



**UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET**



NIKOLA V. STOJANOVIĆ

**NOVE KLASSE FUNKCIJA ZA
SINTEZU DVOKANALNE HIBRIDNE
BANKE FILTERA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

NIŠ, 2018.



UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET



NIKOLA V. STOJANOVIĆ

**NOVE KLASSE FUNKCIJA ZA SINTEZU
DVOKANALNE HIBRIDNE BANKE FILTARA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2018.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF ELECTRONIC ENGINEERING



NIKOLA V. STOJANOVIĆ

**NEW CLASS FUNCTIONS FOR THE
SYNTHESIS OF TWO-CHANNEL HYBRID
FILTER BANKS**

PHD THESIS

NIŠ, 2018.



UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET



NIKOLA V. STOJANOVIĆ

**NOVE KLASSE FUNKCIJA ZA SINTEZU
DVOKANALNE HIBRIDNE BANKE FILTERA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mentor:

Dr Saša Nikolić

Komisija za ocenu i odbranu doktorske disertacije:

Dr Saša Nikolić, vanredni profesor, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu

Dr Goran Stančić, docent, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu

Dr Gradimir Milovanović, akademik Srpske akademije nauka i umetnosti

Dr Goran Jovanović, redovni profesor, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu

Dr Branislav Petrović, redovni profesor, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu

Datum odbrane: _____

NIŠ, 2018.

Ova teza je urađena na Elektronskom fakultetu u Nišu pod rukovodstvom dr Saše Nikolića, vanrednog profesora Elektronskog fakulteta. Profesoru Nikoliću se zahvaljujem na korisnim savetima i sugestijama tokom izrade ove doktorske disertacije.

Zahvaljujem se i ostalim članovima komisije: dr Goranu Stančiću, dr Gradimiru Milovanoviću, dr Goranu Jovanoviću i dr Branislavu Petroviću na saradnji, stručnoj pomoći i savetima.

I Autor

Ime i prezime	Nikola V. Stojanović
Datum i mesto rođenja	30.04.1973, Niš, Republika Srbija
Sadašnje zaposlenje	Univerzitet u Nišu Elektronski fakultet, Niš Katedra za Elektroniku

II Doktorska disertacija

Naslov	Nove klase funkcija za sintezu dvokanalne hibridne banke filtera
Ključne reči	Hibridna banka filtera, Pseudo-Jacobijev filter, Korektor grupnog kašnjenja, Dvostruko komplementarna banka filtera.
Naučna oblast	Elektrotehničko i računarsko inženjerstvo
Uža naučna oblast	Elektronika
UDK broj	(621.272.544+004.383.3):004.4 MATLAB
Ustanova i mesto gde je disertacija rađena	Univerzitet u Nišu Elektronski fakultet, Niš Katedra za Elektroniku
Mentor	Dr Saša Nikolić

III Tok prijave doktorske disertacije

Datum prijave teme doktorske disertacije	23.05.2017.
Broj odluke i datum prihvatanja teme doktorske disertacije	NSV 8/20-01-001/18-024,15.01.2018.
Komisija za pisanje izveštaja o naučnoj zasnovanosti teme doktorske disertacije	1. Dr Saša Nikolić, van. prof. 2. Dr Goran Stančić, docent 3. Dr Gradimir Milovanović, akademik SANU 4. Dr Goran Jovanović, red. prof. 5. Dr Branislav Petrović, red. prof.
Komisija za ocenu i odbranu doktorske disertacije	1. Dr Saša Nikolić, van. prof. 2. Dr Goran Stančić, docent 3. Dr Gradimir Milovanović, akademik SANU 4. Dr Goran Jovanović, red. prof. 5. Dr Branislav Petrović, red. prof.
Datum odbrane	2018.

Rezime

U disertaciji su prikazana istraživanja koja se odnose na aproksimaciju i implementaciju dvokanalne hibridne banke filtera. Posebna pažnja je posvećena analognom delu, odnosno delu za analizu hibridne banke filtera.

Predložene su dve aproksimacije filteraskog para banke za analizu. Prva aproksimacija prenosne funkcije filtera propusnika niskih frekvencija je zasnovana na jednostavnoj adaptaciji ortogonalnih Jacobijevih polinoma, kojom se dobijaju Pseudo-Jacobijevi polinomi. U odnosu na ostale poznate aproksimacije, aproksimacija Pseudo-Jacobijevim polinomima ima dva parametra više, kojima se mogu podešavati karakteristike filtera u širokim granicama. Ova aproksimacija se može primeniti za realizaciju komplementarne banke filtera.

Poznato je da se rekurzivne dvostruko komplementarne digitalne banke filtera mogu realizovati all-pass filterima. Istraživanja su pokazala da se i u analognom domenu mogu realizovati dvostruko komplementarne banke filtera. Realizacija predložene banke filtera izvršena je u dva koraka. U prvom koraku se komplementarnom dekompozicijom prototipska prenosna funkcija razloži na dva all-pass filtera, dok se u drugom koraku njihovim sabiranjem, odnosno oduzimanjem, dobijaju prenosne funkcije niskofrekvencijskog i visokofrekvencijskog filtera. Prednost ovakvih sistema je da se isti hardver može koristiti za realizaciju i niskofrekvencijske i visokofrekvencijske prenosne funkcije.

Monte Carlo simulacija dvostruko komplementarnog analognog filteraskog para zasnovanog na paralelnoj vezi dva analogna all-pass filtera pokazala je da se all-pass realizacija odlikuje malom osetljivošću karakteristike slabljenja na tolerancije komponenata u propusnom opsegu filtera, dok je osetljivost u nepropusnom opsegu znatno veća nego kod standardne kaskadne realizacije filtera propusnika niskih frekvencija i filtera propusnika visokih frekvencija.

Pogodnim izborom banke filtera za analizu i banke filtera za sintezu može se ispuniti uslov za potiskivanje efekata koji nastaju usled preklapanja spektara u bankama za analizu i sintezu. All-pass komplementarnost analogne banke filtera ukazuje na činjenicu da se amplitudska

izobličenja, koja unosi analogna banka filtara za analizu, mogu u potpunosti potisnuti pa je nelinearnost karakteristike grupnog kašnjenja dominantno izobličenje.

Za postizanje približno savršene rekonstrukcije signala predložena je nova realizacija korektora grupnog kašnjenja, kojom se postiže da grupno kašnjenje bude konstantno u smislu određenog broja zaravnjenja u koordinatnom početku. Analizom osetljivosti pokazano je da je osetljivost korektora grupnog kašnjenja u propusnom osegu proporcionalna sa kvadratom Q -faktora pola. Drugim rečima, korektor grupnog kašnjenja je jako osetljiv na tolerancije komponeneta.

Ključne reči: Pseudo-Jacobijevi polinomi, Analogni filtri, Hibridne banke filtara, Komplementarna dekompozicija, Podopsežno kodovanje, Butterworthovi filtri, Korektor grupnog kašnjenja, Newton-Kantorovičev metod.

I Author	
Name of candidate	Nikola V. Stojanović
Date and place of birth	30.04.1973, Niš, Republic of Serbia
Employment	University of Niš Faculty of Electronic Engineering, Niš Department of Electronics
II PhD thesis	
Thesis Title	A new class of functions for the synthesis of two channel hybrid filter banks
Keywords	Hybrid filter bank, Pseudo-Jacobi filter, Group delay corrector, Double complementary filter bank.
Scientific area	Electronic and computing engineering
Specialized scientific area	Electronics
UDK number	(621.272.544+004.383.3):004.4 MATLAB
Address	University of Niš Faculty of Electronic Engineering, Niš Department of Electronics
Supervisor	Dr Saša Nikolić
III Submission of PhD	
Submission date of PhD thesis title	23.05.2018.
Decision number and date of PhD thesis acceptance	NSV 8/20-01-001/18-024,15.01.2018.
Examination Committee for PhD Thesis Examination/Acceptance Report	1. Dr Saša Nikolić, van. prof. 2. Dr Goran Stančić, docent 3. Dr Gradimir Milovanović, akademik SANU 4. Dr Goran Jovanović, red. prof. 5. Dr Branislav Petrović, red. prof.
Examination Committee of PhD thesis	1. Dr Saša Nikolić, van. prof. 2. Dr Goran Stančić, docent 3. Dr Gradimir Milovanović, akademik SANU 4. Dr Goran Jovanović, red. prof. 5. Dr Branislav Petrović, red. prof.
Examination Defence Date:	2018.

Abstract

This PhD discusses the research related to the approximation and implementation of the two-channel hybrid filter banks. Special attention is paid to the analogue part, i.e. analysis part of the hybrid filter banks.

Two approximations of the filter bank pair for analysis have been proposed. The first approximation of the transfer function of the low-pass filter is based on the simple adaptation of the orthogonal Jacobi polynomials in order to obtain the Pseudo-Jacobian polynomials. In relation to other known approximations, the Pseudo-Jacobian polynomial one has two prime parameters, which can adjust the characteristics of the filter in wide ranges. This approximation can be successfully applied for the realization of a complementary bank of filters.

It is known that recursive double-complementary digital filter banks can be implemented with all-pass filters, and research has shown that double-complementary filter banks can also be realized in the analogue domain. The realization of the proposed filter bank has been done in two steps. In the first step, with the complementary decomposition, the prototype transfer function is obtained by two all-pass filters, while in the second step, by their addition or subtraction, transfer functions of lowpass and highpass filters are obtained. The advantage of such a system is that the same hardware can be used for realization of both low frequency and high frequency transfer functions.

Monte Carlo simulation of the realization of a double complementary analog filter pair based on a parallel connection of two analogue all-pass filters showed that all-pass realization is characterized by a small sensitivity of the attenuation characteristics to the component tolerances in the filter pass-band, while the sensitivity in the stop-band is substantially higher compared to the case of a standard cascade realization of the low-pass filter and the high-pass filter.

By a suitable selection of the analysis filter bank and the synthesis filter bank, a condition for suppressing the effects arising from the overlapping of the spectrum in banks for analysis

and synthesis can be fulfilled. The all-pass complementarity of an analogue filter bank points to the fact that amplitude distortion, which is introduced by the analog bank of the analysis filters, can be completely suppressed, so that the non-linearity of the group delay characteristics is the predominant distortion.

In order to achieve a near perfect reconstruction of the signal, a new realization of the group delay corrector was proposed, which makes it possible for the group delay to be constant in a flat sense, i.e. with a number of flatness at the origin. An analysis of the sensitivity has shown that the sensitivity of the correction of the group waveform in the filter pass-band that is proportional to the square of the Q -factor of the pole. In other words, the group delay corrector is very sensitive to the component tolerances.

Keywords: Pseudo-Jacobi polynomials, Time-continuous filters, Hybrid filter banks, Complementary decomposition, Subband coding, Butterworth filters, Group delay corrector, Newton-Kantorovich method.

Skraćenice koje su korišćene u tekstu

- A/D - Analogno digitalni konvertor
- AMF karakteristika - Približno maksimalno ravna karakteristika
- D/A - Digitalno analogni konvertor
- IIR filter - Rekurzivni filter (Infinite Impulse Response filter)
- FIR filter - Nerekurzivni filter (Finite Impulse Response filter)
- NF filter - Niskopropusni filter
- VF filter - Visokopropusni filter
- QMF banka - Kvadratura banka filtara (Quadrature Mirror Filter bank)
- SBC - Podopsežno kodovanje (Sub-Band Coding)
- SF -Faktor nagiba
- PR - Savršena rekonstrukcija (Perfect Reconstruction)
- NPR - Približno savršena rekonstrukcija (Nearly Perfect Reconstruction)
- VHDL - Programski jezik za opis hardvera (VHSIC Hardware Description Language)

Sadržaj

1	Uvod	3
1.1	Predmet istraživanja	4
1.2	Tok izrade doktorske disertacije	7
2	Aproksimacija filtarskih funkcija Jacobijevim polinomima	11
2.1	Aproksimacija amplitudske karakteristike filtra	12
2.2	Jacobijevi polinomi	13
2.2.1	Pseudo-Jacobijevi polinomi	14
2.3	Polinomska karakteristična funkcija	16
2.3.1	Rezultati aproksimacije	19
2.3.2	Poređenje sa drugim sistemima	23
2.4	Racionalna karakteristična funkcija	28
2.4.1	Poređenje sa Inverznom Chebyshevljevom aproksimacijom	31
2.5	Zaključak	34
3	Dvostruko komplementarna analogna banka filtera	36
3.1	Dvostruko komplementarni filtarski par	36
3.2	Aproksimacija	40
3.2.1	Filtarske funkcije sa višestrukom nulom na realnim frekvencijama	41
3.2.2	Filtarske funkcije sa prostim nulama na realnim frekvencijama	46
3.3	Zaključak	54
4	Korekcija grupnog kašnjenja	56
4.1	Korektor grupnog kašnjenja	57
4.2	Novi koncept korekcije grupnog kašnjenja	61
4.3	Primeri	62

4.3.1	Korektor Butterworthovog filtra trećeg stepena	62
4.3.2	Korektor Butterworthovog filtra četvrtog stepena	65
4.3.3	Korektori grupnog kašnjenja Butterworthovih filtara	69
4.4	Osetljivost grupnog kašnjenja	70
4.5	Zaključak	73
5	Implementacija	75
5.1	All-pass implementacija sa LCR rezonatorima	78
5.1.1	All-pass filter prvog reda	78
5.1.2	All-pass filter dugog reda	79
5.1.3	Implementacija	81
5.2	Kaskadna realizacija sa LCR rezonatorima	82
5.2.1	Niskofrekvencijski notch filter	83
5.2.2	Visokofrekvencijski notch filter	84
5.3	Monte Carlo simulacija	86
5.3.1	Generisanje slučajnih brojeva	87
5.3.2	Monte Carlo simulacija banke filtara	90
5.4	Zaključak	95
6	Zaključak	96
6.1	Naučni doprinosi disertacije	97
6.2	Pravci budućih istraživanja	98
	Prilozi	100
A	MATLAB funkcija JacobiPoly	100
B	Pasivna lestvičasta LC realizacija Jacobijevih filtara	102
C	MATLAB funkcija MonteKarloSimulation	106
	Literatura	110
	Indeks pojmova	114

1

Uvod

NA OSNOVU Papoulisove generalizovane teoreme odmeravanja [51] proizilazi da frekvencijski ograničen deterministički signal $f(t)$ jednoznačno određuje $g_k(mT)$ izlaza m linearnih sistema sa frekvencijom odmeravanja koja iznosi m -ti deo Nikvistove frekvencije. Brownov [8] koncept višekanalnog odmeravanja pokazuje da se rekonstrukcija signala može realizovati postfiltrima koji su takođe linearni i vremenski invarijantni. Specificiraju se iste osobine za m analizu i m sintezu analognim filtrima koji čine analognu banku filtara. U ovoj formulaciji, frekvencijski opseg signala je podeljen na m jednakih podopsega. Prenosna funkcija filtara sinteze u svakom podopsegu se dobija kao funkcija filtara analize rešavanjem sistema linearnih jednačina.

Generalizovana teorema odmeravanja može se primeniti kako na obradu analognih signala analognim filtrima, tako i na obradu digitalnih signala digitalnim filtrima. Relaciju između digitalnih banki filtara i teoreme odmeravanja analognih signala su ustanovili Vaidyanathan i Liu [87]. U pomenutom radu oni su razmatrali pododmeravanje frekvencijski ograničenog niza. Niz $x(n)$ čija Fourierova transformacija je jednaka nuli za $|\omega| \geq L\pi/M$, gde su L i M celi brojevi i $L < M$, mogu biti predstavljeni redukcijom niza na iznos L/M .

Digitalne banke filtara su intenzivno istraživane i u literaturi se može naći veliki broj tehnika za njihovo projektovanje. Tu se pre svega misli na njihovu implementaciju zasnovanu na digitalnim FIR i IIR filtrima. Iz obimne literature mogu se izdvojiti vredne knjige [16, 26, 46, 84] koje omogućavaju da se dublje upozna ova naučna oblast.

Pogodno je da filtri u banci za analizu i banci za sintezu budu komplementarni po snazi, a između njihovih prenosnih funkcija se uspostavljaju relacije da bi se aliasing, nastao u banci analize, potisnuo u banci sinteze.

Za analizu i rekonstrukciju signala pogodne su banke gde su filtri u bankama analize i sinteze komplementarni po snazi, a između prenosnih funkcija filtara iz banke analize i banke sinteze uspostavljaju se relacije koje aliasing nastao u banci analize poništavaju u banci sinteze.

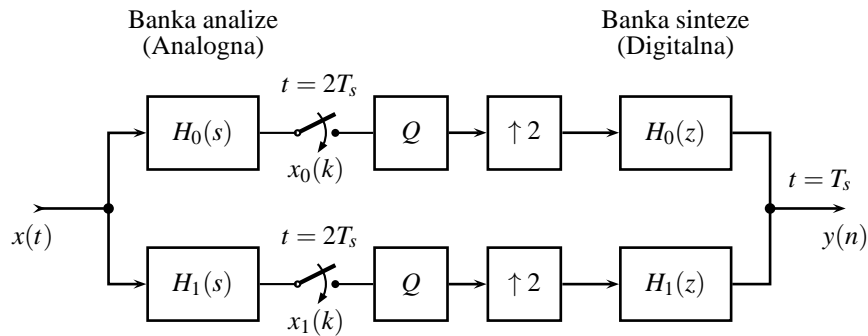
U slučaju hibridne banke filtara potrebna je analogna banka za analizu sa filtrima komplementarnim po snazi, a zatim je potrebno između analogne i digitalne banke za sintezu uspostaviti relacije koja će aliasing nastao u analognoj banci filtara potisnuti u digitalnoj banci filtara.

1.1 Predmet istraživanja

Istraživanja koja se odnose na analogne i hibridne banke filtara veoma malo su prisutne u dostupnoj literaturi, iako su našle veliku primenu kod višekanalnog odmeravanja analognog (audio) signala male energije, analogne wavelet transformacije, realizacije A/D i D/A konvertora, frekvencijskog multipleksiranja signala, u mikrotalasnom području, itd. Cilj ove disertacije je da izloži osnovne principe na kojima se zasniva formiranje različitih klasa banki analognih filtara, predloži nove klase analognih filtara za primenu u hibridnim bankama filtara i da na odabranim primerima ilustruje njihove karakteristike u ustaljenom stanju i osetljivost na tolerancije elemenata.

Blok dijagram dvokanalne hibridne banke prikazan je na Slici 1.1. Banku analize čini par analognih kanalskih filtara: propusnik niskih frekvencija $H_0(s)$ i propusnik visokih frekvencija $H_1(s)$, dok banku sinteze čini par digitalnih filtara: propusnik niskih frekvencija $H_0(z)$ i propusnik visokih frekvencija $H_1(z)$. Kanalski filtri dele osnovni frekvencijski opseg na dva jednaka dela, pa se frekvencija odmeravanja u podopsezima može sniziti za faktor 2, a zatim se posle kvantizera u svakom podopsegu banke sinteze frekvencija odmeravanja povećava za faktor 2. U vremenskom domenu to je ekspanzija signala, (engl. upsampling), a ostvaruje se tako što se između dva odmerka ubaci jedan nulti odmerak. U sledećem koraku signali se filtriraju pomoću digitalne banke sinteze. Zbir filtriranih signala daje kompozitni signal $y(n)$ na izlazu sistema. Opisani sistem pripada klasi sistema sa višestrukim odmeravanjem, (engl. multirate system), jer se procesiranje signala obavlja na različitim frekvencijama odmeravanja. Ovakva banka naziva se banka sa maksimalnom decimacijom.

Dvokanalna banka filtara je osnovni gradivni blok za frekvencijsku dekompoziciju kako analognih tako i digitalnih signala. Kaskadnim povezivanjem dvokanalnih banki filtara re-



Sl. 1.1: Dvokanalna hibridna banka filtara ($H_0(s)$ -filar propusnik niskih frekvencija, $H_1(s)$ -filar propusnik visokih frekvencija, Q -kvantizer, $\uparrow 2$ -interpolator), $T_s = 1/2\omega_g$, gde je ω_g granična frekvencija signala $x(t)$.

alizuje se fleksibilna struktura za dekompoziciju signala do željenog nivoa [17]. Fleksibilna struktura omogućava da se na svakom nivou vrši dekompozicija onog frekvencijskog opsega koji ima veću energiju. Dvokanalne banke filtara predstavljaju posebno efikasno rešenje za realizaciju oktavnih i neuniformnih banki filtara.

Prema funkciji koju obavljaju, banke filtara se dele na banke analize i banke sinteze. U slučaju hibridne banke filtara banka analize je najčešće analogna banka filtara, dok je banka sinteze digitalna banka filtara, mada je moguća i inverzna situacija kao što je to slučaj kod D/A konvertora. Prvi tip hibridne banke filtara je bio cilj naučnog istraživanja koji je saopšten u disertaciji.

Izobličenja koja nastaju prilikom obrade signala mogu biti amplitudska, frekvencijska i izobličenja koja nastaju usled preklapanja spektra niskofrekvencijskog i visokofrekvencijskog dela banke filtara. Posebna pažnja biće posvećena aproksimaciji analogne banke filtara, kao i korektorima grupnog kašnjenja radi potiskivanja amplitudskih i faznih izobličenja.

Postoji veliki broj aproksimacija filtarskih funkcija koje se mogu upotrebiti za realizaciju analogne banke filtara.

- Klasu selektivnih filtara karakteriše karakteristična funkcija filtra koja se dobija direktnom primenom ortogonalnih polinoma: Chebyshevjevih, Legendreovih i Ultrasferičnih (Gegenbauerovih) polinoma. Filtarska funkcija $\psi(\omega^2)$ je puni kvadrat ortogonalnog polinoma. Klasični filtri sa selektivnom polinomskom amplitudskom karakteristikom su:
 - Chebyshevljevi filtri,
 - Legendrovi filtri [55],
 - Ultrasferični (Gegenbauerovi) filtri [34].

- Za aproksimaciju monotonih filtarskih funkcija koriste se Legendrovi polinomi. U ovom slučaju filtarska funkcija $\psi(\omega^2)$ se ne može predstaviti u obliku punog kvadrata već kao zbir Legendreovih polinoma prve vrste, izuzev kada se radi o Butterworthovom filtru. Filtri sa monotonom amplitudskom karakteristikom u propusnom opsegu su:

- Butterworthovi filtri,
- Papoulisovi "L" filtri [27, 49, 50],
- Halpernovi filtri [31],
- LSM (Least-Square-Monotonic) filtri. [58].

U radu [60] je pokazano da su filtri sa monotonom amplitudskom karakteristikom, Legendrovi, ili klasa "L" i klasa H filtara, izvedeni kao posebni slučajevi LSM optimizacije asimptotskog nagiba karakteristike slabljenja na granici propusnog opsega, pod uslovom da rešenja budu monični polinomi.

- Filtri sa konstantnim grupnim kašnjenjem

- Thompsonovi filtri [80, 82],
- Gaussovi filtri [37].

. Za aproksimaciju konstantnog grupnog kašnjenja u maksimalno ravnom smislu Thomson je koristio Besselove polinome, dok je Jonas za aproksimacionu tehniku Gaussove amplitudske karakteristike, u smislu greške najmanjeg kvadrata, koristio Laguerrove polinome. Međutim, u radu [59] (Raković, Krstić i Popović) su pokazali da su Thomsonovi filtri specijalni slučajevi Gausovih filtara.

- Iterativni postupak za aproksimaciju filtara propusnika niskih frekvencija sa mini-max aproksimacijom idealne fazne karakteristike prvi je opisao Humphreys [33], a zatim i za filtar propusnika opsega frekvencija Lerner [44]. Rešenje koje nudi aproksimaciju linearne fazne karakteristike u zatvorenom obliku predloženo je u radu [57]. Fazna greška je jednaka nuli samo u maksimalnom broju interpolacionih tačaka¹, dok maksimalna fazna greška između interpolacionih tačaka nisu jedake.
- Kod prelaznih filtara karakteristike se menjaju skokovito ili postepeno od jednog filtra do drugog sa ciljem da se postigne ili povećanje slabljenja u nepropusnom opsegu ili da se

¹Maksimalan broj nula funkcije fazne greške je za jedan veći od reda faznog korektora ne računajući nulu u koordinatnom početku.

ostvari bolji kompromis između karakteristika u frekvencijskom ili vremenskom domenu rezultujućeg filtra. Jedno od prvih i najpoznatijih rešenja dali su Peles i Murakami [52], poznato kao Prelazni Butterworth-Thomsonovi filtri. U dostupnoj literaturi se može naći veliki broj različitih tipova prelaznih filtara, ovde će biti navedeni samo neki

- Butterworth-Chebyshevljevi [9, 65],
- Bessel-Butterworthovi [24],
- Butterworth-Legendreovi [56],
- Ultraspherical-Thomsonovi i Butterworth-Thomsonovi [35],

Stoga su istraživanja, čiji su rezultati saopšteni u ovoj disertaciji, bila usmerena na proučavanje najpogodnijih aproksimacionih postupaka za sintezu filtara u frekvencijskom, kao i u vremenskom domenu koji su pogodni za realizaciju hibridne banke filtara. Dobijeni rezultati su pokazali da je dvostuko komplementarna analogna banka filtara pogodna za realizaciju dvokanalne banke filtara (ne unosi amplitudska izobličenja), međutim njena karakteristika slabljenja je jako osetljiva na tolerancije komponenata u nepropusnom opsegu. S druge strane, komplementarna banka filtra zasnovana na Pseudo-Jacobijevim polinomima je znatno manje osetljiva na tolerancije komponenata, ali zahteva kompenzaciju amplitudskih izobličenja. Stoga novodobijene filtarske funkcije nisu predviđene samo za realizaciju banke filtara već se mogu posmatrati kao novi nezavisni postupci za sintezu prenosnih funkcija.

1.2 Tok izrade doktorske disertacije

Aproksimacija i implementacija dvokanalne hibridne banke filtara je predmet analize i istraživanja prezentovanih u disertaciji. Najvažniji rezultati istraživanja su prikazani u četiri poglavlja, a u zaključku su sumirani najvažniji naučni doprinosi i pravci budućih istraživanja.

Glavni deo predložene disertacije podeljen je u pet poglavlja. U drugoj glavi, nakon uvoda, pojam aproksimacije amplitudske karakteristike filtara ortogonalnim polinomima je proširen i na primenu ortogonalnih Jacobijevih polinoma. Jednostavnom modifikacijom ortogonalnih Jacobijevih polinoma dobijeni su polinomi, nazvani Pseudo-Jacobijevi polinomi [76], pogodni za aproksimaciju amplitudske karakteristike analognih filtara propusnika niskih frekvencija. Ako je stepen filtra poznat, oba parametra Jacobijevog polinoma mogu se koristiti za kontinualno podešavanje performansi filtra. To čini da su dobijene frekvencijske karakteristike fleksibilnije

od standardnih aproksimacija kao što su aproksimacije sa Chebyshevljevim ili Legendrovim polinomima. Treba napomenuti da predložena aproksimacija Pseudo-Jacobijevim polinomima obuhvata mnoge napred pomenute aproksimacije polinomskih filtara, kao na primer: Butterworthov [10], Chebyshev [64], Legendrov [15, 55, 94] i njihove derivate koje su predložili Ku i Drubin [42], itd. Niskofrekvencijski, visokofrekvencijski filtarski par je komplementaran jer se prenosna funkcija filtra propusnika visokih frekvencija dobija transformacijom $s \rightarrow 1/s$ prenosne funkcije filtra propusnika niskih frekvencija. Navedeni su podaci o položaju polova ove klase filtara u s -ravni za parametre Jacobijevih polinoma -0.5 i 1.5 , koji daju približno monotonu amplitudsku karakteristiku i $n = 3$ do 10 . Izvršeno je detaljno poređenje dobijenih rezultata sa poznatim kritično monotonim prenosnim funkcijama.

U trećoj glavi je pokazano da se tehnika aproksimacije dvostruko komplementarne banke digitalnih IIR filtara [86] (komplementarna po snazi i all-pass komplementarna) može primeniti i na analogne filtre. Najpre je izveden uslov koji treba da zadovolji karakteristična funkcija filtra da komplementarni filtarski par bude komplementaran po snazi. Zatim je dokazano da polovi analogne banke filtara komplementarne po snazi leže na krugu u ravni kompleksne frekvencije, a nule na imaginarnoj osi. Predložena je nova klasa analognih filtara komplementarnih po snazi sa višestrukom nulom ili prostim nulama prenosa na realnim frekvencijama. Na kraju je pokazano da su ovako dobijene prenosne funkcije all-pass komplementarne.

U mnogim primenama neophodni su filtri, koji pored strogih specifikacija u pogledu karakteristike slabljenja u propusnom i nepropusnom opsegu, treba da imaju što manja izobličenja grupnog kašnjenja. Filtri sa minimalnim faznim pomerajem ne mogu jednovremeno da zadovolje uslove u pogledu amplitudske i karakteristike grupnog kašnjenja, pa se problem rešava kaskadnom spregom filtra sa specificiranom selektivnosti i korektora grupnog kašnjenja koji ne unosi slabljenje. Fazni korektori mogu da imaju i veću složenost nego sam filter, naročito ako je potrebno da se korekcija grupnog kašnjenja izvrši u celom propusnom opsegu filtra velike selektivnosti. Iz tog razloga četvrta glava je posvećena sintezi korektora grupnog kašnjenja.

S obzirom na moguću složenost korektorskog kola postavlja se pitanje da li maksimalna greška odstupanja od idealne karakteristike treba da bude specificirana u odnosu na karakteristiku grupnog kašnjenja u % ili faznu karakteristiku u ($^{\circ}$). U sistemima za kompresiju impulsa često se dozvoljene varijacije definišu u odnosu na fazno kašnjenje, jer je fazna greška kritičan faktor u određivanju ehoa signala. S druge strane, u sistemima sa frekvencijskom modulacijom greška grupnog kašnjenja unosi nelinearna izobličenja.

S matematičke tačke gledišta, grupno kašnjenje kao parna racionalna funkcija frekvencije pogodnija je za analizu od fazne karakteristike, pa se analitički postupci u najvećem broju slučajeva zasnivaju na funkciji grupnog kašnjenja. U ovoj glavi je predložen novi način sinteze korektora grupnog kašnjenja tako da rezultujuća karakteristika grupnog kašnjenja kaskadne kombinacije filtra i korektora aproksimira konstanto grupno kašnjenje u smislu određenog broja zaravnjenja u koordinatnom početku. Pokazano je da se proces određivanja parametara korektorskog kola sastoji u rešavanju jednog sistema od n simultanih nelinearnih jednačina samo jednom, gde je n stepen korektora grupnog kašnjenja. Kao što je poznato, u slučaju mini-max aproksimacije konstantnog grupnog kašnjenja parametri korektorskog kola se određuju iterativnim procesom koji se sastoji u rešavanju dva sistema simultanih nelinearnih jednačina od n nepoznatih.

U ovoj glavi je razmatrana i osetljivost karakteristike grupnog kašnjenja faznog korektora (all-pass kola). U svom klasičnom radu [32] Hilberman je pokazao da se odstupanje slabljenja (u neperima), relativno odstupanje faze i relativno odstupanje grupnog kašnjenja može izračunati u obliku zbira proizvoda tri faktora: osetljivosti odgovarajuće karakteristike na promene vrednosti koeficijenata prenosne funkcije, osetljivosti koeficijenata na promene vrednosti komponenata, i tolerancije komponenata. Umesto relativne osetljivosti grupnog kašnjenja u odnosu na koeficijente filtra, kao što je uobičajeno u literaturi, u disertaciji je definisana polurelativna osetljivost grupnog kašnjenja bikvadratne prenosne funkcije filtra u sekundama u odnosu na promene parametara Q -faktora i modula pola. Time je omogućen proračun odstupanja grupnog kašnjenja u sekundama ako su poznate tolerancije elemenata. Pokazano je da je osetljivost karakteristike grupnog kašnjenja proporcionalana sa kvadratom Q -faktora pola. Prilikom realizacije faznih korektora, ili all-pass mreža za realizaciju dvostruko komplementarne banke filtara, o tome treba voditi računa.

Konačno, izlaganja u petoj glavi posvećena su realizaciji analognog dela za analizu hibridne banke filtara. Usvojena je all-pass realizacija dvostruko komplementarne analogne banke filtra. All-pass realizacija sa LRC rezonatorima pogodna je za ove primene jer se lako postiže nezavisno podešavanje centralne frekvencije ω_p i faktora dobrote Q komponentama LCR rezonatora. Centralna frekvencija ω_p se može podešavati kondenzatorom C ili kalemom L , dok se promena Q -faktor može ostvariti pomoću otpornika R . Za realizaciju su potrebne samo tri komponente. Kalem je zamenjen integrisanim Antoniouevim generalisanim impedansnim konvertorom [4]. Radi upoređivanja predložene implementacije sa drugim implementacijama, izvršena

je Monte Carlo simulacija predložene realizacije. Prenosna funkcija petog reda dvostruko komplementarne banke filtera je odabrana za Monte Carlo simulaciju. Usvojena je normalna raspodela za komponente filtera i tolerancija od 1%. Poređenje standardne kaskadne realizacije sa realizacijom zasnovanom na LCR rezonatorima je pokazala da obe realizacije imaju malu osetljivost karakteristike slabljenja u propusnom opsegu. Međutim, odstupanje karakteristike slabljenja od nominalne vrednosti u nepropusnom opsegu je znatno veće kod all-pass realizacije. Kod all-pass implementacije osetljivost značajno raste sa porastom reda filtera, a samim tim sa porastom Q faktora pola. Zato je potrebno sekcije višeg reda realizovati sa komponentama manjih tolerancija, i (ili) primeniti dodatno trimovanje Q -faktora pola.

Poslednja glava je zaključak i u njoj su nabrojani doprinosi disertacije i predloženi pravci budućih istraživanja.

Pored rezultata koji su objavljeni u naučnim časopisima u zemlji i inostranstvu, predložena disertacija sadrži i više do sada neobjavljenih rezultata. Oni se pre svega odnose na proširenje prvobitno razvijenih postupaka za sintezu korektora gupnog kašnjenja.

2

Aproksimacija filtarskih funkcija Jacobijevim polinomima

POZNATO je da za određeni stepen filtra uvek postoji kompromis između amplitudske karakteristike i karakteristike grupnog kašnjenja. Razmatrajući celokupni frekvencijski opseg, bolja karakteristika grupnog kašnjenja generalno je povezana sa boljim karakteristikama u vremenskom domenu [60]. Bolja karakteristika u vremenskom domenu dovodi do manjih vremenskih kašnjenja ili manjih vrednosti premašenja u odzivu filtra na jediničnu funkciju.

Postoje aproksimacije koje imaju veoma dobru amplitudsku karakteristiku na račun loše karakteristike grupnog kašnjenja, kao na primer, Butterworthove [10], Chebyshevljeve [64], Bernsteinove [62], Legendreove [15, 55, 94] i njihovi derivati Ku i Drubin [42]. Inverzni slučaj se javlja sa drugim aproksimacijama, kao na primer, Besselove [24], Gaussove [20], Hermiteove [42] i monotoni u smislu najmanjih kvadrata [58], ali svi navedeni filtri daju optimalne karakteristike u određenim tačkama frekvencijskog opsega.

Prelazni filtri su alternativna rešenja koja nude kompromis između amplitudske karakteristike i karakteristike grupnog kašnjenja. Razmatraju se prelazni Butterworth-Chebyshevljevi filtri [9] sa amplitudskom karakteristikom koja postepeno prelazi od Butterworthovog filtra prema Chebyshevljevom filtru kako broj oscilacija (ili stepen zaravnjenja u koordinatnom početku) varira. Tri stepena slobode su dostupna za prelazne Butterworth-Chebyshevljeve filtre: stepen filtra n , maksimalno slabljenje u propusnom opsegu ε i stepen zaravnjenja u koordinatnom početku. Postepeni prelaz iz jedne poznate aproksimacije u drugu poznatu aproksimaciju se postiže korišćenjem predložene metode Pelessa i Murakamija [52]. Oni predlažu da je svaki pol prelaznog Butterworth-Thompsonovog filtra interpolacija između pola Butterworthovog fil-

tra i odgovarajućeg pola Thompsonovog filtra.

U ovoj glavi, pojam aproksimacije amplitudske karakteristike filtara ortogonalnim polinomima je proširen i na primenu ortogonalnih Jacobijevih polinoma. Jednostavna modifikacija ortogonalnog Jacobijevog polinoma, pogodna za aproksimaciju amplitudske karakteristike analognih filtra propusnika niskih frekvencija, predložena je u ovoj glavi. Ako je stepen filtra poznat, oba parametra Jacobijevog polinoma mogu se koristiti za kontinualno podešavanje performansi filtra. To čini da je dobijena amplitudska karakteristika opštija od standardnih aproksimacija kao što su aproksimacije sa Chebyshevljevim ili Legendеровim polinomima. Treba napomenuti da predložena aproksimacija Jacobijevim polinomima obuhvata mnoge napred pomenute aproksimacije polinomskim filtara.

2.1 Aproksimacija amplitudske karakteristike filtra

Aproksimacija amplitudske karakteristike filtra propusnika niskih frekvencija, uz pretpostavku da su sve nule prenosa u beskonačnosti (polinomski filter), kvadrat modula amplitudske karakteristike¹ može se napisati u obliku

$$|H_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 \phi_n^2(\omega)} \quad (2.1)$$

gde je ω promenljiva frekvencija, ε_p parametar kojim se kontroliše slabljenje na granici propusnog opsega (passband edge ripple factor), n je stepen filtra, a polinom $\phi_n(\omega)$ je karakteristična (ili aproksimaciona) funkcija filtra koju treba odabrati tako da se dobije željena amplitudska karakteristika filtra. Karakteristična funkcija se normalizuje tako da ima jediničnu vrednost na graničnoj frekvenciji propusnog opsega filtra ω_p , koja se takođe normalizuje na $\omega_p = 1$, pa se može pisati da je $\phi_n(1) = 1$. Kod svih polinomskih filtara (sa svim nulama prenosa u beskonačnosti), pa i kod predložene klase filtara, karakteristična funkcija je karakteristični polinom.

Kod projektovanja filtara, karakteristična frekvencija koja se koristi za normalizaciju je granična frekvencija propusnog opsega, stoga je normalizovana granična frekvencija propusnog opsega jednaka jedinici. Imajući u vidu da je amplitudska karakteristika parna funkcija

¹Za projektovanje filtara na raspolaganju su dva metoda: Metod imaž parametara (image parameter method) i metod unesenih gubitaka (insertion loss method). Prvi metod se sastoji u kaskadnom povezivanju prostih četvoropla, filtara k i m tipa, a drugi metod se zasniva na projektovanju kompletno specifikiranog frekventijskog odziva. U disertaciji je korišćen metod unesenih gubitaka.

frekvencije, potrebno je da karakteristična funkcija $\phi_n^2(\omega)$ bude parni polinom $\psi_n(\omega^2) = \phi_n^2(\omega)$. Ako je $\phi_n(\omega)$ parno ili neparno, tada je $\phi_n^2(\omega)$ uvek parno, kao što je potrebno. Polinomi $\phi_n(\omega)$, koji nisu parni ni neparni, mogu se upotrebiti za aproksimaciju amplitudske funkcije ako se $\phi_n(\omega)$ zameni sa $\phi_n(\omega^2)$. U takvim slučajevima je neophodno da karakteristična funkcija ne sadrži članove oblika ω^{2k+1} .

Jacobijevi polinomi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ imaju n prostih nula u intervalu ortogonalnosti $-1 < x < 1$ za $\alpha \neq \beta$, ali oni nisu ni parni ni neparni polinomi. Takav tip polinoma nije pogodan da bude karakteristična funkcija. Međutim, Jacobijevi ortogonalni polinomi mogu se prilagoditi tako da se mogu upotrebiti za aproksimaciju filtarske amplitudske karakteristike, kao što će biti pokazano u sledećoj sekciji.

2.2 Jacobijevi polinomi

Klasični Jacobijevi polinomi stepena n [1], poznati i kao hipergeometrijski polinomi, (najčešće se koristi oznaka $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ za te polinome), su ortogonalni na intervalu $[-1, 1]$ u odnosu na težinsku funkciju $w^{(\alpha,\beta)} = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ ako su parametri $\alpha \geq -1$ i $\beta \geq -1$ proizvoljni realni brojevi. Skalarni proizvod dva Jacobijeva polinoma je

$$\int_{-1}^1 P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) w^{(\alpha,\beta)}(x) dx = h_n^{(\alpha,\beta)} \delta_{n,m}, \quad (2.2)$$

gde je

$$h_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}, \quad (2.3)$$

$\delta_{n,m}$ je Kronecker delta simbol, a $\Gamma(\cdot)$ je dobro poznata gama funkcija.

Za generisanje Jacobijevih polinoma koristi se tročlana rekurentna relacija

$$\begin{aligned} P_0^{(\alpha,\beta)}(x) &= 1, \\ P_1^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \\ P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) &= (a_n^{(\alpha,\beta)} x - b_n^{(\alpha,\beta)})P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - c_n^{(\alpha,\beta)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

gde je

$$\begin{aligned} a_n^{(\alpha,\beta)} &= \frac{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2)}{2(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)} \\ b_n^{(\alpha,\beta)} &= \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(2n + \alpha + \beta + 1)}{2(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)} \\ c_n^{(\alpha,\beta)} &= \frac{(n + \alpha)(n + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}{(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

MATLAB[®] script za izračunavanje koeficijenata Jacobijevih polinoma, koji koristi tročlanu rekurentnu formulu, memorisan kao fajl `JACOBIPLY.m` može se naći u Dodatku A. Priloženi **MATLAB**[®] program za generisanje Jacobijevih polinoma može se takođe koristiti za generisanje ortogonalnih polinoma, koji su specijalni slučajevi Jacobijevih polinoma, kao na primer Chebyshevljevi ($\alpha = \beta = -0.5$), Legendreovi ($\alpha = \beta = 0$) i Gegenbauerovi ($\alpha = \beta$) polinomi.

U daljem tekstu će biti korišćene neke osobine Jacobijevih polinoma kao što su:

- Vrednosti Jacobijevog polinoma na granici propusnog opsega, za $x = \pm 1$ su

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + 1)} \quad \text{i} \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = \frac{(-1)^n \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\beta + 1)}. \quad (2.5)$$

- Pariti relacija za ortogonalne Jacobijeve polinome

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x). \quad (2.6)$$

- Relacija koja se odnosi na izvode

$$\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(n + \alpha + \beta + 1) P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x). \quad (2.7)$$

2.2.1 Pseudo-Jacobijevi polinomi

Predložena je sledeća adaptacija Jacobijevih polinoma, koja se zasniva na sabiranju dva ortogonalna Jacobijeva polinoma istog stepena n , koristeći pariti relaciju (2.6)

$$\mathbb{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2} \left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + P_n^{(\beta,\alpha)}(x) \right]. \quad (2.8)$$

Može se jednostavno pokazati da Pseudo-Jacobijevi polinomi (2.8) izuzev u slučajevima kada je $\alpha = \beta$ nisu ortogonalni. Pošto Jacobijevi polinomi $P_n^{(\beta,\alpha)}(x) = (-1)^n P_n^{(\alpha,\beta)}(-x)$ nisu ortog-

onalni u odnosu na težinsku funkciju $w^{(\alpha,\beta)}(x)$ na intervalu $[-1, 1]$, stoga Pseudo-Jacobijevi polinomi (2.8) nisu ortogonalni polinomi. Međutim, rezultujući Pseudo-Jacobijev polinom je stepena n i on je parna funkcija ako je n parno, a neparna funkcija ako je n neparno, promenljive (x) . Prema tome, pogodni su za aproksimaciju niskofrekvencijskih filtara jer mogu ispuniti sve zahteve koji se postavljaju pred karakterističnu funkciju.

Pseudo-Jacobijevi polinomi su simetrični u odnosu na redosled parametara α and β , t.j. $\mathbb{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \mathbb{J}_n^{(\beta,\alpha)}(x)$. Tabela 2.1 sadrži Pseudo-Jacobijeve polinome za $\alpha = -0.5$ i $\beta = 0.5$ od prvog do desetog stepena. Na Slici 2.1 je dat prikaz prvih pet Pseudo-Jacobijevih polinoma sa parametrima $\alpha = -0.5, \beta = 0.5$. Na Slici se vidi da ovi polinomi imaju sličan oblik kao Legendreovi polinomi, koji su veoma pogodni za aproksimaciju filtarskih funkcija. To je zato što se u ovom slučaju može smatrati da Pseudo-Jacobijevi polinomi predstavljaju proširenu verziju Legendreovih polinoma, jer se za $\alpha = 0$ i $\beta = 0$ dobijaju Legendreovi polinomi.

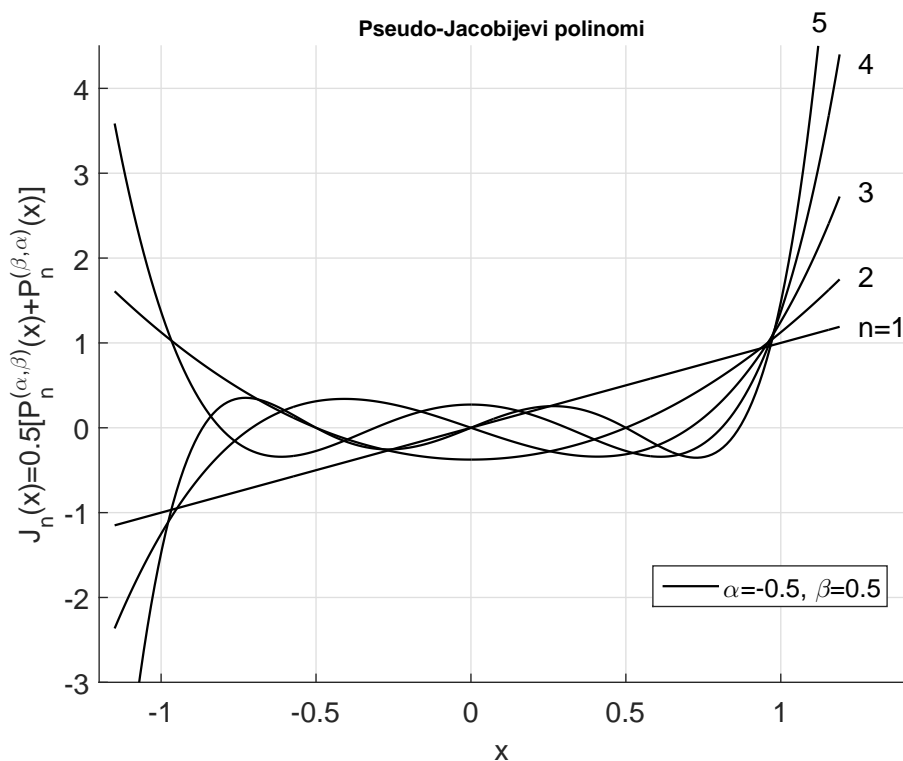
Tab. 2.1: Pseudo-Jacobijevi polinomi $\mathbb{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $\alpha = -0.5, \beta = 0.5, i n = 0, 1, \dots, 10$.

n	$\mathbb{J}_n^{(-0.5,0.5)}(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{8}$
3	$\frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{4}x$
4	$\frac{35}{8}x^4 - \frac{105}{32}x^2 + \frac{35}{128}$
5	$\frac{63}{8}x^5 - \frac{63}{8}x^3 + \frac{189}{128}x$
6	$\frac{231}{16}x^6 - \frac{1155}{64}x^4 + \frac{693}{128}x^2 - \frac{231}{1024}$
7	$\frac{429}{16}x^7 - \frac{1287}{32}x^5 + \frac{2145}{128}x^3 - \frac{429}{256}x$
8	$\frac{6435}{128}x^8 - \frac{45045}{512}x^6 + \frac{96525}{2048}x^4 - \frac{32175}{4096}x^2 + \frac{6435}{32768}$
9	$\frac{12155}{128}x^9 - \frac{12155}{64}x^7 + \frac{255255}{2048}x^5 - \frac{60775}{2048}x^3 + \frac{60775}{32768}x$
10	$\frac{46189}{256}x^{10} - \frac{415701}{1024}x^8 + \frac{323323}{1024}x^6 - \frac{1616615}{16384}x^4 + \frac{692835}{65536}x^2 - \frac{46189}{262144}$

Od značaja za projektovanje filtara je poznavanje lokacija nula Pseudo-Jacobijevih polinoma. Ove nule su poznate pod imenom nule refleksije (reflection zeros) i potrebno je da budu u propusnom opsegu filtra. Za određivanje nula mogu se koristiti standardni matematički programi kao što su MATLAB[®] i Mathematica. Kao i do sada, korišćen je MATLAB[®] softverski paket. Dobijeno je da Pseudo-Jacobijevi polinom $\mathbb{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ n -tog stepena ima n realnih nula u zatvorenom intervalu $[-1, 1]$. To se i moglo zaključiti na osnovu Slike 2.1. Na primer,

nule Pseudo-Jacobijevega polinoma osmog reda ($n = 8$) sa parametrima $\alpha = -0.5$ i $\beta = 0.5$ su: $-0.9396926, -0.7660444, -0.5000000, -0.1736482, 0.1736482, 0.5000000, 0.7660444, 0.9396926$.

Može se uočiti da su nule locirane simetrično oko koordinatnog početka $x = 0$.



Sl. 2.1: Pseudo-Jacobijevi polinomi za $n = 1, 2, \dots, 5$, i parametre $\alpha = -0.5$ i $\beta = 0.5$.

2.3 Polinomska karakteristična funkcija

Polinomska karakteristična funkcija (u daljem tekstu karakteristična funkcija), Jacobijevega filtra [73] [74] dobija se na osnovu normalizacionog kriterijuma $\phi_n(1) = 1$

$$\phi_n(\omega) = \frac{\mathbb{J}_n^{(\alpha, \beta)}(\omega)}{C_n^{(\alpha, \beta)}}, \quad (2.9)$$

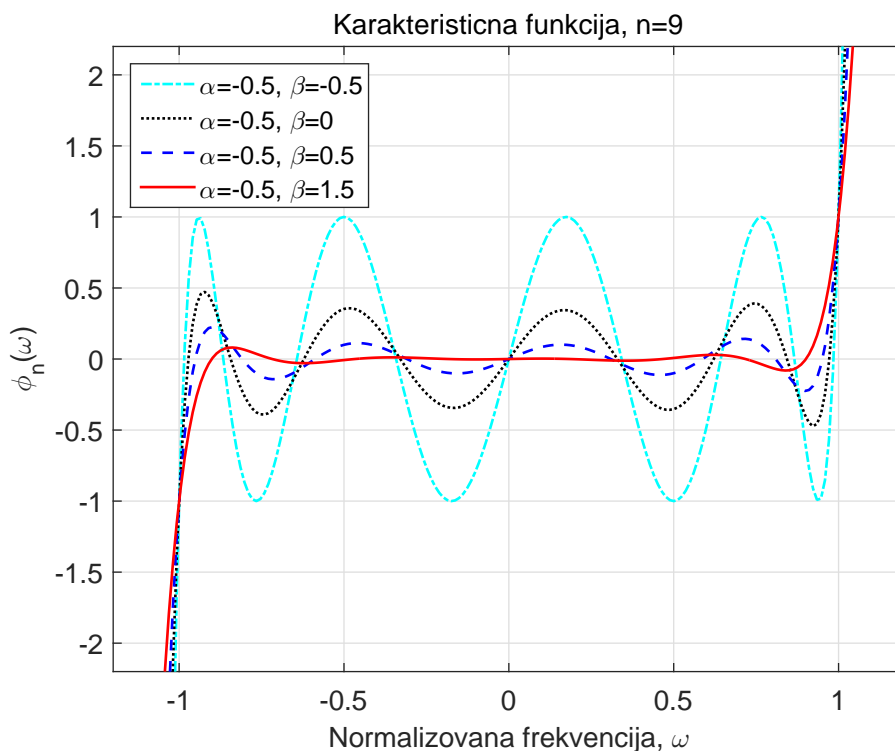
gde je

$$C_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{0.5}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)} \right]. \quad (2.10)$$

Karakteristična funkcija $\phi_n(\omega)$ je simetrična u odnosu na redosled parametara α i β jer je $\mathbb{J}_n^{(\alpha, \beta)}(\omega) = \mathbb{J}_n^{(\beta, \alpha)}(\omega)$.

Na Slici 2.2 prikazane su karakteristične funkcije devetog stepena, zasnovane na Pseudo-Jacobijevim polinomima devetog stepena, za parametar $\alpha = -0.5$ i četiri različite vrednosti parametra β : $-0.5, 0, 0.5$ i 1.5 . Karakteristična funkcija oscilira oko nule u opsegu $-1 < \omega < 1$, a oscilacije su ograničene sa ± 1 , i za $\alpha, \beta > -0.5$, $\phi_n(0) \neq 0$ za n parno, dok je $\phi_n(0) = 0$ za n neparno. Za $|\omega| > 1$ karakteristična funkcija raste (opada) monotono. Ukoliko je $\phi_n(0) \neq 0$, može se pokazati, da se prenosna funkcija $H_n(s)$, data jednačinom (2.1), ne može realizovati kao pasivna LC mreža između jednakih otpornika.

Jednake vrednosti za parametre $\alpha = -0.5$ i $\beta = -0.5$ daju karakterističnu funkciju Chebyshevovog filtra. Sa porastom parametra β oscilacije opadaju i ostaju iste izuzev malog odstupanja na kraju propusnog opsega. Za $\beta = -1.5$ karakteristična funkcija postaje približno monotona [79].



Sl. 2.2: Karakteristične funkcije Pseudo-Jacobijevih filtra devetog reda za $\alpha = -0.5$ i četiri vrednosti za β : $-0.5, 0, 0.5$ i 1.5 . Za $\alpha = \beta = -0.5$ dobija se karakteristična funkcija Chebyshevovog filtra.

Za određivanje imenitelja prenosne funkcije $H_n(s)$, čija je amplitudska karakteristika data jednačinom (2.1), potrebno je najpre funkciju $\psi_n(\omega^2) = \phi_n^2(\omega)$ analitički produžiti na celu kompleksnu ravan smenom $\omega = -js$. Polovi prenosne funkcije $H_n(s)H_n(-s)$ su koreni jednačine

$$\psi_n(\omega^2) \Big|_{\omega^2 = -s^2} + \frac{1}{\varepsilon_p^2} = 0 \quad (2.11)$$

Selekcijom polova s_i , $i = 1, 2, \dots, n$ koji se nalaze u levoj poluravni kompleksne s ravni, dobija se stabilna, kauzalna i vremenski invarijantna prenosna funkcija

$$H_n(s) = \frac{h_0}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} = \frac{h_0}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i s^{n-i+1}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1} d_i} \quad (2.12)$$

gde je $h_0 = a_{n+1} / \sqrt{1 + \varepsilon_p^2 \phi_n^2(0)}$ konstanta koja ograničava da amplituda prenosne funkcije $|H_n(\omega)|$ ne bude veća od jedinice, a $d_i = a_i / h_0$. Ukoliko je prenosna funkcija neparna, tada je $\phi_n(0) = 0$, pa je $h_0 = a_{n+1}$. Za parne prenosne funkcije, kod kojih je $h_0 > a_{n+1}$, ne mogu se realizovati kao pasivne LC mreže između jednakih otpornosti.

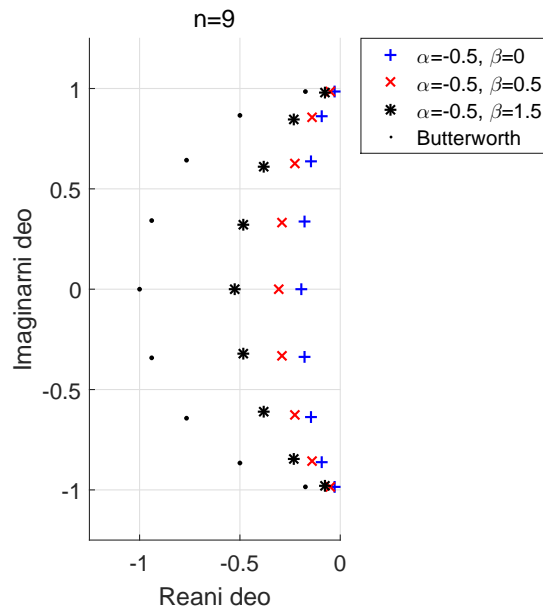
Primenom Darlingtonove realizacije [18] na predloženu Pseudo-Jacobijevu prenosnu funkciju dobijaju se simetrične i recipročne pasivne lestvičaste LC mreže zatvorene na oba kraja jednakim otpornostima za neparne redove filtra, dok za parne redove to nije slučaj. Kao simetrične pasivne LC mreže mogu se realizovati sve prenosne funkcije kod kojih je karakteristična funkcija $\psi_n(\omega^2)$ puni kvadrat. Na primer, to ne važi za kritično monotone filtre kao što su Papoulisovi Optimalni L-filtri [49]. U Prilogu B prikazana je Darlingtonova lestvičasta LC realizacija i tabelarni prikaz realizovanih lestvičastih LC mreža za redove filtra od tri do deset.

Na Slici 2.3 prikazan je položaj polova Pseudo-Jacobijevog filtra devetog reda. Odgovarajuće karakteristične funkcije prikazane su na Slici 2.2, za $\alpha = -0.5$ i tri različite vrednosti za $\beta = 0, 0.5$ i 1.5 . Koeficijenti d_i , $i = 1, 2, \dots, 9$ u imenitelju prenosnih funkcija Jacobijevih filtara devetog stepena, u skladu sa jednačinom (2.12), dati su Tabeli 2.2 za svaku prenosnu funkciju.

Tab. 2.2: Koeficijenti u imenitelju prenosne funkcije Pseudo-Jacobijevih filtara devetog reda.

$D(s) = d_1 s^9 + d_2 s^8 + \dots + d_9 s + d_{10}$			
d_i	$\alpha = -0.5$		
	$\beta = 0$	$\beta = 0.5$	$\beta = 1.5$
d_1	114.0729	51.2	14.5194
d_2	123.6453	88.10417	41.77595
d_3	312.3413	178.2041	83.02529
d_4	251.1374	193.705	113.482
d_5	283.2843	192.8005	118.269
d_6	158.9528	133.0264	93.88951
d_7	94.98896	74.68058	56.42728
d_8	32.03681	29.21164	24.55523
d_9	8.623849	7.70865	7.008029
d_{10}	1.0	1.0	1.0

Radi poređenja, na Slici 2.3 su prikazani i polovi Butterworthovog filtra devetog reda, koji, kao što je poznato leže na jediničnom krugu.



Sl. 2.3: Položaj polova Pseudo-Jacobijevih filtara devetog stepena, za $\alpha = -0.5$ i $\beta = 0, 0.5$ i 1.5 , i Butterworthovog filtra.

Slika 2.3 pokazuje da se sa porastom vrednosti parametra β polovi prenosne funkcije pomeraju ulevo, pa za veliku vrednost parametra β (na primer $\beta = 10$), polovi će ležati na jediničnom krugu, ali se neće poklopiti sa polovima Butterworthovog filtra, jer dva pola najbliža realnoj osi postaju realna, što znatno pogoršava karakteristike filtra. Da bi se dobio Butterworthov filter i parametar α treba da ima veliku vrednost.

Sa pomeranjem polova ulevo smanjuje se kritični faktor dobrote pola Jacobijevog filtra². Za navedene partikularne slučajeve kritični faktori dobrote polova iznose: $Q_c^{(-0.5,0)} = 16.3225060$, $Q_c^{(-0.5,0.5)} = 10.5018110$ i $Q_c^{(-0.5,1.5)} = 6.3996038$.

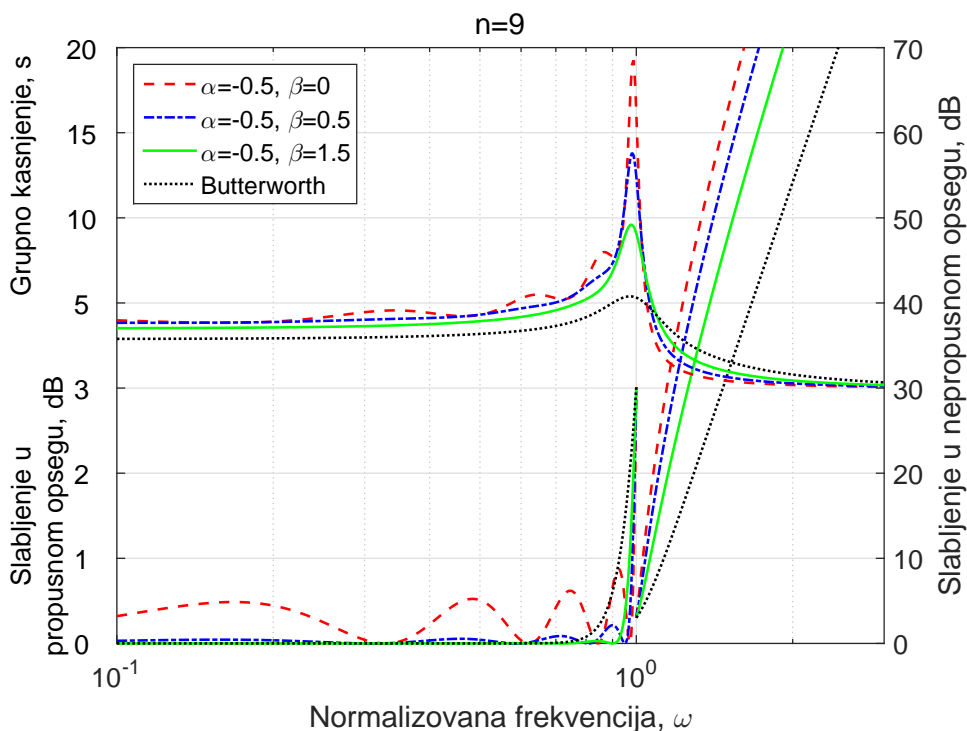
2.3.1 Rezultati aproksimacije

Na Slici 2.4 prikazani su frekvencijski odzivi tri Pseudo-Jacobijeva filtra devetog reda za $\alpha = -0.5$ i tri različite vrednosti parametra β (0, 0.5 i 1.5) u polulogaritamskoj skali. Frekvencijski odziv amplitudske karakteristike u propusnog opsegu nacrtan je u deset puta većoj

²Modulo pola ω_p i faktor dobrote pola Q određuju konjugovano kompleksni filtarski par

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_p}{2Q} \pm j\omega_p \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

razmeri. Za $\alpha = -0.5$ i $\beta \leq 1.5$ za karakteristiku slabljenja u propusnom opsegu se može



Sl. 2.4: Frekvencijske karakteristike Pseudo-Jacobijevih filtra devetog reda za $\alpha = -0.5$ i $\beta = 0, 0.5$ i 1.5 , i Butterworthovog filtra.

tvrditi da je približno monotona. Naime, karakteristika slabljenja poseduje nejednake oscilacije u propusnom opsegu sa vrlo malom amplitudom. Maksimalna oscilacija iznosi 0,0248 dB na normalizovanoj frekvenciji 0.8405 rad/s, što čini da je promena znaka prvog izvoda vrlo mala [79]. Smatra se da je amplitudska karakteristika u propusnom opsegu približno monotona ako su oscilacije u propisnom opsegu manje od 0.03 dB.

Sa povećanjem parametra β smanjuje se i izobličenje grupnog kašnjenja koji nastupa na ivici propusnog opsega. Kako za sve poznate filtre tako i za Pseudo-Jacobijeve filtre važi da prelazne karakteristike (transient response) i karakteristike u ustaljenom stanju (steady state response) leže između Butterworthovih i Chebyshevjevih filtara. Potrebno je odrediti gde se u navedenom opsegu nalaze karakteristike Jacobijevih filtara.

Grafičko poređenje karakteristika filtara nije objektivno. Jedan od načina za poređenje frekvencijskih odziva dva filtra koji su realizovani na osnovu istih frekvencijskih specifikacija je nagib amplitudske karakteristike na granici propusnog opsega (cutoff slope). Prema definiciji, nagib se definiše kao negativni izvod amplitudske karakteristike na normalizovanoj graničnoj

frekvenciji propusnog opsega $\omega = 1$,

$$S^{(\alpha,\beta)} = -\frac{d|H_n(\omega)|}{d\omega}\Big|_{\omega=1} = -\frac{\varepsilon_p^2 \phi_n(\omega)}{(1 + \varepsilon_p^2)^{3/2}} \frac{d\phi_n(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=1}, \quad (2.13)$$

gde je $\phi_n(1) = 1$, a

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_n(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=1} &= \frac{1}{C_n^{(\alpha,\beta)}} \left[\frac{d}{d\omega} P_n^{(\alpha,\beta)}(\omega) + \frac{d}{d\omega} P_n^{(\beta,\alpha)}(\omega) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)} \left[\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 2)} \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

je nagib karakteristične funkcije na granici propusnog opsega, koga ćemo nazvati faktor nagiba $SF^{(\alpha,\beta)}$ (slope factor). Za izračunavanje prvog izvoda Jacobijevog ortogonalnog polinoma $P_n^{(\alpha,\beta)}(\omega)$ korišćena je relacija (2.7). Važno je napomenuti da je nagib slabljenja na granici propusnog opsega dat u zatvornom obliku. Faktori nagiba za amplitudske karakteristike prikazane na Slici 2.4 su: $SF^{(-0.5,0.0)} = 98.8767$, $SF^{(-0.5,0.5)} = 66.000$ i $SF^{(-0.5,1.5)} = 98.8767$. Za $\alpha = \beta = -0.5$ može se verifikovati rezultat Budaka i Aronhimea [9] koji su dobili za Chebyshevovu aprokcimaciju - $m_c = -2^{-3/2}n^2$. Za $\alpha = \beta = -0.5$, i pošto je $\Gamma(0.5)/\Gamma(1.5) = 2$, izraz (2.14) daje faktor nagiba $SF^{(-0.5,-0.5)} = n^2$.

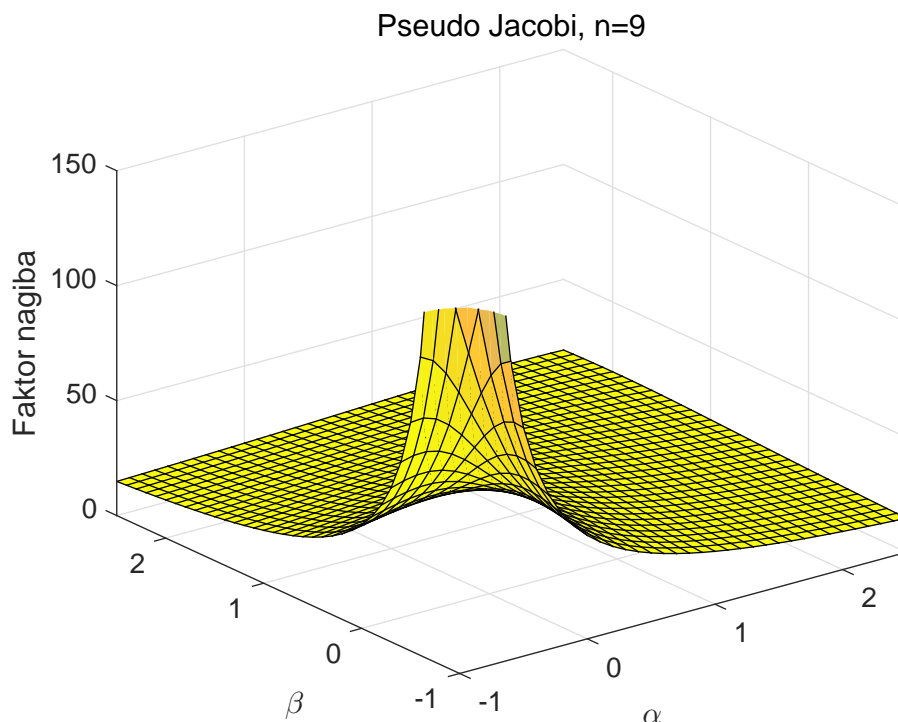
Na Slici 2.5 prikazana je 3D grafika promene Faktora nagiba za filter devetog reda u funkciji parametara Pseudo-Jacobijevog polinoma.

Približno monotoni Pseudo-Jacobijevi filteri mogu se uspešno primeniti za realizaciju banke filtera u mikrotalasnom opsegu. Jedna od značajnih karakteristika filtera koji rade na mikrotalasnim frekvencijama su povratni gubici (return los). Reflekcioni koeficijent se definiše preko karakteristične funkcije filtera [13] [30] sa

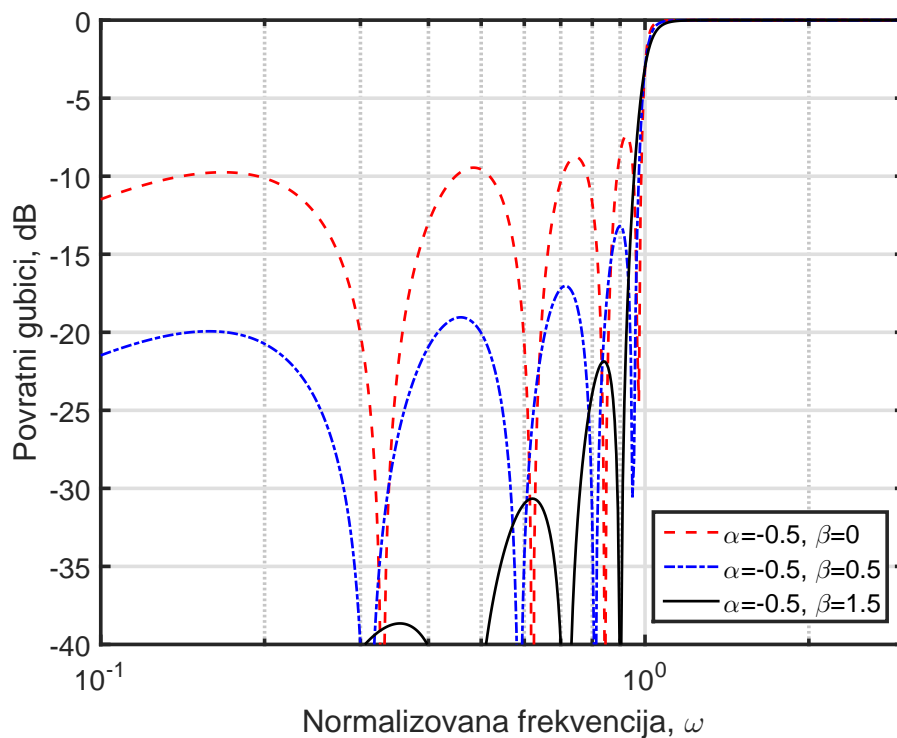
$$|\Gamma(\omega)|^2 = \frac{\varepsilon_p^2 \phi_n^2(\omega)}{1 + \varepsilon_p^2 \phi_n^2(\omega)}. \quad (2.15)$$

Povratni gubici na ulazu filtera u dB, $RL = -10 \log_{20}(|\Gamma(\omega)|)$, zavise pre svega od podešenosti impedansi na ulazu filtera i oni se najčešće koriste za podešavanje (trimovanje) karakteristika filtera. Mala vrednost povratnog slabljenja garantuje i malu vrednost unešenog slabljenja.

Na Slici 2.6 prikazane su frekvencijske karakteristike povratnog slabljenja Pseudo-Jacobijevog filtera za $\alpha = -0.5$ i tri različite vrednosti parametra β . Sa povećanjem parametra



Sl. 2.5: Faktor nagiba Pseudo-Jacobiievih filtara devetog reda.



Sl. 2.6: Povratno slabljenje Pseudo-Jacobiievih filtra devetog reda, za parametar $\alpha = -0.5$ i tri različite vrednosti parametra β : 0, 0.5 i 1.5, i Butterworthovog filtra.

β smanjuju se povratni gubici, a samim tim smanjuje se i unešeno slabljenje. Frekvencije na kojima je povratno slabljenje jednako nuli malo se menjaju sa promenom parametra β . Nula najbliža propusnom opsegu se koristi za trimovanje propusnog opsega mikrotalasnog filtra.

To je jedan od razloga što se Chebyshevljevi i Legendrovi filtri često koriste za realizaciju mikrotalasnih filtara [14] [43] [77]. Za optimizaciju unešenog slabljenja može se koristiti parametar ε_p kojim se kontroliše slabljenje u propusnom opsegu. Oscilacije u propusnom opsegu Chebyshevljevog filtra od 3 dB nisu prihvatljive za praktičnu primenu, te je u tom slučaju obavezno koristiti ε_p za smanjivanje unešenog slabljenja.

Polovi prenosnih funkcije Jacobijevih filtara od trećeg do desetog reda sa približno monotonom amplitudskom karakteristikom u propusnom opsegu dati su u Tabeli 2.3.

Tab. 2.3: Položaj polova Pseudo-Jacobijevih filtara ($\alpha = -0.5$ $\beta = 1.5$) sa približno monotonom amplitudskom karakteristikom u propusnom opsegu.

n	σ_1 $\pm j\omega_1$	σ_2 $\pm j\omega_2$	σ_3 $\pm j\omega_3$	σ_4 $\pm j\omega_4$	σ_5 $\pm j\omega_5$
3	-0.8455479 $\pm j0$	-0.4227739 $\pm j0.8663135$			
4	-0.7019554 $\pm j0.3752063$	-0.2856372 $\pm j0.9220721$			
5	-0.6966073 $\pm j0$	-0.5527636 $\pm j0.5721121$	-0.2044599 $\pm j0.9481738$		
6	-0.6170704 $\pm j0.2463929$	-0.4357693 $\pm j0.6869625$	-0.1530189 $\pm j0.9627270$		
7	-0.5963997 $\pm j0.$	-0.5279123 $\pm j0.4117366$	-0.3482869 $\pm j0.7602711$	-0.1185744 $\pm j0.9717830$	
8	-0.5448777 $\pm j0.1822382$	-0.4475517 $\pm j0.5277575$	-0.2829670 $\pm j0.8102472$	-0.0944647 $\pm j0.9778467$	
9	-0.5248518 $\pm j0$	-0.4857115 $\pm j0.3193153$	-0.3799181 $\pm j0.6125469$	-0.2336009 $\pm j0.8459818$	-0.0769685 $\pm j0.9821242$
10	-0.4882497 $\pm j0.1443869$	-0.4286041 $\pm j0.4249991$	-0.3243647 $\pm j0.6765296$	-0.1956849 $\pm j0.8724673$	-0.0638875 $\pm j0.9852620$

2.3.2 Poređenje sa drugim sistemima

U ovoj sekciji ćemo uporediti četiri klase filtara sa kritično monotonom amplitudskom karakteristikom filtara i predloženu klasu filtara ($\alpha = -0.5$ i $\beta = 1.5$) sa približno monotonom amplitudskom karakteristikom u propusnom opsegu. Filtri sa kritično monotonom karakteristikom su:

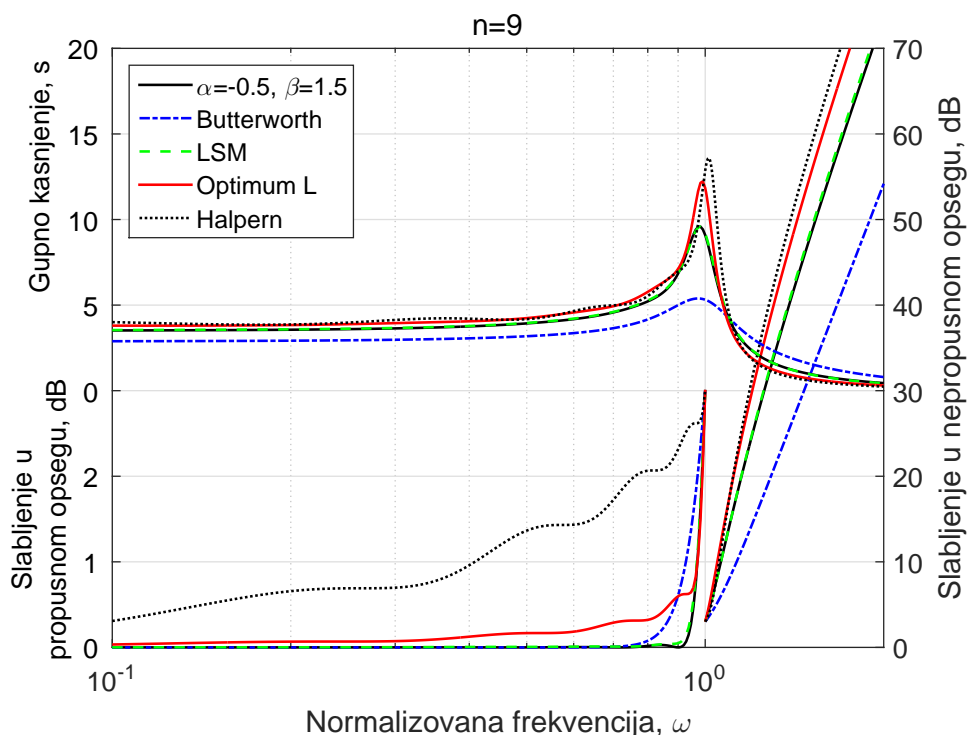
1. Butterworthov filtar sa maksimalno ravnim [10] amplitudskom karakteristikom u koordinatnom početku. Standardni filtar sa kojim filtri propusnici niskih frekvencija porede

svoje karakteristike u ustaljenom stanju.

2. Optimalni L-filtar [49] [50] [27] poznat i kao Papoulis Legendre filtara sa maksimalnim nagibom amplitudske karakteristike na granici propusnog opsega.
3. Halpernov filtara [27] sa maksimalnim asimptotskim slabljenjem, koje je vrlo slično sa asimptotskim slabljenjem L-filtra. Kod navedene aproksimacije Halpern je uvećao vodeći koeficijent karakterističnog polinoma do krajnjih granica.
4. LSM (Least Square Monotonic) filtara [58] sa minimalnim povratnim gubicima, odnosno sa minimalnom površinom ispod karakteristične funkcije u propusnom opsegu.

Svi pomenuti filtri imaju sve nule prenosa u beskonačnosti (polinomske filtri) i monotonu amplitudsku karakteristiku u nepropusnom opsegu. Za optimizaciju karakteristika koristi se red filtra i maksimalno slabljenje u propusnom opsegu, parametar ε_p .

Na Slici 2.7 prikazane su karakteristike u ustaljenom stanju filtara sa monotonom i približno monotonom karakteristikom u propusnom opsegu, $\alpha = -0.5$ i $\beta = 1.5$.



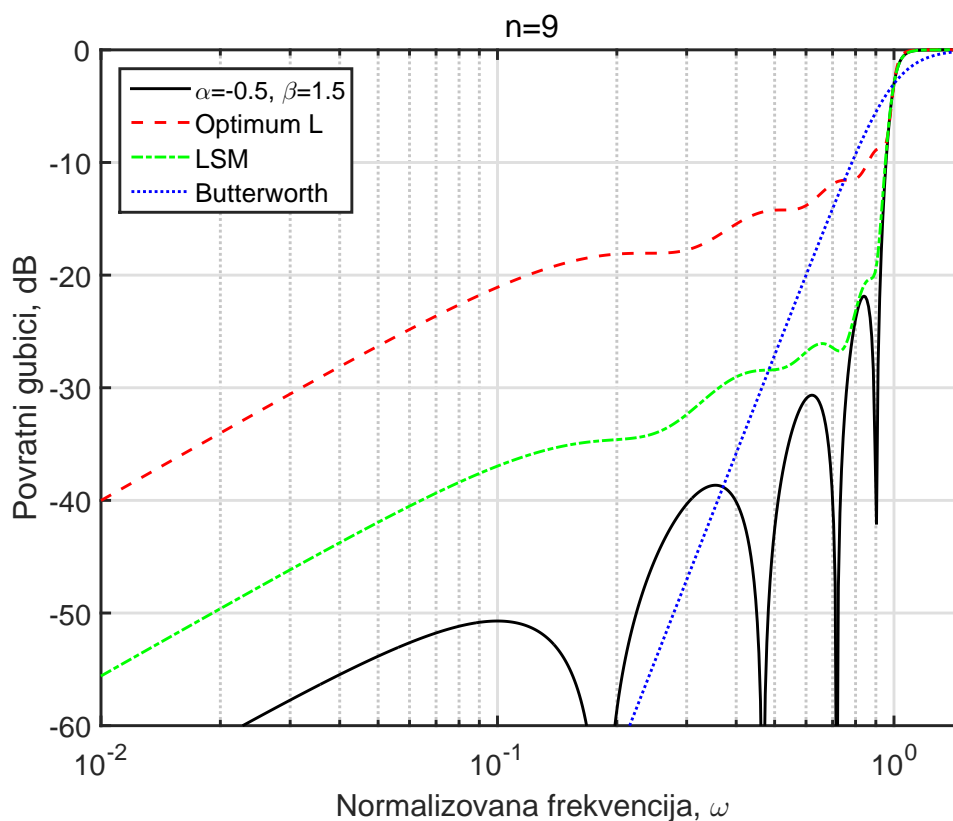
SI. 2.7: Karakteristike u ustaljenom stanju filtara sa monotonom amplitudskom karakteristikom u propusnom opsegu i Pseudo-Jacobijevog filtra sa $\alpha = -0.5$ i $\beta = 1.5$.

Nagib amplitudske karakteristike na ivici propusnog opsega Halpernovog filtra isti je kao kod Butterworthovog filtra, $SF=2n$, za n -ti stepen filtra, dok je asimptotski nagib sličan sa asimptotskim nagibom Optimalnog L-filtra. Slabljenje Optimalnog L-filtra u propusnom opsegu je

mnogo manje nego kod Halpernovog filtra, pa se može zaključiti da je Halpernov filter samo od akademskog interesa kao što su to zaključili Đurić i Petković [22]. To je razlog što Halpernov filter nećemo koristiti u daljim poređenjima.

Pseudo-Jacobijev filter i LSM filter imaju približno iste karakteristike u ustaljenom stanju, koje su znatno bolje od karakteristike Optimalnog L-filtra u propusnom opsegu, a nešto lošije u nepropusnom opsegu. S druge strane, vrh grupnog kašnjenja na ivici propusnog opsega Optimalnog L-filtra je nešto veći od vrha grupnog kašnjenja Pseudo-Jacobijevog filtra, što je posledica povećanog nagiba amplitudske karakteristike Optimalnog L-filtra u prelaznoj zoni.

Na Slici 2.8 upoređeni su povratni gubici Optimalnog L-filtra, LSM Filtra i Butterworthovog filtra sa približno monotonim Pseudo-Jacobijevim filtrom.



Sl. 2.8: Povratni gubici klasičnih filtara sa monotonom amplitudskom karakteristikom i Pseudo-Jacobijevog filtra sa približno monotonom karakteristikom u propusnom opsegu.

Najpre se može uočiti da monotonu karakteristiku u propusnom opsegu Butterworthovog filtra prate i monotoni povratni gubici, što nije poželjno za realizaciju mikrotalasnih filtara, jer granica propusnog opsega nije jasno definisana. To isto važi i za Optimalni L-fitar i LSM filter kod kojih je povratno slabljenje znatno veće od povratnog slabljenja Butterworthovog filtra. Međutim, povratno slabljenje kod predložene klase filtra je znatno veće u odnosu na sve ostale

monotone filtre, a pored toga postoje i četiri frekvencije na kojima je povratno slabljenje jednako nuli, odnosno, maksimalna snaga se predaje potrošaču. U klasičnim radovima [47] i [48] H. J. Orchard je pokazao da je osetljivost amplitudske karakteristike u propusnom opsegu filtra u odnosu na promene elemenata filtra, realizovanog kao pasivna LC mreža, ima minimalnu vrednost ukoliko je filter projektovan tako da na određenom broju frekvencija postoji maksimalan prenos snage potrošaču, što je slučaj sa Pseudo-Jakobijevim filtrom. Prema tome, može se zaključiti da osetljivost predloženog filtra u propusnom opsegu je znatno manja u odnosu na sve ostale monotone filtre.

Karakteristike Butterwortovog, Halpernovog, Optimalnog L-filtra i LSM filtra su detaljno upoređene u nedavno publikovanom radu [83]. Stoga, karakteristike približno monotonom Pseudo-Jacobievog filtra ($\alpha = -0.5$ i $\beta = 1.5$) biće detaljno upoređene samo sa karakteristikama LSM filtra. Propusni opseg je normalizovan na jedinicu, $\omega_{3dB} = 1$, za oba filtra. Pretpostavlja se da su oba filtra realizovana kao lestvičaste LC mreže bez gubitaka. U Tabeli 2.4 sažete su performanse za oba filtra: površina ispod karakteristične funkcije u propusnom opsegu (Area), faktor nagiba (SF), faktor dobrote kritičnog pola (Q_{max}), odnos maksimalne i minimalne normalizovane vrednosti elementa filtra (g_{max}/g_{min}), zbir normalizovanih vrednosti svih elemenata filtra ³ ($\sum_{i=1}^n g_i$), i otpornost potrošača (R_L).

Površina ispod karakteristične funkcije u propusnom opsegu Pseudo-Jacobijevog filtra je manja od površine ispod karakteristične funkcije LSM filtra, iako je LSM filter aproksimiran pod uslovom minimalne površine ispod karakteristične funkcije. Na primer, ovo važi za deveti red Jacobijevog filtra sa parametrima $\alpha = -0.5$ i $0.3928 < \beta < 1.981$. Kada stepen filtra raste, razlika površina takođe raste, pa je približno monotoni filter bolje rešenje od LSM filtra. Za $n = 10$, površina ispod karakteristične funkcije Pseudo-Jacobijevog filtra je za 16.7% manja od odgovarajuće površine LSM filtra, a samim tim Pseudo-Jacobijev filter karakterišu manji povratni gubici.

Daljim uvidom u Tabelu 2.4, može se zaključiti da su i ostale karakteristike Pseudo-Jacobijevog filtra bolje od karakteristika LSM filtra osim u slučaju faktora dobrote kritičnog pola, koje su malo bolje ili približno iste. Ovo se i moglo predvideti jer su im frekvencijski odzivi približno isti kao što je prikazano na Slici 2.7.

Važna prednost u odnosu na LSM filter je zatvoreni oblik karakteristične funkcije, u matem-

³Odnos maksimalne i minimalne vrednosti elemenata i zbir svih elemenata filtra se uobičajeno koristi za poređenje LC lestvičastih mreža. Kod projektovanaja mikrotalasnih filtera implementiranih u talasovodnoj tehenici, dužina i širina linija rastu sa porastom vrednosti elementa, zato je potrebno da odnos g_{max}/g_{min} i zbir $\sum_{i=1}^n g_i$ bude što je moguće manji.

Tab. 2.4: Poređenje karakteristika predloženog približno monotonog filtra i LSM filtra

n	Area		SF		Q_{\max}		g_{\max}/g_{\min}		$\sum_{i=1}^n g_i$		R_L	
	NM	LSM	NM	LSM	NM	LSM	NM	LSM	NM	LSM	NM	LSM
3	0.1174	0.121	7.0909	7.2880	1.1401	1.1816	1.5388	1.6247	4.1852	4.2698	1	1
4	0.0795	0.086	10.7294	10.6700	1.6897	1.7070	1.8708	2.1085	5.6590	5.6891	1.0238	1
5	0.0570	0.061	15.1507	15.3400	2.3720	2.4439	2.1350	2.4671	7.2341	7.3299	1	1
6	0.0428	0.047	20.3636	20.1000	3.1853	3.1992	2.3396	2.6480	8.8689	8.9199	1.0087	1
7	0.0332	0.037	26.3721	26.1600	4.1282	4.1640	2.5106	2.9582	10.5517	10.6517	1	1
8	0.0265	0.030	33.1779	32.2900	5.1998	5.1450	2.6861	3.0957	12.2695	12.3300	1.0041	1
9	0.0217	0.025	40.7821	39.7400	6.3996	6.3225	2.8295	3.2868	14.0161	14.1160	1	1
10	0.0180	0.021	49.1852	47.2400	7.7271	7.5518	2.9601	3.4373	15.7856	15.8495	1.0022	1

LSM, least square monotonic filter; NM, približno monotoni filter; SF, faktor nagiba.

atičkom smislu, koji sadrži dva stepena slobode za podešavanje karakteristika filtra, parametri α i β . Navedenim parametrima mogu se podešavati talasavost u propusnom opsegu filtra, što utiče na povratne gubitke, selektivnost i karakteristiku grupnog kašnjenja.

Kao jedan od nedostataka Pseudo-Jacobijevih filtara može se navesti činjenica da se parni redovi filtra ne mogu realizovati kao pasivne LC mreže sa dva pristupa zatvorene jednakim otpornostima sa oba kraja. Sa porastom reda filtra razlika između otpornosti generatora i otpornosti potrošača se smanjuje. Međutim, od pomenutih monotonih filtara samo Jacobijevi filtri se mogu realizovati kao simetrične/recipročne mreže jer im je karakteristična funkcija puni kvadrat, što nije slučaj sa ostalim monotonim filtrima. Ovo je važna osobina jer simetrične mreže imaju smanjenu osetljivost na tolerancije elemenata [89, str. 83].

2.4 Racionalna karakteristična funkcija

Racionalna karakteristična funkcija sa prostim polovima⁴, koja se koristi u jednačini (2.1) da bi se dobila racionalna prenosna funkcija filtra [72], ima oblik

$$\Phi_n(\omega, \mathbf{X}_0) = \frac{\lambda \phi_n(\omega)}{\prod_{i=1}^m (\omega^2 - \omega_{0i}^2)} \quad (2.16)$$

gde je $\mathbf{X}_0 = [\omega_{01}, \omega_{02}, \dots, \omega_{0m}]$ vektor koji sadrži polove ω_{0i} karakteristične funkcije $\Phi_n(\omega, \mathbf{X}_0)$ koji leže u nepropusnom opsegu filtra $\omega_{0i} > 1$, $\lambda = \prod_{i=1}^m (\omega_{0i}^2 - 1)$, a $n > 2m$ je stepen prenosne funkcije filtra. Može se lako proveriti da je $\Phi_n(1, \mathbf{X}_0) = (-1)^m$.

Nule karakteristične funkcije \mathbf{X}_0 treba podesiti tako da slabljenje u nepropusnom opsegu bude u Chebyshevljevom smislu, tj. da minimalno slabljenje na ekstremalnim frekvencijama u nepropusnom opsegu $\mathbf{X}_m = [\omega_{m1}, \omega_{m2}, \dots, \omega_{mm}]$ iznosi R_s [dB]. Nepoznati vektor \mathbf{X}_0 može se izračunati rešavanjem sistema od m nelinearnih jednačina Newton-Kantorovičevim iterativnim postupkom bez memorije [5] ukoliko su početna rešenja $\mathbf{X}_0^{(0)}$ dovoljno blizu konačnom rešenju.

Prvi korak se sastoji u određivanju početnih rešenja za racionalnu karakterističnu funkciju

⁴Može se koristiti racionalna karakteristična funkcija sa višestrukim polom oblika

$$\Phi_n(\omega, \omega_0) = \frac{\phi_n(\omega)(\omega_0^2 - 1)^m}{(\omega^2 - \omega_0^2)^m}$$

za aproksimaciju racionalne prenosne funkcije u kojoj imamo samo jednu nepoznatu ω_0 da bi se postiglo željeno minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu. Međutim, karakteristična funkcija sa prostim polovima daje bolje rezultate.

$\mathbf{X}_0^{(0)} = [\omega_{01}, \omega_{02}, \dots, \omega_{0m}]^{(0)}$ koja su dovoljno blizu konačnim rešenjima i ispunjavaju uslov $1 < \omega_{0m}^{(0)} < \dots < \omega_{02}^{(0)} < \omega_{01}^{(0)}$. Nule eliptičkog filtra m -tog reda mogu se uzeti za početno rešenje jer su dovoljno blizu konačnom rešenju.

Drugi korak je određivanje početnih rešenja za m frekvencija $\mathbf{X}_m^{(0)} = [\omega_{m1}, \omega_{m2}, \dots, \omega_{mm}]^{(0)}$ u nepropusnom opsegu na kojima nastupaju ekstremne vrednosti slabljenja. Te frekvencije su nule prvog izvoda karakteristične funkcije

$$\frac{\partial \Phi_n(\omega_{mi}, \mathbf{X}_0)}{\partial \omega} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.17)$$

Treći korak je izračunavanje novih vrednosti za nule karakteristične funkcije rešavanjem sistema od m nelinearnih jednačina Newton-Kantorovichevim postupkom

$$F_i(\mathbf{X}_0) = \Phi_n(\omega_{mi}, \mathbf{X}_0) - (-1)^i A_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.18)$$

gde su A_i ekstremne vrednosti karakteristične funkcije u nepropusnom opsegu koje se javljaju na frekvencijama ω_{mi} , kao što je prikazano na Slici 2.9. Za slabljenje u nepropusnom opsegu u Chebyshevljevom smislu je $A_1 = A_2 = \dots = A_m = A_s$, gde je $A_s = \sqrt{10^{0.1a_{min}} - 1}$, a a_{min} je minimalno slabljenje filtra u nepropusnom opsegu.

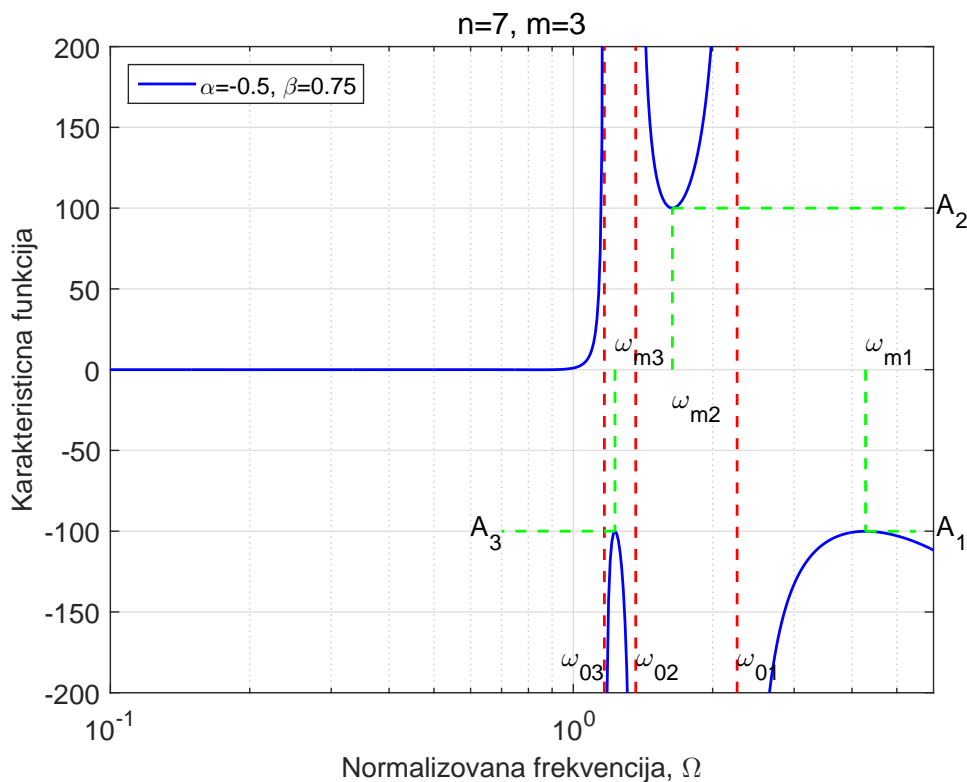
Veza između trenutne vrednosti nepoznatog vektora \mathbf{X}_0 , $\mathbf{X}_0^{(i)}$, i nove vrednosti vektora \mathbf{X}_0 dobijene nakon jedne iteracije, $\mathbf{X}_0^{(i+1)}$, može se iskazati u matričnom obliku

$$\mathbf{X}_0^{(i+1)} = \mathbf{X}_0^{(i)} - \mathbf{J}_F^{-1}(\mathbf{X}_0^{(i)}) \mathbf{F}(\mathbf{X}_0^{(i)}) \quad (2.19)$$

gde je $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)$ vektor dimenzija $m \times 1$ sa komponentama $F_i(\mathbf{X}_0)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) kao što je prikazano u jednačini (2.18) za slabljenje u nepropusnom opsegu u Chebyshevljevom smislu, i $\mathbf{J}_F^{-1}(\mathbf{X}_0)$ predstavlja inverznu matricu $m \times m$ Jacobian matrice $\mathbf{F}(\mathbf{X}_0)$. Pošto je vektor \mathbf{X}_m takođe nepoznat, nakon izračunavanja svake nove vrednosti vektora \mathbf{X}_0 treba izvršiti i korekciju vektora \mathbf{X}_m , koristeći jednačinu (2.17) koja se koristila za izračunavanje početne vrednost za \mathbf{X}_m .

Kao zaustavni kriterijum koristi se Frobenijusova ili Euklidova vektorska norma $\|\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m F_i^2(\mathbf{X}_0)} < \varepsilon$, gde je ε proizvoljno mali broj. U programskom paketu MATLAB[®] poziva se jednostavno sa naredbom `norm`.

U cilju određivanja prenosne funkcije $H_n(s)$ na osnovu poznatog kvadrata amplitudske



Sl. 2.9: Racionalna karakteristična funkcija zasnovana na Pseudo-Jacobijevim polinomima sedmog reda sa tri pola na realnim frekvencijama.

karakteristike $|H_n(\omega)|^2$, počinjemo sa analitičkim produženjem $\phi_n^2(\omega)$, na celu s -ravan, preslikavanjem $\omega \mapsto -js$. Polovi $H_n(s)H_n(-s)$ su koreni sledeće jednačine

$$\Phi_n^2(\omega, \mathbf{X}_0) \Big|_{\omega=-js} + \frac{1}{\varepsilon_p^2} = 0. \quad (2.20)$$

Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $\varepsilon_p = 1$. Izborom polova u levoj poluravni kompleksne frekvencije, s_i , dobijaju se polovi, stabilne, linearne i vremenski invarijantne racionalne prenosne funkcije:

$$H_n(s) = h_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s^2 + \omega_{0i}^2)}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i s^{n-i+1}}, \quad a_1 = 1 \quad (2.21)$$

gde je $h_0 = a_{n+1} / \sqrt{1 + \varepsilon_p^2 \Phi_n^2(0, \mathbf{X}_0) / \prod_{i=1}^m \omega_{0i}^2}$ samo referentni nivo, tj. nivo koji ograničava da amplituda prenosne funkcija $|H_n(0)|$ ne bude veća od jedinice.

Nagib racionalne amplitudske karakteristike na ivici propusnog opsega je

$$S_r^{(\alpha, \beta)} = -\frac{1}{2^{3/2}} \left[\frac{n}{2} (n + \alpha + \beta + 1) \times \frac{\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 2)}}{\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1)}} + \sum_{i=1}^m \frac{2}{\omega_{0i}^2 - 1} \right]. \quad (2.22)$$

Jednačina 2.22 ima dva dela. Prvi deo je nagib karakteristike slabljenja na granici propusnog opsega Pseudo-Jacobijevog filtra sa svim nulama prenosa u beskonačnosti, jednačina (2.14). Drugi deo pokazuje kako konačne nule prenosa povećavaju nagib amplitudske karakteristike na ivici propusnog opsega.

Od praktičnog interesa je da karakteristika slabljenja u propusnom opsegu predložene klase filtra sa konačnim nulama prenosa ima približno monotoni karakter, koji se može specificirati minimalnom i maksimalnom vrednošću slabljenja u propusnom opsegu. Predloženo je da ta granica bude od nule do 0.05 dB. Na primer, Pseudo-Jacobijev filter za $n = 5$, $\alpha = -0.5$, $\beta = 0.75$ i $m = 2$ maksimalno slabljenje u propusnom opsegu iznosi $a_{max} = 0.0432789$ dB na normalizovanoj frekvenciji 0.7139761, dok je nulta vrednost slabljenja na normalizovanoj frekvenciji 0.8357625. Od poznatih filtera sa konačnim nulama prenosa samo Inverzni Chebyshev filter ima maksimalno ravnu amplitudsku karakteristiku u propusnom opsegu.

Primenom predložene tehnike aproksimacije može se dobiti veliki broj različitih klasa filtera, ali u disertaciji biće posvećena pažnja samo klasi filtera sa približno maksimalno ravnom amplitudskom (AMF) karakteristikom u propusnom opsegu. Primenom opisane procedure određene su prenosne funkcije sa približno maksimalno ravnom amplitudskom karakteristikom u propusnom opsegu za $n = 5, 6, 7$ i 8 i date su u Tabeli 2.5. Približno maksimalno ravna amplitudska karakteristika se postiže usvajanjem vrednosti parametara $\alpha = -0.5$ i $\beta = 0.75$ i minimalnim slabljenjem u nepropusnom opsegu od $a_{min} = 40$ dB. Promena minimalnog slabljenja u nepropusnom opsegu povlači za sobom i promenu parametra β da bi se postiglo da karakteristika slabljenja bude približno maksimalno ravna. Pored polova i nula, Tabela 2.5 sadrži referentni nivo h_0 i granicu nepropusnog opsega ω_s .

2.4.1 Poređenje sa Inverznom Chebyshevljevom aproksimacijom

Kao što se Butterworthovi filteri koriste za poređenje polinomskih filtera, tako se inverzni Chebyshevljevi filteri koriste za poređenje filtera sa konačnim nulama prenosa, koje karakteriše

Tab. 2.5: Položaj polova i nula, referentni nivo h_0 i ivica nepropusnog opseg ω_s klase filtara sa približno maksimalno ravnom (AMF) amplitudskom karakteristikom: $\alpha = -0.5$, $\beta = 0.75$, i $R_s = 40$ dB.

n	Položaj polova	Položaj nula	h_0	ω_s
5	-0.7867560		0.0612759	1.3717804
	$-0.4916962 \pm j0.7264817$	$\pm j1.4274814$		
	$-0.1289561 \pm j0.9769936$	$\pm j2.1700163$		
6	$-0.7351847 \pm j0.3848155$		0.1263212	1.2400738
	$-0.3635299 \pm j0.8494604$	$\pm j1.2735859$		
	$-0.0902172 \pm j0.9871114$	$\pm j1.6788095$		
7	-0.9707736		0.0659537	1.1485312
	$-0.6517634 \pm j0.7124820$	$\pm j1.1672226$		
	$-0.2616439 \pm j0.9385858$	$\pm j1.3641911$		
	$-0.0622904 \pm j0.9943376$	$\pm j2.2585344$		
8	$-0.9263043 \pm j0.3963592$		0.1559630	1.1072921
	$-0.5066291 \pm j0.8534024$	$\pm j1.1203195$		
	$-0.1961991 \pm j0.9674855$	$\pm j1.2527802$		
	$-0.0467816 \pm j0.9967405$	$\pm j1.7770579$		

maksimalno ravna amplitudska karakteristika u propusnom opsegu i Chebyshevljevo slabljenje u nepropusnom opsegu. Prirodna normalizacija prototipskog inverznog Chebyshevjevog filtra je da granična frekvencija nepropusnog opsega ima vrednost jedan, odnosno $\omega_s = 1$. Da bi poređenje bilo korektno potrebno je da filtri koji se porede imaju istu širinu propusnog opsega $\omega_{3dB} = 1$. Neka je ω_c granična fekvencija propusnog opsega na kojoj amplituda Inverznog Chebyshevjevog filtra opadne na vrednost $1/(1 + \varepsilon_p^2)$, pa se može napisati da je

$$|H_{IC}(j\omega_c)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 \frac{1}{\varepsilon_s^2 T_n^2(1/\omega_c)}} = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2} \quad (2.23)$$

gde je $T_n(\cdot)$ Chebyshevjev polinom prve vrste stepena n , $\varepsilon_s = 1/\sqrt{10^{0.1a_{min}} - 1}$ je faktor kojim se kontroliše slabljenje u nepropusnom opsegu (stopband edge ripple factor), a_{min} je minimalna vrednost slabljenja u propusnom opsegu u dB. Kao što je napred usvojeno, možemo zameniti ε_p sa jedinicom da bi dobili slabljenje od 3 dB na ivici propusnog opsega Inverznog Chebyshevjevog filtra. Rešavanjem jednačine (2.23) za ω_c dobija se sledeća vrednost

$$\omega_c = \frac{1}{\cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{arccosh} \frac{1}{\varepsilon_s}\right)} \quad (2.24)$$

Sada se frekvencijska karakteristika Inverznog Chebyshevljevog filtra može normalizovati da je $\omega_{3dB} = 1$, tako što se definiše nova frekvencijska promenljiva $\omega' = \omega \omega_c$.

Nagib amplitudske karakteristike Inverznog Chebyshevljevog filtra na $\omega_{3dB} = 1$ granici propusnog opsega je

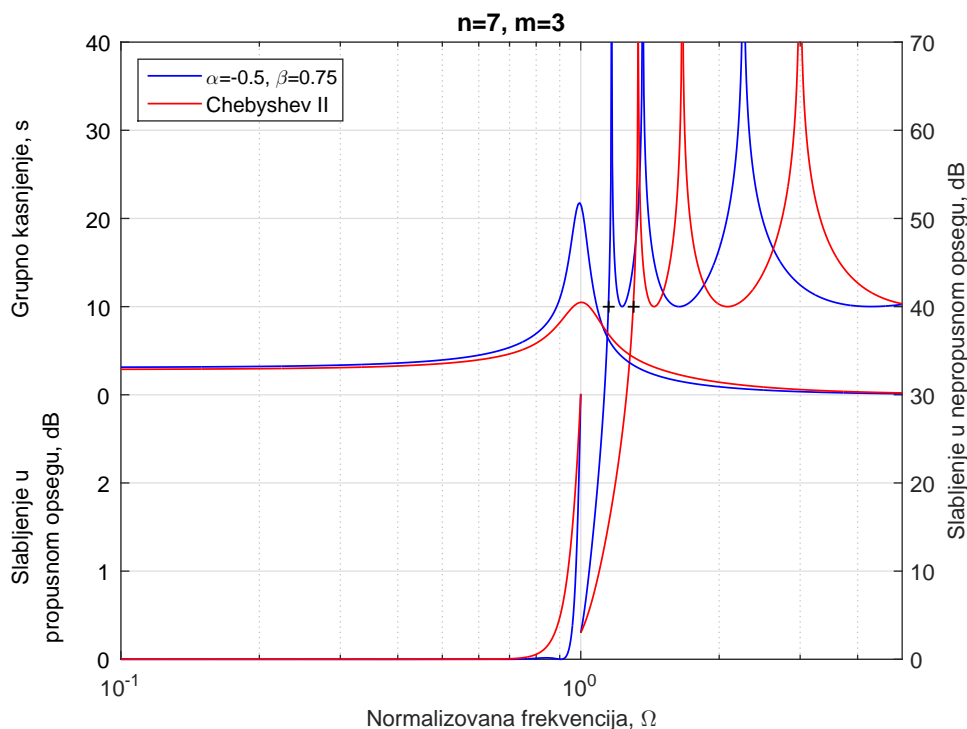
$$\frac{d}{d\omega} |H_{IC}(\omega)| \Big|_{\omega=\omega_c} = -\frac{n}{2^{3/2}} \frac{\sqrt{1-\varepsilon_s^2}}{\omega_c \sqrt{1-\omega_c^2}} \quad (2.25)$$

Nagib amplitudske karakteristike na granici propusnog opsega se dobija kad se nagib karakteristične funkcije podeli sa $\varepsilon_p^2/(1+\varepsilon_p^2)^{3/2}$, što za $\varepsilon_p = 1$ iznosi $2^{3/2}$.

Faktor nagiba karakteristične funkcije Inverznog Chebyshevljevog filtra petog reda sa minimalnim slabljenjem u nepropusnom opsegu $A_{min} = 40$ dB iznosi $SF^{(IC)} = 10.2853346$, što je skoro šest puta manje od nagiba karakteristične funkcije Pseudo-Jacobijevog filtra istog reda i sa istim slabljenjem u nepropusnom opsegu, ali sa približno maksimalno ravnom amplitudskom karakteristikom u propusnom opsegu, koji iznosi $SF^{(AMF)} = 61.0941582$.

Amplitudske karakteristike i karakteristike grupnog kašnjenja filtra sa približno maksimalno ravnom amplitudskom karakteristikom u propusnom opsegu i Inverznog Chebyshevljevog filtra prikazane su na Slici 2.10. Može se uočiti da predloženi filter ima znatno bolju karakteristiku slabljenja kako u propusnom tako i u nepropusnom opsegu. Slabljenje novog filtra za $m = 2$ u propusnom opsegu je uvek manje od slabljenja Chebyshevljevog filtra. S druge strane karakteristika grupnog kašnjenja Inverznog Chebyshevljevog filtra je nešto bolja.

Amplitudsku karakteristiku AMF filtra karakteriše "ripple" u propusnom opsegu, u blizini granične frekvencije, koji se može kontrolisati parametrima Pseudo-Jacobijevog polinoma, a sa njime i granica nepropusnog opsega tako da prelaznu zonu može činiti užom od prelazne zone Inverznog Chebyshevljevog filtra. Granica propusnog opsega AMF filtra petog reda sa $m = 2$, $\alpha = -0.5$ i $\beta = 0.75$, je $\omega_s^{(AMF)} = 1.3717804$, koja je niža od granične frekvencije Inverznog Chebyshevljevog filtra istog stepena koja iznosi $\omega_s^{(CI)} = 1.6159670$. Za $\alpha = \beta \rightarrow \infty$ Pseudo-Jacobijev polinom postaje Butterworthov polinom, što se može postići konačnim vrednostima parametara $\alpha = \beta > 25$, a AMF filter se transformiše u Inverzni Chebyshevjev filter, koji predstavlja granični slučaj AMF filtra.



Sl. 2.10: Poređenje karakteristika u ustaljenom stanju približno monotnog Pseudo-Jacobijevog filtra ($\alpha = -0.5$ i $\beta = 0.75$) sa tri konačne nule prenosa i prenosne funkcije Inverznoj Chebyshevlljevog filtra.

2.5 Zaključak

Prikazana je nova klasa filtarskih funkcija koja se može primeniti za realizaciju hibridne banke filtera. Aproksimacija je zasnovana na ortogonalnim Jacobijevim polinomima, koji se u izvornom obliku ne mogu primeniti kao filtarske funkcije. Jednostavnom modifikacijom, koja koristi pariti relaciju za ortogonalne Jacobijeve polinome, dobijena je filtarska funkcija pogodna za realizaciju svih vrsta filtera. Pored dva stepena slobode, red filtera i maksimalno slabljenje u propusnom opsegu koji se standardno koriste za optimizaciju karakteristika filtera, predložena aproksimacija ima još dva stepena slobode, a to su dva parametra Pseudo-Jacobijevih polinoma. Nova klasa filtera je nazvana Pseudo-Jacobijevi filteri.

Karakteristike nove klase filtera mogu se sumirati u sledećem:

1. Standardni ortogonalni polinomi, Chebyshevlljevi, Legendreovi, Gegenbauerovi i Butterworthovi polinomi, koji se koriste za aproksimaciju filtarskih funkcija su specijalni slučajevi Jacobijevih polinoma. Ovom aproksimacijom su obuhvaćene sve aproksimacije filtarskih funkcija ortogonalnim polinomima, izuzev prelaznih filtera.
2. Pogodnim izborom parametara Pseudo-Jacobijevog polinoma može se aproksimirati pri-

bližno monotona karakteristika slabljenja u propusnom opsegu. Dobijena klasa filtara pogodna je za realizaciju hibridne banke filtara u mikrotalasnoj tehnici jer je karakteristiše niska vrednost povratnih gubitaka i konačan broj nula na kojima nastupa maksimalan prenos snage potrošaču.

3. Rezultati dobijeni poređenjem nove klase filtara sa kritično monotonim amplitudskim karakteristikama pokazuju da su karakteristike koje nudi predložena aproksimacija filtarskih funkcija Pseudo-Jacobijevim polinomima značajno bolje od karakteristika klasičnih monotonih filtara.
4. Lestvičasta LC realizacija nove klase filtarskih funkcija je simetrična i recipročna, a time i manje osetljiva na tolerancije elemenata, u odnosu na kritično monotone filtre koji se ne mogu realizovati kao simetrične lestvičase LC mreže.
5. Primenom kontinualnih frekvencijskih transformacija na prototipske funkcije Jacobijevog filtra mogu se ostvariti svi tipovi filtara.

3

Dvostruko komplementarna analogna banka filtera

DIGITALNA dvostruko komplementarna dvokanalna IIR banka filtera [3, 36, 41], realizovana paralelnom vezom dve all-pass mreže, odlikuje se efikasnom implementacijom i malom osetljivošću amplitudske karakteristike u propusnom opsegu na dužinu digitalne reči. Na ovaj način se postiže da se za oba filtera u filterarskom paru koristi isti hardver. U ovoj glavi će biti pokazano da se dvostruko komplementarna banka filtera može realizovati direktno u analognom domenu i da se može primeniti za realizaciju hibridne banke filtera. Imajući u vidu da se samo neparni redovi banke filtera mogu realizovati all-pass mrežama sa realnim koeficijentima, to će se razmatrati samo aproksimacija neparnih redova dvostruko komplementarne analogne banke filtera.

3.1 Dvostruko komplementarni filterarski par

Filterarski par $H_0(s)$, propusnik niskih frekvencija, i $H_1(s)$, propusnik visokih frekvencija, je komplementaran po snazi ako je zbir kvadrata njihovih amplitudskih funkcija jednak jedinici

$$H_0(s)H_0(-s) + H_1(s)H_1(-s) = 1 \quad (3.1)$$

ili na realnim frekvencijama $s = j\omega$

$$|H_0(j\omega)|^2 + |H_1(j\omega)|^2 = 1. \quad (3.2)$$

Kvadrat modula amplitudske karakteristike filtra $H_0(s)$ propusnika niskih frekvencija u s -ravni može se prikazati u sledećem obliku

$$H_0(s)H_0(-s) = \frac{1}{1 + K(s)K(-s)} \quad (3.3)$$

gde je $K(s)$ karakteristična funkcija filtra propusnika niskih frekvencija, koja može biti polinom ili racionalna funkcija, te je i $H_0(s)$ racionalna prenosna funkcija sa nulama prenosa na realnim frekvencijama ili sa svim nulama prenosa u beskonačnosti. Na realnim frekvencijama je $|H_0(s)|_{s=j\omega} \leq 1$ za pasivni filter.

Prenosna funkcija komplementarnog filtra propusnika visokih frekvencija u dvokanalnoj banci filtera sa dobija primenom transformacije $s \mapsto 1/s$, te je

$$H_1(s) = H_0(1/s). \quad (3.4)$$

Potrebno je odrediti karakterističnu funkciju $K(s)$ tako da filtarski par $H_0(s)$ i $H_1(s)$ bude komplementaran po snazi.

Lema 3.1. *Racionalne funkcije $H_0(s)$ i $H_1(s)$ su komplementarne po snazi u s -ravni*

$$H_0(s)H_0(-s) + H_0(1/s)H_0(-1/s) = 1 \quad (3.5)$$

ako i samo ako je

$$K(s)K(-s)K(1/s)K(-1/s) = 1 \quad (3.6)$$

Dokaz: Zamenom (3.3) i (3.4) u (3.1) dobija se

$$\begin{aligned} & H_0(s)H_0(-s) + H_0(1/s)H_0(-1/s) \\ &= \frac{1}{1 + K(s)K(-s)} + \frac{1}{1 + K(1/s)K(-1/s)} \\ &= \frac{1 + R(s)}{R(s) + K(s)K(-s)K(1/s)K(-1/s)} \end{aligned}$$

gde je $R(s) = 1 + K(s)K(-s) + K(1/s)K(-1/s)$. Zbir kvadrata modula prenosnih funkcija filtra propusnika niskih frekvencija i filtra propusnika visokih frekvencija biće jednak jedinici (komplementaran po snazi) ako i samo ako je

$$K(s)K(-s)K(1/s)K(-1/s) = 1. \quad (3.7)$$

Time je lema dokazana.

Na osnovu Leme 3.1 moguće je pronaći generalni analitički izraz za karakterističnu funkciju koja se može primeniti za sintezu filtarskog para komplementarnog po snazi.

Lema 3.2. *Racionalna filtarska funkcija $H_0(s)$ ispunjava uslov komplementarnosti po snazi (3.6) ako i samo ako karakteristična funkcija $K(s)$ ima oblik*

$$K(s) = s^k \prod_{m=1}^M \left(\frac{s^2 + \omega_m^2}{\omega_m^2 s^2 + 1} \right)^{l_m} \quad (3.8)$$

gde je $\omega_m < 1$, l_m je proizvoljan ceo broj, za $m = 1, 2, \dots, M$. Red filtra je $N = k + 2 \sum_{m=1}^M l_m$.

Dokaz: Iz uslova komplementarnosti po snazi (3.7) proizilazi sledeća jednačina

$$K(-s)K(1/s) = \frac{1}{K(s)K(-1/s)} \quad (3.9)$$

za svako s . Dalje, iz uslova (3.9) mogu se izvesti sledeće propozicije

$$\begin{aligned} K(-s)K(1/s) &= (-1)^k \\ K(-s) &= (-1)^k K(s) \\ K(1/s) &= \frac{1}{K(s)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sve uslove (3.10) ispunjava karakteristična funkcija (3.8). Time je Lema 3.2 dokazana.

Lema 3.3. *Neka su $H_0(s)$ i $H_1(s)$ polinomske ili racionalne funkcije sa realnim koeficijentima komplementarne po snazi, tada za polove važi ograničenje da leže na jediničnom krugu.*

Dokaz: Prenosna funkcija $H_0(s)$, komplementarna po snazi, podrazumeva propoziciju Leme 3.2 koja glasi $K(-s) = (-1)^k / K(1/s)$ i jednačina (3.3) može se napisati u sledećem obliku

$$H_0(s)H_0(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^k \frac{K(s)}{K(1/s)}} \quad (3.11)$$

Na frekvencijama polova prenosne funkcije $H_0(s)H_0(-s)$ imenitelj prenosne funkcije (3.11) je nula, pa je potrebno rešiti jednačinu

$$\frac{K(s)}{K(1/s)} = (-1)^{k+1}. \quad (3.12)$$

Rešenja jednačine (3.12) su polovi prenosne funkcije (3.11).

Pošto su koeficijenti karakteristične funkcije realni, na kompleksnim frekvencijama koje se nalaze na jediničnom krugu, $s = e^{j\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$, može se zaključiti da je $K(e^{-j\theta}) = K^*(e^{j\theta})$. Prema tome, na jediničnom krugu u s -ravni je

$$\left| \frac{K(e^{j\theta})}{K(e^{-j\theta})} \right| = 1. \quad (3.13)$$

Dakle, količnik $K(s)/K(1/s)$ na jediničnom krugu ima amplitudu jednaku jedinici, pa sledi da svi polovi $H(s)H(-s)$ leže na jediničnom krugu.

Na primer, polovi Butterworthovog filtra (komplementaran po snazi) leže na jediničnom krugu

$$\left| \frac{(e^{j\theta})^n}{(e^{-j\theta})^n} \right| = 1$$

jer je $K(s) = s^n$.

Dakle, modul kompleksnog broja $|K(s)/K(1/s)|_{s=j\omega}$ na jediničnom krugu ima jediničnu vrednost, što znači da svi polovi funkcije $H_0(s)H_0(-s)$ leže na jediničnom krugu. Polovi koji leže u desnoj poluravni kompleksne promenljive s pripadaju prenosnoj funkciji $H(s)$, dok polovi koji leže u desnoj s poluravni pripadaju prenosnoj funkciji $H(-s)$. Prema tome, imenitelj prenosne funkcije $H_0(s)$ je recipročan (a mirror image) polinom koji ima sledeću osobinu, $p_n(s) = s^n p_n(1/s)$, gde je n red polinoma $p_n(s)$. Posledica ove činjenice je da se polovi prenosne funkcije $H_1(s) = H_0(1/s)$ nalaze na istom mestu kao i polovi prenosne funkcije $H_0(s)$.

Lema 3.4. *Filtarski par $[H_0(s), H_1(s)]$, komplementaran po snazi, je takođe all-pass komplementarni filtarski par jer je*

$$\begin{aligned} H_0(s) + H_1(s) &= A_1(s) \\ H_0(s) - H_1(s) &= A_2(s) \end{aligned} \quad (3.14)$$

gde su $A_1(s)$ i $A_2(s)$ stabilne all-pass prenosne funkcije sa realnim koeficijentima.

Dokaz: Pošto su $A_1(s)$ i $A_2(s)$ all-pass filtri, tada je $A_1(s)A_1(-s)|_{s=j\omega} = 1$ i $A_2(s)A_2(-s)|_{s=j\omega} = 1$. Kvadrat modula amplitudske karakteristike (3.14) je

$$\begin{aligned} G(s) &= [H_0(s) + H_1(s)][H_0(-s) + H_1(-s)] \\ &= 1 + H_0(s)H_1(-s) + H_0(-s)H_1(s) \end{aligned} \quad (3.15)$$

jer je filtarski par $[H_0(s), H_1(s)]$ komplementaran po snazi. Neka je red filtera N neparan. Na

osnovu Leme 3.3, prenosne funkcije $H_0(s)$ i $H_1(s)$ imaju isti recipročni polinom u imenitelju i mogu se prikazati na sledeći način

$$\begin{aligned} H_0(s) &= \frac{N_0(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{m=1}^M (\omega_m^2 s^2 + 1)^{l_m}}{(s+1)(s^{N-1} + \alpha_1 s^{N-2} + \alpha_2 s^{N-3} \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1)} \\ H_1(s) &= \frac{N_1(s)}{D(s)} = \frac{s^{N-2v} \prod_{m=1}^M (\omega_m^2 + s^2)^{l_m}}{(s+1)(s^{N-1} + \alpha_1 s^{N-2} + \alpha_2 s^{N-3} \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

gde je $v = \sum_{m=1}^M l_m$. Proizvodi prenosnih funkcija $H_0(s)H_1(-s)$ i $H_0(-s)H_1(s)$ imaju isti parni polinom u imenitelju $D(s)D(-s)$. Međutim, $N_0(s)$ je parni polinom, a $N_1(s)$ je neparni polinom. Zamenom (3.16) u (3.15), konačno se dobija da je $H_0(s)H_1(s) + H_0(-s)H_1(s) = 0$. Prema tome $G(s) = 1$, pa je $H_0(s) + H_1(s)$ all-pass funkcija.

Na isti način se može dokazati da je $H_0(s) - H_1(s)$ takođe all-pass funkcija. Time je lema dokazana.

Međutim, u slučaju parnih prenosnih funkcija $H_0(s)$ i $H_1(s)$ kao rezultat se dobijaju all-pass funkcije sa kompleksnim koeficijentima. U daljem tekstu će biti razmatrane samo dvostruko komplementarne funkcije neparnog reda, jer se one mogu realizovati all-pass filtrima sa realnim koeficijentima. Iz jednačine (3.14) sledi

$$\begin{aligned} H_0(s) &= \frac{1}{2}[A_1(s) + A_2(s)] \\ H_1(s) &= \frac{1}{2}[A_1(s) - A_2(s)]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.2 Aproksimacija

Projektovanje filtera zasnovano na ovoj klasi prenosnih funkcija, nema za cilj da postigne idealne karakteristike hibridne banke filtera, već da ih u izvesnoj meri aproksimira. Specifikacije filtera uzimaju u obzir odstupanja od idealnih karakteristika, te se u njima navode granične frekvencije propusnog i nepropusnog opsega, maksimalno dozvoljeno slabljenje u propusnom, minimalno potrebno slabljenje u nepropusnom opsegu, kao i odstupanja grupnog kašnjenja u propusnom opsegu od konstantne vrednosti. Prilikom projektovanja, najpre se aproksimacionim metodima postiže željena amplitudska karakteristika normalizovanog prototipskog niskofrekvencijskog filtra, a zatim se, ukoliko je potrebno, fazna karakteristika, ili karakteristika grupnog kašnjenja, koriguje faznim korektorima ili korektorima grupnog kašnjenja.

nja. Treba napomenuti da filtri sa minimalnim faznim pomerajem ne mogu istovremeno da zadovolje uslove u pogledu amplitudske i fazne karakteristike.

3.2.1 Filtarske funkcije sa višestrukom nulom na realnim frekvencijama

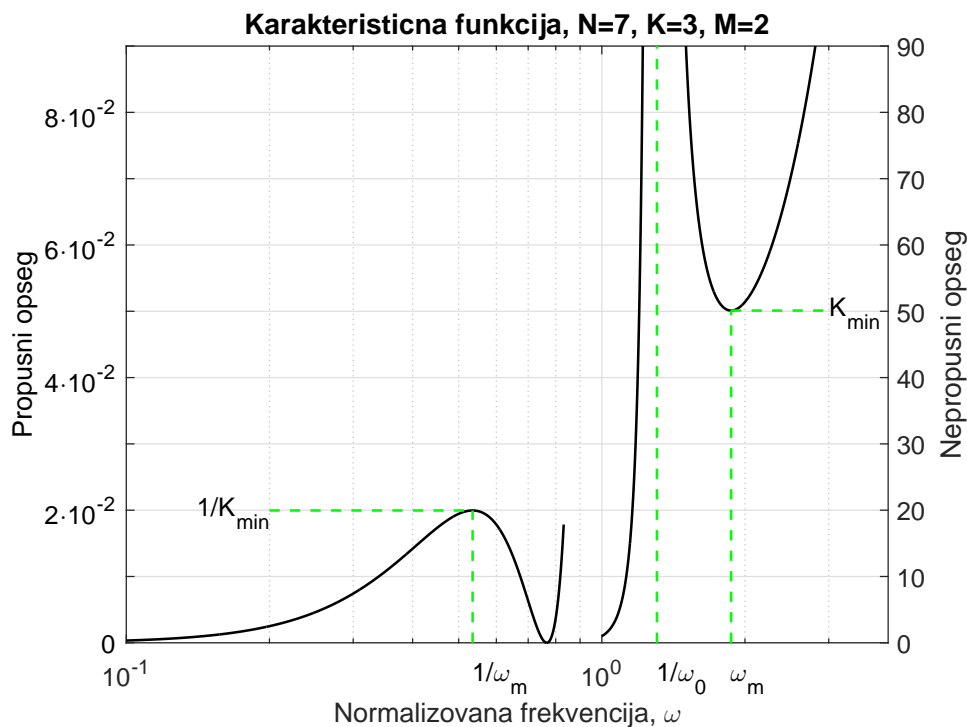
Nova klasa filtarskih funkcija sa višestrukom nulom na realnim frekvencijama $\pm j\omega_0$ dobija se na osnovu Leme 3.2, jednačina (3.8), za $l_1 = l_2 = \dots = l_M = 1$ i $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_M = \omega_0$. Karakteristična funkcija za ovu klasu filtarskih funkcija na realnim frekvencijama ima oblik

$$K(\omega) = \omega^k \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 \omega_0^2 - 1} \right)^M \quad (3.18)$$

gde je $\omega_0 < 1$. Prenosna funkcija filtra propusnika niskih frekvencija (3.3) na realnim frekvencijama je

$$|H_0(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2k} \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 \omega_0^2 - 1} \right)^{2M}}. \quad (3.19)$$

Na Slici 3.1 prikazana je karakteristična funkcija nove klase filtera sedmog reda sa dvostrukom nulom prenosa, prema jednačini (3.18). Potrebno je odrediti ω_0 tako da minimalna



Sl. 3.1: Karakteristična funkcija dvostruko komplementarne banke filtera sa prostom ili višestrukom nulom na realnim frekvencijama. Minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu iznosi 35 dB.

vrednost karakteristične funkcije u nepropusnom opsegu na frekvenciji ω_m ima specificiranu vrednost K_{min} , ili da maksimalna vrednost karakteristične funkcije u propusnom opsegu na frekvenciji $1/\omega_m$ iznosi $1/K_{min}$.

Ukoliko je poznato specificirano minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu filtra propusnika niskih frekvencija a_{min} u dB, tada minimalna vrednost karakteristične funkcije u nepropusnom opsegu filtra iznosi

$$K_{min} = \sqrt{10^{a_{min}/20} - 1}. \quad (3.20)$$

Dakle, za određivanje nepoznatih frekvencija ω_0 i ω_m potrebno je rešiti sledeće dve simultane nelinearne jednačine

$$\begin{aligned} f_1(\omega_0, \omega_m) &= \left. \frac{dK(\omega, \omega_0)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_m} = 0 \\ f_2(\omega_0, \omega_m) &= K(\omega_m, \omega_0) - K_{min} = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Newton-Kantorovichev metod [29, 92] se može primeniti za rešavanje sistema nelinearnih jednačina (3.21), koji se može predstaviti u vektorskom obliku $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1, f_2]^T = 0$, gde $[\cdot]^T$ označava operaciju transponovanja vektora. Potrebne su dve početne vrednosti za nepoznati vektor $\mathbf{x}^{(0)} = [\omega_0^{(0)}, \omega_m^{(0)}]^T$. Prva je višestruka nula, a druga je kružna frekvencija na kojoj karakteristična funkcija u nepropusnom opsegu ima propisanu minimalnu vrednost. Nova vrednost nepoznatog vektora \mathbf{x} izračunava se na sledeći način

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i-1)} - \mathbf{J}_f^{-1}(\mathbf{x}^{(i-1)})\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(i-1)}) \quad (3.22)$$

gde je

$$\mathbf{J}_f(\omega_0, \omega_m) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\omega_0, \omega_m)}{\partial \omega_0} & \frac{\partial f_1(\omega_0, \omega_m)}{\partial \omega_m} \\ \frac{\partial f_2(\omega_0, \omega_m)}{\partial \omega_0} & \frac{\partial f_2(\omega_0, \omega_m)}{\partial \omega_m} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Jacobijeva matrica. Rešenje sistema nelinearnih jednačina se dobija nakon određenog broja iteracija, odnosno kada je $|\mathbf{f}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} < \varepsilon$, gde je ε proizvoljno mali broj.

Nakon analitičkog produženja kvadrata modula prenosne funkcije (3.19) na celu kompleksnu ravan s smenom $\omega = -js$, gde je s kompleksna promenljiva $s = \sigma + j\omega$, dobija se

$$H_0(s)H_0(-s) = \frac{(\omega_0^2 s^2 + 1)^{2M}}{(\omega_0^2 s^2 + 1)^{2M} + (-1)^k s^{2k} (s^2 + \omega_0^2)^{2M}}. \quad (3.24)$$

Polovi prenosne funkcije $H_0(s)$ su nule imenitelja racionalne funkcije (3.24) koji se nalaze u levoj poluravni kompleksne promenljive s , odnosno, polinom u imenitelju prenosne funkcije $H(s)$ je Hurwitzov polinom. Dakle

$$(\omega_0^2 s^2 + 1)^{2M} + (-1)^k s^{2k} (s^2 + \omega_0^2)^{2M} = 0. \quad (3.25)$$

Simbolička matematika (MATLAB[®] ili Mathematica) mogu se iskoristiti za izračunavanje nula polinoma $2k + 4M$ -tog reda. Međutim, ako se ima u vidu da je polinom (3.25) recipročan, njegovi koeficijenti se mogu izvesti u zatvorenom obliku,

$$d_0 s^{2k+4M} + d_2 s^{2k+4M-2} + \dots + d_2 s^2 + d_0 = 0 \quad (3.26)$$

gde su

$$d_{2i} = \begin{cases} \binom{2M}{i} \omega_0^{2i}, & i = 0, 1, 2, \dots, k-1, \\ \binom{2M}{i} \omega_0^{2i} + (-1)^k \binom{2M}{i-k} \omega_0^{4M+2k-2i}, & i = k, k+1, \dots, 2M, \\ (-1)^k \binom{2M}{i-k} \omega_0^{4M+2k-2i}, & i = 2M+1, 2M+2, \dots, 2M+k. \end{cases} \quad (3.27)$$

Prenosna funkcija filtra propusnika niskih frekvencija je data sa

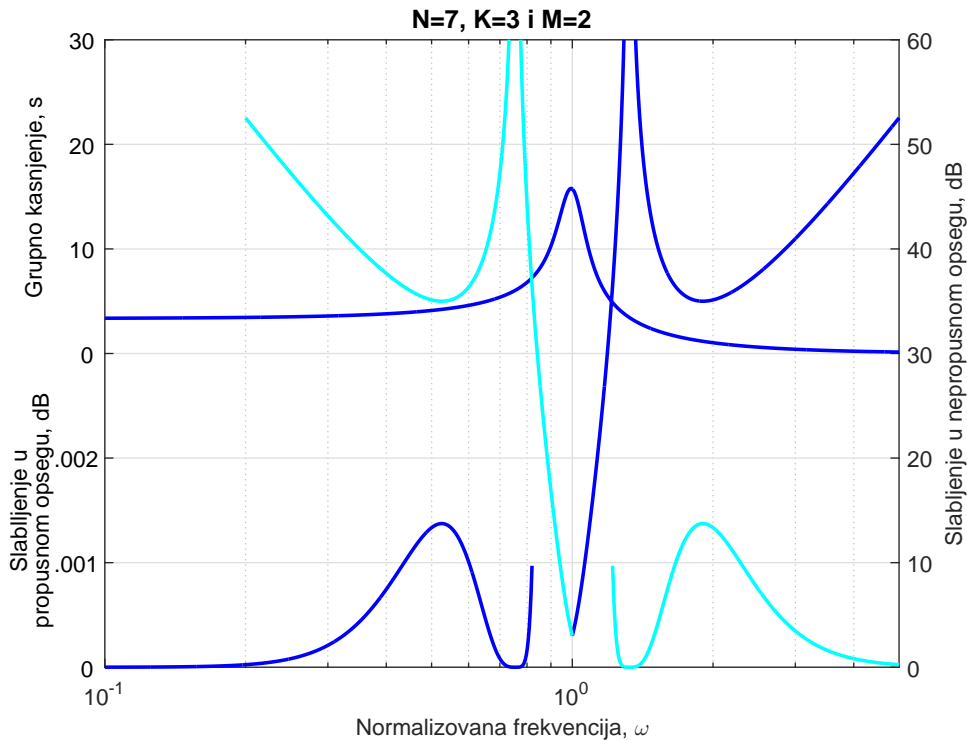
$$H_0(s) = \frac{(\omega_0^2 s^2 + 1)^{2M}}{s^N + \alpha_2 s^{N-1} + \alpha_3 s^{N-2} + \dots + \alpha_3 s^2 + \alpha_2 s + 1}. \quad (3.28)$$

Na Slici 3.2 prikazane su frekvencijske karakteristike filtarskog para za $N = 7$, $k = 3$ i dvostrukom nulom prenosa $M = 2$. Minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu je $a_{min} = 40$ dB. Može se uočiti da na frekvenciji maksimalnog slabljenja u propusnom opsegu a_{max} filtra propusnika niskih frekvencija nastupa minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu a_{min} filtra propusnika visokih frekvencija.

Imajući u vidu da je filtarski par $[H_0(s), H_1(s)]$ komplementaran po snazi, to se može jednostavno izvesti sledeća relacija

$$a_{max} = 10 \log_{10}(1 - 10^{-a_{min}/10}) \quad (3.29)$$

gde su slabljenja a_{min} i a_{max} data u dB. Neka je $a_{min} = 40$ dB, kao što je prikazano na Slici 3.2, izraz (3.29) daje $a_{max} = 4.343161980750561 \times 10^{-4}$ dB.

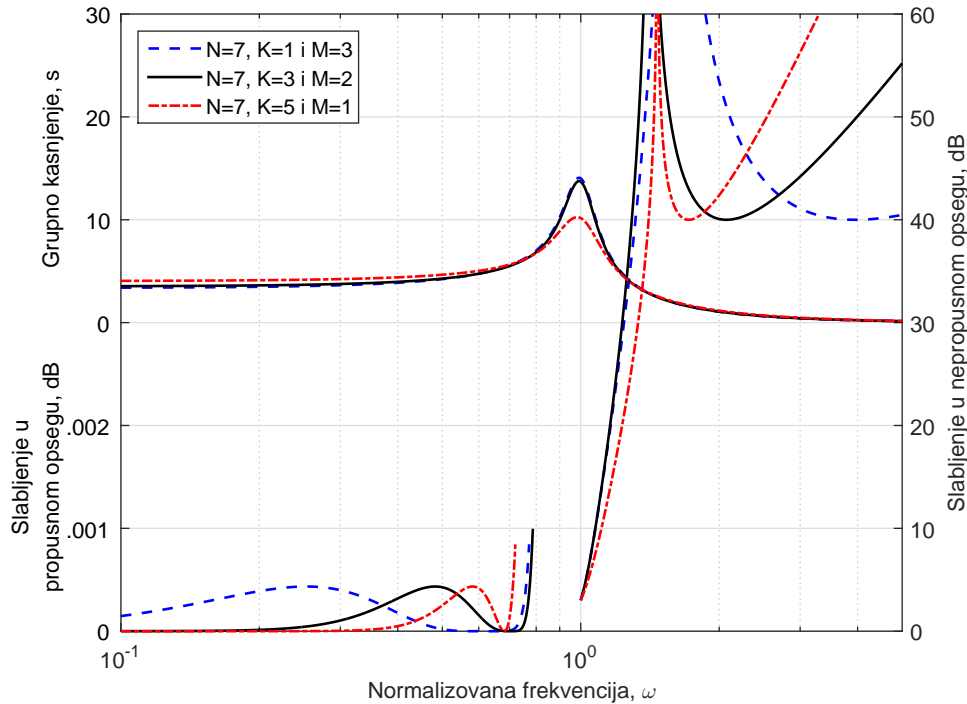


Sl. 3.2: Frekvencijske karakteristike dvostruko komplementarnog filterarskog para $[H_0(s), H_1(s)]$.

Poznato je da nule na imaginarnoj osi nemaju uticaj na karakteristiku grupnog kašnjenja, to oba filtra u filterarskom paru imaju istu karakteristiku grupnog kašnjenja. U daljem tekstu ćemo razmatrati samo filter propusnik niskih frekvencija.

Primenom opisanog postupka, izračunate su prenosne funkcije sedmog reda za tri moguće vrednosti zaravnjenja u koordinatnom početku, $k = 1, 2$ i 3 , dok minimalno slabljenje u propusnom opsegu iznosi $a_{min} = 40$ dB. Granična frekvencija filtra je normalizovana tako da je $\omega_{3dB} = 1$. Drugim rečima, to su prototipske funkcije. Izborom reda višestrukosti može se podešavati slabljenje u nepropusnom opsegu. Na Slici 3.3 prikazane su frekvencijske karakteristike filtera sedmog reda koje su dobijene pomenutim izborom parametara k i M . Karakteristika grupnog kašnjenja i širina prelazne zone filtera ($k = 3; M = 2$) i ($k = 1; M = 3$) su približno iste, te u ovom slučaju treba izabrati rešenje 3 ($k = 3; M = 2$) jer taj filter ima jednu nulu manje, prostiji je.

Tabela 3.1 sadrži prenosne funkcije sedmog stepena čije su frekvencijske karakteristike prikazane na Slici 3.3. Radi poređenja, u Tabeli 3.1 je data i prenosna funkcija Butterworthovog filtera sedmog stepena kao specijalan slučaj ove klase filtera. Prenosne funkcije su u Tabeli 3.1 prikazane u faktorizovanom obliku kao sekcije drugog stepena. Ovaj prikaz prenosnih funkcija je pogodan za ovaj tip prenosnih funkcija jer moduo pola svake sekcije drugog stepena je jednak



Sl. 3.3: Frekvencijske karakteristike dvostruko komplementarne banke filtera sedmog reda.

jedinici, polovi leže na jediničnom krugu, a koeficijent uz linearan član u sekciji drugog stepena je recipročna vrednost Q -faktora pola te sekcije. Par polova sa najvećim Q -faktorom je poznat kao kritični par polova. Prenosne funkcije sa višestrukim parom nula drugog i trećeg stepena imaju približno istu vrednost kritičnog Q -faktora, što znači da imaju približno istu osetljivost na tolerancije elemenata filtra.

Tab. 3.1: Prenosne funkcije $H_0(s)$ dvostruko komplementarnog filtarskog para sedmog stepena sa prostom i višestrukom nulom na realnim frekvencijama za $a_{min} = 40$ dB.

k	Imenitelj $H_0(s)$	Brojitelj $H_0(s)$
1	$(s+1)(s^2 + 1.4389168s + 1)(s^2 + 0.7151389s + 1)(s^2 + 0.2141146s + 1)$	$(0.3960178s^2 + 1)^3$
3	$(s+1)(s^2 + 1.5453250s + 1)(s^2 + 0.7607996s + 1)(s^2 + 0.2154746s + 1)$	$(0.4966813s^2 + 1)^2$
5	$(s+1)(s^2 + 1.7136030s + 1)(s^2 + 1.0198032s + 1)(s^2 + 0.3062001s + 1)$	$0.4649039s^2 + 1$
7	$(s+1)(s^2 + 1.8019377s + 1)(s^2 + 1.2469796s + 1)(s^2 + 0.4450419s + 1)$	1

Može se uočiti da Q -faktor pola opada kada višestrukost nule prenosne funkcije M opada. Isti zaključak se može izvesti i na osnovu Tabele 3.2 koja sadrži prenosne funkcije sedmog stepena sa minimalnim slabljenjem u nepropusnom opsegu od 50 dB.

Prenosne funkcije filtra propusnika niskih frekvencija dvostruko komplementarnog filtarskog para devetog stepena sa 40 dB minimalne vrednosti slabljenja u nepropusnom opsegu prikazane su na Slici 3.3. Radi poređenja, tabela sadrži i prenosnu funkciju Butterworthovog filtra devetog stepena.

Tab. 3.2: Prenosne funkcije $H_0(s)$ dvostruko komplementarnog filtarskog para sedmog stepena sa prostom i višestrukom nulom na realnim frekvencijama za $a_{min} = 50$ dB.

k	Imenitelj $H_0(s)$	Brojitelj $H_0(s)$
1	$(s+1)(s^2 + 1.5689034 s + 1)(s^2 + 0.8602959 s + 1)(s^2 + 0.2675281 s + 1)$	$(0.2879052 s^2 + 1)^3$
3	$(s+1)(s^2 + 1.6256518 s + 1)(s^2 + 0.8983121 s + 1)(s^2 + 0.2726603 s + 1)$	$(0.3689870 s^2 + 1)^2$
5	$(s+1)(s^2 + 1.7364755 s + 1)(s^2 + 1.0853541 s + 1)(s^2 + 0.3488787 s + 1)$	$0.3424717 s^2 + 1$

Može se zaključiti da sa opadanjem višestrukosti nule, raste zaravnjenje u koordinatnom početku (raste k) dok vrednost kritičnog para polova opada, a time opada i osetljivost prenosne funkcije na promene parametara. Kao što se i moglo očekivati, Butterworthov filter je najmanje osetljiv na promene parametara jer njegov kritični par polova ima najmanju vrednost.

3.2.2 Filtarske funkcije sa prostim nulama na realnim frekvencijama

U ovoj glavi će biti najpre opisana aproksimacija filtarske funkcije sa dve proste nule, a zatim aproksimacija sa tri proste nule na realnim frekvencijama. Viši stepeni prenosnih funkcija se dobijaju povećanjem stepena zaravnjenja amplitudske karakteristike u koordinatnom početku.

Karakteristična funkcija sa dve proste nule

Karakteristična funkcija (3.8) sa dve proste nule na realnim frekvencijama, koje se dobijaju za proizvoljno k , $M = 2$ i $l_1 = l_2 = 1$, ima oblik

$$K(\omega) = \omega^k \frac{\omega^2 - \omega_{01}^2}{\omega^2 \omega_{01}^2 - 1} \frac{\omega^2 - \omega_{02}^2}{\omega^2 \omega_{02}^2 - 1} \quad (3.30)$$

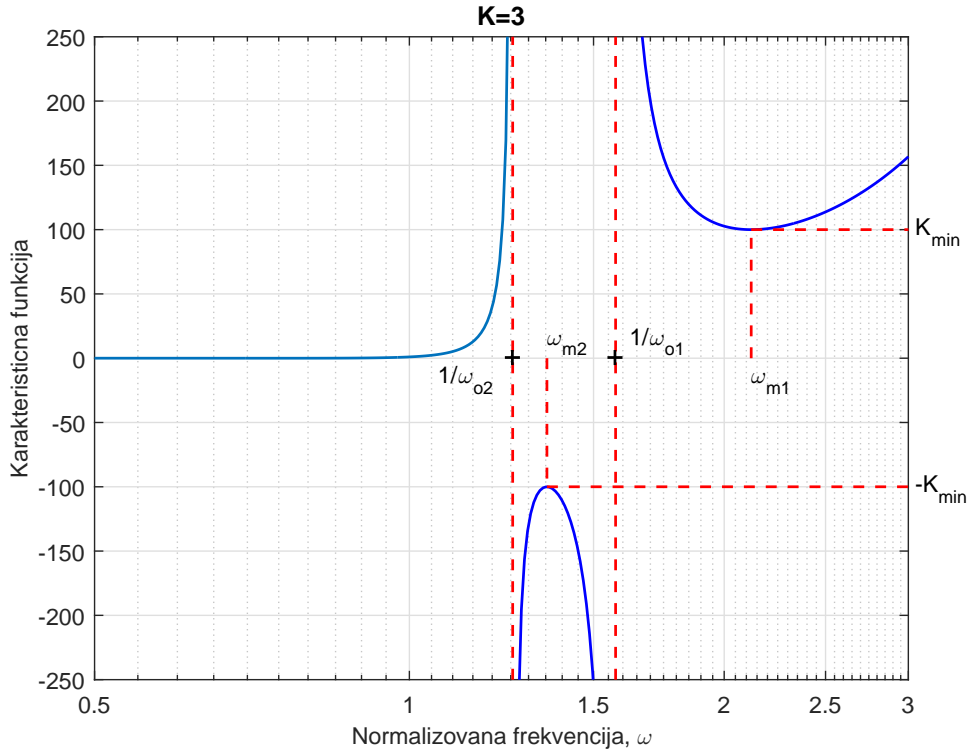
gde je $\omega_{01} < 1$ i $\omega_{02} < 1$, a k određuje stepen zaravnjenja u koordinatnom početku¹. Na Slici 3.4 prikazana je karakteristična funkcija dvostruko komplementarne banke filtera sa dve proste nule na realnim frekvencijama. Minimalno slabljenje filtra u nepropusnom opsegu iznosi $a_{min} = 40$ dB.

Nepoznate su dva pola karakteristične funkcije na realnim frekvencijama u nepropusnom opsegu $1/\omega_{01}$ i $1/\omega_{02}$ (ili dve nule ω_{01} i ω_{02} u propusnom opsegu) i dve frekvencije na kojima nastupa minimalno slabljenje K_{min} u nepropusnom opsegu ω_{m1} i ω_{m2} (ili dve frekvencije na kojima nastupa maksimalno slabljenje $1/K_{min}$ u propusnom opsegu $1/\omega_{m1}$ i $1/\omega_{m2}$). Može se izabrati aproksimacija bilo u propusnom bilo u nepropusnom opsegu. Potrebno je rešiti sledeći

¹Broj zaravnjenja amplitudske karakteristike u koordinatnom početku je $2k - 1$.

Tab. 3.3: Prenosne funkcije $H_0(s)$ dvostruko komplementarnog filtarskog para devetog stepena sa prostom i višestrukom nulom na realnim frekvencijama za $a_{min} = 40$ dB.

k	Imenitelj $H_0(s)$	Brojitelj $H_0(s)$
1	$(s+1)(s^2+1.4740444s+1)(s^2+0.8223255s+1)(s^2+0.4162276s+1)(s^2+0.1282823s+1)$	$(0.4956140s^2+1)^4$
3	$(s+1)(s^2+1.5651693s+1)(s^2+0.8371828s+1)(s^2+0.3853240s+1)(s^2+0.1133106s+1)$	$(0.6146760s^2+1)^3$
5	$(s+1)(s^2+1.7305065s+1)(s^2+1.0933535s+1)(s^2+0.5033451s+1)(s^2+0.1404981s+1)$	$(0.6342072s^2+1)^2$
7	$(s+1)(s^2+1.8305027s+1)(s^2+1.3690518s+1)(s^2+0.7627434s+1)(s^2+0.2241943s+1)$	$0.5714580s+1$
9	$(s+1)(s^2+1.8793852s+1)(s^2+1.5320889s+1)(s^2+1.0000000s+1)(s^2+0.3472964s+1)$	1



Sl. 3.4: Karakteristična funkcija dvostruko komplementarne banke filtara sa dve proste nule na realnim frekvencijama.

sistem nelinearnih jednačina ukoliko se izabere aproksimacija u nepropusnom opsegu filtra

$$f_{1,2}(\omega, \Omega) = \left. \frac{dK(\Omega, \omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{mi}} = 0 \quad (3.31)$$

$$f_{3,4}(\omega_{mi}, \Omega) = K(\Omega, \omega_{mi}) - K_{min} = 0, \quad \text{za } i = 1, 2.$$

Rešavanje sistema nelinearnih jednačina 3.31 počinje sa nalaženjem početnih rešenja za dve konačne nule karakteristične funkcije $\Omega^{(0)} = [\omega_{o1}^{(0)}, \omega_{o2}^{(0)}]$. Ovim je karakteristična funkcija (3.30), za bilo koju vrednost parametra k , potpuno definisana; ima dve ekstremalne vrednosti ω_{m2} i ω_{m1} u nepropusnom opsegu koje nisu jednake. U toku iterativnog procesa ekstremalne vrednosti treba učiniti jednakim.

Jacobijeva eliptička sinusna (sine) funkcije $\text{sn}(u, \kappa)$ od u sa eliptičkim modulom (modulusom) κ može se upotrebiti za određivanje početnih rešenja

$$\omega_{0i} = \text{sn}\left(\left(\frac{2i-1}{n} + 1\right) \mathbb{K}(\kappa), \kappa\right) \quad (3.32)$$

gde je n stepen filtra, za $n = 5$ je $i = 1, 2$, $\kappa = 1/\omega_s < 1$ eliptički modulo, a kružna frekvencija ω_s , na kojoj karakteristična funkcija prvi put dostiže minimalnu vrednost u nepropusnom

opsegu, zadaje se proizvoljno. Funkcija u se određuje direktno izračunavanjem nepotpunog eliptičkog integrala prve vrste [1, pp. 569]

$$u = F(\phi, \kappa) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.33)$$

gde je $0 \leq \phi \leq \pi/2$ i $\kappa < 1$. $\mathbb{K}(\kappa)$ označava potpun eliptički integral prve vrste

$$\mathbb{K}(\kappa) = F\left(\frac{\pi}{2}, \kappa\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta}} \quad (3.34)$$

Zamenom (3.34) u (3.32), za $n = 5$, i $i = 1, 2$ dobijaju se dve vrednosti početnih rešenja za aproksimaciju dvostruko komplementarnih filtra sa dve konačne nule na realnim frekvencijama.

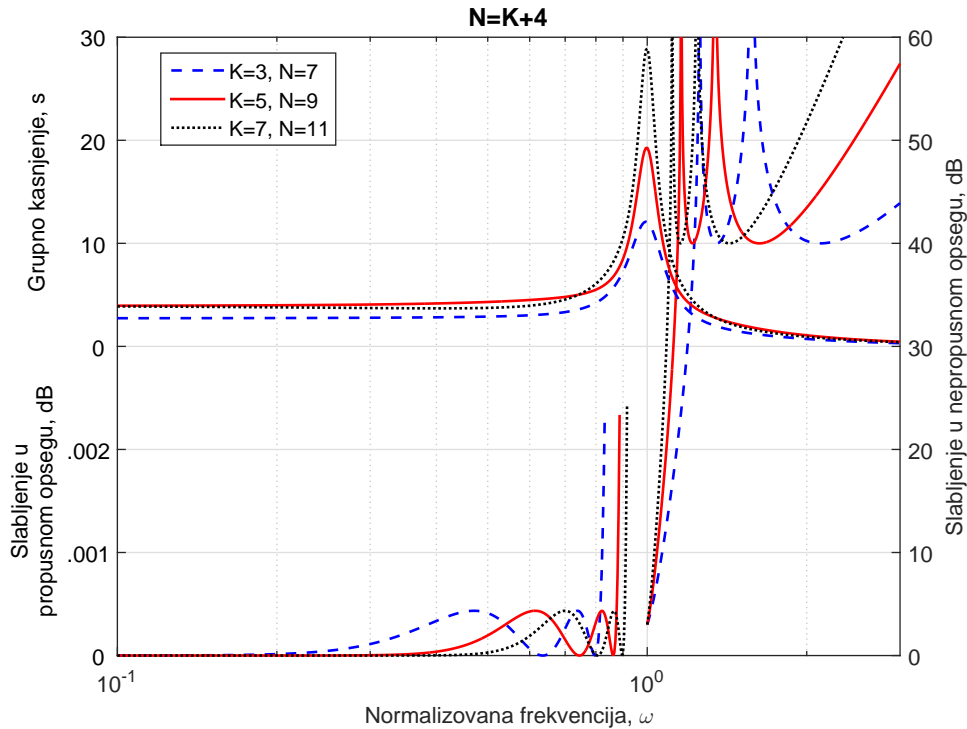
1. Za određivanje početnih rešenja, u prvom koraku aproksimacije, koristi se programski paket **MATLAB**[®]. Funkcija `ellipke` koristi se za izračunavanje potpunog eliptičkog integrala prve vrste $\mathbb{K}(\kappa)$, a funkcija `ellipj` za izračunavanje eliptičke sinusne funkcije, odnosno početnih rešenja ω_{0i} .
2. Drugi korak se sastoji u nalaženju rešenja za ekstremalne frekvencije karakteristične funkcije $\omega_{m1}^{(0)}$ i $\omega_{m2}^{(0)}$ na kojima nastupa minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu, kao i vrednost karakteristične funkcije na tim frekvencijama.
3. Sledeći korak je izračunavanje novih vrednosti za nule karakteristične funkcije Ω primenom već ranije pomenutog Newton-Kantorovičevog metoda

$$\begin{bmatrix} \omega_{01}^{(i+1)} \\ \omega_{02}^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{01}^{(i)} \\ \omega_{02}^{(i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3(\Omega^{(i)}, \omega_{m1}^{(i)})}{\partial \omega_{01}} & \frac{\partial f_3(\Omega^{(i)}, \omega_{m1}^{(i)})}{\partial \omega_{02}} \\ \frac{\partial f_4(\Omega^{(i)}, \omega_{m2}^{(i)})}{\partial \omega_{01}} & \frac{\partial f_4(\Omega^{(i)}, \omega_{m2}^{(i)})}{\partial \omega_{02}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_3(\Omega^{(i)}, \omega_{m1}^{(i)}) \\ f_4(\Omega^{(i)}, \omega_{m2}^{(i)}) \end{bmatrix}$$

4. Rešenje se dobija kada je ispunjen uslov $\sqrt{f_3^2 + f_4^2} < \varepsilon$ gde je ε proizvoljno mali broj, na primer $\varepsilon = 0.000001$. Ukoliko uslov nije ispunjen sledi drugi korak, nalaženje novih vrednosti za ekstremalne frekvencije $[\omega_{m1}, \omega_{m2}]$.

Eliptički filtar petog stepena ($k = 1$) je specijalan slučaj ove klase filtara. Na Slici 3.5 prikazane su karakteristike u ustaljenom stanju nove klase filtara za različite vrednosti parametra k , odnosno sa različitim stepenom zaravnjenja $(2k - 1)$ u koordinatnom početku. Mini-

malno slabljenje u nepropusnom opsegu iznosi 40 dB. Slabljenje u propusnom opsegu je prikazano u uvećanoj razmeri jer kod ove klase filtara maksimalno slabljenje u propusnom opsegu iznosi samo $a_{max} = 0.000434316$ dB, ako je minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu $a_{min} = 40$ dB.



Sl. 3.5: Frekvencijske karakteristike nove klase filtara sa dve proste nule na realnim frekvencijama, minimalnim slabljenjem u propusnom opsegu od 40 dB i $k = 2, 3$ i 4.

Kao što je već napomenuto, samo dvostruko komplementarne prenosne funkcije neparnog stepena mogu se realizovati all-pass sekcijama sa realnim koeficijentima. Za $k = 1$ dobija se eliptička prenosna funkcija petog stepena.

Nova klasa filarskih funkcija sedmog stepena je za $k = 3$

$$H_0(s) = \frac{(0.4032904 s^2 + 1)(0.6345200 s^2 + 1)}{(s + 1)(s^2 + 1.5344381 s + 1)(s^2 + 0.7293157 s + 1)(s^2 + 0.1948775 s + 1)}, \quad (3.35)$$

devetog stepena je za $k = 5$

$$H_0(s) = \frac{(0.7441092 s^2 + 1)(0.5546275 s^2 + 1)}{(s + 1)(s^2 + 1.7276731 s + 1)(s^2 + 1.0818074 s + 1)(s^2 + 0.4809254 s + 1)(s^2 + 0.1267911 s + 1)}, \quad (3.36)$$

jedanaestog stepena je za $k = 7$

$$H_0(s) = \frac{(0.8051438 s^2 + 1)(0.6490995 s^2 + 1)}{(s + 1)(s^2 + 1.8349204 s + 1)(s^2 + 1.3881296 s + 1)(s^2 + 0.8145376 s + 1)(s^2 + 0.3543371 s + 1)(s^2 + 0.0930086 s + 1)}. \quad (3.37)$$

Sve prenosne funkcije imaju minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu od 40 dB, i prikazane su na Slici 3.5.

Karakteristična funkcija sa tri proste nule

Karakteristična funkcija (3.8) sa tri proste nule na realnim frekvencijama u nepropusnom opsegu filtra, koja dobija se za proizvoljnu vrednost k , $M = 3$ i $l_1 = l_2 = l_3 = 1$, ima oblik

$$K(\omega) = \omega^k \frac{\omega^2 - \omega_{01}^2}{\omega^2 \omega_{01}^2 - 1} \frac{\omega^2 - \omega_{02}^2}{\omega^2 \omega_{02}^2 - 1} \frac{\omega^2 - \omega_{03}^2}{\omega^2 \omega_{03}^2 - 1} \quad (3.38)$$

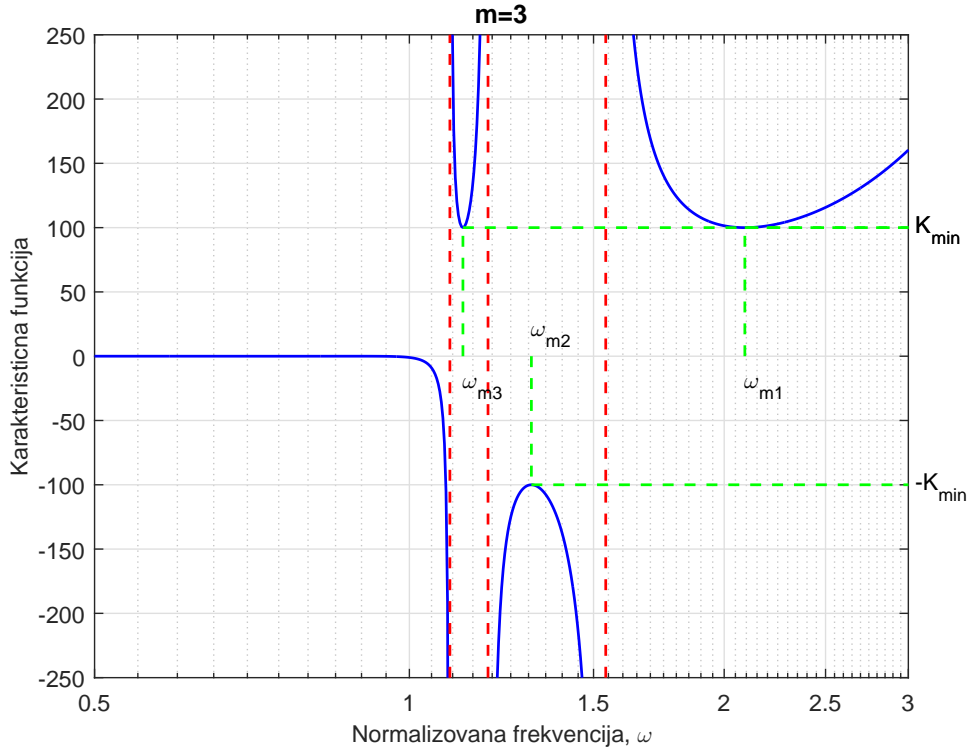
gde $1/\omega_{01} > 1$, $1/\omega_{02} > 1$ i $1/\omega_{03} > 1$ su nule prenosne funkcije filtra koje leže u nepropusnom opsegu filtra. Na Slici 3.6 prikazana je karakteristična funkcija dvostruko komplementarne banke filtara sa tri proste nule na realnim frekvencijama. Minimalno slabljenje filtra u nepropusnom opsegu iznosi $a_{min} = 40$ dB.

Nepoznate su tri pola karakteristične funkcije na realnim frekvencijama u nepropusnom opsegu $1/\omega_{01}$, $1/\omega_{02}$ i $1/\omega_{03}$, i tri frekvencije na kojima nastupa minimalno slabljenje K_{min} u nepropusnom opsegu ω_{m1} , ω_{m2} i ω_{m3} . Potrebno je rešiti sledeći sistem od šest nelinearnih jednačina ukoliko se za aproksimaciju koristi nepropusni opseg filtra

$$f_{1,2,3}(\omega, \Omega) = \left. \frac{dK(\Omega, \omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_{mi}} = 0 \quad (3.39)$$

$$f_{4,5,6}(\omega_{mi}, \Omega) = K(\Omega, \omega_{mi}) - K_{min} = 0, \quad \text{za } i = 1, 2, 3.$$

1. U prvom koraku početna rešenja se mogu odrediti primenom Jacobijeve eliptičke sinusne funkcije za $n = 5$ i $i = 1, 2$ i 3 , na isti način kao što je to urađeno za aproksimaciju karakteristične funkcije sa dve proste nule, videti poglavlje 3.2.2 na strani 48.
2. Drugi korak se sastoji u nalaženju rešenja za ekstremalne frekvencije karakteristične funkcije $\omega_{m1}^{(0)}$, $\omega_{m2}^{(0)}$ i $\omega_{m3}^{(0)}$ na kojima nastupa minimalno slabljenje u nepropusnom



Sl. 3.6: Karakteristična funkcija dvostruko komplementarne banke filtera sa tri proste nule na realnim frekvencijama.

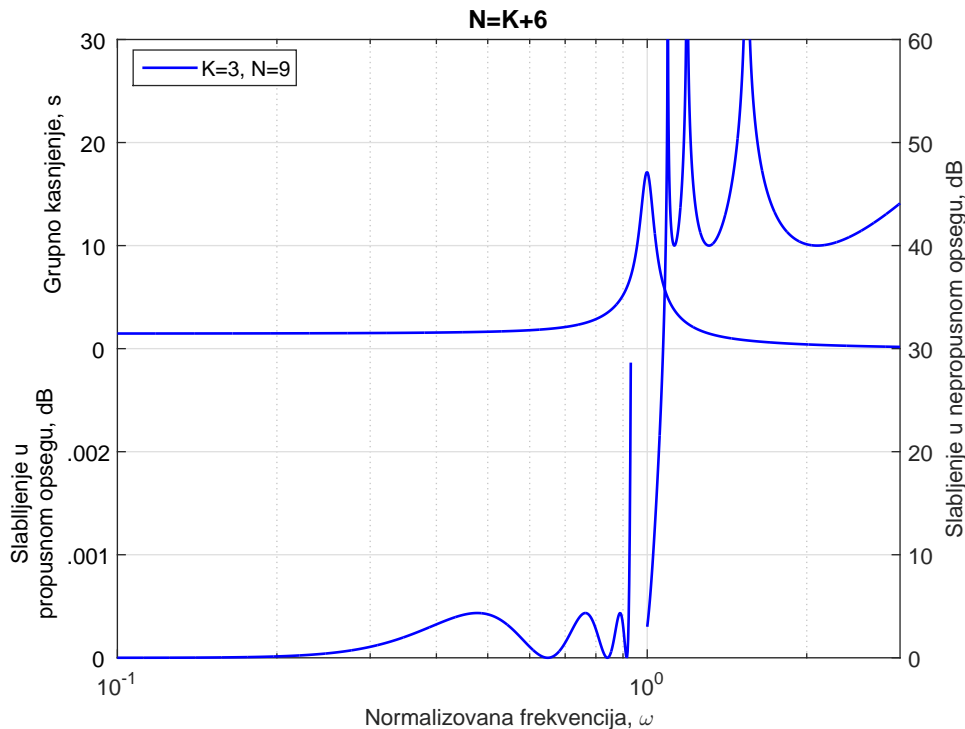
opsegu, kao i vrednost karakteristične funkcije na tim frekvencijama. Superskript (0) označava da su to početna rešenja. U ovom koraku se određuju nule prvog izvoda karakteristične funkcije. Sve nule moraju biti realne, a koriste se samo one koje se nalaze u nepropusnom opsegu filtra. Time je broj nelinearnih jednačina prepolovljen.

3. Sledeći korak je izračunavanje novih vrednosti za nule karakteristične funkcije $\Omega = [\omega_{01}^{(i+1)}, \omega_{02}^{(i+1)}, \omega_{03}^{(i+1)}]$ primenom već ranije pomenute Newton-Kantorovichev iterativni metod, da bi se izjednačile vrednosti karakteristične funkcije na frekvencijama $\omega_{m1}^{(i)}$, $\omega_{m2}^{(i)}$ i $\omega_{m3}^{(i)}$ posle i iteracija

$$\begin{bmatrix} \omega_{01}^{(i+1)} \\ \omega_{02}^{(i+1)} \\ \omega_{03}^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{01}^{(i)} \\ \omega_{02}^{(i)} \\ \omega_{03}^{(i)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_4(\Omega^{(i)}, \omega_{m1}^{(i)})}{\partial \omega_{01}} & \frac{\partial f_4(\Omega^{(i)}, \omega_{m1}^{(i)})}{\partial \omega_{02}} & \frac{\partial f_4(\Omega^{(i)}, \omega_{m1}^{(i)})}{\partial \omega_{03}} \\ \frac{\partial f_5(\Omega^{(i)}, \omega_{m2}^{(i)})}{\partial \omega_{01}} & \frac{\partial f_5(\Omega^{(i)}, \omega_{m2}^{(i)})}{\partial \omega_{02}} & \frac{\partial f_5(\Omega^{(i)}, \omega_{m2}^{(i)})}{\partial \omega_{03}} \\ \frac{\partial f_6(\Omega^{(i)}, \omega_{m3}^{(i)})}{\partial \omega_{01}} & \frac{\partial f_6(\Omega^{(i)}, \omega_{m3}^{(i)})}{\partial \omega_{02}} & \frac{\partial f_6(\Omega^{(i)}, \omega_{m3}^{(i)})}{\partial \omega_{03}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_4(\Omega^{(i)}, \omega_{m1}^{(i)}) \\ f_5(\Omega^{(i)}, \omega_{m2}^{(i)}) \\ f_6(\Omega^{(i)}, \omega_{m3}^{(i)}) \end{bmatrix}.$$

4. Rešenje se dobija kada je ispunjen uslov $\sqrt{f_4^2 + f_5^2 + f_6^2} < \varepsilon$ gde je ε proizvoljno mali broj, na primer $\varepsilon = 0.000001$. Ukoliko uslov nije ispunjen sledi drugi korak, nalaženje novih vrednosti za ekstremalne frekvencije $[\omega_{m1}^{(i+1)}, \omega_{m2}^{(i+1)}, \omega_{m3}^{(i+1)}]$.

Najniži stepen filtra koji sadrži tri proste nule na realnim frekvencijama je sedmi stepen koji se dobija za $k = 1$, a to je eliptički filter koji je specijalan slučaj ove aproksimacije. Pošto parni stepeni nisu od interesa, sledeći neparni stepen je deveti stepen, čije su karakteristike u ustaljenom stanju prikazane na Slici 3.7.



Sl. 3.7: Frekvencijske karakteristike nove klase filtera sa tri proste nule na realnim frekvencijama, minimalnim slabljenjem u nepropusnom opsegu od 40 dB i sa $k = 3$.

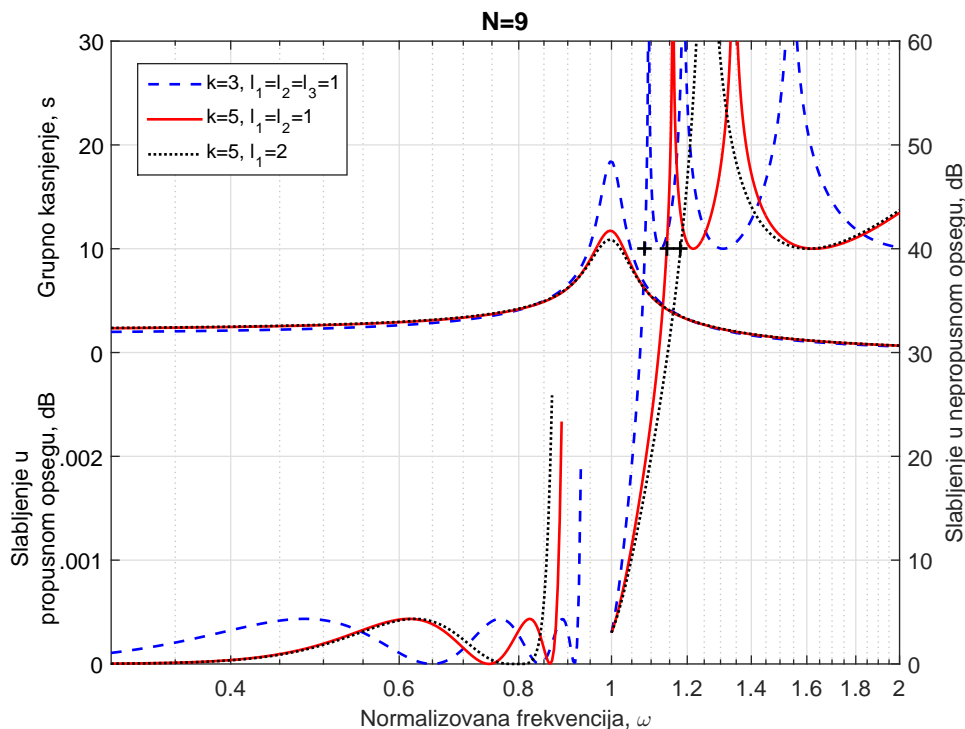
Nova klasa filterarskih funkcija devetog stepena za $k = 3$ je

$$H_0(s) = \frac{(0.8366224 s^2 + 1)(0.7073143 s^2 + 1)(0.4212006 s^2 + 1)}{(s + 1)(s^2 + 1.5436455 s + 1)(s^2 + 0.7680171 s + 1)(s^2 + 0.3017410 s + 1)(s^2 + 0.0773695 s + 1)}. \quad (3.40)$$

Navedenim postupkom aproksimacije mogu se aproksimirati prenosne funkcije i sa većim brojem prostih nula na realnim frekvencijama. Opisani postupak za izračunavanje početih rešenja, daje početna rešenja koja su bliska konačnom rešenju i brzo konvergiraju ka konačnom rešenju, može se primeniti za aproksimaciju proizvoljnog stepena polinom u brojiocu prenosne funkcije filtra.

Na Slici 3.8 prikazano je poređenje frekvencijskih karakteristika nove klase filtera devetog stepena sa minimalnim slabljenjem u nepropusnom opsegu od $a_{min} = 40$ dB. Za svaku karakteristiku slabljenja izračunata je granična frekvencija nepropusnog opsega ω_s . Pošto je

normalizovana granična frekvencija propusnog opsega jednala jedinici $\omega_g = 1$, to se na osnovu ove granične frekvencije može lako izračunati širina prelazne zone.



Sl. 3.8: Poređenje prenosnih funkcija devetog stepena.

Upoređene su sledeće prenosne funkcije:

1. Prenosna funkcija sa dvostrukom nulom na realnim frekvencijama $M = 1$, $l_1 = 2$ i stepenom zaravnjenja u koordinatnom početku $2k - 1 = 9$. Normalizovana granična frekvencija nepropusnog opsega je $\omega_s = 1.181071153810442$.
2. Prenosna funkcija sa dve proste nule na realnim frekvencijama $M = 2$, $l_1 = l_2 = 1$ i stepenom zaravnjenja u koordinatnom početku $2k - 1 = 9$. Normalizovana granična frekvencija nepropusnog opsega je $\omega_s = 1.142040382747394$.
3. Prenosna funkcija da tri proste nule na realnim frekvencijama $M = 3$, $l_1 = l_2 = l_3 = 1$ i stepenom zaravnjenja u koordinatnom početku $2k - 1 = 5$. Normalizovana granična frekvencija nepropusnog opsega je $\omega_s = 1.083608126453369$.

3.3 Zaključak

Klasa analognih dvostruko komplementarnih prenosnih funkcija pogodnih za sintezu hibridne banke filtera, opisana je u ovom poglavlju. Postupak aproksimacije se zasniva na aproksimaciji

već poznatih dvostruko komplementarnih digitalnih IIR filtara. Mada je moguće preslikavanje iz digitalnog u analogni domen, aproksimacija je realizovana direkno u analognom domenu. Najpre su izvedeni uslovi koje treba da zadovolji karakteristična funkcija da niskofrekvencijski/visokofrekvencijski filtarski par bude komplementaran po snazi. Pokazano je da je karakteristična funkcija racionalna funkcija i da su Butterworthov i Eliptički filter granični slučajevi.

Konačne nule prenosa na realnim frekvencijama, koje mogu biti proste ili višestruke, mogu se koristiti kao stepen slobode za podešavanje frekvencijskih karakteristika filtarskog para. Položaj polova u ravni kompleksne frekvencije za oba filtra u filtarskom paru je isti, što omogućava da oba filtra mogu da imaju isti korektor grupnog kašnjenja.

4

Korekcija grupnog kašnjenja

PROJEKTOVANJE klasičnih analognih filtara zasniva se na aproksimaciji amplitudske ili fazne karakteristike u frekvencijskom domenu polinomskim ili racionalnim funkcijama. Međutim, u slučaju filtara sa minimalnom faznom karakteristikom selektivna amplitudska karakteristika i konstantno grupno kašnjenje ne može se realizovati simultano [11]. Postupak projektovanja analognih filtara prema specifikacijama za amplitudsku karakteristiku i karakteristiku grupnog kašnjenja može se podeliti na dva dela. Prvi deo se odnosi na standardne metode kojima se projektuju selektivni filtri, dok drugi deo obuhvata projektovanje analognih faznih korektora čija fazna karakteristika nije minimalna.

Projektovanje analognih filtara detaljno je opisano u knjigama [12, 19, 63, 69, 70]. Aproksimacija amplitudske karakteristike je najčešće zasnovana na klasičnim ortogonalnim polinomima [21] kao što su: dobro poznati Chebyshevljevi polinomi [90], Legendreovi polinomi [7, 15, 34, 42, 55] koje karakteriše talasavost amplitudske karakteristike u propusnom opsegu, i sa monotonom karakteristikom slabljenja u nepropusnom opsegu, čije je projektovanje takođe zasnovano na ortogonalnim polinomima, opisane su u radovima [6, 10, 25, 27, 49, 50]. Papoulis-Legendreovi filtri [27, 49, 50] poznati su i kao optimalni filtri sa monotonom amplitudskom karakteristikom u propusnom opsegu.

Posebnu klasu čine prelazni filtri, a najpoznatiju su prelazni Butterworth-Chebyshevljevi (TBC) filtri [9, 65] i prelazni Butterworth-Legendre filtri [56].

Projektovanje faznih korektora, kako analognih tako i digitalnih sa beskonačnim impulsnim odzivom, je privuklo veliku pažnju istraživača. Korektori grupnog kašnjenja, projektovani u analognom domenu, ne mogu se bilinearnom transformacijom transformisati u digitalni domen, kao što se to može učiniti sa amplitudskom karakteristikom, mada postoji velika

sličnost između primenjenih algoritama. Za projektovanje faznih korektora može se koristiti genetski algoritam [93], adaptivno filtriranje [23] kao i all-pass tehnika projektovanja faznih korektora [54, 88]. Korektori grupnog kašnjenja obično imaju veću složenost nego sam filter naročito kada je potrebno da se korekcija grupnog kašnjenja izvrši u celom propusnom opsegu filtra velike selektivnosti.

4.1 Korektor grupnog kašnjenja

Korekcija grupnog kašnjenja se realizuje kaskadnom vezom filtra sa specificiranom amplitudskom karakteristikom $|G_n(j\omega|$ n -tog stepena, u daljem tekstu originalnog filtra, i korektora grupnog kašnjenja $A_m(s)$, m -tog stepena, sa frekvencijskim odzivom amplitudske karakteristike koji je jednak jedinici, $|A_m(j\omega)| = 1$, čija se karakteristika grupnog kašnjenja menja sa frekvencijom. Dakle, prenosna funkcija kaskadne sprege originalnog filtra $G_n(s)$ i korektora grupnog kašnjenja $A_m(s)$ je

$$H(s) = G_n(s) A_m(s) \quad (4.1)$$

ili na realnim frekvencijama $s = j\omega$ je

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= |G_n(j\omega)| |A_m(j\omega)| e^{j\varphi_G(\omega)} e^{j\varphi_A(\omega)} \\ &= |G_n(j\omega)| e^{j[\varphi_G(\omega) + \varphi_A(\omega)]}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Korektor grupnog kašnjenja ne utiče na amplitudsku karakteristiku celog sistema jer je $A_m(j\omega) \equiv 1$, već samo na faznu karakteristiku, odnosno na karakteristiku grupnog kašnjenja. Grupno kašnjenje se izračunava kao negativni izvod faze u odnosu na kružnu frekvenciju. Grupno kašnjenje celokupnog sistema je zbir grupnog kašnjenja originalnog filtra i grupnog kašnjenja korektora grupnog kašnjenja

$$\begin{aligned} \tau(\omega) &= -\frac{d}{d\omega} [\varphi_G(\omega) + \varphi_A(\omega)] \\ &= \frac{d\varphi_G(\omega)}{d\omega} + \frac{d\varphi_A(\omega)}{d\omega} = \tau_G(\omega) + \tau_A(\omega). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Grupno kašnjenje originalnog filtra $G_n(s)$ je parna racionalna funkcija kružne frekvencije i može se izračunati primenom sledeće formule

$$\tau_G(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{G_n(-s)} \frac{dG_n(-s)}{ds} - \frac{1}{G_n(s)} \frac{dG_n(s)}{ds} \right]_{s=j\omega}. \quad (4.4)$$

ili u nešto kompaktnijem obliku

$$\tau_G(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{G_n(s) \frac{dG_n(-s)}{ds} - G_n(-s) \frac{dG_n(s)}{ds}}{G_n(-s)G_n(s)} \right]_{s=j\omega}. \quad (4.5)$$

Red polinoma u imenitelju parne racionalne funkcije grupnog kašnjenja (4.5) je $2n$ dok je stepen polinoma u broitelju $2n - 2$. Na primer, neka je polinomska prenosna funkcija originalnog filtra data izrazom

$$G_4(s) = \frac{d_5}{d_1s^4 + d_2s^3 + d_3s^2 + d_4s + d_5}.$$

Primenom formule (4.5) dobija se

$$\tau_G(\omega) = \frac{d_1d_2\omega^6 + (d_2d_3 - 3d_1d_4)\omega^4 + (d_3d_4 - 3d_2d_5)\omega^2 + d_4d_5}{d_1^2\omega^8 + (d_2^2 - 2d_1d_3)\omega^6 + (d_3^2 + 2d_1d_5 - 2d_2d_4)\omega^4 + (d_4^2 - 2d_3d_5)\omega^2 + d_5^2}.$$

Grupno kašnjenje u koordinatnom početku je odnos koeficijenta linearnog monoma i konstante u prenosnoj funkciji originalnog filtra $\tau_G(0) = d_4/d_5$.

Za korekciju grupnog kašnjenja koriste se all-pass filtri. All-pass filtri se sastoje od sekcija drugog stepena i jedne sekcije prvog stepena. Generalni oblik prenosne funkcije korektora grupnog kašnjenja neparnog stepena $m = 2k + 1$ je

$$A_m(s) = \frac{-s + \sigma_p}{s + \sigma_p} \prod_{i=1}^k \frac{s^2 - \frac{\omega_{pi}}{Q_i}s + \omega_{pi}^2}{s^2 + \frac{\omega_{pi}}{Q_i}s + \omega_{pi}^2} \quad (4.6)$$

Linearni član predstavlja all-pass mrežu prvog stepena. Prenosna funkcija korektora grupnog kašnjenja parnog stepena $m = 2k$ data je izrazom

$$A_m(s) = \prod_{i=1}^k \frac{s^2 - \frac{\omega_{pi}}{Q_i}s + \omega_{pi}^2}{s^2 + \frac{\omega_{pi}}{Q_i}s + \omega_{pi}^2} \quad (4.7)$$

gde je $\omega_{pi} = \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}$ moduo pola $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, dok je $Q_i = 0.5\omega_{pi}/\sigma_i$ faktor dobrote pola

ili Q -faktor pola. Korektor grupnog kašnjenja parnog stepena je kaskadna sprega korektora grupnog kašnjenja drugog stepena. U daljem tekstu ćemo smatrati da su koeficijenti korektora grupnog kašnjenja konstantni, ili drugim rečima, vremenski invarijantni.

Grupno kašnjenje korektora grupnog kašnjenja neparnog stepena, jednačina (4.6), može se izračunati primenom jednačine (4.5)

$$\tau_A(\omega) = \frac{2\sigma_p}{\omega^2 + \sigma_p^2} + \sum_{i=1}^k \frac{2Q_i\omega_{pi}(\omega^2 + \omega_{pi}^2)}{Q_i^2\omega^4 + (1 - 2Q_i^2)\omega_{pi}^2\omega^2 + Q_i^2\omega_{pi}^4}, \quad (4.8)$$

dok grupno kašnjenje korektora grupnog kašnjenja parnog stepena ima oblik

$$\tau_A(\omega) = \sum_{i=1}^k \frac{2Q_i\omega_{pi}(\omega^2 + \omega_{pi}^2)}{Q_i^2\omega^4 + (1 - 2Q_i^2)\omega_{pi}^2\omega^2 + Q_i^2\omega_{pi}^4}. \quad (4.9)$$

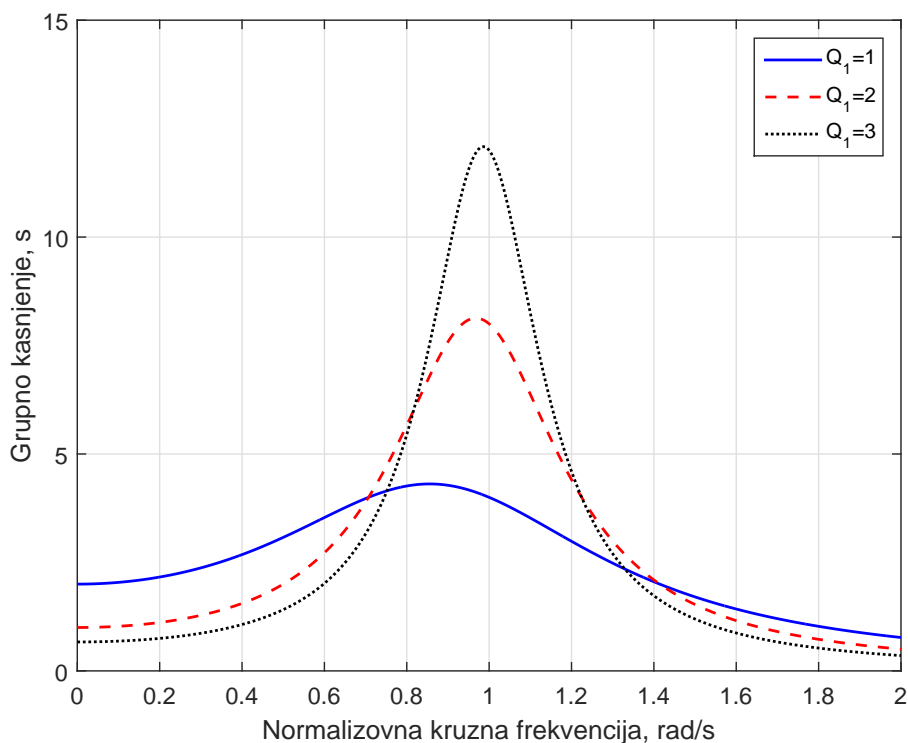
Korektor grupnog kašnjenja parnog stepena se realizuje kaskadnom spregom samo sekcija drugog stepena, te ona predstavlja osnovni gradivni blok. Na slici 4.1 prikazane su frekvencijske karakteristike all-pass sekcije drugog stepena. Kružne frekvencije na kojima nastupaju ekstremalne vrednosti grupnog kašnjenja sekcije drugog stepena $\omega_i^{(\text{ext})}$ su koreni prvog izvoda karakteristike grupnog kašnjenja (4.9)

$$\frac{d\tau_A(\omega)}{d\omega} = 0 \quad (4.10)$$

za $k = 1$, koja ima pet rešenja koja mogu biti realna ili imaginarna.

$$\begin{aligned} \omega_1^{(\text{ext})} &= 0 \\ \omega_{2,3}^{(\text{ext})} &= \pm \omega_{p1} \sqrt{\frac{\sqrt{4Q_1^2 - 1} - Q_1}{Q_1}} \\ \omega_{4,5}^{(\text{ext})} &= \pm j\omega_{p1} \sqrt{\frac{\sqrt{4Q_1^2 - 1} + Q_1}{Q_1}}. \end{aligned}$$

Za $Q_1 = 0.5$, što je u isto vreme i najmanja vrednost Q -faktora pola koji se nalazi na realnoj osi u ravni kompleksne frekvencije, postoji samo jedno realno rešenje, koje nastupa za $\omega_1^{(\text{ext})} = 0$. Kada Q -faktor pola raste dobijaju se još dva realna rešenja $\omega_{2,3}^{(\text{ext})}$, jedno na pozitivnim frekvencijama, a drugo na negativnim frekvencijama koje su približno jednake frekvenciji modula pola ω_{p1} . Ostala dva rešenja $\omega_{4,5}^{(\text{ext})}$ su imaginarna.



Sl. 4.1: Frekvencijske karakteristike grupnog kašnjenja sekcije drugog stepena korektora grupnog kašnjenja za $\omega_{p1} = 0.5$ i tri različite vrednosti Q -faktora pola: 0.5, 1 i 1.5.

Zamenom izraza za grupno kašnjenje originalnog filtra prema izrazu (4.5) i izraza za grupno kašnjenje korektora grupnog kašnjenja neparnog (4.8) ili parnog (4.9) stepena u jednačinu (4.3), dobija se sledeći izraz za grupno kašnjenje celokupnog filtra

$$\tau(\omega) = \frac{b_0 + b_1\omega^2 + \dots + b_{n+m-1}\omega^{2(n+m-1)}}{a_0 + a_1\omega^2 + \dots + a_{n+m-1}\omega^{2(n+m-1)} + a_{n+m}\omega^{2(n+m)}}. \quad (4.11)$$

U radu [88] opisan je proračun za elemente korektora grupnog kašnjenja Q_i i ω_{pi} , $i = 1, 2, \dots, k$ tako da karakteristika grupnog kašnjenja (4.11) aproksimira konstantno grupno kašnjenje u minimax smislu u zadanom frekvencijskom opsegu. Potrebno je najpre odrediti m početnih rešenja za korektor grupnog kašnjenja, a zatim odrediti položaj lokalnih minimuma i maksimuma karakteristike grupnog kašnjenja na frekvencijskoj osi na osnovu jednačine

$$\frac{d}{d\omega} \tau(\omega, \mathbf{c}) = 0 \quad (4.12)$$

gde je $\mathbf{c} = [\sigma_p, \omega_{p1}, Q_1, \omega_{p2}, Q_2, \dots, \omega_{pm}, Q_m]$ vektor koga čine nepoznati elementi korektora grupnog kašnjenja. Nove vrednosti elemenata korektora grupnog kašnjenja određuju se reša-

vanjem sledećeg sistema nelinearnih simultanih jednačina

$$\begin{aligned}
 \tau(0, \mathbf{c}) &= \tau_0 \pm \varepsilon_{max} \\
 \tau(\omega_2^{(\min)}, \mathbf{c}) &= \tau_0 \mp \varepsilon_{max} \\
 \tau(\omega_3^{(\max)}, \mathbf{c}) &= \tau_0 \pm \varepsilon_{max} \\
 &\vdots \\
 \tau(\omega_m^{(\max)}, \mathbf{c}) &= \tau_0 \pm \varepsilon_{max}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

gde je ε_{max} maksimalno odstupanje karakteristike grupnog kašnjenja od konstantne vrednosti τ_0 . Kada je stepen korektora grupnog kašnjenja neparan, karakteristika grupnog kašnjenja ima lokalni maksimum u koordinatnom početku, odnosno lokalni minimum kada je karakteristika korektora grupnog kašnjenja parnog stepena. Superscript uz ω označava da je na toj frekvenciji lokalni maksimum ili lokalni minimum. Za rešavanje sistema jednačina (4.13) koristi se numerička metoda, na primer Newton-Raphsonova metoda. Sa novim vrednostima vectora \mathbf{c} određuju se nove vrednosti ekstremalnih tačaka. Iterativni postupak se nastavlja sve dok se odstupanje karakteristike grupnog kašnjenja od konstantne vrednosti ne izjednači sa unapred zadatom tačnošću.

U nastavku će biti prikazan novi postupak projektovanja korektora grupnog kašnjenja koji aproksimira karakteristiku grupnog kašnjenja u ravnom (ili zaravnjenom) smislu. Za određivanje elemenata korektora grupnog kašnjenja potrebno je rešiti samo jedan sistem nelinearnih jednačina i to samo jednom.

4.2 Novi koncept korekcije grupnog kašnjenja

Potrebno je da grupno kašnjenje celokupnog filtra bude konstantno u ravnom smislu (in flat sense).¹ Grupno kašnjenje (4.11) biće konstantno u maksimalno ravnom smislu, tj. frekvencijski odziv grupnog kašnjenja (4.11) ima $2n + 2m - 1$ izvoda u odnosu na kružnu frekvenciju ω koji su jednaki nuli. Ovo se može postići izjednačavanjem odnosa koeficijenata b_i i a_i uz isti stepen

$$\frac{b_0}{a_0} = \frac{b_1}{a_1} = \dots = \frac{b_{n+2k-1}}{a_{n+2k-1}} \tag{4.14}$$

¹Samo aproksimacija konstantnog grupnog kašnjenja Besselovog filtra je u maksimalno ravnom smislu. Broj prvih izvoda karakteristike grupnog kašnjenja celog filtra koji su jednaki nuli u koordinatnom početku određuje fazni korektor.

gde je $b_0/a_0 > 1$ grupno kašnjenje celokupnog sistema u koordinatnom početku. Poznato je da samo Besselovi filtri, poznati i kao Bessel-Thomsonovi filtri, [82] imaju konstantno grupno kašnjenje u maksimalno ravnom smislu. Za proračun all-pass korektora imamo m nelinearnih simultanih jednačina sa m nepoznatih za korekciju grupnog kašnjenja originalnog filtra

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{a_1} - \frac{b_0}{a_0} &= 0 \\ \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_0}{a_0} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{b_m}{a_m} - \frac{b_0}{a_0} &= 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Prema tome samo prvih $2m + 1$ izvoda u odnosu na ω celokupnog filtra su jednaki nuli. Ostali stepeni slobode su iskorišćeni za optimizaciju slabljenja u nepropusnom opsegu. Programski paket za simboličku analizu može se iskoristiti za rešavanje sistema simultanih jednačina (4.13) za proizvoljni stepen filtra i proizvoljni stepen korektora grupnog kašnjenja. U primerima koji slede biće korišćeno simboličko rešavanje sistema nelinearnih jednačina koje je sadržano u **MATLAB**[®] softverskom paketu.

4.3 Primeri

U sledećim primerima biće detaljno opisan postupak korekcije karakteristike grupnog kašnjenja u ravnom smislu. Originalni filter je Butterworthov filter. Butterworthov filter je najjednostavniji i spada u najčešće korišćene filtre. Karakteristika slabljenja Butterworthovog filtra je maksimalno ravna u koordinatnom početku. Pored mnogobrojnih primena, on se može iskoristiti za sintezu dvostruko komplementarne dvokanalne hibridne banke filtera.

4.3.1 Korektor Butterworthovog filtra trećeg stepena

Kao prvi primer biće razmatrana korekcija grupnog kašnjenja Butterworthovog filtra trećeg stepena ($n = 3$) korektorom grupnog kašnjenja drugog stepena ($m = 2$) čija je prenosna funkcija data jednačinom (4.7) za $k = 1$. Karakteristika grupnog kašnjenja Butterworthovog filtra trećeg stepena, jednačina (4.5), sa graničnom frekvencijom propusnog opsega normalizovana na $\omega_g =$

1, je sledeća racionalna parna funkcija

$$\tau_H(\omega) = \frac{2 + \omega^2 + 2\omega^4}{1 + \omega^6}. \quad (4.16)$$

Zbir karakteristika grupnog kašnjenja Butterworthovog filtra (4.16) i karakteristike korektora grupnog kašnjenja (4.9) za $k = 1$, daje karakteristiku grupnog kašnjenja celokupnog filtra

$$\tau(\omega) = \frac{b_0 + b_1\omega^2 + b_2\omega^4 + b_3\omega^6 + b_4\omega^8}{a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + a_3\omega^6 + a_4\omega^8 + a_5\omega^{10}}, \quad (4.17)$$

gde je

$$\begin{aligned} b_4 &= 2Q_1^2 + 2\omega_{p1}Q_1 & a_5 &= Q_1^2 \\ b_3 &= -4Q_1^2\omega_{p1}^2 + Q_1^2 + 2Q_1\omega_{p1}^3 + 2\omega_{p1}^2 & a_4 &= -2Q_1^2\omega_{p1}^2 + \omega_{p1}^2 \\ b_2 &= 2Q_1^2\omega_{p1}^4 - 2Q_1^2\omega_{p1}^2 + 2Q_1^2 + \omega_{p1}^2 & a_3 &= Q_1^2\omega_{p1}^4 \\ b_1 &= Q_1^2\omega_{p1}^4 - 4Q_1^2\omega_{p1}^2 + 2Q_1\omega_{p1} + 2\omega_{p1}^2 & a_2 &= Q_1^2 \\ b_0 &= 2Q_1^2\omega_{p1}^4 + 2Q_1\omega_{p1}^3 & a_1 &= -2Q_1^2\omega_{p1}^2 + \omega_{p1}^2 \\ & & a_0 &= Q_1^2\omega_{p1}^4 \end{aligned} \quad (4.18)$$

gde su Q_1 i ω_{p1} nepoznati parametri koje treba odrediti tako da grupno kašnjenje celokupnog filtra bude realizovano u ravnom smislu. U tu svrhu je potrebno rešiti dve nelinearne jednačine jer se sistem jednačina (4.15) redukuje na samo dve jednačine. Zamenom (4.18) u (4.15) dobija se

$$\begin{aligned} \frac{Q_1^3\omega_{p1}^3 + 6Q_1^2 - 2}{Q_1\omega_{p1}(2Q_1^2 - 1)} &= 0 \\ \frac{-2Q_1^2\omega_{p1}^5 + 2Q_1^2\omega_{p1}^3 + 2Q_1 - \omega_{p1}^3}{Q_1^2\omega_{p1}} &= 0 \end{aligned}$$

ili za $Q_1\omega_{p1} \neq 0$ i $Q_1 > \sqrt{1/2}$

$$\begin{aligned} Q_1^3\omega_{p1}^3 + 6Q_1^2 - 2 &= 0 \\ -2Q_1^2\omega_{p1}^5 + 2Q_1^2\omega_{p1}^3 + 2Q_1 - \omega_{p1}^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

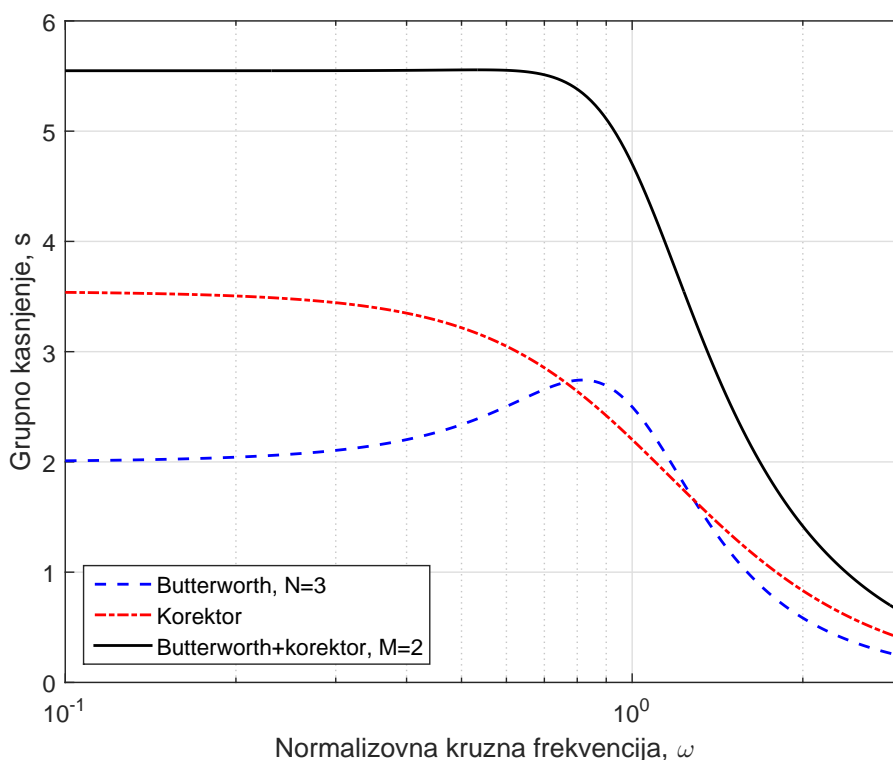
Sva realna rešenja sistema nelinearnih jednačina (4.19) dobijena promenom MATLAB[®] simboličkog paketa dati su u Tabeli 4.1 Rešenje koje omogućava stabilnost filtra i praktičnu realizaciju je rešenje broj 4, jer to rešenje daje pozitivne vrednosti za oba parametra filtra, dok za prvo, drugo i treće rešenje to nije slučaj.

Tab. 4.1: Realna rešenja sistema nelinearnih jednačina (4.19).

Rešenje	Q_1	ω_{p1}
1	-0.550893243250386	-1.023208785412442
2	7.971017020778096	-0.908066586652983
3	-7.971017020778096	0.908066586652983
4	0.550893243250386	1.023208785412442

Karakteristike grupnog kašnjenja originalnog filtra, korektora grupnog kašnjenja i celokupnog filtra prikazane su na slici 4.2. Pet izvoda karakteristike grupnog kašnjenja u odnosu na kružnu frekvenciju celokupnog filtra je jednako nuli u koordinatnom početku. Korektor grupnog kašnjenja je drugog stepena i njegova prenosna funkcija je

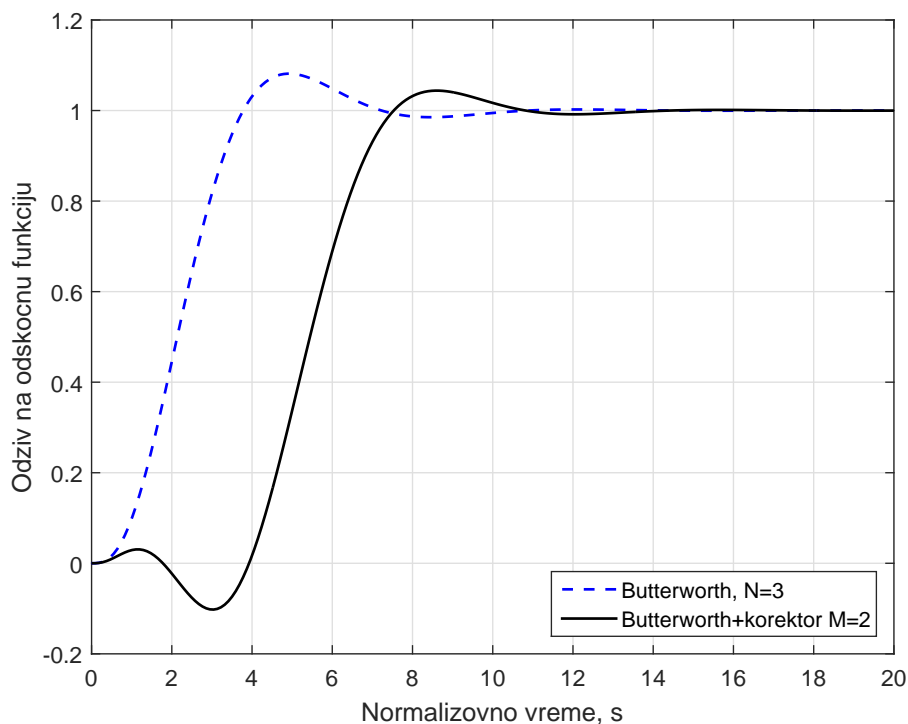
$$A_2(s) = \frac{s^2 - 1.85736310609896 s + 1.046956218545259}{s^2 + 1.85736310609896 s + 1.046956218545259}. \quad (4.20)$$



Sl. 4.2: Karakteristike grupnog kašnjenja Butterworthovog filtra trećeg stepena, korektora grupnog kašnjenja drugog stepena i kaskadne sprege filtra sa korektorom grupnog kašnjenja drugog stepena.

Odzivi originalnog filtra i celokupnog filtra na jediničnu odskočnu (Hevisajdovu) funkciju i impulsnu (Dirakovu) funkciju prikazani su na slikama 4.3 i 4.4, respektivno. Može se uočiti da se na početku oba odziva celokupnog filtra javlja podbačaj koga nije bilo u odzivima orig-

inalnog filtra. Međutim, premašenje u odzivu na Hevisajdovu funkciju i oscilacije na kraju odziva na impulsnu funkciju su manje nego što je to kod odgovarajućih odziva originalnog filtra. Kašnjenje signala koje unosi korektor grupnog kašnjenja nije od značaja u mnogim primenama. S druge strane, podbačaj u odzivima na početku i na kraju odziva, poznato kao vreme smirivanja (settling time), u mnogim primenama je nepoželjan.



Sl. 4.3: Odziv filtra na jediničnu odskočnu funkciju Butterworthovog filtra trećeg stepena i kaskadne sprege filtra sa korektorom grupnog kašnjenja drugog stepena.

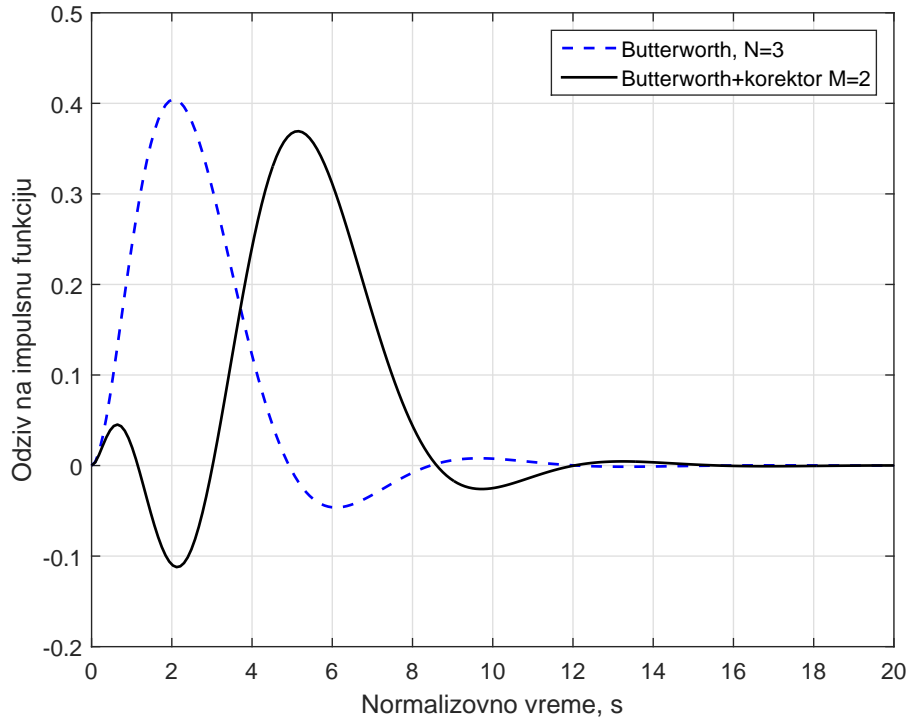
4.3.2 Korektor Butterworthovog filtra četvrtog stepena

Prenosna funkcija Butterworthovog filtra četvrtog stepena u simboličkom obliku može se prikazati u sledećem obliku

$$H_0(s) = \frac{1}{s^4 + \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+2}(s^3 + s) + (\sqrt{2}+2)s^2 + 1}. \quad (4.21)$$

Karakteristika grupnog kašnjenja u simboličkom obliku je

$$\tau_H(\omega) = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+2} \cdot \frac{\omega^6 + (\sqrt{2}-1)(\omega^4 + \omega^2) + 1}{\omega^8 + 1}. \quad (4.22)$$



Sl. 4.4: Odzivi na impulsnu funkciju Butterworthovog filtra trećeg stepena i kaskadne sprege filtra sa korektorom grupnog kašnjenja drugog stepena.

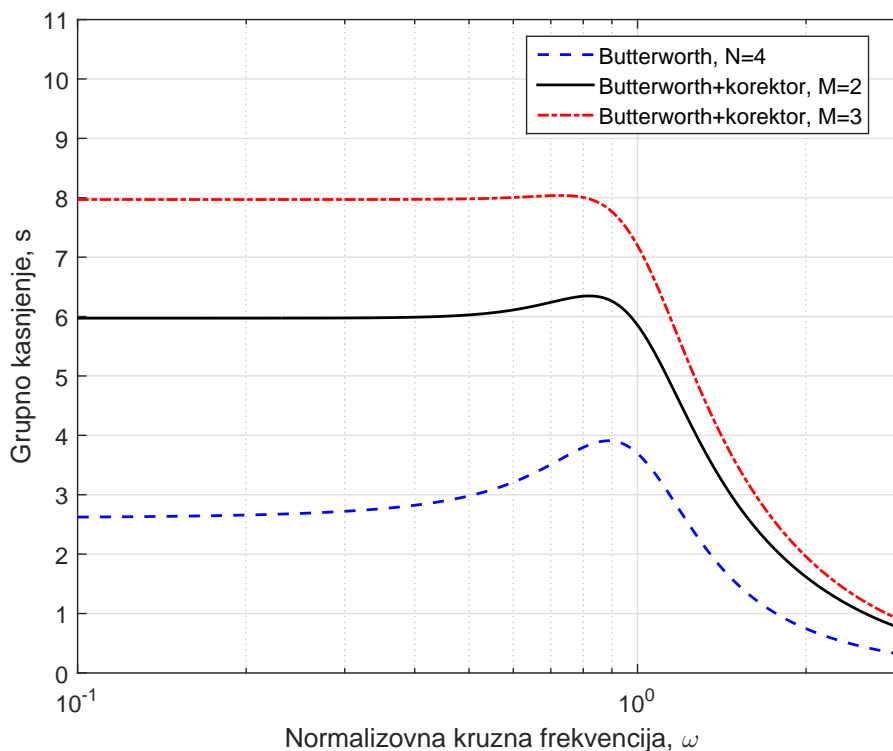
Korektor grupnog kašnjenja može biti drugog ili trećeg stepena. Ukoliko je trećeg stepena nepoznati parametri σ_p , Q_1 i ω_{p1} se izračunavaju rešavanjem sledećeg sistema od tri nelinearne simultane jednačine

$$\begin{aligned}
 c \cdot Q_1^3 \sigma_p^3 \omega_{p1}^3 + (-1 + 3Q_1^2) \sigma_p^3 - Q_1^3 \omega_{p1}^3 &= 0 \\
 c \cdot Q_1 \sigma_p \omega_{p1}^3 [Q_1^2 \sigma_p^2 \omega_{p1}^2 + Q_1^2 \omega_{p1}^2 - 2Q_1^2 \sigma_p^2 + \sigma_p^2] \\
 + 2Q_1^3 \omega_{p1}^3 + 3Q_1^2 \sigma_p \omega_{p1}^2 - Q_1^2 \sigma_p^3 - Q_1 \omega_{p1}^3 - \sigma_p \omega_{p1}^2 &= 0 \quad (4.23) \\
 c \cdot [(1 + \sqrt{2}) Q_1^2 \sigma_p^3 \omega_{p1}^5 - 2Q_1^2 \sigma_p^3 \omega_{p1}^3 + Q_1^2 \sigma_p^3 \omega_{p1} + Q_1^2 \sigma_p \omega_{p1}^5 \\
 - 2Q_1^2 \sigma_p \omega_{p1}^3 + \sigma_p^3 \omega_{p1}^3 + \sigma_p \omega_{p1}^3] - Q_1^2 \omega_{p1} - Q_1 \sigma_p &= 0
 \end{aligned}$$

gde je $c = (1 - \sqrt{2}/2) \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ konstanta. Rešenje sistema nelinearnih jednačina (4.23) koristeći simboličku notaciju je

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= 0.62570907306252410151614640199114 \\
 \sigma_p &= 0.92689276422704480751235678326339 \\
 \omega_{p1} &= 0.99901563182831065734745834561181.
 \end{aligned} \quad (4.24)$$

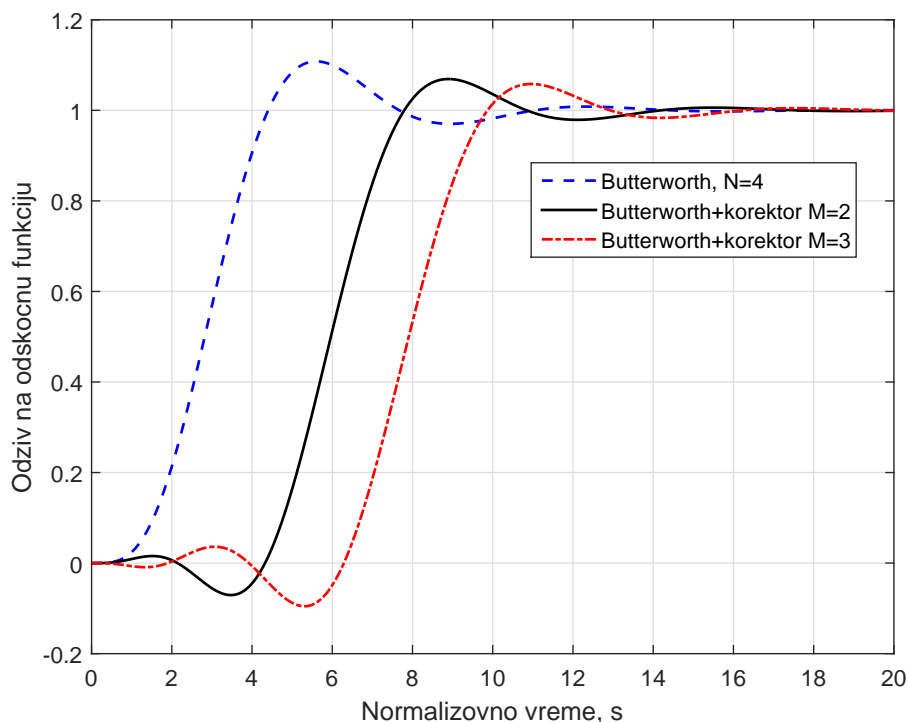
Na slici 4.5 prikazana je karakteristika grupnog kašnjenja Butterworthovog filtra četvrtog stepena sa korektorom grupnog kašnjenja trećeg stepena. Radi poređenja, na istoj slici je prikazana i karakteristika grupnog kašnjenja Butterworthovog filtra sa korektorom grupnog kašnjenja drugog stepena. Sa povećanjem stepena filtra povećava se grupno kašnjenje celokunnoš filtra, ali se smanjuje izobličenje grupnog kašnjenja.



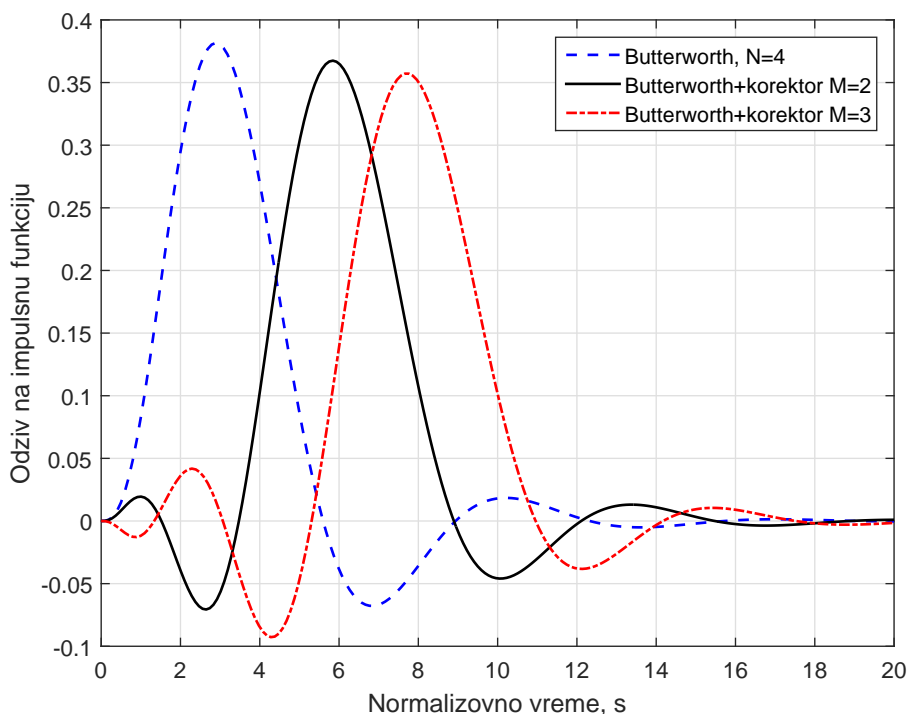
Sl. 4.5: Karakteristike grupnog kašnjenja Butterworthovog filtra četvrtog stepena, kaskadne sprege Butterworthovog filtra sa korektorom grupnog kašnjenja drugog stepena i kaskadne sprege Butterworthovog filtra sa korektorom grupnog kašnjenja trećeg stepena.

Karakteristike u vremenskom domenu, odzivi na odskočnu funkciju i impulsnu funkciju, kaskadne sprege filtra i korektora grupnog kašnjenja trećeg stepena prikazani su na slikama 4.6 i 4.7. Treba napomenuti da su korektori grupnog kašnjenja sistemi neminimalne (maksimalne) faze jer imaju sve nule u desnoj poluravni s -ravni. Takav sistem se prepoznaje po tome što se u njegovom odskočnom odzivu uočava promena smera odziva (podbačaj) neposredno po dovođenju pobude.

Sledeći korak u projektovanju filtara je kompenzacija vremena smirivanja, kako na početku odziva tako i na kraju odziva. Kompenzacija vremena smirivanja opisana je u radovima [39, 40, 53, 54]. U tim radovima je dokazano, da primena vremenski promenljivih koeficijenta kod Butterworthovog filtra, propusnika niskih frekvencija, sa korektorom grupnog kašnjenja ostvaruje znatno skraćivanje vremena smirivanja.



Sl. 4.6: Odziv na jediničnu odskočnu funkciju Butterworthovog filtra četvrtog stepena, kaskadne sprege Butterworthovog filtra sa korektorom grupnog kašnjenja drugog stepena i kaskadne sprege Butterworthovog filtra sa korektorom grupnog kašnjenja trećeg stepena.



Sl. 4.7: Odziv na impulsnu funkciju Butterworthovog filtra četvrtog stepena, kaskadne sprege Butterworthovog filtra sa korektorom grupnog kašnjenja drugog stepena i kaskadne sprege Butterworthovog filtra sa korektorom grupnog kašnjenja trećeg stepena.

Radi poređenja, na slikama su prikazane i karakteristike u frekvencijskom domenu i vremenskom domenu kaskadne sprege filtra četvrtog stepena i korektora grupnog kašnjenja drugog stepena. Parametri korektora grupnog kašnjenja su

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0.55089324325038713237034926351043 \\ \omega_{p1} &= 1.0232087854124687353873923711944. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Kao što se moglo očekivati, korektor grupnog kašnjenja drugog stepena unosi manje kašnjenje signala u odnosu na korektor grupnog kašnjenja trećeg stepena. Pored toga, podbačaji u odzivima na odskočnu i impulsnu funkciju koje unosi korektor trećeg stepena, su veći nego što je to slučaj kada se za korekciju grupnog kašnjenja koristi korektor drugog stepena. Konačno, sa porastom stepena korektora grupno kašnjenje postaje ravnije.

4.3.3 Korektori grupnog kašnjenja Butterworthovih filtara

U tabeli 4.2 date su vrednosti za Q -faktor pola i moduo pola korektora grupnog kašnjenja za Butterworthove filtre od četvrtog do sedmog stepena. Za svaki Butterworthov filtar proračunati su korektori od drugog stepena do stepena koji je za jedan manji od stepena Butterworthovog filtra za koga se korektor proračunava. Tako na primer za sedmi stepen filtra proračunati su korektori drugog, trećeg, četvrtog, petog i šestog stepena.

Treba primetiti da je Q -faktor pola svih korektora manji od jedinice, što znači da je njihova karakteristika grupnog kašnjenja malo osetljiva na tolerancije elemenata koji se koriste za njihovu realizaciju.

Konačne nule prenosa mogu da poboljšaju selektivnost Butterworthovog filtra. Nula prenosa na imaginarnoj osi u s -ravni može biti prosta ili višestruka, kao što je to opisano u radovima [2, 66]. Chebyshevljevo slabljenje u nepropusnom opsegu se može dobiti sa prostim nulama prenosa na imaginarnoj osi, a time i bolje performanse u nepropusnom opsegu.

Treba napomenuti da se ravna karakteristika grupnog kašnjenja u digitalnom domenu ne može dobiti bilinearnom transformacijom, već je potrebno projektovati korektor grupnog kašnjenja direktno u digitalnom domenu.

Tab. 4.2: Korektori grupnog kašnjenja za Butterworthove filtre, n je stepen filtra, a m je stepen korektora.

n	m	ω_{pi}/σ_p	Q_i
3	2	1.023208785412469	0.550893243250387
	2	1.095461766679881	0.543397844468906
4	3	0.999015631828311 0.926892764227045	0.625709073062524
	2	1.081227621094952	0.540557518678963
5	3	1.036061873038000 0.968923173969253	0.611695299283144
	4	0.989607841997106 0.897529947556964	0.698584440264518 0.516076048151128
	2	1.052036407430793	0.538876002760387
6	3	1.025542318245485 0.959686357205014	0.606043292123088
	4	0.919840287726891 1.007138558727249	0.514931672071062 0.681671921200669
	5	0.886055119239874 0.983883472542870 0.859047304921405	0.546711599961688 0.766852036099849
	2	1.020845325999457	0.537701636124657
7	3	1.005398255673159 0.940387409496121	0.602503719977294
	4	0.997681329149128 0.911444693054039	0.674274750539677 0.514475143937017
	5	0.896244730039997 0.990498706434677 0.870267306433327	0.544255415780050 0.749475833117043
	6	0.979212580923586 0.841022826634088 0.880626516027979	0.831004331420791 0.507888527354824 0.581633970195458

4.4 Osetljivost grupnog kašnjenja

U ovoj sekciji će biti razmatrana promena grupnog kašnjenja all-pass filtera usled relativne tolerancije $V_{g_i} = \Delta g_i / g_i$ komponenta g_i , gde su Δg_i apsolutna odstupanja nazivnih vrednosti elemenata od nominalnih vrednosti, koji su upotrebljeni za njihovu realizaciju. Pretpostavimo da su poznate promene parametara bikvadratne sekcije Q_i i ω_{pi} usled tolerancije pasivnih komponenta V_{g_j} , promena grupnog kašnjenja se može izračunati primenom formule predložene u

radu [78]

$$\Delta\tau_i(\omega) = \mathcal{S}_{\omega_{pi}}^{\tau(\omega)}(\omega) \sum_{j=1}^k S_{g_j}^{\omega_{pi}} V_{g_j} + \mathcal{S}_{Q_i}^{\tau(\omega)}(\omega) \sum_{j=1}^k S_{g_j}^{Q_i} V_{g_j} \quad (4.26)$$

gde su $S_{g_j}^{\omega_{pi}}$ i $S_{g_j}^{Q_i}$ klasične funkcije osetljivosti [32], poznate kao relativne ili ω_p i Q_p osetljivosti², a

$$\mathcal{S}_{\omega_{pi}}^{\tau(\omega)}(\omega) = \omega_{pi} \frac{\partial \tau(\omega)}{\partial \omega_{pi}} s \quad (4.27)$$

i

$$\mathcal{S}_{Q_i}^{\tau(\omega)}(\omega) = Q_i \frac{\partial \tau(\omega)}{\partial Q_i} s \quad (4.28)$$

su polurelativne (semirelative) osetljivosti grupnog kašnjenja u odnosu na moduo pola i Q -faktor pola. Sa k je označen broj elemenata kojim je realizovana bikvadratna sekcija. Jednačina 4.26 se odnosi na jednu bikvadratnu sekciju. Kada se korektor sastoji od kaskadne spege N bikvadratnih sekcija, potrebno je izvršiti sabiranje N tako dobijenih odstupanja grupnog kašnjenja od nominalne vrednosti $\Delta\tau(\omega) = \sum_{i=1}^N \Delta\tau_i(\omega)$.

Za male relativne promene parametra x (Q_i ili ω_{pi}), ako su poznate polurelativne osetljivosti, promena grupnog kašnjenja $\Delta\tau_i$ u sekundama je

$$\Delta\tau_i(\omega) \cong \mathcal{S}_x^{\tau_i(\omega)}(\omega) \frac{\Delta x}{x} s. \quad (4.29)$$

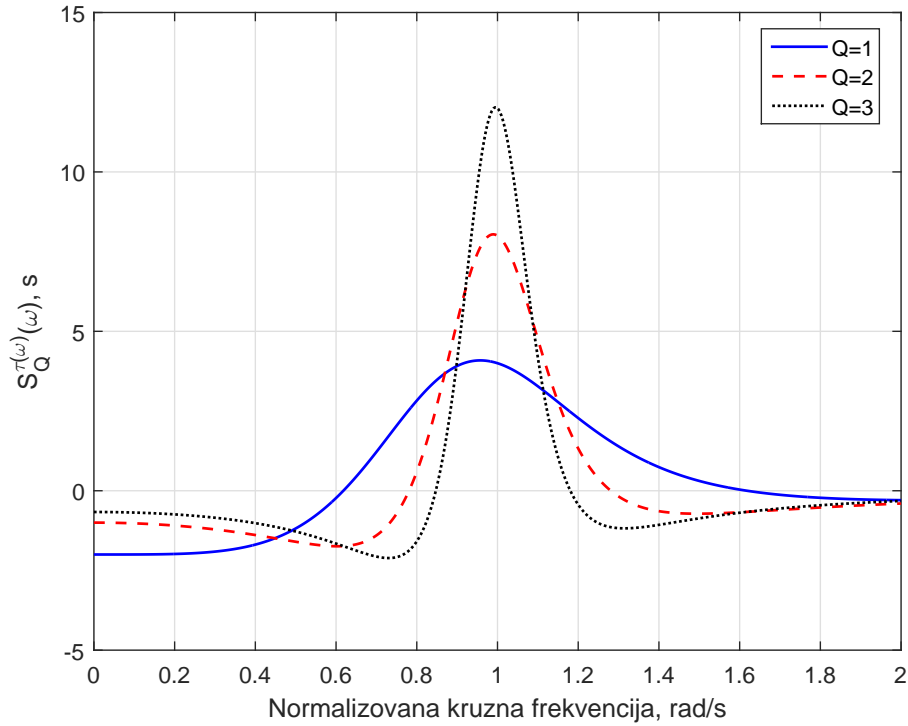
Diferenciranjem jednačine 4.8, koja se odnosi na jednu bikvadratnu sekciju, u odnosu na Q -faktor pola i množenjem izvoda sa Q -faktorm pola dobija se polurelativna osetljivost grupnog kašnjenja na Q -faktor pola

$$\mathcal{S}_{Q_i}^{\tau(\omega)}(\omega) = Q_i \frac{-2 Q_i^2 \omega_{pi} \omega^6 + (6 Q_i^2 \omega_{pi}^3 - 2 \omega_{pi}^3 (2 Q_i^2 - 1)) \omega^4 + (6 Q_i^2 \omega_{pi}^5 - 2 \omega_{pi}^5 (2 Q_i^2 - 1)) \omega^2 - 2 Q_i^2 \omega_{pi}^7}{(Q_i^2 \omega^4 + \omega_{pi}^2 (1 - 2 Q_i^2) \omega^2 + Q_i^2 \omega_{pi}^4)^2}. \quad (4.30)$$

Na Slici 4.8 prikazana je osetljivost grupnog kašnjenja bikvadratne sekcije na Q -faktor pola u funkciji frekvencije. Nacrtane su karakteristike za tri različite vrednosti Q -faktora pola. Moduo pola ω_{p1} je jednak jedinici u sva tri slučaja. Frekvencijska karakteristika ima maksimum na frekvenciji $\omega = 1$. Maksimum raste sa porastom Q -faktora, odnosno maksimalna vrednost je proporcionalna sa Q -faktorem. Nakon numeričkih izračunavanja došli

² $S_{g_i}^{\omega_{pi}} = \frac{g_i}{\omega_{pi}} \frac{\partial \omega_{pi}}{\partial g_i}$ $S_{g_i}^{Q_i} = \frac{g_i}{Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial g_i}$

smo do zaključka da je $\max\{\mathcal{S}_{Q_i}^{\tau_i}(\omega)\} \simeq 4Q$.



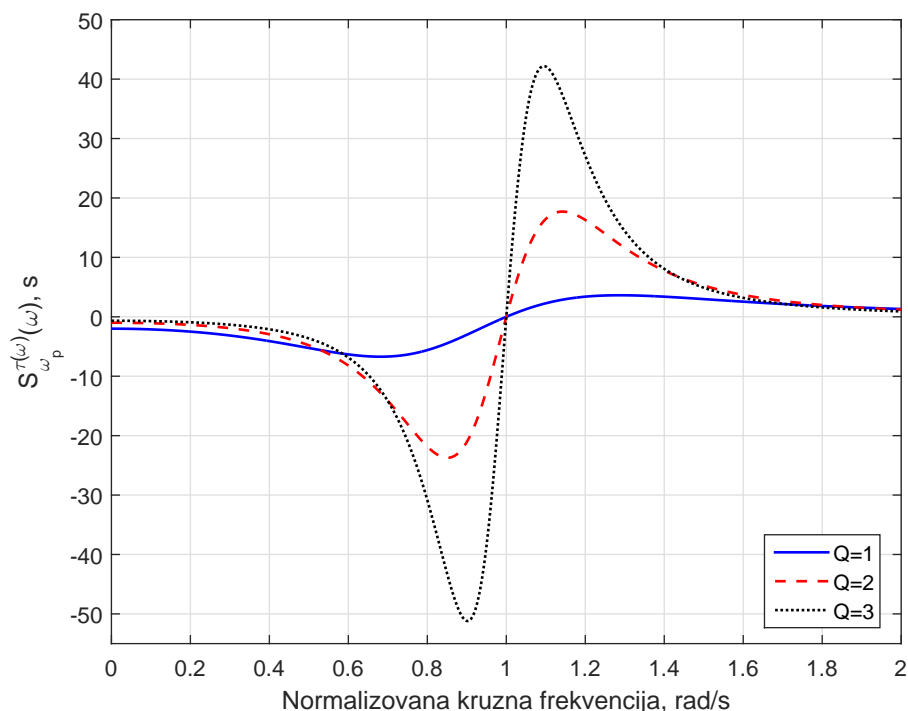
Sl. 4.8: Osetljivost karakteristike grupnog kašnjenja bikvadratne sekcije korektora grupnog kašnjenja na Q -faktor pola u funkciji frekvencije; $\max\{\mathcal{S}_{Q_i}^{\tau_i}(\omega)\} \simeq 4Q$.

Diferenciranjem jednačine 4.8 u odnosu na moduo pola i množenjem izvoda sa modulom pola dobija se polurelativna osetljivost grupnog kašnjenja na moduo pola

$$\mathcal{S}_{\omega_{pi}}^{\tau(\omega)}(\omega) = \frac{2Q_i^3\omega^6 + (10Q_i^3\omega_{pi}^2 - 2Q_i\omega_{pi}^2)\omega^4 + (-10Q_i^3\omega_{pi}^4 + 2Q_i\omega_{pi}^4)\omega^2 - 2Q_i^3\omega_{pi}^6}{(Q_i^2\omega^4 + \omega_{pi}^2(1 - 2Q_i^2)\omega^2 + Q_i^2\omega_{pi}^4)^2} \quad (4.31)$$

Na Slici 4.9 prikazana je polurelativna osetljivost grupnog kašnjenja bikvadratne sekcije na moduo pola u funkciji frekvencije. Nacrane su karakteristike za tri različite vrednosti Q -faktora pola. Moduo pola ω_{p1} je jednak jedinici u sva tri slučaja. Frekvencijska karakteristika ima nulu na frekvenciji $\omega = 1$, i dve ekstremalne vrednosti u blizini granice propusnog opsega ($\omega_{max} \simeq 1 \pm 0.5/Q$) sa približno istom maksimalnom vrednošću. Ekstremumi rastu sa porastom Q -faktora, odnosno maksimalna vrednost je proporcionalna sa kvadratom Q -faktora. Nakon numeričkih istraživanja došli smo do zaključka da je $\max\{\mathcal{S}_{\omega_{pi}}^{\tau_i}(\omega)\} \simeq 6Q^2$.

Karakteristike osetljivosti grupnog kašnjenja filtra, realizovanog u obliku kaskadne sprege



Sl. 4.9: Osetljivost karakteristike grupnog kašnjenja bikvadratne sekcije korektora grupnog kašnjenja na moduo pola u funkciji frekvencije; $\max\{\mathcal{S}_{\omega_p}^{\tau}(\omega)\} \simeq 6Q^2$.

bikvadratnih sekcija, slične su sa karakteristikama osetljivosti slabljenja filtra [19] s tom razlikom što je maksimalna vrednost osetljivosti grupnog kašnjenja srazmerna sa kvadratom Q -faktora, dok je maksimalna osetljivosti slabljenja srazmerna sa Q -faktorom pola.

4.5 Zaključak

Detaljno je opisan novi postupak za korekciju grupnog kašnjenja filtera propusnika niskih frekvencija. Rezultantna karakteristika grupnog kašnjenja kaskadne veze filtera i korektora grupnog kašnjenja je konstantna u približno ravnom smislu. Broj zaravnjenja u koordinatnom početku određuje stepen faznog korektora.

Aproksimacija korektora grupnog kašnjenja se zasniva na rešavanju sistema m simultanih nelinearnih jednačina, gde je m stepen faznog korektora. Nelinearne jednačine se formiraju na osnovu uslova za maksimalno ravnu racionalnu funkciju grupnog kašnjenja u koordinatnom početku. MATLAB[®] softver se može efikasno primeniti za aproksimaciju korektora grupnog kašnjenja u navedenom smislu. Ulazni podatak je samo parna racionalna funkcija grupnog kašnjenja filtera propusnika niskih frekvencija dok MATLAB[®] softver sadrži i određivanje početnih rešenja. Testiran je za realizaciju korekcije grupnog kašnjenja različitih tipova filtera do dese-

tog stepena sa faznim korektorima do desetog stepena. Pogodan je za ugradnju kao MATLAB[®] funkcija.

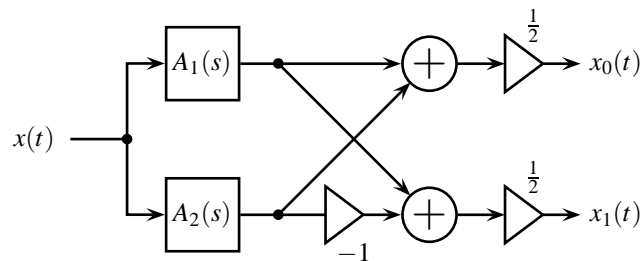
U odnosu na mini-max korekciju grupnog kašnjenja predloženi postupak je znatno jednostavniji. Prednosti su sledeće

1. Sistem nelinearnih jednačina se formira direktno iz karakteristike grupnog kašnjenja celokupnog filtra. Stepen korektora grupnog kašnjenja određuje stepen zaravnjenja konstantnog grupnog kašnjenja u koordinatnom početku. Kod mini-max aproksimacije konstantnog grupnog kašnjenja, pored zadate greške grupnog kašnjenja, nepoznate veličine su još i konstantna vrednost grupnog kašnjenja koju treba aproksimirati kao i opseg aproksimacije.
2. Izračunavanje frekvencija na kojima nastupaju ekstremalne vrednosti grupnog kašnjenja nije potrebno. Rešava se jedan sistem simultanih nelinearnih jednačina i to samo jednom da bi se dobilo konačno rešenje.
3. Aproksimacija parnih i neparnih stepena korektora grupnog kašnjenja sa realizuje na isti način.
4. Mogu se jednostavno implementirati u digitalnom domenu za korekciju grupnog kašnjenja rekurzivnih digitalnih filtara.
5. Implementacija na MATLAB[®] platformi je jednostavna. Ulazni podaci su koeficijenti karakteristike grupnog kašnjenja i stepen zaravnjenja, a izlazni podaci su parametri bikvadratnih sekcija faznog korektora.

5

Implementacija

BANKU filtera, koja može biti analogna ili digitalna, čine banka analize i banka sinteze. Ukoliko je jedna banka analogna, tada imamo hibridnu banku filtera. Banka analize deli spektar ulaznog signala na podopsege koji mogu dalje da se dele na nove podopsege, ili se nezavisno obrađuju, a zatim se u banci sinteze vrši rekonstrukcija podopsežnih signala u jedan izlazni signal. Na Slici 5.1 prikazana je analogna dvokanalna banka filtera koja za realizaciju koristi analogne all-pass mreže.



Sl. 5.1: All-pass realizacija dvokanalne banke filtera. Gornja grana daje niskofrekvencijski filter $H_0(s) = 0.5[A_1(s) + A_2(s)]$. Donja grana daje komplementarni visokofrekvencijski filter $H_1(s) = 0.5[A_1(s) - A_2(s)]$.

Dvokanalne banke se često koriste kao osnovni gradivni elementi za formiranje višekanalnih banki. One predstavljaju posebno efikasno rešenje za realizaciju oktavnih i neuniformnih banki filtera. Dvokanalnu banku čini par komplementarnih niskofrekvencijskih/visokofrekvencijskih filtera. Kada se frekvencijski spektar deli na dva jednaka dela, što je najčešći slučaj, koriste se poluopsežni filtri.

Razmotrimo realizaciju dvostruko komplementarne analogne banke filtera petog reda. Prenosna funkcija prototipskog filtra propusnika niskih frekvencija sa dvostrukom nulom

prenosa na realnim frekvencijama, opisana u Glavi 3 na strani 36, je

$$H_0(s) = \frac{0.2467s^4 + 0.9934s^2 + 1}{s^7 + 3.522s^6 + 7.194s^5 + 9.969s^4 + 9.969s^3 + 7.194s^2 + 3.522s + 1}. \quad (5.1)$$

Prenosna funkcija filtra propusnika visokih frekvencija je komplementarna sa prenosnom funkcijom filtra propusnika niskih frekvencija jer se dobija jednostavnim preslikavanjem $s \rightarrow 1/s$ prenosne prototipske funkcije filtra propusnika niskih frekvencija

$$H_1(s) = \frac{s^7 + 0.9934s^5 + 0.2467s^3}{s^7 + 3.522s^6 + 7.194s^5 + 9.969s^4 + 9.969s^3 + 7.194s^2 + 3.522s + 1}. \quad (5.2)$$

Prenosna funkcija all-pass filtra $A_1(s)$ dobija se sabiranjem prenosnih funkcija $H_0(s)$ i $H_1(s)$ (Lema 3.4 na strani 39). Sabiranjem polinoma u brojiteljima komplementarnog filtarskog para $[H_0(s), H_1(s)]$, dobija se all-pass funkcija $A_1(s)$ sa recipročnim polinomom u brojitelju [61]

$$A_1(s) = H_0 + H_1 = \frac{s^7 + 0.9934s^5 + 0.2467s^4 + 0.2467s^3 + 0.9934s^2 + 1}{s^7 + 3.522s^6 + 7.194s^5 + 9.969s^4 + 9.969s^3 + 7.194s^2 + 3.522s + 1}. \quad (5.3)$$

Nakon faktorizacije polinoma u brojitelju i imenitelju konačno se dobija stabilna prenosna funkcija $A_1(s)$ prvog all-pass filtra

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \frac{(s+1)(s^2 - 1.5453s + 1)(s^2 - 0.2155s + 1)(s^2 + 0.7608s + 1)}{(s+1)(s^2 + 1.5453s + 1)(s^2 + 0.2155s + 1)(s^2 + 0.7608s + 1)} \\ &= \frac{(s^2 - 1.5453s + 1)(s^2 - 0.2155s + 1)}{(s^2 + 1.5453s + 1)(s^2 + 0.2155s + 1)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Prenosna funkcija all-pass filtra $A_2(s)$ dobija se oduzimanjem prenosnih funkcija filtarskog para $[H_0(s), H_1(s)]$

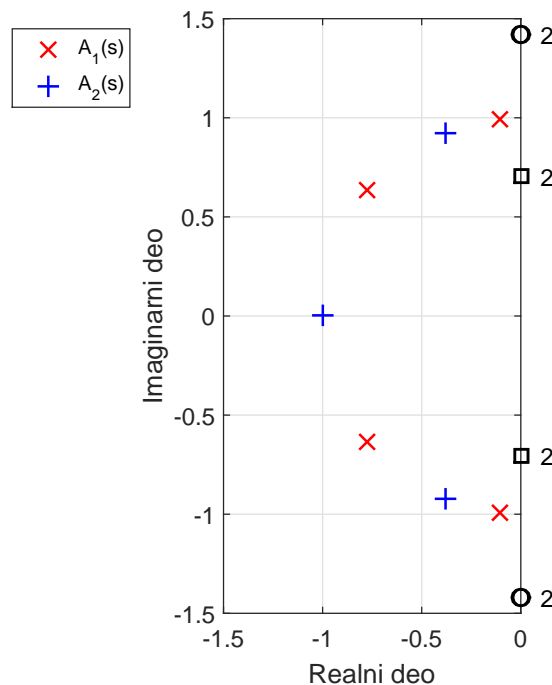
$$A_2(s) = H_0 - H_1 = \frac{-s^7 - 0.9934s^5 + 0.2467s^4 - 0.2467s^3 + 0.9934s^2 + 1}{s^7 + 3.522s^6 + 7.194s^5 + 9.969s^4 + 9.969s^3 + 7.194s^2 + 3.522s + 1}. \quad (5.5)$$

Nakon faktorizacije polinoma u brojitelju i imenitelju konačno se dobija stabilna prenosna funkcija $A_2(s)$ drugog all-pass filtra

$$\begin{aligned}
 A_2(s) &= -\frac{(s-1)(s^2+1.5453s+1)(s^2+0.2155s+1)(s^2-0.7608s+1)}{(s+1)(s^2+1.5453s+1)(s^2+0.2155s+1)(s^2+0.7608s+1)} \\
 &= -\frac{(s-1)(s^2-0.7608s+1)}{(s+1)(s^2+0.7608s+1)}.
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$

Dakle, sabiranjem $H_0(s)$ i $H_1(s)$ dobija se prenosna funkcija parnog reda, dok se oduzimanjem prenosne funkcije $H_1(s)$ od prenosne funkcije $H_0(s)$ dobija prenosna funkcija neparnog reda. Za realizaciju $A_1(s)$ potrebne su dve all-pass sekcije drugog reda, a za realizaciju $A_2(s)$ potrebna je jedna all-pass sekcija prvog reda i jedna all-pass sekcija drugog reda.

Na Slici 5.2 prikazan je položaj polova i nula filterarskog para i položaj polova all-pass filtera. Sa \circ označene su nule prenosne funkcije popusnika niskih frekvencija $H_0(s)$, dok su sa \square označene nule prenosne funkcije propusnika visokih frekvencija $H_1(s)$. Obe prenosne funkcije imaju iste polove. U cilju all-pass realizacije, polovi su raspodeljeni između all-pass filtera tako što polovi označeni sa \times pripadaju all-pass filteru $A_1(s)$, dok polovi označeni sa $+$ pripadaju all-pass filteru $A_2(s)$. Nule all-pass prenosnih funkcija se nalaze u desnoj s -poluravni i nisu prikazane na slici.



Sl. 5.2: Polovi all-pass funkcija: + polovi prenosne funkcije $A_1(s)$, \times polovi prenosne funkcije $A_2(s)$. Nule koje se nalaze u desnoj poluravni, nisu ucrtane.

Kao i u slučaju digitalnih filtera [85], all-pass prenosne funkcije se jednostavno dobijaju tako što se prenosnoj funkciji $A_1(s)$ dodeli realni, a zatim svaki drugi pol. Preostali polovi su

polovi prenosne funkcije $A_2(s)$. Može se lako pokazati da se primenom ove metode na prenosne funkcije parnog reda dobijaju all-pass filtri sa kompleksnim koeficijentima.

5.1 All-pass implementacija sa LCR rezonatorima

Realizacija je prikazana na primeru prenosne funkcije petog reda dvostruko komplementarne banke filtera. Za all-pass realizaciju prikazanu na Slici 5.1, za implementaciju $A_1(s)$ potrebna je jedna all-pass sekcije drugog reda i jedna all-pass sekcija prvog reda. Za implementaciju $A_2(s)$ potrebna je samo all-pass sekcija drugog reda. Usvojene su bikvadratne sekcija sa LCR rezonatorom i jednim operacionim pojačavačem [71]. Analogno kolo za sabiranje i analogno kolo za oduzimanje takođe je potrebno realizovati.

5.1.1 All-pass filter prvog reda

All-pass filter prvog reda ima jedan realan pol $p_1 = -\sigma$ i jednu realnu nulu $z_1 = \sigma$. Prenosna funkcija je

$$H(s) = \frac{-s + \sigma}{s + \sigma} \quad (5.7)$$

Na osnovu definicije, grupno kašnjenja je

$$\tau_g(\omega) = -\frac{\partial \phi(\omega)}{\partial \omega} = \frac{2\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} \quad (5.8)$$

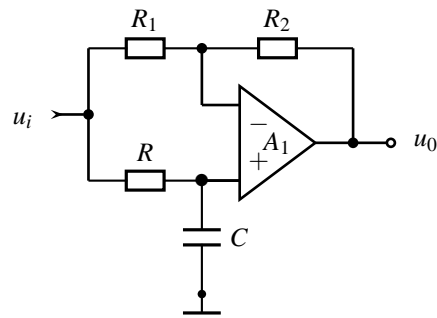
gde je $\phi(\omega) = -2 \arctan(\omega/\sigma)$.

Maksimalna vrednost grupnog kašnjenja je u koordinatnom početku, a zatim opada sa porastom frekvencije. Za male vrednosti σ vrednost grupnog kašnjenja je velika, a zatim brzo opada sa porastom frekvencije.

Razmotrimo aktivni RC filter prvog reda sa Slike 5.3, poznat kao Sallen-Key all-pass filter [67]. Uz pretpostavku da je operacioni pojačavač A_1 idealan prenosna funkcija je

$$H(s) = \frac{R_2}{R_1} \frac{-s + \frac{1}{RC} \frac{R_1}{R_2}}{s + \frac{1}{RC}} \quad (5.9)$$

Za $R_1 = R_2$ moduo pola i moduo nule postaju jednaki tako da prenosna funkcija realizuje all-pass filter prvog reda.

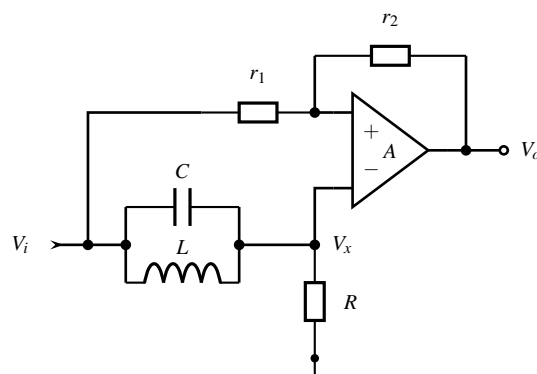


Sl. 5.3: All-pass filter prvog reda sa jednim operacionim pojačavačem.

Treba odabrati all-pass sekciju prvog reda sa uzemljenim kondenzatorom jer se na taj način postiže da je faza za $\omega = 0$ jednaka nuli, dok u slučaju uzemljenog otpornika faza za $\omega = 0$ iznosi π radijana.

5.1.2 All-pass filter dugog reda

All-pass filter drugog reda je osnovni gradivni blok za realizaciju dvokanalne banke filtra. Na Slici 5.3 prikazana je realizacija all-pass sekcije drugog reda zasnovana na LCR rezonatoru [71].

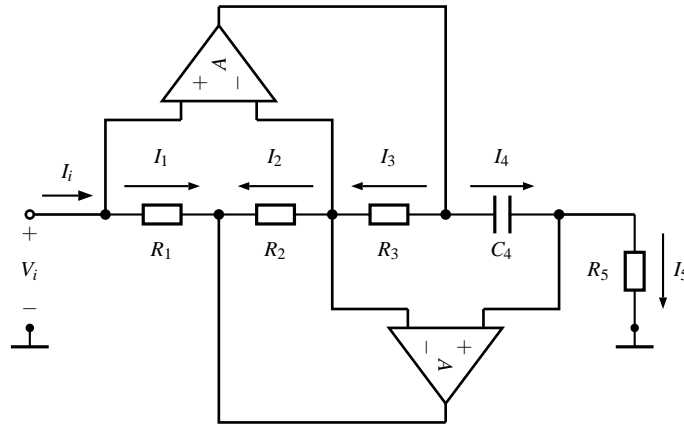


Sl. 5.4: Realizacije all-pass sekcije drugog reda zasnovana na LCR rezonatoru.

All-pass realizacija sa LRC rezonatorima je odabrana jer se lako postiže nezavisno podešavanje centralne frekvencije ω_p i faktora dobrote Q pola komponentama LCR rezonatora. Centralna frekvencija ω_p se može podešavati kondenzatorom C ili kalemom L , dok se promena Q -faktora može ostvariti pomoću otpornika R . To se može zaključiti iz prenosne funkcije, koja je veoma jednostavna

$$H_{ap}(s) = \frac{s^2 - \frac{1}{RC} \frac{r_2}{r_1} s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}} \quad (5.10)$$

gde je $\omega_p = 1/\sqrt{CR}$ i $Q_p = R\sqrt{C/L}$. Otpornik r_2 može se upotrebiti za podešavanje Q -faktora nule bez uticaja na Q -faktora pola i moduo pola¹. Mreža je zasnovana na jednom operacionom pojačavaču. Međutim, induktivnost u LCR rezonatoru može se realizovati aktivnim RC kolom sa operacionim pojačavačima koji ima induktivnu ulaznu impedansu. Pretpostavljamo da su operacioni pojačavači idealni. Na Slici 5.5 prikazan je Antoniouov generalisani impedansni konvertor kojim se simulira induktivnost [4].



Sl. 5.5: Generalisani impedansni konvertor (GIC).

Ulazna impedansa je

$$Z_{in} = \frac{V_i}{I_i} = \frac{R_1 R_3 R_5 C_4}{R_2} s \quad (5.11)$$

pa se može prepoznati da induktivnost L iznosi

$$L = \frac{R_1 R_3 R_5 C_4}{R_2}. \quad (5.12)$$

Pogodno je izabrati $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = R$ i neka je $C_4 = C$, sledi da je

$$L = CR^2. \quad (5.13)$$

Potrebno je najpre podesiti otpornike, a zatim izborom C realizovati željenu induktivnost. Druga kola koja se koriste za simulaciju induktivnosti zahtevaju da jedan kraj bude uzemljen [81] te nisu pogodna za ovu primenu.

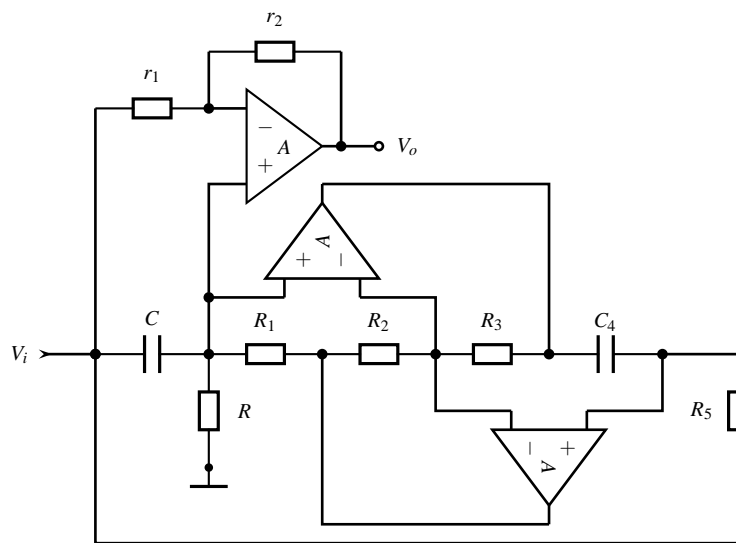
Dakle, prenosna funkcija bikvadratne sekcije all-pass mreže može se izraziti na sledeći

¹Osetljivost ω_p i Q na komponente LCR rezonatora se jednostavno izračunavaju primenom poznatih formula [19]: $S_R^{\omega_p} = 0$, $S_L^{\omega_p} = S_C^{\omega_p} = S_L^Q = -\frac{1}{2}$, $S_C^Q = \frac{1}{2}$, i $S_R^Q = 1$.

način

$$H(s) = \frac{s^2 - \frac{1}{RC} \frac{r_2}{r_1} s + \frac{R_2}{CC_4 R_1 R_3 R_5}}{s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{R_2}{CC_4 R_1 R_3 R_5}}. \quad (5.14)$$

Na Slici 5.6 prikazana je realizacija all-pass mreže drugog reda zasnovane na LCR rezonatoru u kojoj je kalem zamenjen generalisanim impedansnim konvertorom. Primena generalisanog impedansnog konvertora za realizaciju analognih filtara, kao i uticaj karakteristika operacionih pojačavača na prenosnu funkciju generalizovanog impedansnog konvertora, detaljno je opisana u radovima Gorski-Popiela [28], Martina i Sedre [45] i Saraga et al. [68].

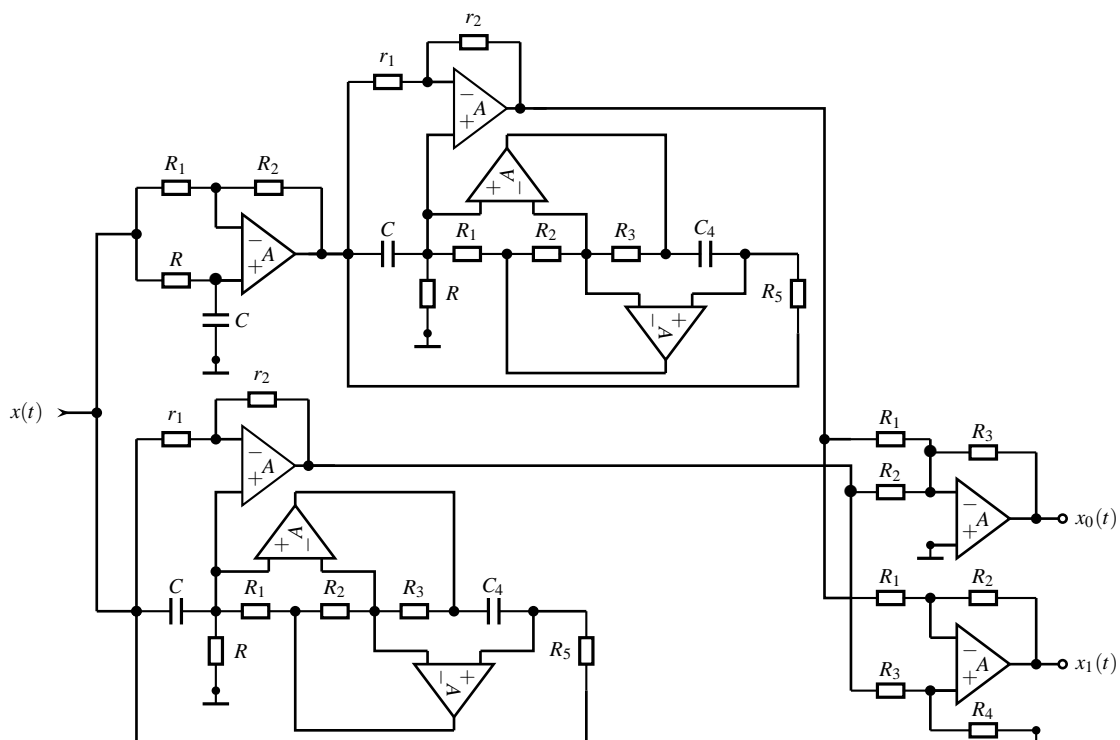


Sl. 5.6: Realizacija all-pass mreže drugog reda zasnovana na LCR rezonatoru u kojoj je kalem zamenjen simuliranom induktivnošću.

Aktivna RC realizacija bikvadratne all-pass sekcije sa jednim operacionim pojačavačem hibridne banke filtara prikazana je u radu [75].

5.1.3 Implementacija

Na Slici 5.7 je prikazana dvokanalna banka filtara petog reda koja se koristi za realizaciju all-pass filtre prvog i drugog reda. Predložena realizacija je pogodna jer ne zahteva trimovanje kondenzatora već samo otpornika. Merene vrednosti kondenzatora mogu uzeti za izračunavanje otpornosti otpornika koje mogu, ako je to potrebno, naknadno trimovati. All-pass filter $A_1(s)$ je realizovan kao kaskadna sprega sekcije prvog i drugog reda. Drugi all-pass filter $A_2(s)$ je samo jedna sekcija drugog reda. Standardna analogna kola za sabiranje i oduzimanje procesiraju izlazne signale all-pass filtara $A_1(s)$ i $A_2(s)$. Skaliranje signala faktorom 0.5 se vrši u kolu



Sl. 5.7: All-pass realizacija dvokanalne banke filtera petog reda sa LCR rezonatorima u kojima je kalem zamenjen simuliranom induktivnošću.

za sabiranje i u kolu za oduzimanje. Treba napomenuti da primenjena aritmetička kola vrše inverziju signala, odnosno unose fazni pomeraj od π radijana.

Prenosne funkcije implementiranih all-pass sekcija petog reda dvostruko komplementarne banke filtera sa minimalnim slabljenjem u propusnom opsegu a_{min} od 40 dB su

$$A_1(s) = \frac{s - 0.3731s + 1}{s + 0.3731s + 1} \quad (5.15)$$

i

$$A_2(s) = \frac{s^2 - 1.303s + 1}{s^2 + 1.303s + 1} \times \frac{-s + 1}{s + 1}. \quad (5.16)$$

5.2 Kaskadna realizacija sa LCR rezonatorima

Kaskadna realizacija dvokanalne banke filtera podrazumeva paralelnu vezu filtra propusnika niskih frekvencija i filtra propusnika visokih frekvencija. U ovoj sekciji će biti opisana kaskadna realizacija banke filtera petog reda. Prenosna funkcija filtra propusnika niskih frekvencija je data izrazom (5.1) dok je prenosna funkcija filtra propusnika visokih frekvencija data izrazom (5.2). Osnovni gradivni blokovi su i u ovom slučaju zasnovani na LCR

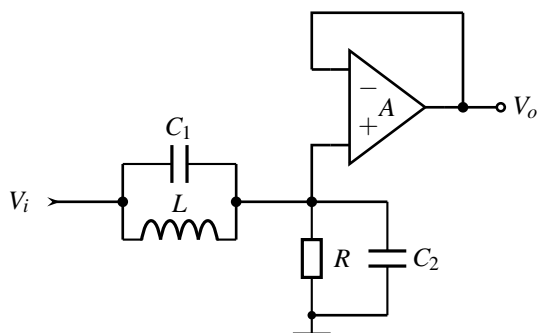
rezonatorima, a to su niskofrekvencijski i visokofrekvencijski notch filtri. Polovi na realnoj osi se realizuju jednostavnim RC članovima. Dakle, prototip filtra propusnika niskih frekvencija se realizuje kaskadnom spregom dva niskofrekventna notch filtra i jednim prostim RC kolom za realizaciju pola na realnoj osi. Filtar propusnik visokih frekvencija se realizuje kaskadnom spregom dva visokofrekvencijska notch filtra i jednim prostim RC kolom za realizaciju pola na realnoj osi i nule prenosa u koordinatnom početku.

5.2.1 Niskofrekvencijski notch filtar

Niskofrekvencijski nepropusnik opsega frekvencija, ili notch filtar, karakteriše konačna nula prenosa u nepropusnom opsegu filtra propusnika niskih frekvencija. Za realizaciju konačnih nula prenosa na imaginarnoj osi koristi se paralelno oscilatorno kolo L_1C , kao što je to prikazano na Slici 5.8. Prenosna funkcija je

$$H_{LPN} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{s^2 + \frac{1}{LC_1}}{s^2 + \frac{1}{R(C_1 + C_2)}s + \frac{1}{L(C_1 + C_2)}} \quad (5.17)$$

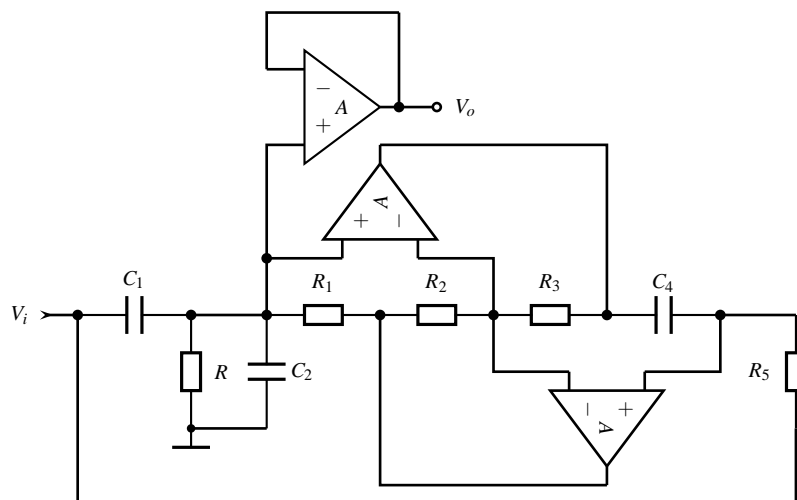
gde notch frekvencija $\omega_z^2 = 1/LC_1$ može imati proizvoljan položaj u odnosu na frekvenciju modula pola $\omega_p^2 = 1/L(C_1 + C_2)$ ($\omega_z > \omega_p$), a Q -faktor pola se može podešavati otpornikom R . Za proračun elemenata filtra koriste se sledeće formule: $C_1 + C_2 = C$, $C_1 = C(\omega_p/\omega_z)^2$, $C_2 = C - C_1$, $R = Q/C/\omega_p$. Induktivnost kalema L se može birati proizvoljno.



Sl. 5.8: Niskofrekvencijski notch filtar zasnovan na LCR rezonatoru.

Na Slici 5.9 prikazan je niskofrekvencijski notch filtar sa Slike 5.8 u kome je kalem zamenjen simuliranom induktivnošću. Operacioni pojačavač, priključen na izlaz notch filtra, je razdvojni stepen da spreči uticaj sledećeg kola na karakteristike notch filtra. Kod kaskadne realizacije filtra propusnika niskih frekvencija i sledeći stepen je notch filtar ili RC član koji

realizuje sekciju prvog reda.



Sl. 5.9: Niskofrekvencijski notch filtar drugog reda u kome je kalem zamenjen simuliranom induktivnošću.

5.2.2 Visokofrekvencijski notch filtar

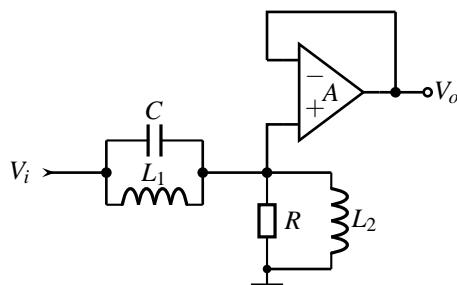
Kod visokofrekvencijskog notch filtra, ili visokofrekvencijskog nepropusnika opsega frekvencija, frekvencija nule ω_z je na nižim frekvencijama u odnosu na frekvenciju modula pola ω_p . Za realizaciju konačnih nula prenosa na imaginarnoj osi koristi se paralelno oscilatorno kolo L_1C , a kondenzator C_2 se zamenjuje sa kalemom L_2 , kao što je prikazano na Slici 5.10. Prenosna funkcija visokofrekvencijskog notch filtra data je izrazom

$$H_{HPN} = \frac{s^2 + \frac{1}{L_1C}}{s^2 + \frac{1}{CR}s + \frac{L_1 + L_2}{L_1L_2C}} \quad (5.18)$$

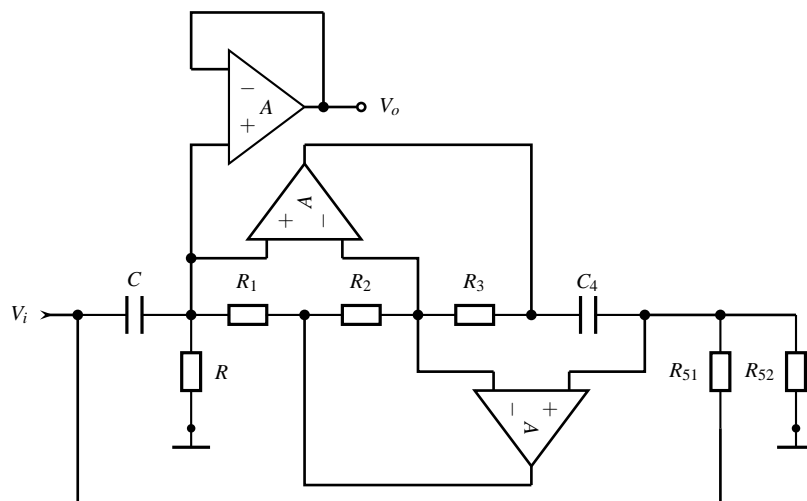
gde notch frekvencija $\omega_z^2 = 1/L_1C$ može imati proizvoljan položaj u odnosu na frekvenciju modula pola $\omega_p^2 = (L_1 + L_2)/L_1L_2C$, ($\omega_z < \omega_p$). Ulazna impedansa generalnog impedansnog konvertora je proizvod impedanse potrošača i neke unutrašnje funkcije. Otpornikom R_{51} može se trimovati induktivnost kalema L_1 , a otpornikom R_{52} može se trimovati induktivnost kalema L_2 . Dakle, frekvencija nule $\omega_z^2 = 1/(L_1C)$ i frekvencija modula pola $\omega_p^2 = (L_1 + L_2)/(L_1L_2C)$ mogu se nezavisno podešavati kalemovima L_1 i L_2 , odnosno otpornicima R_{51} i R_{52} .

Kao i u slučaju niskofrekvencijskog notch filtra, operacioni pojačavač je razdvojni stepen (jedinični pojačavač) koji sprečava da sledeći stepen u kaskadi opterećuje notch filtar.

Na Slici 5.12 prikazana je kaskadna implementacija dvokanalne banke filtera zasnovana na



Sl. 5.10: Visokofrekvencijski notch filtar zasnovan na LCR rezonatoru.

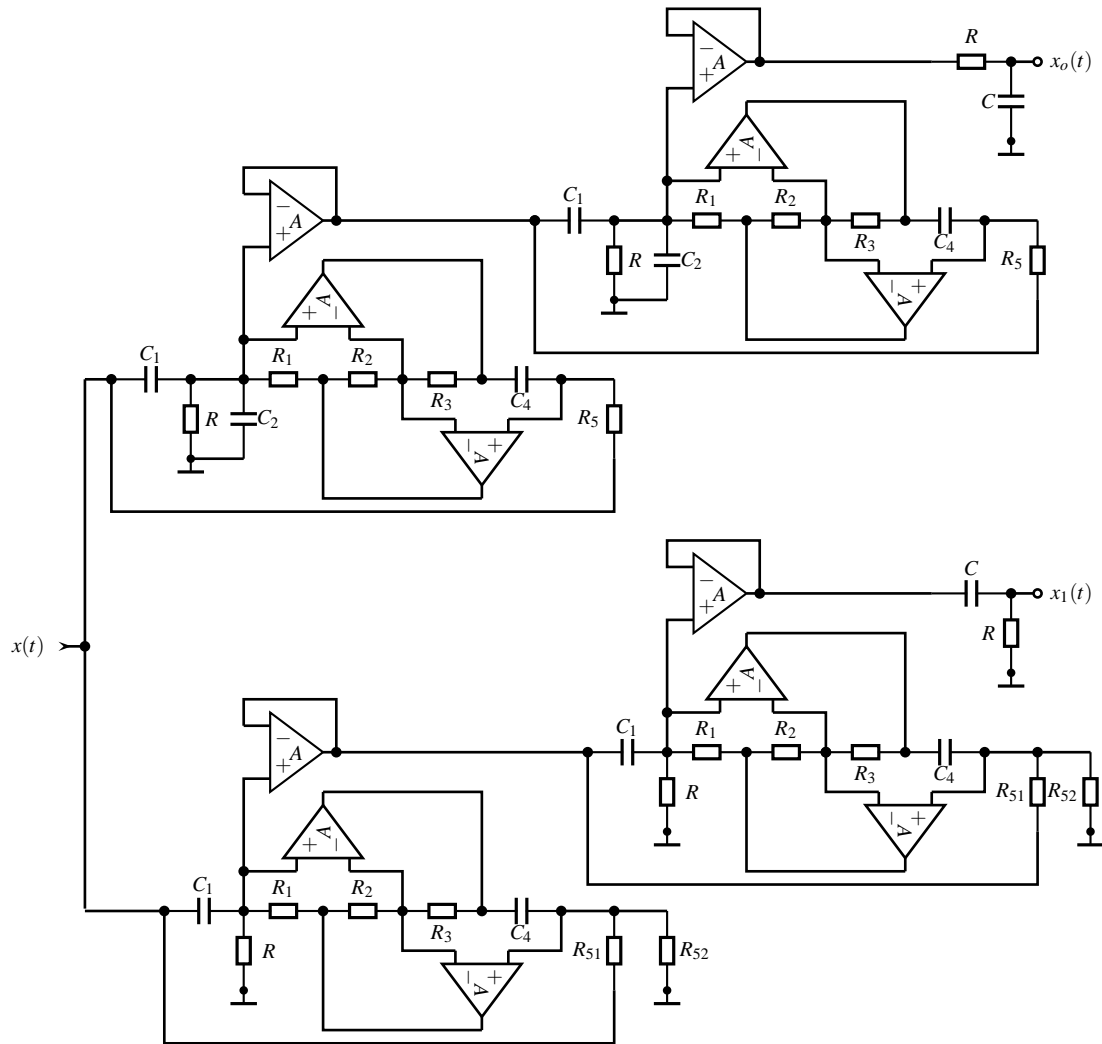


Sl. 5.11: Visokofrekvencijski LCR notch filtar drugog reda u kome je kalem zamenjen sa simuliranom induktivnošću generalnim impedansnim konvertorom.

LCR rezonatorima. Filtar propusnik niskih frekvencija $H_0(s)$ je prenosna funkcija petog reda i realizovana je kao kaskadna sprega dve niskofrekvencijske notch sekcije i jednog jednostavnog niskofrekvencijskog RC člana. Filtar propusnik visokih frekvencija $H_1(s)$ je takođe prenosna funkcija petog reda i realizovana je kaskadna sprega dve visokofrekvencijske notch sekcije i jednog jednostavnog visokofrekvencijskog RC člana.

Ako uporedimo kaskadnu realizaciju i all-pass implementaciju možemo uočiti da all-pass implementacija ima jednu bikvadratnu sekciju manje. Međutim all-pass realizacija ima kolo za sabiranje i kolo za oduzimanje koja ne postoje kod kaskadne realizacije. Pored toga, kaskadna realizacija koristi prosta RC kola za realizaciju realnog pola, a all-pass realizacija ima aktivnu mrežu za realizaciju all-pass sekcije prvog reda.

Sa stanovišta hardvera, prednosti all-pass realizacije su kod realizacije prenosnih funkcija visokog reda. U sledećoj sekciji se razmatra osetljivost prenosne funkcije banke filtera na tolerancije elemenata.



SI. 5.12: Kaskadna LCR realizacija dvokanalne banke filtra petog reda. Gornja grana je filter propusnik niskih frekvencija, dok je donja grana filter propusnik visokih frekvencija.

5.3 Monte Carlo simulacija

Monte Carlo metode su stohastičke (determinističke) simulacione metode, algoritmi koji pomoću slučajnih ili pseudoslučajnih brojeva i velikog broja izračunavanja i ponavljanja predviđaju ponašanje složenih matematičkih sistema.

Numeričke metode, poznate kao Monte Carlo simulacija [91], mogu se slobodno definirati kao statistički simulacioni metodi, kod kojih se upotrebljavaju nizovi slučajnih brojeva za izvršenje simulacije. Monte Carlo simulacija posljednjih nekoliko decenija dobija status potpuno zaokružene numeričke metode sposobne za rešavanje najkompleksnijih zahteva. Monte Carlo simulacije su prvobitno poznate kao "statistička uprošćavanja".

Osnovni koraci u realizaciji Monte Carlo simulacije korišćenjem numeričkog programa za

izračunavanje prenosne funkcije filtra na osnovu elemenata kola su:

1. Generisanje pseudoslučajnih ulaznih promenljivih (elementi filtra). Generisanje nizova slučajnih brojeva je ključni segment Monte Karlo simulacije, čiji rezultati u najvećoj meri zavise od kvaliteta upotrebljenih slučajnih brojeva.
2. Izračunavanje izlaza (output) korišćenjem ulaza (input) kroz zadatu funkciju. Izlaz je frekvencijska karakteristika filtra, ulaz su pseudoslučajne vrednosti elemenata filtra.
3. Ponavljanje izračunavanja mnogo puta.
4. Analiza dobijenih izlaznih veličina.

5.3.1 Generisanje slučajnih brojeva

Stohastičke simulacije i posebno Monte Carlo metode koriste slučajne promenljive. Stoga je neophodno generisanje slučajnih brojeva sa određenom raspodelom. Najveći problem ovde je pronaći brojeve koji su zaista slučajni tj. ne mogu se predvideti. Slučajni brojevi za Monte Carlo simulacije obično su generisani putem numeričkih algoritama. Oni deterministički stvaraju niz brojeva, pa ih zato često zovemo pseudoslučajni brojevi. Međutim, ako ih posmatramo bez uvida u algoritam koji ih stvara, imamo utisak da su slučajni.

Normalna (ili Gausova) raspodela sa parametrima μ i σ definiše se gustinom raspodele

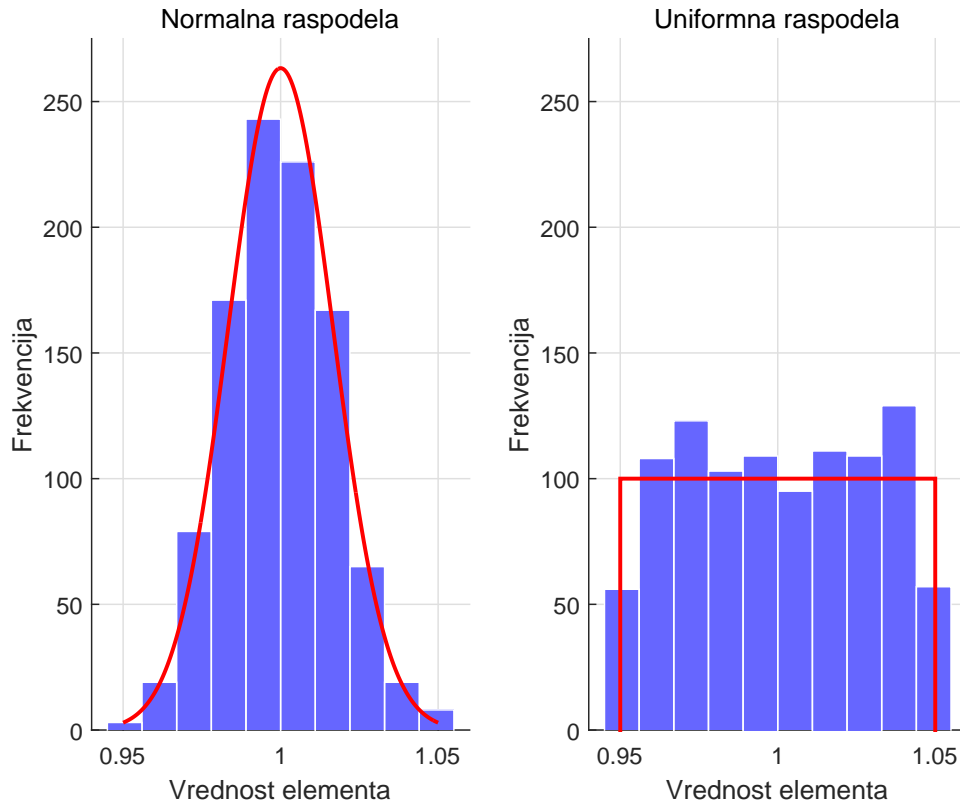
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ za } -\infty < x < \infty \quad (5.19)$$

gde je μ matematičko očekivanje, dok je σ standardna devijacija. U praktičnoj primeni, μ je nazivna vrednost elementa dok se standardna devijacija određuje na osnovu usvojene tolerancija elementa. Većina vrednosti normalno distribuirane slučajne promenljive x , oko 99,73002039367%, pada unutar ranga od tri standardne devijacije od očekivane vrednosti μ . Ovo se nekada naziva pravilo 3-sigme. Dakle, standardna devijacija se izračunava jednostavno $\sigma = tol/3$. **MATLAB**[®] funkcija za generisanje pseudo slučajnih normalno raspodeljenih brojeva je `randn`. Neka je tolerancija elementa $tol = 5\%$, a matematičko očekivanje μ . Za generisanje pseudo slučajnih vrednosti elemenata x koristi se sledeća formula

$$x = \mu \left(1 + \text{randn} \frac{tol}{3 \times 100} \right) \quad (5.20)$$

gde je $randn$ element skupa $(-3, 3)$ slučajnih brojeva koji imaju Normalnu raspodelu (5.19) sa $\mu = 0$ i $\sigma = 1$.

Na slici 5.13 levo prikazan je histogram Normalne raspodele vrednosti jednog elementa filtra. Normalizovana nazivna vrednost elementa je $\mu = 1$, tolerancija je $tol = \pm 5\%$ odnosno $\sigma = 0.01667$, generisano je 1000 pseudo slučajnih vrednosti.



Sl. 5.13: Histogram Normalne raspodele za nominalnu vrednost elementa $\mu = 1$ i tolerancije $tol = 0.05$ (levo) i histogram Uniformne raspodele (desno) za 1000 slučajno generisanih elemenata filtra.

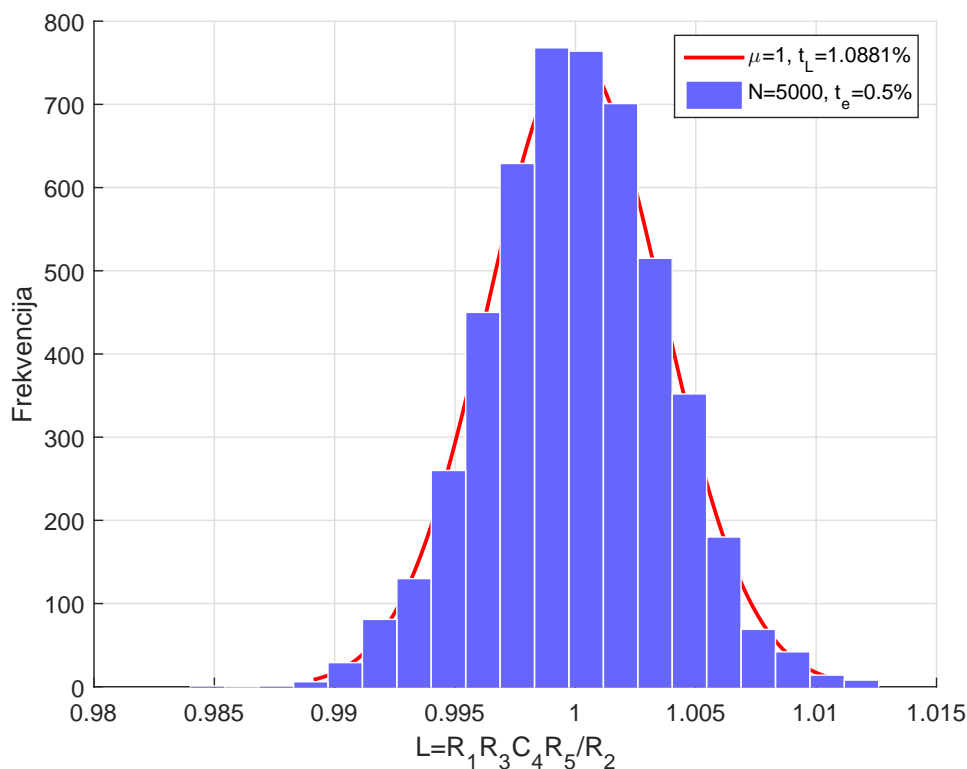
Radi poređenja na Slici 5.13 prikazan je histogram Uniformne raspodele. Slučajna promenljiva x ima Uniformnu raspodelu ako je gustina verovatnoće data izrazom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha < x < \beta \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima} \end{cases} \quad (5.21)$$

gde je matematičko očekivanje $\mu = (\alpha + \beta)/2$, standardna devijacija $\sigma = (\beta - \alpha)/\sqrt{2}$. Matlab funkcija za generisanje slučajnih brojeva je `rand` koja generiše slučajne brojeve u otvorenom intervalu od 0 do 1. Za generisanje slučajne vrednosti elementa x po Uniformnoj raspodeli koristi se formula

$$x = \mu \left[1 + (2 \times \text{rand} - 1) \frac{\text{tol}}{100} \right] \quad (5.22)$$

gde je rand element skupa $(0, 1]$ slučajnih brojeva koji imaju Uniformnu raspodelu, dok je $(2 \times \text{rand} - 1)$ slučajni broj iz skupa $(-1, 1]$. Ukoliko su vrednosti elemenata raspodeljene po Uniformnoj raspodeli sa $\pm 5\%$ tolerancijom standardna devijacija je $\sigma = 0.0289$ što je znatno više nego u slučaju Normalne raspodele. Uniformna raspodela elemenata filtra daje veće odstupanje karakteristike filtra od nominalne vrednosti, nego u slučaju da se koristi Normalna raspodela. Međutim, poznato je da su vrednosti elemenata (otpornici i kondenzatori) raspodeljene po Normalnoj raspodeli te će ona biti i usvojena za statističku analizu filtera. U slučajevima kada je raspodela vrednosti elementa kola nepoznata treba primeniti Uniformnu raspodelu.



Sl. 5.14: Histogram induktivnosti integrisanog kalema.

Pošto se za realizaciju bikvadratnih sekcija koriste LCR rezonatori, kod kojih se za realizaciju kalema koristi generalni impedansni konvertor, to je od praktičnog interesa odrediti toleranciju induktivnosti kalema ako su poznate tolerancije otpornika i kondenzatora koji ulaze u sastav impedansnog konvertora. Na Slici 5.14 prikazan je histogram induktivnosti integrisanog

kalema. Pretpostavlja se da ne postoji statistička povezanost (korelacija) u skupu otpornika i skupu kondenzatora. Tolerancija otpornosti otpornika i kapaciteta kondenzatora je 0.5%, a broj ponavljanja je 5000.

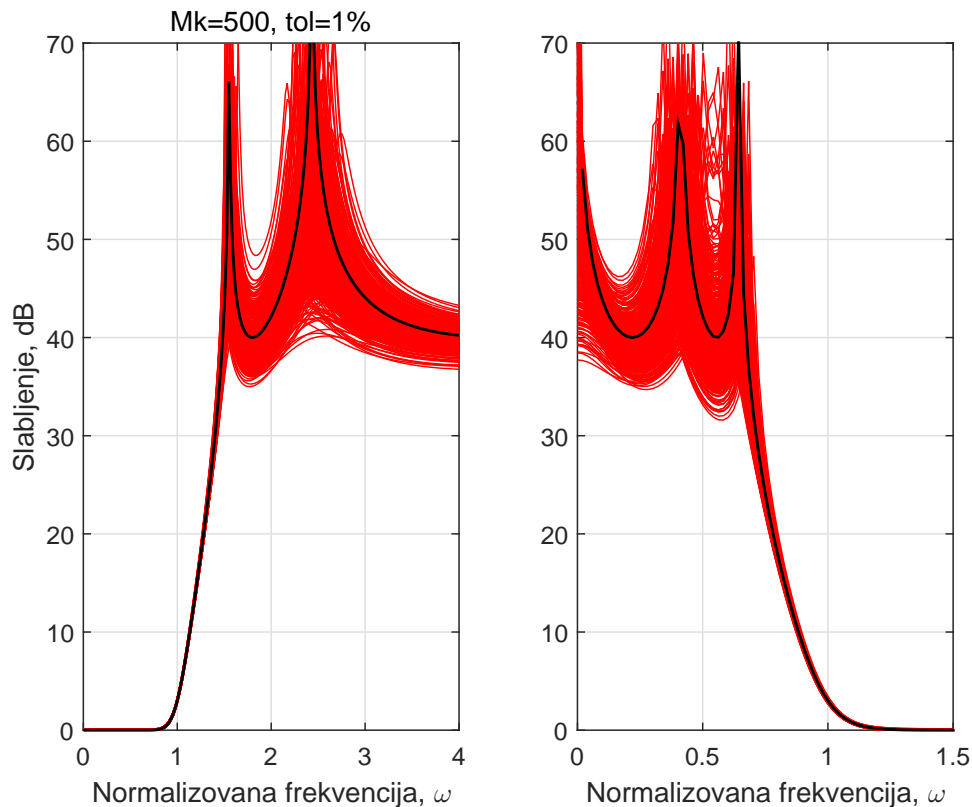
Da bi se izveli određeni zaključci o raspodeli induktivnosti kalema (generalni impedansni konvertor) koriste se parametri koji ukazuju na centar grupisanja induktivnosti kalema. Za merenje oblika distribucije koriste se koeficijent asimetrije (skewness) α_3 i koeficijent zaobljenosti (krutosis) α_4 . Koeficijent asimetrije normalne distribucije je 0. Ukoliko je koeficijent asimetrije između 0 i 0.5 može se smatrati da je distribucija približno simetrična. Koeficijent zaobljenosti normalne distribucije je 3. Parametri distribucije prikazane na Slici 5.14, dobijeni statistički izračunavanjima, su

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i = 1.0001125, \\ \sigma &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (L_i - \mu)^2} = 0.0037227, \\ \alpha_3 &= \frac{\sum_{i=1}^N (L_i - \mu)^3}{(N-1)\sigma^3} = 0.0182278 < 0.5, \\ \alpha_4 &= \frac{\sum_{i=1}^N (L_i - \mu)^4}{(N-1)\sigma^4} = 2.9678104 \simeq 3.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Može se zaključiti da je induktivnost integrisanog kalema normalno raspodeljena sa tolerancijom $tol = 1.1144\%$, što je više nego dva puta veća od tolerancije elemenata koji ulaze u sastav integrisane induktivnosti. Pogodno je iskoristiti otpornik R_5 za trimovanje induktivnosti kalema da bi se dobila željena tolerancija.

5.3.2 Monte Carlo simulacija banke filtara

Monte Carlo simulacija je sprovedena na all-pass realizaciji filtra petog reda prikazanog na Slici 5.7 na strani 82. Prenosne funkcije all-pass sekcija $A_1(s)$ i $A_2(s)$ date su jednačinama (5.15) i (5.16), respektivno. Listing MATLAB[®] programa kojim je izvršena Monte Carlo analiza prikazan je u Prilogu C. Sastoji se iz jedne petlje i dva prolaza kroz petlju. U svakoj petlji se realizuje zadat broj Monte Carlo ponavljanja. U prvom prolazu se simulira filter propusnik niskih frekvencija, a u drugom prolazu, filter propusnik visokih frekvencija. Crtan je frekvencijski odziv karakteristika slabljenja u svakom ponavljanju, a rezultat je na kraju simulacije i prikazan.

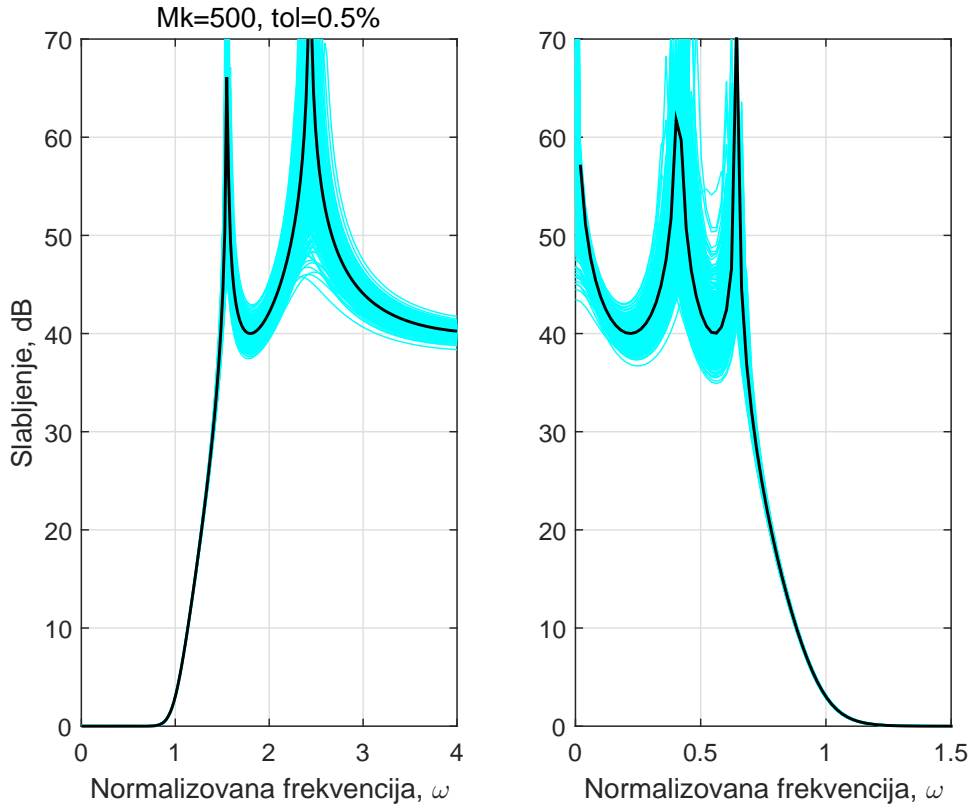


Sl. 5.15: Monte Carlo analiza karakteristike slabljenja hibridne banke filtara realizovane all-pass filtrima.

Realizacija all-pass sekcija je veoma jednostavna. Električne šeme svih all-pass sekcija su iste. Svi polovi filtra imaju isti moduo tako da je vrednost kapacitivnosti C i induktivnost kalema L (realizacija generalnog impedansnog konvertora) jednaka za sve sekcije bez obzira na red filtra. Otpornikom R se realizuje Q -faktor pola bez uticaja na moduo pola. Implementacija obuhvata kolo za sabiranje, koje koristi invertujući ulaz operacionog pojačavača, i kolo za oduzimanje napona koje koristi oba ulaza operacionog pojačavača. Pošto kolo za sabiranje unosi fazni pomeraj od 180° stepeni, to će i banka filtara unositi fazni pomeraj od 180° . Pretpostavlja se da su operacioni pojačavači idealni.

Izvršene su dve simulacije analogne dvokanalne banke filtra tako što su simulirane slučajne vrednosti elemenata pojedinih all-pass sekcija, a zatim je izračunat frekvencijski odziv filtra tako što su sabirane, odnosno oduzimanje, prenosne funkcije all-pass sekcija, a zatim je rezultat deljen sa dva, kao što je prikazano na Slici 5.13. Broj Monte Carlo ponavljanja je 500 za obe simulacije. U prvoj simulaciji upotrebljeni su otpornici i kondenzatori iz serije E96 (1% tolerancije), a za drugu simulaciju upotrebljeni su elementi iz serije E192 (0.5% tolerancija).

Na Slici 5.15 prikazani su rezultati prve simulacije. Može se zaključiti da je uticaj tolerancije elemenata u propusnom opsegu relativno mali dok je u nepropusnom opsegu jako



Sl. 5.16: Monte Carlo analiza karakteristike slabljenja hibridne banke filtara realizovane all-pass filtrima.

izražen. Smanjivanjem tolerancije elementa na 0.5% uticaj tolerancije elemenata na slabljenje filtra u nepropusnom opsegu je i dalje značajan. Ako uporedimo propusnik niskih frekvencija sa propusnikom visokih frekvencija može se uočiti da tolerancije elemenata imaju veći uticaj na nepropusni opseg filtra propusnika visokih frekvencija.

Od praktičnog interesa je razmotriti uticaj fazne karakteristike all-pass filtara na karakteristiku slabljenja banke filtara. Na realnim frekvencijama $s = j\omega$ prenosne funkcije all-pass filtara mogu se napisati u sledećem obliku $A_1(j\omega) = e^{j\phi_1(\omega)}$ i $A_2(j\omega) = e^{j\phi_2(\omega)}$. Zamenom ovih vrednosti u jednačinu (3.17) na strani 40, dobijaju se² prenosne funkcije dvokanalne hibridne banke filtara na realnim frekvencijama.

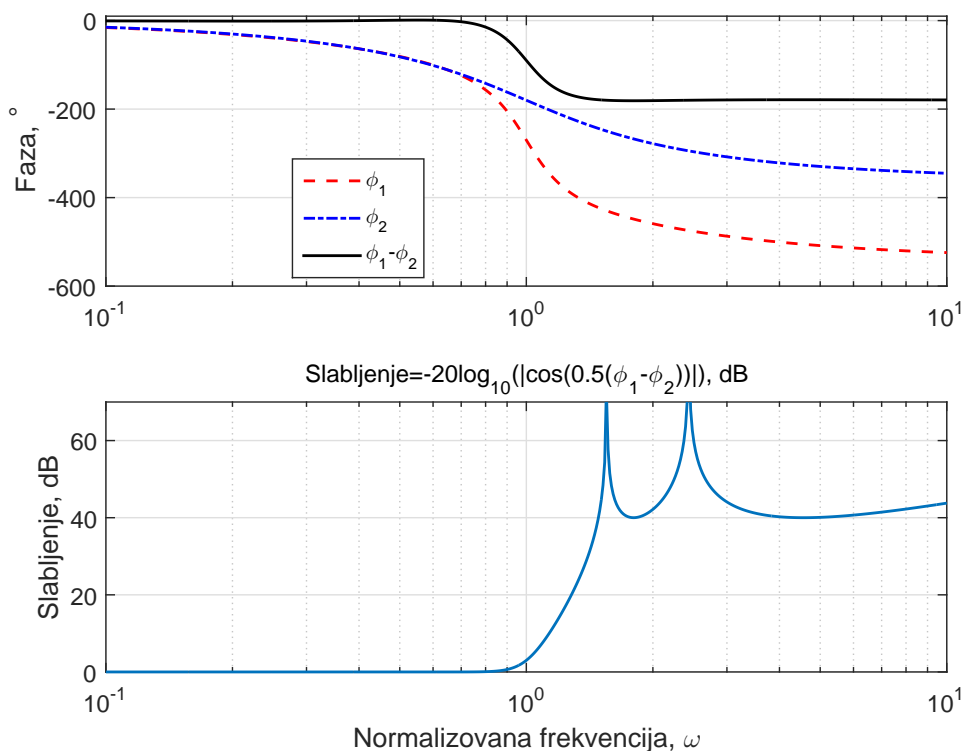
²Jednačine (5.25) mogu se lako izvesti primenom Eulerove formule

$$\begin{aligned}
 H_{0,1}(j\omega) &= \frac{1}{2}(e^{j\phi_1(\omega)} \pm e^{j\phi_2(\omega)}) \\
 &= \frac{1}{2}e^{j\frac{\phi_1(\omega)}{2}}e^{j\frac{\phi_2(\omega)}{2}} \left[e^{j(\frac{\phi_1(\omega)}{2} - \frac{\phi_2(\omega)}{2})} \pm e^{j(-\frac{\phi_1(\omega)}{2} + \frac{\phi_2(\omega)}{2})} \right] \\
 &= e^{j\frac{\phi_1(\omega) + \phi_2(\omega)}{2}} \frac{1}{2} \left[e^{j\frac{\phi_1(\omega) - \phi_2(\omega)}{2}} \pm e^{-j\frac{\phi_1(\omega) - \phi_2(\omega)}{2}} \right]
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Znak + se odnosi na propusnik niskih frekvencija $H_0(j\omega)$, znak – na propusnik visokih frekvencija $H_1(j\omega)$. Iz poslednje jednačine slede jednačine (5.25)

$$\begin{aligned}
 H_0(j\omega) &= e^{j\frac{\phi_1(\omega)+\phi_2(\omega)}{2}} \cos \frac{\phi_1(\omega) - \phi_2(\omega)}{2} \\
 H_1(j\omega) &= je^{j\frac{\phi_1(\omega)+\phi_2(\omega)}{2}} \sin \frac{\phi_1(\omega) - \phi_2(\omega)}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{5.25}$$

Slabljenje filtra propusnika niskih frekvencija u dB iznosi $a_0(\omega) = -20\log_{10}(\cos \frac{\Delta\phi}{2})$, gde je $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$. Na Sici 5.17 (gore) prikazane su fazne karakteristike all-pass filtera $\phi_1(\omega)$ i $\phi_2(\omega)$ (gore) i karakteristika slabljenja filtra propusnika niskih frekvencija $a_0(\omega)$ na istoj slici (dole).



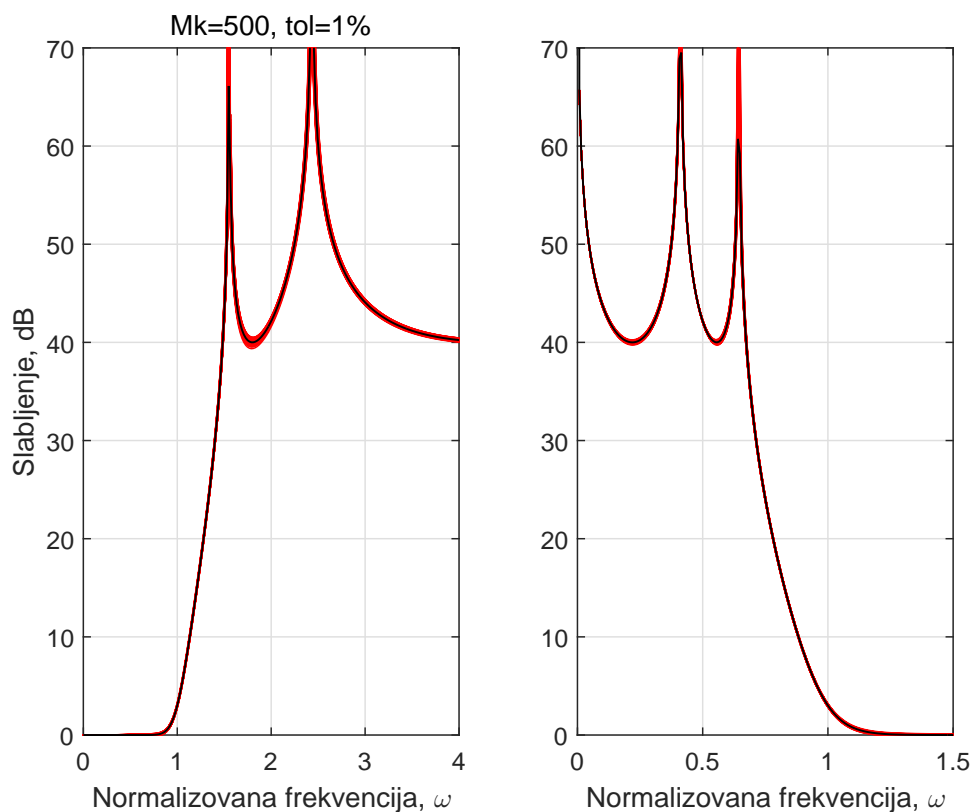
Sl. 5.17: Fazne karakteristike all-pass filtera (gore) i karakteristika slabljenja filtra propusnika niskih frekvencija (dole).

Na graničnoj frekvenciji nepropusnog opsega $\omega_s = 1.484005608648294$ fazna razlika dostiže vrednost $\Delta\phi = -178.8540653103515^\circ$, i slabljenje od 40.000000000498652 dB. Povećanje fazne razlike usled tolerancije elemenata samo za jedan stepen povećava slabljenje na granici nepropusnog opsega na vrednost $a_1 = 57.8998841282507$ dB, za blizu 18 dB. S druge strane, smanjenje fazne razlike za jedan stepen smanjuje slabljenje na granici nepropusnog opsega na vrednost $a_2 = 34.551230241695$ dB za nešto više od 5 dB.

Međutim, na graničnoj frekvenciji propusnog opsega gde slabljenje iznosi 3 dB fazna razlika je $\Delta\phi = 89.863952919881314^\circ$. Povećanje fazne razlike za jedan stepen povećava

slabljenje na granici propusnog opsega na vrednost $a_1 = 3.076282683130855$ dB, dok smanjenje fazne razlike za jedan stepen smanjuje slabljenje na granici propusnog opsega na vrednost $a_1 = 2.925037186458765$ dB. Promena slabljenja na granici propusnog opsega je manja od ± 0.1 dB kada se fazna razlika promeni za $\pm 1^\circ$. Kao što je prikazano na Slici 4.9, na strani 73, osetljivost karakteristike grupnog kašnjenja, a samim time i osetljivost fazne karakteristike, je proporcionalna sa kvadratom Q -faktora pola, dok je osetljivost amplitudske karakteristike filtra proporcionalno sa Q -faktorom pola [19]. Sa povećanjem reda filtra, raste Q -faktor pola, pa će i osetljivost karakteristika filtra u odnosu na elemente filtra značajno porasti.

Na Slici 5.18 prikazani su rezultati Monte Carlo simulacije kaskadne realizacija dvostruko komplementarne banke filtera prikazane na Slici 5.12 na strani 86. Da bi poređenje bilo korektno, banka filtera se kaskadno realizuje LCR notch filterima. Elementi filtra su iz serije E96, odnosno sa 1% tolerancije. Kao u slučaju all-pass realizacija razmatrana je karakteristika slabljenja.



Sl. 5.18: Monte Carlo simulacija karakteristike slabljenja kaskadno realizovane hibridne banke filtera.

Slika 5.18 pokazuje da je kaskadna realizacija veoma malo osetljiva na tolerancije elementa u nepropusnom opsegu. Naknadno trimovanje nije potrebno. Pošto je osetljivost amplitudske karakteristike srazmerna sa Q -faktorom pola, to se i sa povećanjem reda filtra slabljenje

može održati u propisanim granicama. Sledeći stepeni, koji se vezuju na izlaze, kako na filter propusnika niskih frekvencija tako i na filter propusnik visokih frekvencija, mora da imaju veliku ulaznu impedansu.

5.4 Zaključak

U ovoj glavi je razmatrana realizacija analogne dvokanalne dvostruko komplementarne hibridne banke filtera. Prikazani su rezultati Monte Carlo simulacije primenjene na all-pass i kaskadnu realizaciju analognog dela hibridne banke filtera.

1. Usvojena je realizacija sa LCR rezonatorima koja ima malu relativnu osetljivost modula pola i Q -faktora pola na tolerancije elemenata.
2. All-pass i kaskadna realizacija imaju malu osetljivost u propusnom opsegu dok kaskadna realizacija je znatno bolja u nepropusnom opsegu. Karakteristike analogne all-pass realizacije nisu atraktivne kao u slučaju digitalne realizacije.
3. Dvostruko komplementarnu banku filtera treba primeniti u digitalnom delu hibridne banke filtera, dok se za analogi deo može usvojiti Jacobijev filter opisan u prvoj glavi.

6

Zaključak

U DOKTORSKOJ disertaciji prikazani su rezultati istraživanja sprovedenog u pogledu projektovanja dvokanalne hibridne banke filtera, koju čine banka analize i banka sinteze. Hibridna banka filtera se može realizovati na dva načina. Prvi način je da banka analize bude analogna, a banka sinteze digitalna. Tipičan primer ovakve banke filtera je brzi analogno-digitalni konvertor. Drugi način je suprotan prvom načinu, banka analize je digitalna, a banka sinteze je analogna. Tipičan primer ovakve banke filtera je brzi digitalno-analogni konvertor.

Prvi način ima daleko veću primenu i u istraživanjima njemu je posvećena posebna pažnja. Analogna banka analize, poznata i kao mreža sa tri pristupa, pored primene kod brzih analogno-digitalnih konvertora, koristi se i za efikasno izdvajanje informacija iz senzorskih signala, a posebno tamo gde je energija signala dominantno koncentrisana u pojedinim frekvencijskim opsezima. Pored toga, analogna banka filtera se primenjuje i tamo gde je potrošnja energije ograničena, ili u mikrotalasnoj tehnici gde digitalna banka filtera nije pogodna za primenu. Za realizaciju filtera u mikrotalasnoj tehnici predlaže se aproksimacija Chebyshevljevim ili Legendreovim lančanim funkcijama [77].

U disertaciji su detaljno prikazani rezultati istraživanja koja se odnose na aproksimaciju nove klase filtera zasnovane na ortogonalnim Jacobijevim polinomima, nove dvostruko komplementarne analogne banke filtera i dizajn korektora grupnog kašnjenja sa zaravnjenom karakteristikom konstantnog grupnog kašnjenja. U disertaciji je razmatran i jedan bitan aspekt projektovanja banke filtera koji je od značaja za njihovu implementaciju i eksperimentalnu verifikaciju odziva u ustaljenom stanju, a to je analiza uticaja tolerancije elemenata filtra primenom Monte Carlo simulacije. U tu svrhu je priložen MATLAB[®] skript simulacije.

6.1 Naučni doprinosi disertacije

Iz dobijenih i verifikovanih rezultata objavljenih u relevantnim naučnim časopisima, saopštenim na međunarodnim i domaćim konferencijama mogu se odrediti naučni doprinosi doktorske disertacije, a to su:

1. Predložena je nova klasa filtara zasnovana na Jacobijevim polinomima. Poznato je da se Jacobijevi polinomi ne mogu direktno primeniti za sintezu filtarskih funkcija. Jednostavnom modifikacijom generisani su Pseudo-Jacobijevi polinomi pogodni za sintezu filtarskih funkcija. Ortogonalni polinomi koji se najčešće koriste za sintezu filtarskih funkcija (Chebyshevljevi, Legendreovi i Gegenbauerovi) su specijalni slučajevi Pseudo Jacobijevih polinoma kada parametri Jacobijevih polinoma imaju istu vrednost. Kada se jedan parametar Pseudo Jacobijevih polinoma zadržava konstantnim, a drugi parametar menja, dobijaju se prelazni filtri.
2. Na osnovu poznatih rezultata, koji se odnose na digitalnu dvostruko komplementarnu banku filtara, razmatrane su teorijske pretpostavke koje se odnose na aproksimaciju analogne dvostruko komplementarne banke filtara. Dokazano je da polovi dvostruko komplementarne banke filtara leže na krugu, a nule na imaginarnoj osi, u ravni kompleksne promenljive. Propusni opseg filtra je geometrijska sredina nule filtra propusnika niskih frekvencija i odgovarajuće nule filtra propusnika visokih frekvencija. Predložena je klasa dvostruko komplementarne banke filtara sa višestrukom nulom i sa proizvoljnim brojem prostih nula na realnim frekvencijama.
3. Umesto poznate mini-max korekcije grupnog kašnjenja analognih filtara, predložen je novi koncept koji čini grupno kašnjenje filtra konstantnim u smislu određenog broja zaravnjenja u koordinatnom početku. Nelinearne jednačine, na osnovu kojih se određuju elementi faznih korektora, dobijaju se direktno iz uslova maksimalno ravne karakteristike grupnog kašnjenja. Rešenje se dobija rešavanjem samo jednog sistema nelinearnih jednačina i to samo jednom, za razliku od mini-max aproksimacije koja formira petlju radi izračunavanja ekstremalnih vrednosti grupnog kašnjenja.
4. Pokazano je da osetljivost grupnog kašnjenja zavisi od kvadrata Q -faktora pola, za razliku od osetljivosti amplitudske karakteristike koja zavisi od Q -faktora pola. Zbog toga je

potrebno, za implementaciju banke filtra zasnovane sa all-pass filtrima, koristiti gradivne blokove čije su karakteristike malo osetljive na promene elemenata.

5. Pasivna LC realizacija je malo osetljiva na promene elemenata, ali je ona efikasna samo za realizaciju prenosnih funkcija minimalne faze. U slučaju realizacije all-pass filtera, čija je prenosna funkcija maksimalne faze, potrebno je koristiti ukrštene četvoropole ili premošćene T-mreže. Zamena kalemova integrisanim induktivnostima u ovakvim mrežama je praktično nemoguća. Za implementaciju dvostruko komplementarne banke filtera predložena je bikvadratna sekcija sa LCR rezonatorima u kojoj je kalem zamenjen simuliranom induktivnošću generalnim konvertorom impedanse.

Upoređene su dve realizacije dvokanalne analogne banke filtera. Prva se odnosi na primenu all-pass filtera, a druga je standardna kaskadna realizacija. Monte Carlo simulacija je pokazala da su obe realizacije malo osetljive na promene elemenata LCR rezonatora u propusnom opsegu dok u nepropusnom opsegu kaskadna realizacija ima znatno bolje karakteristike. Velika osetljivost fazne karakteristike all-pass filtera čini da odstupanje amplitudske karakteristike od nominalne vrednosti u nepropusnom opsegu bude veliko i značajno raste sa porastom stepena filtra.

6. Dvostruko komplementarana banka filtera se može iskoristiti za realizaciju digitalnog dela dvokanalne banke filtera, pogodnim izborom dužine digitalne reči.

6.2 Pravci budućih istraživanja

Novi metod projektovanja analogne banke filtera, kao naučni doprinos ove disertacije, stvorio je niz novih mogućnosti kada je u pitanju razvoj hibridne banke filtera. U toku samog istraživanja, prepoznati su brojni načini dalje primene metoda, u smislu unapređivanja projektovanja hibridne banke filtera, kao i njihovog prilagođavanja različitim frekvencijskim opsezima. Neke od prepoznatih mogućnosti daljeg istraživanja u oblasti hibridne banke filtera su:

Realizacija digitalne banke filtera za sintezu treba da bude takva da se "podudara" što je više moguće sa bankom analognih filtera za analizu, odnosno minimizacija distorzija amplitude i izobličenja koja nastaju usled preklapanja spektra. Optimizacija analognih i digitalnih filtera se vrši nezavisno, početno rešenje zasniva se na analognim filtrima koji imaju nominalne karakteristike.

Realna hibridna banka filtara ima niz nedostataka, različite prenosne funkcije analogne banke analize i digitalne banke sinteze, ofset, pojačanje, tolerancije elemenata, itd. Navedeni nedostaci analogne banke analize degradiraju karakteristike celokupne hibridne banke filtara. Ovo će zahtevati da kalibracija bude u stanju da identifikuje ove nedostatke kako bi ublažio njihov uticaj na podešavanje digitalne banke sinteze. Poželjno je da se proces kalibracije može uraditi na hibridnoj banci primenom adaptivnog algoritma.

Primenu analogne dvokanalne hibridne banke filtara zasnovane na all-pass filtrima ograničava velika osetljivost all-pass filtara na promene elemenata u nepropusnom opsegu. Kao što je poznato, najmanju osetljivost na promene elemenata ima lestvičasta pasivna LC realizacija. Jedan od pravaca narednih istraživanja je realizacija all-pass filtara rešetkastom mrežom sa dva pristupa, u cilju smanjenja osetljivosti hibridne banke filtara u nepropusnom opsegu.

Realizacija hibridne banke filtara parnog stepena je dugoročan pravac istraživanja jer pored realizacije all-pass filtara neparnog reda zahteva i all-pass realizaciju digitalnih filtara parnog reda.

Realizacija hibridne banke filtara na VHDL platformi i ispitivanje primene predloženih filtara u drugim frekvencijskim opsezima, primenom različitih implementacija analogne banke filtara i skaliranjem dimenzija komponenata, u cilju prilagođavanja sistemima u kojima mogu naći primenu.

Prilog A

MATLAB funkcija JacobiPoly

LISTING MATLAB[®] funkcije JacobiPoly QMFButtEllip za izračunavanje koeficijenata ortogonalnog Jacobijevog polinoma. Ako jedan parametar nije specificiran JacobiPoly(n, a) vraća koeficijente Gegenbauerovog polinoma. Ako oba parametra nisu specificirana JacobyPoly(n) vraća koeficijente Legendreovog polinoma.

```
JacobyPoly.m
```

```
function P=JacobiPoly(n,a,b)
% Coefficients P of the Jacobi polynomial
% They are stored in decending order of powers
if nargin == 1,
    a=0; b=0;
elseif nargin == 2,
    b=a;
end
p0 = 1;
p1 = [(a+b)/2+1,(a-b)/2];
if n == 0,
    P=p0;
elseif n == 1,
    P=p1;
else
    for k=2:n,
        d=2*k*(k+a+b)*(2*k-2+a+b);
        A=(2*k+a+b-1)*(2*k+a+b-2)*(2*k+a+b)/d;
        B=(2*k+a+b-1)*(a^2-b^2)/d;
        C=2*(k-1+a)*(k-1+b)*(2*k+a+b)/d;
```

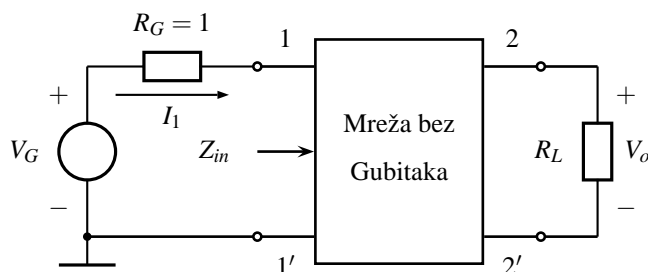


```
    P=conv([A B],p1)-C*[0,0,p0];  
    p0 = p1;  
    p1 = P;  
end  
end  
end
```

Prilog B

Pasivna lestvičasta LC realizacija Jacobijevih filtara

DARLINGTONOVA procedura sinteze pasivnih LC mreža počinje određivanjem koeficijenta refleksije na ulaznim krajevima pasivne LC mreže iz poznate prenosne funkcije filtra. Na Slici B.1 prikazana je blok šema pasivnog filtra bez gubitaka; mreža sa dva pristupa zatvorena otpornicima R_G i R_L .



Sl. B.1: Blok šema pasivnog filtra.

Koeficijent refleksije $\Gamma_{11}(j\omega)$ na ulaznim krajevima filtra određuje se iz uslova da je mreža bez gubitaka $P_L(\omega) = P_{max}(\omega)$

$$|\Gamma_{11}(j\omega)|^2 = 1 - |H(j\omega)|^2 \quad (\text{B.1})$$

gde je

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{P_L(\omega)}{P_{max}(\omega)} = \frac{4R_G}{R_L} \left| \frac{V_O(\omega)}{V_G(\omega)} \right|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \phi_n^2(\omega)} \quad (\text{B.2})$$

prenosna funkcija filtra koju određuje odnos snage na potrošaču, $P_L(\omega)$, i maksimalne snage

koju prima pasivna mreža $P_{max}(\omega)$. Otpornost generatora, R_G , uzima se za referentnu otpornost.

Koeficijent refleksije na ulazim krajevima $\Gamma_{11}(j\omega)$ je u relaciji sa ulaznom impedansom pasivne mreže [38]

$$\Gamma_{11}(j\omega) = \pm \frac{R_G - Z_{in}(j\omega)}{R_G + Z_{in}(j\omega)}. \quad (\text{B.3})$$

Polovi i nule koeficijenta refleksije u s -ravni $\Gamma_{11}(s)$ se određuju tako što se najpre izvrši analitičko produženje modula koeficijenta refleksije $|\Gamma_{11}(j\omega)|_{s=-j\omega}^2$ na celu kompleksnu ravan smenom $\omega = -js$, a zatim se selekcijom polova i nula koji se nalaze u levoj poluravni, kompleksne s ravni, formira koeficijent refleksije minimalne faze $\Gamma_{11}(s)$. Konačno, ulazna impedansa pasivne LC mreže je

$$Z_{in}(s) = R_G \frac{1 \pm \Gamma_{11}(s)}{1 \mp \Gamma_{11}(s)}. \quad (\text{B.4})$$

Realizacije (B.4) sa predznacima $+$ u brojiocu i $-$ u imeniocu ili $-$ u brojiocu i $+$ u imeniocu rezultuju dualnim mrežama. Dovoljno je posmatrati jedan od ova dva slučaja. Vrednosti elemenata određuje se razvojem ulazne impedanse $Z_{in}(s)$, ili ulazne admitanse $Y_{in}(s)$, u verižni razlomak usvajanjem da je $R_G = 1$.

$$Y_{in}(s) = \frac{1}{Z_{in}(s)} = g_1s + \frac{1}{g_2s + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{g_ns + g_{n+1}}}}. \quad (\text{B.5})$$

Može se uočiti da je prvi element kondenzator što znači da sinteza LC lestvičaste mreže počinje sa ekstrakcijom nule ulazne impedanse u beskonačnosti. Na ovaj način se realizuje mreža sa minimalnim brojem kalemova.

Za n neparno, g_n je kalem a g_{n+1} otpornost potrošača R_L , međutim za n parno, g_n je kondenzator a g_{n+1} je provodnost potrošača $1/R_L$. Za parne redove filtra otpornost potrošača g_{n+1} se može proveriti izračunavanjem R_L primenom sledeće formule

$$R_L = 1 + 2\rho^2 - 2\rho\sqrt{1 + \rho^2} \quad (\text{B.6})$$

gde je $\rho = \varepsilon\phi_n(0)$, a $\phi_n(0)$ je vrednost karakteristične funkcije u koordinatnom početku.

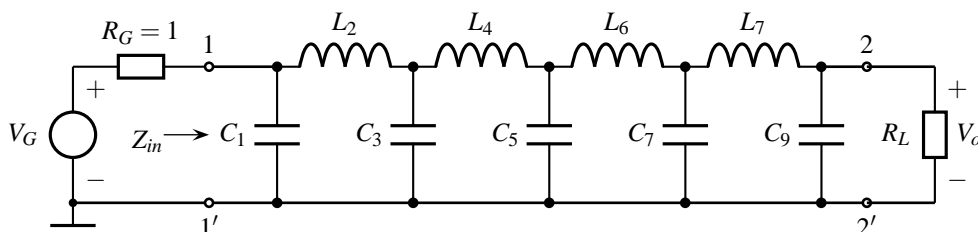
U Tabeli B.1 prikazane su vrednosti elemenata za približno monotone Pseudo-Jacobijeve

Tab. B.1: Vrednosti elemenata lestvičaste LC mreže za približno monotone Jacobijeve filtre. $R_L = g_{n+1}$

n	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}
3	1.18267	1.81988	1.18267	1.0							
4	1.01256	1.80722	1.85024	0.989017	1.02381						
5	0.904546	1.74688	1.93123	1.74688	0.904546	1.0					
6	0.829285	1.68628	1.92344	1.90686	1.70094	0.822136	1.0087				
7	0.773411	1.63216	1.8994	1.94175	1.8994	1.63216	0.773411	1.0			
8	0.730001	1.58481	1.87312	1.94489	1.95286	1.86547	1.59131	0.727021	1.0041		
9	0.695108	1.54335	1.84788	1.93828	1.96683	1.93828	1.84788	1.54335	0.695108	1.0	
10	0.666315	1.5068	1.82441	1.92844	1.96796	1.96354	1.93277	1.82032	1.51019	0.664821	1.00225

filtre; $\alpha = -0.5$ i $\beta = 1.5$. Realizacija za neparne redove filtra je simetrična $g_1 = g_n$, $g_2 = g_{n-1}$, itd. Treba uočiti da je u tom slučaju $R_L = g_{n+1} = 1$. Za proračun komponenata filtra koristi se programski paket MATLAB[®], koji nije unosiо numeričke greške do desetog reda filtra. Naime, simetrične komponente su jednake do petnaeste decimalne.

Na Slici B.2 prikazana je lestvičasta realizacija približno monotonog filtra devetog reda za $\alpha = -0.5$ i $\beta = 1.5$.



Sl. B.2: Pasivna lestvičasta LC realizacija Pseudo-Jacobijevog filtra devetog reda. Mreža je simetrična i recipročna. Vrednosti elemenata su: $C_1 = C_9 = 0.695108$, $L_2 = L_8 = 1.54335$, $C_3 = C_7 = 1.84788$, $L_4 = L_6 = 1.93828$ i $C_5 = 1.96683$. Otpornost potrošača je $R_L = 1$ jer je mreža neparna.

Prilog C

MATLAB funkcija

MonteKarloSimulation

LISTING MATLAB[®] programa QMonteKarlo za simulaciju dvostruko komplementarne analogne banke filtara petog reda.

```
close all
clear
clc

[Be,Ae]=HFBellip(5,40);
p=roots(Ae);
d2=poly(p(1:2));
d3=poly(p(4:5));

z=roots(Be);
Ce=poly([1./z;0]);

xmax=4;
w=linspace(0,xmax,200);
axis([0 xmax 0 80])
syms s R1x C1x r1x r12x ...
      R2x C2x r2x r22x L21x ...
      R3x C3x r3x r32x L31x ...
      R1x R2x R3x

tol=0.005;          tos=num2str(tol*100);
MK=500;            Ms=num2str(MK);
```

```
a_min=70;
for AP=1:2,
for mc=1:MK,
    x=randntol(17,tol);
    r11=1*x(1);
    r12=1*x(2);
    R11=1*x(3);
    C11=1*x(4);

    r21=1*x(5);
    r22=1*x(6);
    C21=1*x(7);
    R21=1/C21/d2(2)*x(8);
    L21=1*x(9);

    r31=1*x(10);
    r32=1*x(11);
    C31=1*x(12);
    R31=1/C31/d3(2)*x(3);
    L31=1*x(14);

    R1=2*x(15);
    R2=2*x(16);
    R3=1*x(17);

    a1=r12x./r11x.*(-s+1./R11x.*C11x.*r11x./r12x)...
        ./(s+1./R11x./C11x);
    a2=(s^2-1./R21x./C21x.*r22x./r21x.*s+1./L21x./C21x)...
        ./(s^2+1./R21x./C21x.*s+1./L21x./C21x);
    A1=a1*a2;
    A1=collect(A1);
    A2=(s^2-1./R31x./C31x.*r31x./r32x.*s+1./L31x./C31x)...
        ./(s^2+1./R31x./C31x.*s+1./L31x./C31x);
    A2=collect(A2);

    if AP==1
        H=R3x./R1x*A1+R3x./R2x*A2;
    elseif AP==2
        H=R3x./R1x*A1-R3x./R2x*A2;
```

```
else
    disp('AP je 1 ili 2')
end

Hx=subs(H,{r11x,r12x,R11x,C11x, r21x,r22x,C21x,R21x,L21x,...
    r31x,r32x,C31x,R31x,L31x, R1x,R2x,R3x},...
    {r11,r12,R11,C11, r21,r22,C21,R21,L21,...
    r31,r32,C31,R31,L31, R1,R2,R3});

Hx=collect(Hx);
[Num,Den]=numden(Hx);
Bc=sym2poly(Num);
Ac=sym2poly(Den);
h=freqs(Bc,Ac,w);
hdb=-20*log10(abs(h));
hold on
if AP==1
    subplot(121)
    plot(w,hdb,'c')
    axis([0 4 0 a_min]); grid on
elseif AP==2
    subplot(122)
    plot(w,hdb,'c');
    axis([0 2 0 a_min]); grid on
else
    disp('AP je 1 ili 2')
end
end

set(gca,'FontSize',13)
if AP==1,
    subplot(121)
    h=freqs(Be,Ae,w);
    ylabel('Slabljenje, dB')
    axis([0 4 0 a_min])
    title(['Mk=',Ms,', tol=',tos,'%'],'FontWeight','Normal')
    hdb=-20*log10(abs(h));
plot(w,hdb,'k','LineWidth',1.5);grid on
xlabel('Normalizovana frekvencija, \omega')
```



```
elseif AP==2,
    subplot(122)
    h0=Ae(1); h=freqs(h0*Ce,Ae,w);
    axis([0 2 0 a_min])
    hdb=-20*log10(abs(h));
plot(w,hdb,'k','LineWidth',1.5);grid on
xlabel('Normalizovana frekvencija, \omega')
else
    disp('AP je 1 ili 2')
end
hold off

%print -depsc2 -r600 MKFig305.eps

end
```

Literatura

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th ed. New York, Dover: National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55, 1972.
- [2] M. Agarwal and A. Sedra, "On designing sharp cutoff low-pass filters," *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, vol. 20, no. 2, pp. 138–141, Jun. 1972.
- [3] S. K. Agrawal and O. P. Sahu, "Two-channel quadrature mirror filter bank: An overview," *ISRN Signal Processing*, vol. 2013, p. 10, Aug. 2013, 10.1155/2013/815619.
- [4] A. Antoniou, "Realization of gyrators using operational amplifiers, and their use in RC-active-network synthesis," *Proc. of the IEE*, vol. 116, no. 8, pp. 1838–1850, Nov. 1969.
- [5] I. K. Argyros, "On the newton-kantorovich hypothesis for solving equations," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 169, no. 2, pp. 315 – 332, Aug. 2004.
- [6] D. Baez-Lopez, M. Minero-Munoz, M. A. Tino-Parra, L. Diaz-Olavarrieta, J. Rodriguez-Asomoza, and L. G. Guerrero-Ojeda, "On the characteristics of monotonic L, Halpern, and parabolic filters," in *Circuits and Systems, 2005. 48th Midwest Symposium on*, Aug. 2005, pp. 1155–1158 Vol. 2.
- [7] C. Beccary, "The use of the shifted Jacobi polynomials in the synthesis of lowpass filters," *Int. J. Circ. Theor. Appl.*, vol. 7, no. 3, pp. 289–295, Jul. 1979.
- [8] J. L. Brown, "Multi-channel sampling of low-pass signals," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. CAS-28, no. 2, pp. 101–106, Feb. 1981.
- [9] A. Budak and P. Aronhime, "Transitional Butterworth-Chebyshev filters," *IEEE Trans. on Circuits Theory*, vol. 18, no. 5, pp. 413–415, May 1971.
- [10] S. Butterworth, "On the theory filter amplifier," *Experimental Wireless and the Radio Engineer*, vol. 7, pp. 536–541, Oct. 1930.
- [11] H. Carlin and J. Wu, "Amplitude selectivity versus constant delay in minimum-phase lossless filters," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 23, no. 7, pp. 447–455, Jul. 1976.
- [12] W.-K. Chen, *The Circuits and Filters Handbook*, 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2009.
- [13] C. E. Chrisostomidis and S. Lucyszyn, "On the theory of chained-function filters," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 53, no. 10, pp. 3142–3151, Oct. 2005.
- [14] C. E. Chrisostomidis, M. Guglielmi, P. Young, and S. Lucyszyn, "Application of chained functions to low-cost microwave band-pass filters using standard PCB etching techniques," in *2000 30th European Microwave Conference*. Paris, France, : IEEE, Oct.2–5, 2000, pp. 1–4.
- [15] M. T. Chryssomallis and J. N. Sahalos, "Filter synthesis using products of Legendre polynomials," *Electrical Engineering*, vol. 81, no. 6, pp. 419–424, 1999.
- [16] R. E. Crochiere and L. R. Rabiner, *Multirate digital signal processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983.
- [17] R. Crochiere, "On the design of subband coders for low bit rate speech communication," *The Bell System Technical Journal*, vol. 56, no. 5, pp. 747–771, May/June. 1977.
- [18] S. Darlington, "Synthesis of reactance 4-poles which produce prescribed insertion loss characteristics: Including special applications to filter design," *Journal of Mathematics and Physics*, vol. 18, no. 1-4, pp. 257–353, 1939.

- [19] G. Daryanani, *Principles of Network Synthesis and Design*. New York: Jon Wiley and Sons, 1976.
- [20] A. Dey, S. Sadhu, and T. K. Ghoshal, "Adaptive Gauss Hermite filter for parameter varying nonlinear systems," in *2014 International Conference on Signal Processing and Communications (SPCOM)*, Jul. 2014, pp. 1–5.
- [21] H. G. Dimopoulos, "Optimal use of some classical approximations in filter design," *IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 54, no. 9, pp. 780–784, Sep. 2007.
- [22] B. Djurich and R. Petkovich, "Generalized analysis of optimum monotonic low-pass filters," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 23, no. 11, pp. 647–649, Nov. 1976.
- [23] B. Farhang-Boroujeny and S. Nooshfar, "Adaptive phase equalization using all-pass filters," in *IEEE International Conference on Communications*, vol. 3. Denver, USA: IEEE, Jun. 23–26, 1991, pp. 1403–1407.
- [24] I. M. Filanovsky, "Bessel-Butterworth transitional filters," in *2014 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, Melbourne VIC, Australia, Jun. 1–5, 2014, pp. 2105–2108.
- [25] I. Filanovsky, "A generalization of filters with monotonic amplitude-frequency response," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 46, no. 11, pp. 1382–1385, Nov. 1999.
- [26] N. J. Fliege, *Multirate Digital Signal Processing*. Baffins Lane. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1994.
- [27] M. Fukada, "Optimum filters of even orders with monotonic response," *Circuit Theory, IRE Transactions on*, vol. 6, no. 3, pp. 277–281, Sep. 1959.
- [28] G. Gorski-Popiel, "RC-active synthesis using positive-immittance converter," *Electronics Letters*, vol. 3, no. 8, pp. 381 – 382, Aug. 1967.
- [29] C. Grosan and A. Abraham, "A new approach for solving nonlinear equations systems," *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, vol. 38, no. 3, pp. 698–714, May 2008.
- [30] M. Guglielmi and G. Connor, "Chained function filters," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 7, no. 12, pp. 390–392, Dec. 1997.
- [31] P. Halpern, "Optimum monotonic low-pass filters," *Circuit Theory, IEEE Transactions on*, vol. 16, no. 2, pp. 240–242, May 1969.
- [32] D. Hilberman, "An approach to the sensitivity and statistical variability of biquadratic filters," *IEEE Transactions on Circuit Theory*, vol. CT-20, no. 4, pp. 382–390, Jul. 1973.
- [33] D. S. Humpheryss, "Equiripple network approximation using iteration technique," in *Proceedings of National Electrotechnics Conference*, vol. 20, no. 3, 1964, pp. 753–758.
- [34] D. Johnson and J. Johnson, "Low-pass filters using ultraspherical polynomials," *IEEE Trans. on Circuits Theory*, vol. 13, no. 4, pp. 364–369, 1966.
- [35] J. R. Johnson, D. E. Johnson, and R. J. Lacarna, "TUT and TABU transitional filters," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 307, no. 3, pp. 175 – 182, Mar. 1979.
- [36] J. Johnston, "A filter family designed for use in quadrature mirror filter banks," in *IEEE International Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Denver, Colorado, USA: IEEE, Apr. 9–11, 1980, pp. 291–294.
- [37] N. B. Jones, "A Laguerre series approximation to the ideal Gaussian filter," *The Radio and Electronic Engineer*, vol. 40, no. 3, pp. 151–155, Sep. 1970.
- [38] G. Jovanović, *RF elektronika*, ser. Osnovni udžbenici. 1800 Niš, A. Medvedeva 14: Univerzitet u Nišu, Elektronski Fakultet, 2016.
- [39] R. Kaszynski and J. Piskorowski, "Bessel filters with varying parameters," in *Proc. of the IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*. Ottawa, Ont., Canada: IEEE, May16–19, 2005, pp. 757–761.
- [40] —, "Selected structures of filters with time-varying parameters," *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, vol. 56, no. 6, pp. 2338 – 2345, Dec. 2007.
- [41] R. Koilpillai, P. Vaidyanathan, and S. Mitra, "On arbitrary-level iir and fir filters," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 37, no. 2, pp. 280 – 284, Feb. 1990.

- [42] H. Ku and M. Drubin, "Network synthesis using Legendre and Hermite polynomials," *J. Franklin Institut.*, vol. 273, no. 2, pp. 138–157, 1962.
- [43] A. Kumar, A. Verma, and N. Chaudhari, "Dgs based legendre low-pass filters for rf/microwave," *WSEAS Transactions on Communications*, vol. 13, pp. 80–93, Jan. 2014.
- [44] R. Lerner, "Band-pass filters with linear phase," *Proceedings of the IEEE*, vol. 52, no. 3, pp. 249–268, Mar. 1964.
- [45] K. Martin and A. S. Sedra, "Optimum design of active filters using the generalized immittance converter," *IEEE Transactions on Circuits And Systems*, vol. CAS-24, no. 9, pp. 495–503, Sep. 1977.
- [46] L. Milić, *Multirate Filtering for Digital Signal Processing: MATLAB Applications*. 3 Henrietta Street Covent Garden London WC2E 8LU: Information Science, 2009.
- [47] H. J. Orchard, "Inductorless filters," *Electronics Letters*, vol. 2, no. 6, pp. 224–225, Jun. 1966.
- [48] —, "Loss sensitivities in singly and doubly terminated filters," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 26, no. 5, pp. 293–297, May 1979.
- [49] A. Papoulis, "Optimum filters with monotonic response," *Proceedings of the IRE*, vol. 46, no. 3, pp. 906–609, Mar. 1958.
- [50] —, "On monotonic response filters," *Proceedings of the IRE*, vol. 47, no. 2, pp. 332–333, Feb. 1959.
- [51] —, "Generalized sampling expansion," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. CAS-24, no. 11, pp. 652–564, Nov. 1977.
- [52] Y. Peless and Murakami, "Analysis and synthesis of tranzitional Butterworth-Thomson filters and bandpass amplifier," *RCA Rev.*, vol. 18, no. 3, pp. 60–94, Mar. 1957.
- [53] J. Piskorowski, "Phase-compensated time-varying Butterworth filters," *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, vol. 47, no. 2, pp. 233–241, May 2006. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s10470-006-5255-9>
- [54] J. Piskorowski, R. Kaszynski, M. A. Gutierrez de Anda, and A. Sarmiento-Reyes, "Group delay compensation and settling time minimization in continuous-time elliptic filters," in *Proc. of the Mediterranean Electrotechnical Conference - MELECON*, Jun. 2008, pp. 12 – 16.
- [55] S. Prasad, L. G. Stolarczyk, J. R. Jackson, and E. W. Kang, "Filter synthesis using Legendre polynomials," *Proc. IEE.*, vol. 114, no. 8, pp. 1063–1064, Aug. 1967.
- [56] B. D. Rakovich, "Transitional Butterworth-Legendre filters," *Radio and Electronic Engineer*, vol. 44, no. 12, pp. 673 – 680, 1974.
- [57] B. D. Rakovich and B. M. Djurich, "Chebyshev linear phase approximation using iterative technique," *Electronics letters*, vol. 7, no. 21, pp. 646–647, Oct. 1971.
- [58] B. D. Rakovich and V. B. Litovski, "Least-squares monotonic lowpass filters with sharp cutoff," *Electronics Letters*, vol. 9, no. 4, pp. 75–76, Feb. 1973.
- [59] B. Rakovich, D. Krstich, and M. Popovich, "Pulse-forming networks using generalized Laguerre polynomials," *Radio and Electronic Engineer*, vol. 49, no. 3, pp. 646–164, Mar. 1979.
- [60] B. D. Rakovich, "Designing monotonic low-pass filters - comparison of some methods and criteria," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 2, no. 3, pp. 215–221, Sep. 1974.
- [61] V. Ramachandran and M. Ahmadi, "Some properties of multivariable mirror-image and anti-mirror-image polynomials obtained by the bilinear transformations of hurwitz polynomials," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 37, no. 6, pp. 828–831, Jun. 1990.
- [62] R. Ramiz and H. Sedef, "General method for designing and simulating of resistively terminated LC ladder filters," *FACTA UNIVERSITATIS, Series: Electronics and Energetics*, vol. 12, no. 3, pp. 79–94, 1999.
- [63] R. Raut and M. N. S. Swamy, *Modern Analog Filter Analysis and Design - A Practical Approach*. Weinheim, Germany: Wiley-VCH, 2010.
- [64] S. C. D. Roy, "Modified Chebyshev lowpass filters," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 38, no. 5, pp. 543–549, 2010.

- [65] S. C. D. Roy and P. Varanasi, "Transitional Butterworth-Chebyshev filters," *Electronics Letters*, vol. 14, no. 6, pp. 179–180, Mar. 1978.
- [66] S. Roy, "On maximally flat sharp cutoff low-pass filters," *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, vol. 19, no. 1, pp. 58–63, Mar. 1971.
- [67] R. Sallen and E. Key, "A practical method of designing RC active filters," *Circuit Theory, IRE Transactions on*, vol. 2, no. 1, pp. 74–85, Mar. 1955.
- [68] W. Saraga, D. Haigh, and R. G. Barker, "A design philosophy for microelectronic active-RC filters," *Proceedings of the IEEE*, vol. 67, no. 1, pp. 24–33, Jan. 1979.
- [69] R. Schaumann and M. E. V. Valkenburg, *Design of Analog Filters*. London, UK: Oxford University Press, 2001.
- [70] A. S. Sedra and P. Brackett, *Filter Theory and Design: Active and Passive*. Champaign, IL, USA: Matrix, 1978.
- [71] A. S. Sedra and K. C. Smith, *Microelectronic Circuits*, 5th ed. New York Oxford: Oxford University Press, 2004.
- [72] N. Stamenković, N. Stojanović, and I. Krstić, "Lowpass filters with almost-maximally flat passband and Chebyshev stopband attenuation," *Electronics Letters*, vol. 53, no. 25, pp. 1633–1634, Dec. 2017.
- [73] N. Stojanović, N. Stamenković, and I. Krstić, "Lowpass filters approximation based on modified Jacobi polynomials," *Electronics Letters*, vol. 53, no. 3, pp. 140–142, Feb. 2017.
- [74] —, "Lowpass filters approximation based on modified Jacobi polynomials," *Electronics Letters*, vol. 53, no. 4, pp. 240–243, Feb. 2017.
- [75] N. Stojanović, D. Milovanović, and N. Stamenković, "Design of two-channel analysis part of hybrid filter bank," in *X International Symposium on Industrial Electronics INDEL 2014*, Faculty of Electrical Engineering Banja Luka., Banja Luka: IEEE, Nov. 06–08, 2014, pp. 175–179.
- [76] N. Stojanović and N. Stamenković, "Lowpass filters approximation based on the Jacobi polynomials," *FACTA UNIVERSITATIS Series: Electronics and Energetics*, vol. 30, no. 3, pp. 351–362, Sep. 2017.
- [77] N. Stojanović, N. Stamenković, and I. Krstić, "Chained-function filter synthesis based on the Legendre polynomials," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, Sep 2017.
- [78] N. Stojanović, N. Stamenković, and D. Živaljević, "Sensitivity analysis of time-continuous filter pair realized using LCR resonators," in *19th International Symposium on Electrical Apparatus and Technologies*. Bourgas, Bulgaria: IEEE, May 29/Jun. 01, 2016, pp. 1–4.
- [79] —, "Monotonic, critical monotonic, and nearly monotonic low-pass filters designed by using the parity relation for Jacobi polynomials," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 45, no. 12, pp. 1987–1992, Dec. 2017.
- [80] L. Storch, "Synthesis of constant-time-delay ladder networks using Bessel polynomials," *Proceedings of the IRE*, vol. 42, no. 11, pp. 1666–1675, Nov. 1954.
- [81] G. Stoyanov and R. Senani, "Comments on New canonic active RC realizations of grounded and floating inductors," *Proceedings of the IEEE*, vol. 70, no. 1, pp. 101–103, Jan. 1982.
- [82] W. E. Thomson, "Delay networks having maximally flat frequency characteristics," *Proceedings of the IEE - Part III: Radio and Communication Engineering*, vol. 96, no. 44, pp. 487–490, Nov. 1949.
- [83] D. Topisirović, V. Litovski, and M. Andrejević Stošović, "Unified theory and state-variable implementation of critical-monotonic all-pole filters," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 43, no. 4, pp. 502–515, Apr. 2015.
- [84] P. P. Vaidyanathan, *Multirate System and Filter banks*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall Inc., 1993.
- [85] —, "Some properties of IIR power-symmetric filters," in *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. III. Honolulu, HI, USA: IEEE, Apr. 15–20, 2007, pp. 1449–1452.
- [86] P. P. Vaidyanathan, P. A. Regalia, and S. K. Mitra, "Design of doubly-complementary IIR digital filters using a single complex allpass filter, with multirate applications," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. CAS-34, no. 4, pp. 378–389, Apr. 1987.

-
- [87] P. Vaidyanathan and V. C. Liu, "Classical sampling theorems in the context of multirate and polyphase digital filter bank structures," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 36, no. 9, pp. 1480–1495, Sep. 1988.
- [88] P. Žiška and J. Vrbata, "Method for design of analog group delay equalizers," in *Proc. of International Symposium on Circuits and Systems*. Island of Kos, Greece: IEEE, May 21–24, 2006, pp. 445–448.
- [89] L. Wanhammar, *Analog Filters Using MATLAB*. 233 Spring Street, New York: Springer, 2009.
- [90] L. Weinberg and P. Slepian, "Takahasi's results on Tchebycheff and Butterworth ladder networks," *IRE Trans. on Circuit Theory*, vol. 7, no. 2, pp. 88–101, Jun. 1960.
- [91] H. Yan, X. Wu, and J. Yang, "Application of Monte Carlo method in tolerance analysis," *Procedia CIRP*, vol. 27, no. Supplement C, pp. 281–285, 2015, 13th CIRP conference on Computer Aided Tolerancing.
- [92] W. Y. Yang, W. Cao, T.-S. Chung, and J. Morris, *Applied Numerical Methods Using MATLAB*. A John Wiley & Sons, INC., 2005.
- [93] K. Zaplatílek, P. Žiška, and K. Hájek, "Practice utilization of algorithms for analog filter group delay optimization," *Radioengineering*, vol. 16, no. 1, pp. 7–15, Apr. 2007.
- [94] D. Živaljević, N. Stamenković, and V. Stojanović, "Nearly monotonic passband low-pass filter design by using sum-of-squared Legendre polynomials," *International Journal of Circuit Theory and Applications*, vol. 44, no. 1, pp. 147–161, Jan. 2016.

Indeks pojmov

A

A/D konvertor, 4
Aktivna RC realizacija, 81
Aktivni RC filter
 prvog reda, 78
Aliasing, 3, 4
All-pass
 filter, 40, 58, 76
 drugog stepena, 79
 prvog stepena, 78
 komplementaran, 39
 mreža prvog stepena, 58
 prenosna funkcija, 39
Analitičko produženje, 17
Analogna
 all-pass mreža, 75
 banka filtera, 75
 dvokanalna banka filtera, 91
Analogno kolo
 za odzimanje, 78
 za sabiranje, 78
Analohni filter, 81
Aproksimaciona funkcija, 12
Aritmetičko kolo, 82

B

Banka
 analize, 75
 sinteze, 75
Banka sa maksimalnom decimacijom, 4
Bikvadratna sekcija, 78
Broj ponavljanja, 90
Butterworthov filter, 39

C

Centralna frekvencija, 79
Chebyshevljeva aprokcimacija, 21

D

D/A konvertor, 4
Darlingtonova realizacija, 18, 102
Dvokanalna banka filtera, 4
Dvokanalne hibridne banke filtera, 92
Dvostruka nula prenosa, 76

Dvostuko komplementarna banka filtera, 75

E

Ekspanzija signala, 4
Eliptički integral, 49
Eliptički filter, 53
Eulerova formula, 92

F

Faktor dobrote pola, 19, 79
Faktor nagiba, 21
Fazna karakteristika all-pass filtra, 92
Fazna razlika, 93

Filter

 Bessel-Thomsonov, 62
 Butterworthov, 23, 62
 Chebyshevljevi, 12
 Halpernov, 24
 Legendrov, 12
 LSM, 24
 Optimalni L, 24
 Thompsonov, 12

Filtarski par, 77

FIR, 3

Fourierova transformacija, 3

G

Gama funkcija, 13, 21
Generalisani impedansni konvertor, 80
Generalni impedansni konvertor, 89
Granična frekvencija propusnog opsega, 54
Grupno kašnjenje, 57, 78

H

Hibridna banka filtera, 4, 75
Hipergeometrijski polinomi, 13
Histogram raspodele, 88
Hurwitzov polinom, 43

I

IIR, 3
Impulsna funkcija, 64, 67
Integrirani kalem, 90
Interval ortogonalnosti, 13

J

Jacobijeva
 eliptička sinusna funkcija, 48
 Jacobijeva matrica, 42
 Jacobijevi polinomi
 ortogonalni, 7, 12, 13
 Jedinična odskočna funkcija, 64

K

Kašnjenje signala, 65
 Karakteristični polinom, 24
 Karakteristična
 frekvencija, 12
 funkcija, 12
 Karakteristična funkcija
 Chebyshevljevog filtra, 17
 Karakteristični polinom, 12
 Kaskadna implementacija, 84
 Kaskadna realizacija, 82
 Klasa funkcija
 sa dve proste nule, 46
 sa tri proste nule, 51
 sa višestrukom nulom, 41
 Klasa funkcije
 sa dvostrukom nulom, 41
 Koeficijent
 asimetrije, 90
 refleksije, 103
 zaobljenosti, 90
 Kompleksna ravan, 17
 Komplementaran po snazi, 37
 Komplementarni filtarski par, 76
 Korektor grupnog kašnjenja, 57
 Korelacija, 90
 Kronecker delta simbol, 13

L

LC lestvičasta mreža, 103
 LCR
 noch filter, 94
 rezonator, 78–80, 83, 89

M

Matematičko očekivanje, 87
 MATLAB funkcija, 100
 MonteCarloSimulation, 106
 elipj, 49
 elipke, 49
 randn, 89
 rand, 88
 Metod unesenih gubitaka, 12
 Minimalna faza, 103
 Monte Carlo

ponavljanje, 91
 simulacija, 90

Multirate system, 4

N

Newton-Kantorovichev metod, 42, 49, 52
 Niskofrekvencijski notch filter, 83
 Niskofrekvencijski RC član, 85
 Nulae Pseudo-Jacobijevih polinoma, 15
 Nule prenosa
 na realnim frekvencijama, 37
 u beskonačnosti, 37
 Nule refleksije, 15

O

Odskočna funkcija, 67
 Operacioni pojačavač, 78
 Otpornost generatora, 103

P

Papoulisova generalizovana teorema odmeravanja,
 3
 Parametri Jacobijevih polinoma, 13
 Pariti relacija, 14
 Parna racionalna funkcija, 58
 pasivna LC mreža, 17
 Početna rešenja, 53
 Polinomi
 Gegenbauerovi, 14
 Legendreovi, 14
 Polinomska karakteristična funkcija, 16
 Polinomski filter, 12
 Poluopsežni filter, 75
 Potpuni eliptički integral, 49
 Povratni gubici, 21
 Pravilo 3-sigme, 87
 Prelazni
 Butterworth-Chebyshevjev filter, 11
 Butterworth-Thompsonov filter, 11
 Prelazni filteri, 11
 Propusnik
 niskih frekvencija, 12, 77
 visokih frekvencija, 76, 77
 Pseudo-Jacobijevi polinomi, 7, 14

R

Racionalna funkcija, 37
 Raspodela
 Normalna, 87
 Uniformna, 88
 Razdvojni stepen, 84
 Recipročan polinom, 43, 76

Referentna otpornost, 103

Reflekcioni koeficijent, 21

Rekurentna relacija, 13

S

Serija

E192, 91

E96, 91

Sistem nelinearnih simultanih jednačina, 61

Sistem neminimalne faze, 67

Skalarni proizvod, 13

Slučajni brojevi, 86

Standardna devijacija, 87

Stepen slobode, 62

Stepen zaravnjenja, 54

Stohastička simulacija, 87

T

Težinska funkcija, 13, 15

Tolerancija elemenata, 91

U

Unešeno slabljenje, 21

V

VHDL platforma, 99

Višekanalna banka, 75

Visokofrekvencijski noich filter, 84

Visokofrekvencijski RC član, 85

Vreme smirivanja, 67

Vreme smirivanja , 65

Biografija autora

M.Sc. Nikola Stojanović rođen je 30.04.1973. godine u Nišu, gde je stekao osnovno i srednje obrazovanje. Diplomirao je na Fakultetu Tehničkih nauka u Prištini, 17.05.2005. godine, na smeru Elektrotehnika i telekomunikacije, i time stekao zvanje diplomiranog inženjera elektrotehnike.

U stalni radni odnos na Elektronskom fakultetu u Nišu je od 17.02.2003. godine, gde je obavljao poslove laboranta na Katedri za teorijsku elektrotehniku (do 2012. godine), odnosno na Katedri za Računarstvo (do 2013. godine). U tom periodu učestvovao je u istraživanjima na projektu "Kompjuterska simulacija i 3D modeliranje originalnih patenata Nikole Tesle". Za nastavnika veština na Elektronskom fakultu u Nišu, na Katedri za Elektroniku, izabran je septembra 2013. Angažovan je na izvođenju nastave iz predmeta Animacija 1 i Animacija 2.

Paralelno je radio i na svom stručnom usavršavanju te je upisao master studije iz oblasti multimedijalnih tehnologija na Univerzitetu u Nišu 2010. godine, i završio 20.02.2013. godine sa prosečnom ocenom 9.30 (devet celih 30/100). Master rad pod nazivom "Interaktivni muzički spot" je odbranio sa ocenom 10 (deset) i time stekao zvanje master inženjera za multimedijalne tehnologije. Upisao je doktorske studije na Elektronskom fakultetu u Nišu, studijski program Elektronika, novembra 2013. godine i položio sve ispite predviđene planom i programom sa prosečnom ocenom 10 (deset).

IZJAVA O AUTORSTVU

Izjavljujem da je doktorska disertacija, pod naslovom

”Nove klase funkcija za sintezu dvokanalne hibridne banke filtara”

koja je odbranjena na Elektronskom fakultetu Univerziteta u Nišu:

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada;
- da ovu disertaciju, ni u celini, niti u delovima, nisam prijavljivao na drugim fakultetima, niti univerzitetima;
- da nisam povredio autorska prava, niti zloupotrebio intelektualnu svojinu drugih lica.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci, koji su u vezi sa autorstvom i dobijanjem akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada, i to u katalogu Biblioteke, Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Nišu, kao i u publikacijama Univerziteta u Nišu.

U Nišu, 23.02.2018.

Autor disertacije: mast. inž. Nikola V. Stojanović

Potpis autora disertacije:

Izjava 2.

**IZJAVA O ISTOVETNOSTI ŠTAMPANOG I ELEKTRONSKOG OBLIKA
DOKTORSKE DISERTACIJE**

Ime i prezime autora: **Nikola Stojanović**

Naslov disertacije: **"Nove klase funkcija za sintezu dvkanalne hibridne banke filtara"**

Mentor: **prof. dr Saša Nikolić**

Izjavljujem da je štampani oblik moje doktorske disertacije istovetan elektronskom obliku, koji sam predao za unošenje u **Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu**.

U Nišu, 23.02.2018.

Potpis autora disertacije:

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku "Nikola Tesla" da, u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu, unese moju doktorsku disertaciju, pod naslovom:

”Nove klase funkcija za sintezu dvokanalne hibridne banke filtara”.

Disertaciju sa svim prilogima predao sam u elektronskom obliku, pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju, unetu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu, mogu koristiti svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo (CC BY)
2. Autorstvo - nekomercijalno (CC BY-NC)
3. Autorstvo - nekomercijalno - bez prerade (CC BY-NC-SA)
4. Autorstvo - nekomercijalno - deliti pod istim uslovima
5. Autorstvo - bez prerade (CC BY-ND)
6. Autorstvo - deliti pod istim uslovima (CC BY-SA)

U Nišu, 23.02.2018.

Autor disertacije: mast. inž. Nikola Stojanović

Potpis autora disertacije: