stabilnosti je izvršena za prediktore nižeg ali i višeg reda. Za prediktore višeg reda predložena je Monte Karlo metoda umesto klasične integracije po vrlo složenim oblastima stabilnosti. Obavljen je niz simulacionih eksperimenata. Metoda je, najpre, verifikovana za niže redove sistema, a onda primenjivana i na više. Izvršena je analiza greške i svi dobijeni rezultati su u zadatim granicama u pogledu greške. Svi rezultati su dobijeni na osnovu prethodno eksperimentalno dobijenih vrednosti koeficijenta prediktora u konkretnim DPCM sistemima određenog reda.

Analiza DPCM sistema nije ovde završena. Naime, u šestom poglavlju je izvršena i analiza parametarske osetljivosti DPCM sistema u odnosu na koeficijente prediktora. Izvedeni su vrlo korisni zaključci u pogledu osetljivosti na pojedine parametre, što može pomoći boljem razumevanju i projektovanju ovog sistema. Izvršena je i analiza robustnosti u Haritonovljevom smislu i to na isti način kao i u pogledu obične stabilnosti. Najpre je analizirana klasična robustna stabilnost, a zatim i stohastička, i to za prediktor prvog, drugog, trećeg i četvrtog reda. Naravno, predložena metoda može biti primenjena i na bilo koji prediktor višeg reda.

Druge osobine DPCM sistema poput pouzdanosti, opservabilnosti i kontrolabilnosti, moguće je analizirati u nekim budućim razmatranjima. Naravno, ovde bi trebalo model DPCM sistema predstaviti modelom u prostoru stanja za razliku od ovde korišćenog modela u obliku funkcije prenosa. Takođe, treba napomenuti, da je u celoj ovoj analizi osobina

DPCM sistema akcenat bio na predikcionom filtru kao najvažnijem delu sistema. U disertaciji je i objašnjeno zašto je analiza predikcionog filtra od presudnog značaja pri analizi celog sistema. Ipak, u nekim daljim istraživanjima može se dati i dublja analiza kvantizera, kao nelinearnog elementa u okviru DPCM sistema. U šestom poglavlju su date neke smernice u tom pogledu.

I na kraju ali ne najmanje važno, predhodno razvijene klase digitalnih ortogonalnih filtara zasnovanih na recipročnoj i bilinearnoj transformaciji su praktično primenjene u modeliranju upravo opisanog DPCM sistema visokog reda. Kao i u slučaju analognih verzija, pokazano je izuzetno slaganje modela s realnim sistemom.

U ovoj disertaciji je korišćen kriterijum srednje-kvadratne greške kao optimizacioni kriterijum u određivanju matematičkih modela. Treba napomenuti da se u nekim daljim istraživanjima mogu koristiti i neki drugi optimizacioni kriterijumi, poput onih dobro poznatih u optimalnom upravljanju ili npr. minimaks kriterijum. Neki sledeći korak u istraživanju bi bio primena ovih novih filtara u adaptivnom upravljanju procesima. Takođe moguće je razviti i odgovarajuće klase ovih filtara s kompleksnim polovima, koje u pojedinim praktičnim primenama mogu dati još bolje rezultate. Dalja uopštenja novih filtara bila bi u korišćenju još opštije simetrične transformacije za preslikavanje polova u nule od ovde korišćene bilinearne. Time bi priča o jednoj uopštenoj klasi analognih i digitalnih filtara, koja obuhvata sve postojeće klase, na neki način bila zaokružena.

Doprinosi doktorske disertacije

Ova doktorska disertacija sadrži sledeće doprinose:

- Razvoj i projektovanje nove klase ortogonalnih filtara zasnovanih na simetričnoj recipročnoj transformaciji (uopšteni Malmkvistovi filtri);
- Razvoj i projektovanje nove klase ortogonalnih filtara zasnovanih na simetričnoj bilinearnoj transformaciji;
- Praktična realizacija analognih i digitalnih verzija ovih filtara;
- Parametarska adaptivnost svih razvijenih klasa ortogonalnih filtara koja omogućuje kvalitetnu praktičnu primenu u identifikaciji, modeliranju i upravljanju procesima;
- Verifikacija performansi novih klasa filtara kroz praktičnu primenu u modeliranju realnih tehničkih sistema;
- Pokazana je prednost novih filtara u odnosu na već postojeće klase klasičnih ortogonalnih filtara komparativnom analizom;
- Kompletna analiza stabilnosti (klasična i stohastička) DPCM sistema s predikcionim filtrom proizvoljnog reda;
- Analiza robustne stabilnosti u Haritonovljevom smislu DPCM sistema s predikcionim filtrom proizvoljnog reda;
- Analiza parametarske osetljivosti DPCM sistema s predikcionim filtrom proizvoljnog reda;
- Dobijanje kvalitetnog modela DPCM predikcionog filtra pomoću novih klasa digitalnih ortogonalnih filtara.

Dodatak 1

Teorema 1: Neka je $A = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ niz kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju uslov:

$$|\alpha_i| > 1, \operatorname{Re}(\alpha_i \bar{\alpha}_j - 1) > 0, \quad (\text{D1})$$

za svako i i j . Tada važi:

- 1) $[P, P] \geq 0$;
- 2) $[P, P] = 0 \Leftrightarrow P(x) \equiv 0$;
- 3) $[P+Q, R] = [P, R] + [Q, R]$;
- 4) $[cP, Q] = c[P, Q]$;
- 5) $[P, Q] = \overline{[Q, P]}$,

za svako $P, Q, R \in M(A)$ i za svako $c \in \mathbb{C}$.

Dokaz:

Neka je $P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^{\alpha_k}$ i $Q(x) = \sum_{j=0}^m q_j x^{\alpha_j}$. Koristeći

$$(P, Q)_\circ = \int_0^1 (P \odot Q)(x) \frac{dx}{x^2} \quad (\text{D2})$$

i $(P \odot Q)(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m p_k q_j x^{\alpha_k \alpha_j}$ imamo: $[P, Q] = \int_0^1 (P \odot Q)(x) \frac{dx}{x^2} - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m p_k \bar{q}_j \int_0^1 x^{\alpha_i \bar{\alpha}_j - 2} dx$.

Zbog (D1), imamo da je: $\int_0^1 x^{\alpha_i \bar{\alpha}_j - 2} dx = \frac{1}{\alpha_i \bar{\alpha}_j - 1}$ za svako i i j , tako da važi:

$$[P, Q] = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{p_k \bar{q}_j}{\alpha_i \bar{\alpha}_j - 1}. \quad (\text{D3})$$

Kako bi dokazali 1) i 2) dovoljno je zaključiti da kvadratna forma:

$$[P, P] = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{1}{\alpha_i \bar{\alpha}_j - 1} p_i \bar{p}_j, \text{ tj., njena matrica } H_n = \left[\frac{1}{\alpha_i \bar{\alpha}_j - 1} \right]_{i,j=0}^k \text{ je pozitivno definitna.}$$

Koristimo Sylvesterove⁶⁶ potrebne i dovoljne uslove (Milovanović, 1988):

$$D_k = \det H_n = \det \left[\frac{1}{\alpha_i \alpha_j - 1} \right]_{i,j=0}^k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Kako bi sračunali matricu D_k , koristimo Košijevu formulu:

$$\det \left[\frac{1}{a_i + b_j} \right]_{i,j=0}^k = \frac{\prod_{i>j=0}^k (a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i,j=0}^k (a_i + b_j)}, \quad \text{gde je } a_i = \alpha_i \quad \text{i} \quad b_j = -\frac{1}{\alpha_j}. \quad \text{Dobijamo:}$$

$$D_k = \frac{1}{\prod_{j=0}^k \overline{\alpha_j}} \det \left[\frac{1}{\alpha_i - \frac{1}{\alpha_j}} \right]_{i,j=0}^k = \frac{1}{\prod_{j=0}^k \overline{\alpha_j}} \frac{\prod_{i>j=0}^k (\alpha_i - \alpha_j) \left(\left(-\frac{1}{\alpha_i} \right) + \left(\frac{1}{\alpha_j} \right) \right)}{\prod_{j=0}^k \left(\alpha_i - \left(\frac{1}{\alpha_j} \right) \right)}, \quad \text{tj.}:$$

$$D_k = \frac{1}{\prod_{j=0}^k \overline{\alpha_j}} \frac{\prod_{i>j=0}^k |\alpha_i - \alpha_j|^2 / \overline{\alpha_i \alpha_j}}{\prod_{j=0}^k (\alpha_i \overline{\alpha_j} - 1) / \overline{\alpha_j}}. \quad \text{Pošto je: } H_n = \frac{1}{|\alpha_0|^2 - 1} > 0 \quad (\text{u skladu sa (D1) i}$$

$$D_k = \frac{D_{k-1}}{|\alpha_k|^2 - 1} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{|\alpha_k - \alpha_i|^2}{|\alpha_i \overline{\alpha_k} - 1|^2}, \quad \text{matematičkom indukcijom zaključujemo da je } D_k > 0 \quad \text{za bilo}$$

koje k . Osobine 3), 4) i 5) proističu direktno iz (D2) i (D3).

Dodatak 2

Simetričnost i linearnost proizvoda (2.28) proističe direktno iz definicije. Primitimo da važi:

$$W_n(s) W_m^*(\bar{s}) = - \frac{(a^2 + bc)^n (c\alpha_n - a)}{\prod_{k=0}^n |c\alpha_k - a|^2} \frac{cs - a}{(s - \alpha_n) \left(s - \frac{a\overline{\alpha_n} + b}{c\alpha_n - a} \right)},$$

i:

⁶⁶ James Joseph Sylvester (1814-1897), engleski matematičar

$$\begin{aligned}
(W_n, W_n) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{(a^2 + bc)^n (c\alpha_n - a)}{\prod_{k=0}^n |c\alpha_k - a|^2} \oint_{\Gamma} \frac{ds}{(s - \alpha_n) \left(s - \frac{a\bar{\alpha}_n + b}{c\alpha_n - a} \right)} = \\
&= - \frac{(a^2 + bc)^n (c\alpha_n - a)}{\prod_{k=0}^n |c\alpha_k - a|^2} \operatorname{Res}_{s = \frac{a\bar{\alpha}_n + b}{c\alpha_n - a}} \frac{1}{(s - \alpha_n) \left(s - \frac{a\bar{\alpha}_n + b}{c\alpha_n - a} \right)} = \frac{(a^2 + bc)^n}{\prod_{k=0}^{n-1} |c\alpha_k - a|^2} \frac{1}{c|\alpha_n|^2 - 2a \operatorname{Re} \alpha_n - b}
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $n > m$. Tada je:

$$\begin{aligned}
W_n(s) W_m^*(\bar{s}) &= - \frac{(a^2 + bc)^m (c\alpha_m - a)}{\prod_{k=0}^m |c\alpha_k - a|^2} \frac{cs - a \prod_{k=m+1}^{n-1} \left(s - \frac{a\bar{\alpha}_k + b}{c\alpha_k - a} \right)}{\prod_{k=m}^n (s - \alpha_k)}, \\
i(W_n, W_n) &= \frac{(a^2 + bc)^m (c\alpha_m - a)}{\prod_{k=0}^m |c\alpha_k - a|^2} \oint_{\Gamma} \frac{\prod_{k=m+1}^{n-1} \left(s - \frac{a\bar{\alpha}_k + b}{c\alpha_k - a} \right)}{\prod_{k=m}^n (s - \alpha_k)} = 0.
\end{aligned}$$

Konačno dobijamo:

$$(W_n, W_m) = \oint_{\Gamma} W_n(s) W_m^*(\bar{s}) ds = \frac{(a^2 + bc)^n}{\prod_{k=0}^{n-1} |c\alpha_k - a|^2 (c|\alpha_n|^2 - 2a \operatorname{Re} \alpha_n - b)} \delta_{n,m}.$$

Dodatak 3

a) Matlab kod za određivanje verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra trećeg reda upotrebom Monte Karlo metode

```

R=[(randn(10000000,1)*0.246)+1.138 (randn(10000000,1)*0.338)-0.289
(randn(10000000,1)*0.179)-0.003];
k=0;
for i=1:10000000
    delta1=[-R(i,3) 1
            1 -R(i,3)];
    delta2=[-R(i,3) 0 1 -R(i,1)
            -R(i,2) -R(i,3) 0 1
            1 0 -R(i,3) -R(i,2)
            -R(i,1) 1 0 -R(i,3)];

```

```

delta3=[-R(i,3) 0 0 1 -R(i,1) -R(i,2);
-R(i,2) -R(i,3) 0 0 1 -R(i,1)
-R(i,1) -R(i,2) -R(i,3) 0 0 1
1 0 0 -R(i,3) -R(i,2) -R(i,1)
-R(i,1) 1 0 0 -R(i,3) -R(i,2)
-R(i,2) -R(i,1) 1 0 0 -R(i,3)];
if ((det(delta1)<=0) && (det(delta2)>=0) && (det(delta3)<=0))
    k=k+1;
end
end
end

```

b) Matlab kod za određivanje verovatnoće stabilnosti predikcionog filtra četvrtog reda upotrebom Monte Karlo metode

```

R=[(randn(10000000,1)*0.257)+1.140 (randn(10000000,1)*0.396)-0.318
(randn(10000000,1)*0.272)+0.105 (randn(10000000,1)*0.141)-0.094];
k=0;
for i=1:10000000
    delta1=[-R(i,4) 1
1 -R(i,4)];
    delta2=[-R(i,4) 0 1 -R(i,1)
-R(i,3) -R(i,4) 0 1
1 0 -R(i,4) -R(i,3)
-R(i,1) 1 0 -R(i,4)];
    delta3=[-R(i,4) 0 0 1 -R(i,1) -R(i,2)
-R(i,3) -R(i,4) 0 0 1 -R(i,1)
-R(i,2) -R(i,3) -R(i,4) 0 0 1
1 0 0 -R(i,4) -R(i,3) -R(i,2)
-R(i,1) 1 0 0 -R(i,4) -R(i,3)
-R(i,2) -R(i,1) 1 0 0 -R(i,4)];
    delta4=[-R(i,4) 0 0 0 1 -R(i,1) -R(i,2) -R(i,3)
-R(i,3) -R(i,4) 0 0 0 1 -R(i,1) -R(i,2)
-R(i,2) -R(i,3) -R(i,4) 0 0 0 1 -R(i,1)
-R(i,1) -R(i,2) -R(i,3) -R(i,4) 0 0 0 1
1 0 0 0 -R(i,4) -R(i,3) -R(i,2) -R(i,1)
-R(i,1) 1 0 0 0 -R(i,4) -R(i,3) -R(i,2)
-R(i,2) -R(i,1) 1 0 0 0 -R(i,4) -R(i,3)
-R(i,3) -R(i,2) -R(i,1) 1 0 0 0 -R(i,4)];
    if ((det(delta1)<=0) && (det(delta2)>=0) && (det(delta3)<=0) &&
(det(delta4)>=0))

```

k=k+1;

end

end

Dodatak 4

Izvorni i ujedno opšti oblik Haritonovljevog kriterijuma sadrži skup od osam polinoma. Naime koeficijenti u opštem slučaju su kompleksni brojevi. Karakteristična jednačina ima izvorni oblik:

$$\sum_{k=0}^n (a_k + ib_k) z^{n-k}, \quad a_k \in [\underline{a}_k, \overline{a}_k], b_k \in [\underline{b}_k, \overline{b}_k], k = 0, 1, \dots, n.$$

Koeficijenti u Haritonovljevim polinomima od prvog do poslednjeg su redom definisani na sledeći način. Za prvi:

$$a_{n-2k-1}(a_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{a_{n-2k-1}}(\overline{a_{n-2k}}), & k \text{ parno,} \\ a_{n-2k-1}(a_{n-2k}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$
$$b_{n-2k-1}(b_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{b_{n-2k-1}}(\overline{b_{n-2k}}), & k \text{ parno,} \\ b_{n-2k-1}(b_{n-2k}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$

za drugi:

$$a_{n-2k-1}(a_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{a_{n-2k-1}}(\overline{a_{n-2k}}), & k \text{ parno,} \\ a_{n-2k-1}(a_{n-2k}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$
$$b_{n-2k-1}(b_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{b_{n-2k-1}}(\overline{b_{n-2k}}), & k \text{ parno,} \\ b_{n-2k-1}(b_{n-2k}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$

za treći:

$$a_{n-2k-1}(a_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{a_{n-2k-1}}(\overline{a_{n-2k}}), & k \text{ parno,} \\ a_{n-2k-1}(a_{n-2k}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$
$$b_{n-2k-1}(b_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{b_{n-2k-1}}(\overline{b_{n-2k}}), & k \text{ parno,} \\ b_{n-2k-1}(b_{n-2k}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$

za četvrti:

$$a_{n-2k-1}(a_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{a_{n-2k-1}(a_{n-2k})}, & k \text{ parno,} \\ a_{n-2k-1}(\overline{a_{n-2k}}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$

$$b_{n-2k-1}(b_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{b_{n-2k-1}(b_{n-2k})}, & k \text{ parno,} \\ b_{n-2k-1}(\overline{b_{n-2k}}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$

za peti:

$$a_{n-2k-1}(a_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{a_{n-2k-1}(\overline{a_{n-2k}})}, & k \text{ parno,} \\ a_{n-2k-1}(\overline{a_{n-2k}}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$

$$b_{n-2k-1}(b_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{b_{n-2k-1}(b_{n-2k})}, & k \text{ parno,} \\ b_{n-2k-1}(\overline{b_{n-2k}}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$

za šesti:

$$a_{n-2k-1}(a_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{a_{n-2k-1}(a_{n-2k})}, & k \text{ parno,} \\ a_{n-2k-1}(\overline{a_{n-2k}}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$

$$b_{n-2k-1}(b_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{b_{n-2k-1}(b_{n-2k})}, & k \text{ parno,} \\ b_{n-2k-1}(\overline{b_{n-2k}}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$

za sedmi:

$$a_{n-2k-1}(a_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{a_{n-2k-1}(\overline{a_{n-2k}})}, & k \text{ parno,} \\ a_{n-2k-1}(\overline{a_{n-2k}}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$

$$b_{n-2k-1}(b_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{b_{n-2k-1}(b_{n-2k})}, & k \text{ parno,} \\ b_{n-2k-1}(\overline{b_{n-2k}}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$

i za osmi:

$$a_{n-2k-1}(a_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{a_{n-2k-1}(\overline{a_{n-2k}})}, & k \text{ parno,} \\ a_{n-2k-1}(\overline{a_{n-2k}}), & k \text{ neparno,} \end{cases}$$

$$b_{n-2k-1}(b_{n-2k}) = \begin{cases} \overline{b_{n-2k-1}(b_{n-2k})}, & k \text{ parno,} \\ b_{n-2k-1}(\overline{b_{n-2k}}), & k \text{ neparno.} \end{cases}$$

Literatura

- Adelman, H. M., R. F. Haftka, "Sensitivity analysis of discrete structural systems", *AIAA Journal*, vol. 24, no. 5, pp. 823-832, 1986. <https://doi.org/10.2514/3.48671>
- Akhiezer, N. *Theory of approximation*, New York, NY: Dover Publications, 1956.
- Al-korj, A., S. M. Veres, "Model-Based Predictive Adaptive Delta Modulation", *IFAC*, vol. 40, no. 13, pp. 435-440, 2007. <http://doi.org/10.3182/20070829-3-RU-4911.00067>
- Antić D., B. Danković, S. Nikolić, M. Milojković, Z. Jovanović, "Approximation based on orthogonal and almost orthogonal functions", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 1349, no. 1, pp. 323–336, 2012(a). <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2011.11.006>.
- Antić, D., S. Nikolić, M. Milojković, N. Danković, Z. Jovanović, S. Perić, "Sensitivity analysis of imperfect systems using almost orthogonal filters", *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 8, no. 6, pp. 79–94, 2011.
- Antić, D., Z. Jovanović, N. Danković, M. Spasić, S. Stankov, "Probability estimation of defined properties of the real technical systems with stochastic parameters", *Scientific Bulletin of the "Politehnica" University of Timișoara, Romania, Transactions on Automatic Control and Computer Science*, 2012, vol. 57, no. 71-2, pp. 67-74, 2012(b). <http://www.ac.upt.ro/journal>
- Antić, D., Z. Jovanović, V. Nikolić, M. Milojković, S. Nikolić, N. Danković, "Modeling of cascade-connected systems using quasi-orthogonal functions", *Electronics and Electrical Engineering*, vol. 18., no. 10., pp. 3–8, 2012(c). <http://dx.doi.org/10.5755/j01.eee.18.10.3051>.
- Atal, B. S., "The history of linear prediction", *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 23, pp. 154–161, 2006. <http://dx.doi.org/10.1109/MSP.2006.1598091>
- Badalyan, G. V., Generalisation of Legendre polynomials and some of their applications, *Akad. Nauk. Armyan. SSR Izv. Ser. Fiz.-Mat. Estest. Tekhn. Nauk*, vol. 8, no. 5, pp. 1–28, 1955.
- Benesty, J., M. Sondhy, Y. Huang, "Introduction to speech processing", In *Springer handbook of speech processing*, Eds. Benesty, J., Mohan Sondhi, M., Huan, Y. A., Springer, Chapter 7, 2008. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-49127-9_7

- Bodin, P., L. F. Villemoes, B. Wahlberg, "Selection of best orthonormal rational basis", *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 38, no. 4, pp. 995–1032, 2000. <http://dx.doi.org/10.1137/S036301299732818X>.
- Borrie, J. A., "Stochastic systems for engineers", *Prentice Hall, New York*, 1996.
- Borwein, P. B., T. Erdelyi, J. Zhang, "Müntz systems and orthogonal Müntz-Legendre polynomials", *Transactions on American Mathematical Society*, vol. 342, no. 2, 523–542, 1994. <http://dx.doi.org/10.2307/2154639>
- Borwein, P., T. Erdelyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Springer Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 1995.
- Burg, J. P., "Maximum entropy spectral analysis Ph.D. dissertation", *Stanford University*, Stanford, 1975.
- Chihara, T. S., *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- Combettes, P. L., H. J. Trussell, "Stability of the linear prediction filters: A set theoretic approach", *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, New York, USA, April 11.-14., 1988., vol. 4, pp. 2288.-2291. <http://dx.doi.org/10.1109/ICASSP.1988.197094>
- Danković B: N., Z. H. Perić, D. S. Antić, S. Lj. Perić, S. S. Nikolić, "Robustness of the Prediction Filter in Differential Pulse Code Modulation System", *Electronics and Electrical Engineering*, vol. 22, no. 5, pp. 74-78, 2016. [http://dx.doi.org/10.5755/j01.eie.22.5.16347\(a\)](http://dx.doi.org/10.5755/j01.eie.22.5.16347(a)).
- Danković N. B., D. S. Antić, Z. H. Perić, A. V. Jocić, S. S. Nikolić, S. Lj. Perić, "The Probability of Stability Estimation of an Arbitrary Order DPCM Prediction Filter: Comparison between the Classical Approach and the Monte Carlo Method", *Information Technology and Control*, vol. 46, no. 2, pp. 28–38, 2017. <http://dx.doi.org/10.5755/j01.itc.46.2.14038>
- Danković, B., B. M. Vidojković, B. Vidojković, "The probability stability estimation of discrete-time systems with random parameters", *Control and Intelligent Systems*, vol. 35, no. 2, pp. 134-139, 2007. <http://dx.doi.org/10.2316/Journal.201.2007.2.201-1618>
- Danković, B., D. Antić, Z. Jovanović, "Upravljanje procesima", *Elektronski fakultet*, Niš, 2010(a).

- Danković, B., G. V. Milovanović, S. Rančić, "Malmquist and Müntz orthogonal systems and applications", In T. M. Rassias, T. (ed.), *Inner product spaces and applications*, pp. 22–41, Harlow: Addison-Wesley Longman, 1997.
- Danković, B., S. Nikolić, M. Milojković, Z. Jovanović, "A class of almost orthogonal filters", *Journal of Circuits, Systems and Computers*, vol. 18, no. 5, pp. 923–931, 2009. <http://dx.doi.org/10.1142/S0218126609005447>
- Danković, B., Z. Jovanović, "On the reliability of discrete-time control systems with random parameters", *Quality technology and Quantitative Management*, vol. 2, no. 1, pp. 53–63, 2005. <http://dx.doi.org/10.1080/16843703.2005.11673080>
- Danković, N. B., D. S. Antić, S. S. Nikolić, S. Lj. Perić, M. T. Milojković, "A new class of cascade orthogonal filters based on a special inner product with application in modeling of dynamical systems", *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 13, no. 7, pp. 63–82, 2016. [http://dx.doi.org/10.12700/APH.13.7.2016.7.4\(b\)](http://dx.doi.org/10.12700/APH.13.7.2016.7.4(b))
- Danković, N. B., Z. H. Perić, "A probability of stability estimation of DPCM system with the first order predictor", *Facta Universitatis, Series: Automatic Control and Robotics*, vol. 12, no. 2, pp. 131–138, 2013. <http://casopisi.junis.ni.ac.rs/index.php/FUAutContRob/article/view/51/12>
- Danković, N., S. Nikolić, M. Spasić, "On the Sensitivity of the Telecommunications Systems", *Facta Universitatis Series: Automatic Control and Robotics*, vol. 9, no. 1, pp. 123–130, 2010(b).
- Danković, N., Z. Perić, D. Antić, D. Mitić, M. Spasić, "On the sensitivity of the recursive filter with arbitrary order predictor in DPCM system", *Serbian Journal of Electrical Engineering*, vol. 11, no. 4, pp. 609–616, 2014. <http://dx.doi.org/10.2298/SJEE1404609D>
- Das, A., *Digital Communication, Signals and Communication Technology*, Chapter 2, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. <http://dx.doi.org/10.1109/IPCon.2014.6995348>
- de Bruin, M. G., "Polynomials orthogonal on a circular arc", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 31, pp. 253–266, 1990. [http://doi.org/10.1016/0377-0427\(90\)90168-Y](http://doi.org/10.1016/0377-0427(90)90168-Y)
- Deif, A. S., *Sensitivity Analysis in Linear Systems*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1986.

- Desai, U. B., "A State-Space Approach to Orthogonal Digital Filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 38, no. 2, pp. 160-169, 1991.
<http://dx.doi.org/10.1109/31.68294>
- Despotović, V., Z. Perić, L. Velimirović, V. Delić, "DPCM with Forward Gain-Adaptive Quantizer and Switched Predictor for High Quality Speech Signals", *Advances in Electrical and Computer Engineering*, vol. 10, no. 4, pp. 95-98, 2010.
- Dewilde, P., E. Deprettere, "Orthogonal cascade realization of real multiport digital filters", *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 8, pp. 245-272, 1980.
<http://dx.doi.org/10.1002/cta.4490080307>
- Djrbashian, M. M., "A survey on the theory of orthogonal systems and some open problems", In P. Nevai (ed.), *Orthogonal polynomials*, pp. 135–146, Springer, Netherlands, 1990.
http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-0501-6_6.
- Djrbashian, M. M., "Orthogonal systems of rational functions on the circle with given set of poles", *Doklad. Akad. Nauk SSSR+*, vol. 147, pp. 1278–1281, 1962.
- Durbin, J., "Efficient estimation of parameters in moving-average models", *Biometrika*, vol. 46, pp. 306–316, 1959, no. 1-2. <https://doi.org/10.1093/biomet/46.3-4.306>
- Fira, C., L. Goras, "An ECG signals compression method and its validation using NNs", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 55, no. 4, pp. 1319-1326, 2008.
<http://dx.doi.org/10.1109/TBME.2008.918465>
- Fishman, G. S., "Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications", *Springer*, New York, 1996. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-2553-7>
- Freud, G., *Orthogonal Polynomials*, Akademiai Kiado/Pergamon, Budapest, 1971.
- Gautschi, W., H. Landau, G. V. Milovanović, "Polynomials orthogonal on the semicircle II", *Constructive Approximation*, vol. 3, pp. 389–404, 1987.
- Gautschi, W., "Orthogonal polynomials: applications and computation", *Acta Numerica (Cambridge)*, pp. 45–119, 1996. <http://dx.doi.org/10.1017/S0962492900002622>
- Gentle, J. E. *Random Number Generation and Monte Carlo Methods. Statistics and Computing*, 2nd edition, Springer, New York, 1998. <http://dx.doi.org/10.1007/b97336>
- Geronimus, Ya. L., "Orthogonal polynomials", *Amer. Math. Soc. Transl.* vol. 108, pp. 37–130, 1977.
- Geronimus, Ya. L., "Polynomials orthogonal on a circle and interval", *Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit.*, Moscow, 1958. (in Russian)

- Goldberg, D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley, Reading, 1989.
- Goldstein, L. H., B. Liu, "Deterministic and stochastic stability of adaptive differential pulse code modulation", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 23, no. 4, pp. 445-453, 1977. <http://dx.doi.org/10.1109/TIT.1977.1055754>
- Gould, H., J. Tobochnik, W. Christian, *An Introduction to Computer Simulation Methods*, 3rd edition, Chapter 12, 2001.
- Gray, A. H., J. D. Markel, "A normalized digital filter structure", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 23, pp. 268-277, 1975. <http://dx.doi.org/10.1109/TASSP.1975.1162680>
- Gumovski, R., *Sensitivity of the Control Systems*, Nauka, Moscow, 1993, (in Russian).
- Hansell, G. E., *Filter design and evaluation*, Van Nostrand Reinhold Co, 1969.
- Haykin, S., *Adaptive Filter Theory*, 4th edn. PrenticeHall, Upper Saddle River, 2002.
- Henrot, D., C. T. Mullis, "A modular and orthogonal digital filter structure for parallel processing", in *proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Boston, pp. 623-626, 1983.
- Heuberger, P., P. M. J. Van den Hof, B. Wahlberg, *Modelling and identification with rational orthogonal basis functions*, London: Springer-Verlag, 2005.
- Huang, Y., J. Benesty, J. Chen, *Acoustic MIMO Signal Processing*, Springer, New York 2006.
- Internet dokument dostupan na web adresi: http://www.atmel.com/images/atmel-2486-8-bit-avr-microcontroller-atmega8_1_datasheet.pdf, 2013
- Itakura, F., S. Saito, "A statistical method for estimation of speech spectral density and formant frequencies", *Electron. Commun. Jpn.*, vol. 53, no. A, pp. 36-43, 1970.
- Jalaliddine, S. M. S., C. G. Hutchens, R. D. Strattan, W. Coberly, "ECG data compression techniques-a unified approach", *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 37, no. 4, pp. 329-343, 1990. <http://dx.doi.org/10.1109/10.52340>
- Jayant, N. S., P. Noll, *Digital Coding of Waveforms, Principles and Applications to Speech and Video*, Prentice Hall, Chapter 6, 1984.
- Jocić, A. V., Z. H. Perić, M. R. Dinčić, D. B. Denić, "Compression of the highly correlated measurement signals using DPCM technique," *Electronics and Electrical Engineering*, vol. 20, no. 4, pp. 76-79, 2014. <http://dx.doi.org/10.5755/j01.eee.20.4.6889>

- Jovanović, Z., N. Danković, M. Spasić, S. Stankov, Z. Ičić, "Practical testing of the probability of stability of the discrete system with random parameters", In: *Proceedings of 10th International Conference on Applied Electromagnetics, (IIEC 2011)*, Niš, Serbia, Sept. 25.-29., 2011.
- Kailath, T. "A Theorem of I. Schur and its Impact on Modern Signal Processing, Operator Theory: Advances and Applications", In *I. Schur Methods in Operator Theory and Signal Processing*, Ed. I. Gohberg, 1986, *Birkhäuser Basel*, vol. 18, pp. 9-30. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-5483-2_2
- Karnavas, W. J., P. J. Sanchez, A. T. Bahill, "Sensitivity analyses of continuous and discrete systems in the time and frequency domains", *IEEE Transactions. on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 23, no. 2, pp. 408-501, 1993. <http://dx.doi.org/10.1109/21.229461>
- Kharitonov, V. L., "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations", *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 14, no. 11, pp. 2086–2088, 1978. (In Russian)
- Kharitonov, V. L., "Stability of one class of discrete-time systems", *Leningrad State University*, 1990. (in Russian)
- Kristinsson, K., "System Identification and Control Using Genetic Algorithms", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 22, no. 5, pp. 1033-1046, 1992.
- Levinson, N., "The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction", *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 25, no. 4, pp. 261–278, 1947. <http://dx.doi.org/10.1002/sapm1946251261>
- Lukatela, G., D. Drajić, G. Petrović, *Digitalne telekomunikacije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1978.
- Ma, J., "High-speed VLSI state-space orthogonal IIR digital filters using matrix lookahead", *IEEE Workshop on Signal Processing Systems, 1998. SIPS 98*, October 1998, pp. 417-426, <http://dx.doi.org/10.1109/SIPS.1998.715804>
- Ma, J., Keshab K. Parhi, E. F. Deprettere, "Pipelined CORDIC-based cascade orthogonal IIR digital filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, November 2000, vol. 47, no. 11, pp. 1238-1253, <http://dx.doi.org/10.1109/82.885131>
- Macchi, O., C. Uhl, "The stability of DPCM transmission system", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 1992, vol. 39, no. 10, pp. 705-722. <http://dx.doi.org/10.1109/82.199897>

- Malyshev, V. V., M. N. Krasilshikov, V. I. Karlov, *Optimization of Observation and Control Processes*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA Education Series, 1992.
- Mansour, M., S. Balemi, W. Truol, *Robustness of Dynamic Systems with Parameter Uncertainties*. Birkhauser, Berlin, 1992. <https://doi.org/10.2514/3.20587>
- Marinković, S. B., B. Danković, M. S. Stanković, P. M. Rajković, "Orthogonality of some sequences of the rational functions and the Müntz polynomials", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 163, no. 2, pp. 419–427, 2004. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2003.08.037>.
- Markel, J. D., A. H. Gray Jr., *Linear Prediction of Speech*, Springer, New York, 1976.
- McCarthy, P. C., J. E. Sayre, B. L. R. Shawyer, "Generalized Legendre polynomials", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 177, no. 2, pp. 530–537, 1993. <http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.1993.1275>.
- Metropolis, N., S. Ulam, "The Monte Carlo method", *Journal of American Statistical Association*, vol. 24, no. 247, pp. 335–341, 1949.
- Mi, W., T. Qian, F. Wan, "A fast adaptive model reduction method based on Takenaka–Malmquist systems", *Systems and Control Letters*, vol. 61, no. 1, pp. 223–230, 2012. <http://doi.org/10.1016/j.sysconle.2011.10.016>.
- Milojković, M. T., D. S. Antić, S. S. Nikolić, Z. D. Jovanović, S. Lj. Perić, "On a new class of quasi-orthogonal filters", *International Journal of Electronics*, vol. 100, no. 10, pp. 1361–1372, 2013. <http://dx.doi.org/10.1080/00207217.2012.743087>.
- Milojković, M., S. Nikolić, B. Danković, D. Antić, Z. Jovanović, "Modelling of dynamical systems based on almost orthogonal polynomials", *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, vol. 16, no. 2, pp. 133–144, 2010. <http://dx.doi.org/10.1080/13873951003740082>.
- Milosavljević, Č., *Osnovi Automatike*, II deo, Elektronski fakultet u Nišu, 2002.
- Milovanović, G. V., B. Danković, S. Rančić, "Some Müntz orthogonal systems", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 99, no. 1–2, pp. 299–310, 1998. [http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427\(98\)00164-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427(98)00164-2).
- Milovanović, G. V., D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific, Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 1994.
- Milovanović, G. V., *Numerička analiza*, I deo, Naučna knjiga, Beograd, 1988.

- Milovanović, G. V., *Some nonstandard types of orthogonality (A survey)*, Filomat (Formerly: Zb. Rad.), vol. 9, pp. 517–542, 1995.
- Mitchel, M., *An Introduction to Genetic Algorithms*, MIT Press, Cambridge, 1996.
- Mitchell, H. B., D. D. Estrakh, A modified OWA operator and its use in Lossless DPCM image compression. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 5, no. 4, pp. 429-436, 1997.
<http://dx.doi.org/10.1142/S0218488597000324>
- Nevai, P., G. Freud, "Orthogonal polynomials and Christoffel functions, A case study", *Journal of Approximation Theory*, vol. 48, pp. 3–167, 1986.
[https://doi.org/10.1016/0021-9045\(86\)90016-X](https://doi.org/10.1016/0021-9045(86)90016-X)
- Nikolić, S. S., D. S. Antić, S. L. Perić, N. B. Danković, M. T. Milojković, "Design of generalised orthogonal filters: Application to the modelling of dynamical systems", *International Journal of Electronics*, vol. 103, no. 2, pp. 269–280, 2016.
<http://dx.doi.org/10.1080/00207217.2015.1036367>.
- Nikolić, S., "Primena Generalizovanih Klasičnih Filtara u Inteligentnim Sistemima Upravljanja", *Doktorska disertacija*, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet u Nišu, 2014.
- Nikolić, S., D. Antić, B. Danković, M. Milojković, Z. Jovanović, S. Perić, "Orthogonal Functions Applied in Antenna Positioning", *Advances in Electrical and Computer Engineering*, vol. 10, no. 4, pp. 35-42, 2010. <http://dx.doi.org/10.4316/aece.2010.04006>
- Ninnes, B. M., F. Gustafson, "A unifying construction of orthonormal bases for system identification", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 4, pp. 515–521, 1997. <http://dx.doi.org/10.1109/9.566661>.
- Pauš, Ž., *Probability: Information, Stochastic processes*, School book, Zagreb, 1974, (in Croatian).
- Perić, Z., A. Jocić, J. Nikolić, L. Velimirović, D. Denić, "Analysis of differential pulse code modulation with forward adaptive Lloyd-Max's quantizer for low bit-rate speech coding", *Revue roumanie des sciences techniques*, vol. 58, no. 4, pp. 424-434, 2013(a).
<http://www.revue.elth.pub.ro/index.php?action=main&year=2013&issue=4>
- Perić, Z., D. Denić, J. Nikolić, A. Jocić, A. Jovanović, "DPCM quantizer adaptation method for efficient ECG signal compression", *Journal of Communications Technology and Electronics*, vol. 58, no. 12, pp. 1241-1250, 2013(b).
<http://dx.doi.org/10.1134/S1064226913130068>

- Quackenbush, S. R., T. P. Barnwell, M. A. Clements, *Objective Measures of Speech Quality*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1988.
- Rao, S. K., T. Kailath, "Orthogonal digital filters for VLSI implementation", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 31, pp. 933-945, 1984. <http://dx.doi.org/10.1109/TCS.1984.1085452>
- Sadik, A. Z., Z. M. Hussain, X. Yu, P. O'Shea, "An approach for stability analysis of a single-bit high-order digital sigma-delta modulator", *Digital Signal Processing*, vol. 17., pp. 1040-1054, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2006.11.007>
- Shlien, S, "A geometric description of stable linear predictive coding digital filters", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 31, no. 4, pp. 545-548, 1985. <http://dx.doi.org/10.1109/TIT.1985.1057070>
- Smith, S. W., *Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists*, Chapter 20, Newnes, 2003.
- Song, X., T. Viero, Y. Neuvo, "Interframe DPCM with robust median-based predictors for transmission of image sequences over noise channel", *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 5, no. 1, pp. 16–25, 1996. <http://dx.doi.org/10.1109/83.481667>
- Steele, R., *Delta modulation systems*, Wiley, New York, 1975.
- Stojić, M. R., *Digitalni sistemi upravljanja*, Akademska misao, Beograd, 2004.
- Suetin, P. K., *Classical Orthogonal Polynomials*, Nauka, Moscow, 1976. (in Russian)
- Szegő, G., *Orthogonal Polynomials*, *American Mathematical Society*, New York, 1938.
- Szegő, G., *Orthogonal polynomials*, Providence, RI: American Mathematical Society, Colloquium Publications, 1975.
- Taralova, I., D. Fournier-Prunaret, "Dynamical Study of a Second Order DPCM Transmission System Modeled by a Piece-Wise Linear Function", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 49, no. 11, pp. 1592-1609, 2002. <http://dx.doi.org/10.1109/TCSI.2002.804592>
- Taslakyan, A. K., "Some properties of Legendre quasi-polynomials with respect to a Müntz system", *Mathematics*, vol. 2, pp. 179–189, 1984.
- Tomović, R., *Sensitivity Analysis of Dynamic Systems*, McGraw-Hill, New York, 1983.
- Trajković, D., V. Nikolić, D. Antić, B. Danković, "Analyzing, modeling and simulation of the cascade connected transporters in tire industry using signal and bond graphs", *Machine Dynamics Problems*, vol. 29, no. 3, pp. 91–106, 2005.

- Uhl, C., O. Macchi, "The Stability of a DPCM Transmission System with an Order t Predictor", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* vol. 40. no. 1, pp. 50-55, 1993. <http://dx.doi.org/10.1109/81.215342>
- Vaidyanathan, P. P., "A unified approach to orthogonal digital filters and wave digital filters, based on LBR two-pair extraction", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 32, no. 7, pp. 673-688, 1985. <http://dx.doi.org/10.1109/TCS.1985.1085774>
- Vaidyanathan, P. P., V. Liu, "An improved sufficient condition for absence of limit cycles in digital filters", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 34, no. 3, pp. 319-322, 1987. <http://dx.doi.org/10.1109/TCS.1987.1086118>
- Vidojković, B., Z. Jovanović, M. Milojković, "The probability stability estimation of the system based on the quality of the components", *Facta Universitatis, Series: Electronics and Energetics*, vol. 19, no. 3, pp. 385-391, 2006. <http://dx.doi.org/10.2298/FUEE0603385V>
- Walsh, J. L., *Interpolation and Approximation in the Complex Plane*, 5th ed., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969.
- Zhou, K., J. C. Doyle, K. Glover, *Robust Optimal Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995. [http://dx.doi.org/10.1016/0967-0661\(96\)83721-X](http://dx.doi.org/10.1016/0967-0661(96)83721-X)
- Zlatković, B. M., B. M. Samardžić, "Određivanje korelacije između verovatnoće stabilnosti i pouzdanosti kod diskretnih sistema", *Tehnika*, vol. 70, no. 4, pp. 721-726, 2015. <http://dx.doi.org/10.5937/tehnika1504723Z>
- Zlatković, B. M., B. Samardžić, "One way for the probability of stability estimation of discrete systems with randomly chosen parameters", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, vol. 29, no. 3, pp. 329-34, 2012. <http://dx.doi.org/10.1093/imamci/dnr041>
- Zschunke, W., "DPCM picture coding with adaptive prediction", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 25, no. 11, pp. 1295-1302, 1977. <http://dx.doi.org/10.1109/TCOM.1977.1093771>

Biografija autora

Nikola B. Danković, rođen je 30. 07. 1984. godine u Pirotu. Završio je osnovnu školu “Vuk Karadžić” kao nosilac Vukove diplome i Gimnaziju u Pirotu. Dobitnik je mnogobrojnih priznanja i nagrada iz matematike i fizike u toku školovanja (treće mesto na republičkom takmičenju iz matematike u Pančevu), učenik generacije prirodno-matematičkog smera. Elektronski fakultet u Nišu, smer Telekomunikacije, upisao je školske 2003/04. godine. Dobitnik je pohvalnice i nagrade za izuzetne rezultate u studiranju i prosek ocena iznad 9 na prvoj godini studija. Diplomirao je 25. 03. 2009. godine, s prosečnom ocenom tokom studija 9,04 i ocenom 10 na diplomskom ispitu i time stekao zvanje diplomiranog inženjera elektrotehnike za telekomunikacije.

Završio je dva seminarra: “Pristupne tehnologije – DSL, KDS” i “Javne mreže za prenos podataka” na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Pohađao je i dva seminarra u okviru Tempus projekata *Development of Lifelong Learning Framework in Serbia – DELFIS*.

Od 01. 06. 2010. god. zaposlen je na Elektronskom fakultetu u Nišu na Katedri za automatiku najpre kao saradnik za naučno-istraživački rad, a potom i kao saradnik u nastavi. U zvanje asistent izabran je 01. 11. 2013. god. U okviru nastavnog procesa držao je računске i laboratorijske vežbe iz desetak predmeta pri Katedri za automatiku. Član je organizacionog odbora međunarodne konferencije SAUM. Angažovan je na dva domaća projekta finansirana od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije i dva međunarodna projekta.

Do sada je publikovao skoro pedeset naučnih radova koji su štampani u domaćim i međunarodnim časopisima i zbornicima radova sa konferencija u zemlji i inostranstvu. Takođe, koautor je šest tehničkih rešenja.

Spisak referenci autora

a) Radovi objavljeni u međunarodnim časopisima sa SCI liste

- [a1] Dragan Antić, Saša Nikolić, Marko Milojković, **Nikola Danković**, Zoran Jovanović, Staniša Perić, "Sensitivity Analysis of Imperfect Systems Using Almost Orthogonal Filters", *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 8, no. 6, 2011, pp. 79-94., **Print ISSN: 1785-8860**, www.uni-obuda.hu/journal, **Publisher: Óbuda University, Hungary**. December 2011. (M23)
- [a2] Dragan Antić, Zoran Jovanović, Vlastimir Nikolić, Marko Milojković, Saša Nikolić, **Nikola Danković**, "Modeling of Cascade-connected Systems using Quasi-orthogonal Functions", *Electronics and Electrical Engineering*, vol. 18, no. 10, 2012, pp. 3-8. **Print ISSN: 1392-1215**, (Doi No: <http://dx.doi.org/10.5755/j01.eee.18.10.3051>), **Publisher: Kaunas University of Technology**. December 2012. (M23)
- [a3] Saša S. Nikolić, Dragan S. Antić, Staniša Lj. Perić, **Nikola B. Danković**, Marko T. Milojković, "Design of Generalised Orthogonal Filters: Application to the Modelling of Dynamical Systems", *International Journal of Electronics*, vol. 103, no. 2, 2016, pp. 269-280. **Print ISSN: 0020-7217**, (Doi No: <http://dx.doi.org/10.1080/00207217.2015.1036367>), **Publisher: Taylor & Francis**. March 2016. (M23)
- [a4] **Nikola B. Danković**, Zoran H. Perić, Dragan S. Antić, Staniša Lj. Perić, Saša S. Nikolić, "Robustness of the Prediction Filter in Differential Pulse Code Modulation System", *Electronics and Electrical Engineering*, vol. 22, no. 5, 2016, pp. 74-78. **Print ISSN: 1392-1215**, (Doi No: <http://dx.doi.org/10.5755/j01.eie.22.5.16347>), **Publisher: Kaunas University of Technology**. October 2016. (M23)
- [a5] **Nikola B. Danković**, Dragan S. Antić, Saša S. Nikolić, Staniša Lj. Perić, Marko T. Milojković, "A New Class of Cascade Orthogonal Filters based on a Special Inner Product with Application in Modeling of Dynamical Systems", *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 13, no. 7, 2016, pp. 63-82. **Print ISSN: 1785-8860**, (Doi No: <http://dx.doi.org/10.12700/APH.13.7.2016.7.4>), **Publisher: Óbuda University, Hungary**. December 2016. (M23)
- [a6] **Nikola B. Danković**, Dragan S. Antić, Zoran H. Perić, Aleksandar V. Jocić, Saša S. Nikolić, Staniša Lj. Perić, "The Probability of Stability Estimation of an Arbitrary Order DPCM Prediction Filter: Comparison between the Classical Approach and the Monte Carlo Method", *Information Technology and Control*, vol. 46, no. 2, pp. 28-38. **Print ISSN: 1392-124X**, (Doi No: <http://dx.doi.org/10.5755/j01.itc.46.2.14038>), **Publisher: Kaunas University of Technology**. June 2017. (M23)

b) Radovi objavljeni u časopisima međunarodnog značaja verifikovani posebnom odlukom

- [b1] **Nikola Danković**, Darko Mitić, Marko Milojković, Stanko Stankov, Miroslav Milovanović, "Thermodynamic Model of the Protector Cooling System with Applications", *FACTA UNIVERSITATIS Series: Electronics and Energetics*, vol. 26, no. 1, 2013, pp. 53-60., **Print ISSN: 0353-3670**, (Doi No: <http://dx.doi.org/10.2298/FUEE1301053D>), **Publisher: University of Niš**. April 2013. (M24)

[b2] Saša S. Nikolić, Dragan Antić, Staniša Perić, **Nikola Danković**, Miodrag Spasić, Miroslav Milovanović, "Orthogonal Hybrid-Fuzzy Controllers", *FACTA UNIVERSITATIS Series: Automatic Control and Robotics*, vol. 16, no. 1, 2017, pp. 25–35., **Print ISSN: 1820-6417**, (Doi No: <http://dx.doi.org/10.22190/FUACR1701025N>), *Publisher: University of Niš*. May 2017. (M24)

c) **Radovi objavljeni u nacionalnim časopisima i međunarodnim časopisima van SCI liste**

[c1] **Nikola Danković**, Saša Nikolić, Miodrag Spasić, "On the Sensitivity of the Telecommunications Systems", *FACTA UNIVERSITATIS Series: Automatic Control and Robotics*, vol. 9, no. 1, 2010, pp. 123-130., **Print ISSN: 1820-6417**, <http://facta.junis.ni.ac.rs>, *Publisher: University of Niš*. (M52)

[c2] **Nikola Danković**, Miodrag Spasić, Zoran Ičić, Stanko Stankov, Milan Kocić, "A Method for Estimation of Control Systems Work Ability", *FACTA UNIVERSITATIS Series: Automatic Control and Robotics*, vol. 10, no. 2, 2011, pp. 181-188., **Print ISSN: 1820-6417**, <http://facta.junis.ni.ac.rs>, *Publisher: University of Niš*. (M52)

[c3] Dragan Antić, Zoran Jovanović, **Nikola Danković**, Miodrag Spasić, Stanko Stankov, "Probability Estimation of Defined Properties of the Real Technical Systems with Stochastic Parameters", *SCIENTIFIC BULLETIN of the "POLITEHNICA" University of Timișoara, Romania, Transactions on AUTOMATIC CONTROL and COMPUTER SCIENCE*, vol. 57 (71), no. 2, 2012, pp. 67-74., **ISSN 1224-600X**, <http://www.ac.upt.ro/journal>, *Publisher: Editura "Politehnica", Timisoara*. (M52)

[c4] Stanko Stankov, **Nikola Danković**, Saša Arsić, "Regulacija rada toplotnih podstanica", *Procesna tehnika*, vol. 25, no. 1, 2013, pp. 30-34., **Print ISSN: 2217-2319**, <http://www.smeits.rs/include/data/docs0273.pdf>, *Publisher: Savez mašinskih i elektrotehničkih inženjera (SMEITS), Beograd*. Jun 2013. (In Serbian) (M52)

[c5] **Nikola B. Danković**, Zoran H. Perić, "A Probability of Stability Estimation of DPCM System with the First Order Predictor", *FACTA UNIVERSITATIS Series: Automatic Control and Robotics*, vol. 12, no. 2, 2013, pp. 131-138., **Print ISSN: 1820-6417**, <http://casopisi.junis.ni.ac.rs/index.php/FUAutContRob/article/view/51/12>, *Publisher: University of Niš*. (M52)

[c6] Stanko Stankov, Miroslav Milovanović, **Nikola Danković**, "SCADA System of Plant for Preparation and Dosing Aluminium Sulphate in Water System", *Transaction on Electrical and Electronic Circuits and Systems*, vol. 3, no. 2, 2013, pp. 73-79, <http://tsest.org/index.php/TEECS/article/view/199/123>. September 2013. (M52)

[c7] Saša S. Nikolić, Dragan S. Antić, **Nikola B. Danković**, Staniša Lj. Perić, Marko T. Milojković, "A New Type of Discrete Euler-Lagrange Equation with Application in Optimal Control", *FACTA UNIVERSITATIS Series: Automatic Control and Robotics*, vol. 12, no. 3, 2013, pp. 181-188., **Print ISSN: 1820-6417**, <http://casopisi.junis.ni.ac.rs/index.php/FUAutContRob/article/view/110/29>, *Publisher: University of Niš*. (M52)

[c8] **Nikola Danković**, Zoran Perić, Dragan Antić, Darko Mitić, Miodrag Spasić, "On the Sensitivity of the Recursive Filter with Arbitrary Order Predictor in DPCM System", *Serbian Journal of Electrical Engineering*, vol. 11, no. 4, 2014, pp. 609-616., **Print ISSN: 1451-4869**, (Doi No: <http://dx.doi.org/10.2298/SJEE1404609D>), *Publisher: Faculty of Technical sciences, Čačak, Serbia*. December 2014. (M51)

d) **Radovi objavljeni na međunarodnim naučnim skupovima i štampani u celini u odgovarajućim zbornicima radova**

- [d1] Miodrag Spasić, Dragan Antić, **Nikola Danković**, "On the Multiple Attractors in the Nonlinear Systems", *Proceedings of the X Trienal International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, SAUM 2010*, Niš, Serbia, November 10.-12., 2010, pp. 49-51. (ISBN: 978-86-6125-020-0), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**
- [d2] Zoran Ičić, Stanko Stankov, **Nikola Danković**, Miodrag Spasić, "Control of Machine for Winding", *Proceedings of the X Trienal International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, SAUM 2010*, Niš, Serbia, November 10.-12., 2010, pp. 149-151. (ISBN: 978-86-6125-020-0), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**
- [d3] **Nikola Danković**, Saša Nikolić, Miodrag Spasić, "On the Sensitivity of the Telecommunications Systems", *Proceedings of the X Trienal International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, SAUM 2010*, Niš, Serbia, November 10.-12., 2010, pp. 343-346. (ISBN: 978-86-6125-020-0), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**
- [d4] Stanko Stankov, Zoran Jovanović, Miodrag Spasić, **Nikola Danković**, Dejan Mitić, "Software Package for Measuring of Generators Temperatures", *Proceedings of the XLVI International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies, ICEST 2011*, Niš, Serbia, June 29.- July 01., 2011, vol. 1, pp. 213-216. (ISBN: 978-86-6125-031-6), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**
- [d5] Zoran Jovanović, **Nikola Danković**, Miodrag Spasić, Stanko Stankov, Zoran Ičić, "Adaptive Control of System for Rubber Transportation", *Proceedings of the XLVI International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies, ICEST 2011*, Niš, Serbia, June 29.- July 01., 2011, vol. 2, pp. 383-386. (ISBN: 978-86-6125-032-3), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**
- [d6] Zoran Jovanović, **Nikola Danković**, Miodrag Spasić, Stanko Stankov, Zoran Ičić, "Practical Testing of the Probability of Stability of the Discrete System with Random Parameters", *10th International Conference on Applied Electromagnetics, IIEC 2011*, Niš, Serbia, September 25.-29., 2011, Proceedings of full papers on CD, Session P2-4. (ISBN: 978-86-6125-042-2), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**
- [d7] Stanko Stankov, **Nikola Danković**, Miodrag Spasić, "Nadzorno-upravljački sistem gasne kotlarnice", *42. Međunarodni kongres i izložba o grejanju, hlađenju i klimatizaciji, KGH 2011*, Beograd, 30. novembar – 02. decembar, 2011, pp. 77-87. (ISBN: 978-86-81505-61-8), **Publisher: Savez mašinskih i elektrotehničkih inženjera i tehničara Srbije (SMEITS), Beograd. (M33)**
- [d8] Dragan Antić, Zoran Jovanović, **Nikola Danković**, Miodrag Spasić, Stanko Stankov, "Probability Estimation of Certain Properties of the Imperfect Systems", *Proceedings of the 7th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics, SACI 2012*, Timisoara, Romania, May 24.-26., 2012., pp. 213-216. (ISBN: 978-1-4673-1014-7), Doi No: <http://dx.doi.org/10.1109/SACI.2012.6250004>. **(M33)**
- [d9] Zoran Jovanović, **Nikola Danković**, Miodrag Spasić, Milan Radić, "Improved Control Algorithm of Rubber Compounds Forming Process", *Proceedings of the XI International Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, SAUM 2012*, Niš, Serbia, November 14.-16., 2012, pp. 36-39. (ISBN: 978-86-6125-072-9), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**

- [d10] Milan Radić, Zoran Stajić, Miodrag Spasić, **Nikola Danković**, "Introducing the Concept of Controlled Self-Excitation and Synchronization of a Cage-rotor Induction Generator Driven by CVT-Based Wind Turbine", *Proceedings of the XI International Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, SAUM 2012*, Niš, Serbia, November 14.-16., 2012, pp. 189-192. (ISBN: 978-86-6125-072-9), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**
- [d11] Saša Arsić, Stanko Stankov, **Nikola Danković**, Miroslav Milovanović, Zoran Ičić, "The Usage of Mobile Communications for SCADA Systems Data Transmission", *Proceedings of the XI International Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, SAUM 2012*, Niš, Serbia, November 14.-16., 2012, pp. 427-430. (ISBN: 978-86-6125-072-9), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**
- [d12] Dragan Antić, **Nikola Danković**, Staniša Perić, Saša Nikolić, Marko Milojković, "One Form of Discrete Euler-Lagrange Equation with Application in Optimal Control", *11th International Conference on Applied Electromagnetics, PIEC 2013*, Niš, Serbia, September 01.-04., 2013, Proceedings of full papers on CD, Session P1-15. (ISBN: 978-86-6125-090-3), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**
- [d13] Zoran Ičić, Stanko Stankov, **Nikola Danković**, Darko Mitić, Saša Arsić, "The Control System of Electric Hot Water Boilers", *Proceedings of the XII International Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, SAUM 2014*, Niš, Serbia, November 12.-14., 2014, pp. 132-135. (ISBN: 978-86-6125-117-7), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**
- [d14] Miroslav Milovanović, Dragan Antić, Staniša Perić, Saša Nikolić, Marko Milojković, **Nikola Danković**, "Artificial Approach for Achieving Two Position Levitation Motion of Magnetic Levitation System", *Proceedings of the XII International Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, SAUM 2014*, Niš, Serbia, November 12.-14., 2014, pp. 168-171. (ISBN: 978-86-6125-117-7), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**
- [d15] Saša S. Nikolić, Dragan Antić, Staniša Perić, **Nikola Danković**, Miodrag Spasić, Miroslav Milovanović, "Hybrid-Fuzzy Controllers Applied in DC Servo Drive", *Proceedings of the XIII International Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, SAUM 2016*, Niš, Serbia, November 09.-11., 2016, pp. 128-131. (ISBN: 978-86-6125-170-2), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**
- [d16] Saša Arsić, Stanko Stankov, **Nikola Danković**, Darko Mitić, Zoran Ičić, Nebojša Jotović, "Remote Control of Home Automation Elements", *Proceedings of the XIII International Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, SAUM 2016*, Niš, Serbia, November 09.-11., 2016, pp. 217-220. (ISBN: 978-86-6125-170-2), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**
- [d17] **Nikola Danković**, Dragan Antić, Saša S. Nikolić, Staniša Perić, Marko Milojković, Miroslav Milovanović, "New Classes of the Orthogonal Polynomials - An Overview", *Proceedings of the XIII International Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, SAUM 2016*, Niš, Serbia, November 09.-11., 2016, pp. 221-224. (ISBN: 978-86-6125-170-2), **Publisher: Faculty of Electronic Engineering, Niš, Serbia. (M33)**

e) Radovi saopšteni na nacionalnim naučnim skupovima i štampani u celini u odgovarajućim zbornicima radova

- [e1] Zoran Jovanović, Miodrag Spasić, Stanko Stankov, **Nikola Danković**, Zoran Ičić, "Primena makete lifta u edukaciji studenata", *zbornik radova 55. konferencije ETRAN 2011*, Banja Vrućica (Teslić), Bosnia and Herzegovina, June 06.-09., 2011, pp. AU4.4-1-4, (ISBN: 978-86-80509-66-2), **Publisher: Društvo za ETRAN, Elektrotehnički fakultet Banja Luka. (In Serbian) (M63)**
- [e2] Darko Mitić, Ljilja Antić, Zoran Jovanović, **Nikola Danković**, "Primena upravljanja s kvazi-kliznim režimom u ekonomskom sistemu opisanim Puuovim modelom", *zbornik radova 55. konferencije ETRAN 2011*, Banja Vrućica (Teslić), Bosnia and Herzegovina, June 06.-09., 2011, pp. AU5.5-6-4, (ISBN: 978-86-80509-66-2), **Publisher: Društvo za ETRAN, Elektrotehnički fakultet Banja Luka. (In Serbian) (M63)**
- [e3] Stanko Stankov, Dragan Antić, **Nikola Danković**, Zoran Jovanović, Darko Mitić, Dejan Mitić, Saša Nikolić, "Jedan način merenja veličina trofaznog sistema", *zbornik radova 56. konferencije ETRAN 2012*, Zlatibor, Serbia, June 11.-14., 2012, pp. ML1.5-1-4, (ISBN 978-86-80509-67-9), **Publisher: Društvo za ETRAN. (In Serbian) (M63)**
- [e4] Saša P. Arsić, Stanko P. Stankov, **Nikola B. Danković**, Zoran D. Ičić, Dejan Z. Mitić, "Napajanje telekomunikacionih repetitora pomoću solarne energije", *zbornik radova 57. konferencije ETRAN 2013*, Zlatibor, Serbia, June 3.-6., 2013, pp. AU4.5-1-4, (ISBN 978-86-80509-68-6), **Publisher: Društvo za ETRAN. (In Serbian) (M63)**
- [e5] **Nikola B. Danković**, Darko B. Mitić, Marko T. Milojković, Stanko P. Stankov, Miroslav B. Milovanović, "Termodinamički model sistema za hlađenje protektora i njegova primena", *zbornik radova 57. konferencije ETRAN 2013*, Zlatibor, Serbia, June 3.-6., 2013, pp. AU5.4-1-4, (ISBN 978-86-80509-68-6), **Publisher: Društvo za ETRAN. (In Serbian) (M63)**
- [e6] Saša Arsić, Stanko Stankov, **Nikola Danković**, "Upravljanje inteligentnim zgradama", *zbornik radova 26. kongresa o procesnoj industriji, Procesing 2013*, Beograd, Serbia, June 6.-7., 2013, (ISBN 978-86-81505-66-3), **Publisher: Savez mašinskih i elektrotehničkih inženjera i tehničara Srbije (SMEITS), Društvo za procesnu tehniku, Beograd. (In Serbian) (M63)**
- [e7] Stanko Stankov, **Nikola Danković**, Saša Arsić, "Praktična iskustva u eksploataciji i održavanju frekventnih regulatora", *zbornik radova 26. kongresa o procesnoj industriji, Procesing 2013*, Beograd, Serbia, June 6.-7., 2013, (ISBN 978-86-81505-66-3), **Publisher: Savez mašinskih i elektrotehničkih inženjera i tehničara Srbije (SMEITS), Društvo za procesnu tehniku, Beograd. (In Serbian) (M63)**
- [e8] Stanko Stankov, **Nikola Danković**, Saša Arsić, "Regulacija rada toplotnih podstanica", *zbornik radova 26. kongresa o procesnoj industriji, Procesing 2013*, Beograd, Serbia, June 6.-7., 2013, (ISBN 978-86-81505-66-3), **Publisher: Savez mašinskih i elektrotehničkih inženjera i tehničara Srbije (SMEITS), Društvo za procesnu tehniku, Beograd. (In Serbian) (M63)**
- [e9] **Nikola B. Danković**, Zoran H. Perić, Stanko P. Stankov, Miroslav B. Milovanović, Dejan Z. Mitić, "Analiza osetljivosti rekurzivnog filtra sa prediktorom *i*-tog reda u DPCM sistemu", *zbornik radova 58. konferencije ETRAN 2014*, Vrnjačka Banja, Serbia, June 2.-5., 2014, pp. AU1.5-1-4, (ISBN 978-86-80509-70-9), **Publisher: Društvo za ETRAN. (In Serbian) (M63)**
- [e10] Stanko P. Stankov, **Nikola B. Danković**, Zoran D. Ičić, Miodrag D. Spasić, Dejan Z. Mitić, "Upravljačko-nadzorni sistem procesa hlorisanja u vodovodnim sistemima", *zbornik radova 58. konferencije ETRAN 2014*, Vrnjačka Banja, Serbia, June 2.-5., 2014, pp. AU2.6-1-4, (ISBN 978-86-80509-70-9), **Publisher: Društvo za ETRAN. (In Serbian) (M63)**

- [e11] Stanko Stankov, **Nikola Danković**, "Rekonstrukcija upravljačkog sistema mašine za urezivanje navoja navrtki", *zbornik radova 27. kongresa o procesnoj industriji, Procesing 2014*, Beograd, Serbia, September 22.-24., 2014, (ISBN 978-86-81505-75-5), **Publisher: Savez mašinskih i elektrotehničkih inženjera i tehničara Srbije (SMEITS), Društvo za procesnu tehniku, Beograd. (In Serbian) (M63)**
- [e12] Stanko Stankov, **Nikola Danković**, "Regulacija elektromotornih pogona na srednjem naponu", *zbornik radova 27. kongresa o procesnoj industriji, Procesing 2014*, Beograd, Serbia, September 22.-24., 2014, (ISBN 978-86-81505-75-5), **Publisher: Savez mašinskih i elektrotehničkih inženjera i tehničara Srbije (SMEITS), Društvo za procesnu tehniku, Beograd. (In Serbian) (M63)**
- [e13] Stanko P. Stankov, Saša P. Arsić, Zoran D. Ičić, **Nikola B. Danković**, "Automatizacija postrojenja za skladištenje i pretakanje metanola u pogonu za proizvodnju biodizela", *zbornik radova 30. kongresa o procesnoj industriji, Procesing 2017*, Beograd, Serbia, June 01.-02., 2017, pp. 93-99, (ISBN 978-86-81505-83-0, Doi No: <https://doi.org/10.24094/ptk.017.30.1.93>), **Publisher: Savez mašinskih i elektrotehničkih inženjera i tehničara Srbije (SMEITS), Društvo za procesnu tehniku, Beograd. (In Serbian) (M63)**
- [e14] Stanko P. Stankov, Saša P. Arsić, **Nikola B. Danković**, Zoran D. Ičić, "Upravljanje termodinmnom komorom", *zbornik radova 30. kongresa o procesnoj industriji, Procesing 2017*, Beograd, Serbia, June 01.-02., 2017, pp. 335-340, (ISBN 978-86-81505-83-0, Doi No: <https://doi.org/10.24094/ptk.017.30.1.335>), **Publisher: Savez mašinskih i elektrotehničkih inženjera i tehničara Srbije (SMEITS), Društvo za procesnu tehniku, Beograd. (In Serbian) (M63)**

f) Tehnička rešenja

- [f1] Marko Milošević, Miloš D. Milošević, Nenad Floranović, Božidar Zečević, Aleksandar Janjić, **Nikola Danković**, "Sistem za generisanje izveštaja o izvršenim kontrolama mernih mesta u preduzećima za distribuciju električne energije", Istraživačko-razvojni centar Alfatec d.o.o. Niš, Odluka broj: 0106/12-2, 01.06.2012. <http://media.alfatec.rs/2013/01/Sistem-za-generisanje-izvestaja-o-izvršenim-kontrolama-mernih-mesta-u-pred.pdf> (M84)
- [f2] Vojislav Miltenović, Miodrag Velimirović, Jelena Stefanović Marinović, Milan Banić, Aleksandar Miltenović, Siniša Kuzmanović, Boban Anđelković, Darko Mitić, Milan Radić, **Nikola Danković**, "Kombinovani varijatorski prenosnik za prenos snage kod vetrogeneratora", Mašinski fakultet u Nišu, Odluka broj: 612-113-2-10/2013, 28.01.2013. (M82)
- [f3] Darko Mitić, Zoran Ičić, Marko Milojković, Stanko Stankov, Vojislav Miltenović, Aleksandar Miltenović, Miodrag Spasić, Milan Banić, Nebojša Jotović, **Nikola Danković**, "Trofazni linijski korektor napona", Elektronski fakultet u Nišu, Odluka broj: 07/10-026/13-001, 21.03.2013. <http://www.elfak.ni.ac.rs/rs/nauka/projekti/tehnicka-resenja/2190-trofazni-linijski-korektor-napona> (M82)
- [f4] Stanko Stankov, Dragan Antić, Dejan Mitić, Zoran Ičić, **Nikola Danković**, Marko Milojković, Darko Mitić, Milutin Petronijević, "Upravljačko-nadzorni sistem mašina za urezivanje navoja navrtki", Privredno društvo MIN DIV Svrljig AD, Fabrika vijaka i delova za šinska vozila, Svrljig, Odluka broj: 07/10-013/14-001, 26.12.2014. <http://www.elfak.ni.ac.rs/rs/nauka/projekti/tehnicka-resenja/3684-07-10-026-15-1> (M84)

- [f5] Zoran Ičić, Stanko Stankov, Dragan Antić, **Nikola Danković**, Dejan Mitić, "Upravljački sistem električnih toplovodnih kotlova", EKOPAN plus d.o.o. Niš, preduzeće za proizvodnju i ugradnju opreme za centralno grejanje, Odluka broj: 07/10-026/15-001, 30.11.2015. <http://www.elfak.ni.ac.rs/rs/nauka/projekti/tehnicka-resenja/3684-07-10-026-15-1> (M84)
- [f6] Stanko Stankov, Zoran Ičić, Dragan Antić, **Nikola Danković**, Miroslav Veselinović, "Upravljački sistem pilane s jednom trakastom testerom", S&L AMBALAGE D.O.O. Proizvodnja drvene ambalaže za voće i povrće, Globoder, Kruševac, Odluka broj: 07/10-037/15-001, 30.11.2015. <http://www.elfak.ni.ac.rs/rs/nauka/projekti/tehnicka-resenja/3707-07-10-037-15-001> (M84)

g) Učešća na nacionalnim projektima

- [g1] "Razvoj novih informaciono-komunikacionih tehnologija korišćenjem naprednih matematičkih metoda, sa primenom u medicini, telekomunikacijama, energetici, zaštiti nacionalne baštine i obrazovanju", ("**Development of new information and communication technologies based on advanced mathematical methods, with applications in medicine, telecommunications, power systems, protection of national heritage and education**"), (III 44006), projekat finansiran od strane Ministarstva nauke i životne sredine republike Srbije, Zoran Stajić, 4 godine, Matematički Institut SANU, Beograd, **2011-2016. (Program integralnih i interdisciplinarnih istraživanja)**
- [g2] "Istraživanje i razvoj nove generacije vetrogeneratora visoke energetske efikasnosti", ("**Research and development of new generation wind turbines of high-energy efficiency**"), (TR 35005), projekat finansiran od strane Ministarstva nauke i životne sredine republike Srbije, dr Vojislav Miltenović, 4 godine, Mašinski fakultet, Niš, **2011-2016. (Program tehnološkog razvoja)**

h) Učešća na međunarodnim projektima

- [h1] "Program međunarodne saradnje, Norveška (NOR), Bosna (BA) i Srbija (S), univerziteta i industrije u informaciono-komunikacionim tehnologijama, istraživanju i razvoju – NORBAS" ("**Norwegian, Bosnian and Serbian cooperation platform for university and industry in ICT R&D – NORBAS**"), projekat koji se finansira od strane Norveškog ministarstva spoljnih poslova, u periodu **2012-2014**.
- [h2] "Bridge technical differences and social suspicions contributing to transform the Adriatic area in a stable hub for a sustainable technological development", ADRIA-HUB, **2014-2015**.



Prilog 1.

Izjava 1.

IZJAVA O AUTORSTVU

Izjavljujem da je doktorska disertacija, pod naslovom

Razvoj nove klase ortogonalnih filtera s primenom u modeliranju, analizi i sintezi sistema za diferencijalnu impulsno kodnu modulaciju

koja je odbranjena na Elektronskom fakultetu Univerziteta u Nišu:

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada;
- da ovu disertaciju, ni u celini, niti u delovima, nisam prijavljivao na drugim fakultetima, niti univerzitetima;
- da nisam povredio autorska prava, niti zloupotrebio intelektualnu svojinu drugih lica.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci, koji su u vezi sa autorstvom i dobijanjem akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada, i to u katalogu Biblioteke, Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Nišu, kao i u publikacijama Univerziteta u Nišu.

U Nišu, 31. 08. 2017.

Autor disertacije: Nikola B. Danković, dipl. inž.

Potpis autora disertacije:



Prilog 1.

Izjava 2.

IZJAVA O ISTOVETNOSTI ŠTAMPANOG I ELEKTRONSKOG OBLIKA DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora: **Nikola B. Danković**

Naslov rada: **Razvoj nove klase ortogonalnih filtara s primenom u modeliranju, analizi
i sintezi sistema za diferencijalnu impulsno kodnu**

Mentor: **prof. dr Dragan S. Antić**

Izjavljujem da je štampana verzija moje doktorske disertacije istovetna elektronskoj verziji, koju sam predao za unošenje u **Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu.**

U Nišu, 31. 08. 2017.

Potpis autora disertacije:



Prilog 1.

Izjava 3.

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Nikola Tesla“ da, u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu, unese moju doktorsku disertaciju, pod naslovom:

Razvoj nove klase ortogonalnih filtara s primenom u modeliranju, analizi i sintezi sistema za diferencijalnu impulsno kodnu modulaciju

Disertaciju sa svim priložima predao sam u elektronskom obliku, pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju, unetu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu, mogu koristiti svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo (CC BY)
2. Autorstvo – nekomercijalno (CC BY-NC)
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade (CC BY-NC-ND)
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima (CC BY-NC-SA)
5. Autorstvo – bez prerade (CC BY-ND)
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima (CC BY-SA)

U Nišu, 31. 08. 2017.

Autor disertacije: Nikola B. Danković, dipl. inž.

Potpis autora disertacije:
