



УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ЕЛЕКТРОНСКИ ФАКУЛТЕТ



Иван Б. Крстић

**СИНТЕЗА И РЕАЛИЗАЦИЈА
УСКОПОЈАСНИХ РЕКУРЗИВНИХ
ДИГИТАЛНИХ ФИЛТАРА
НЕПРОПУСНИКА ОПСЕГА**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2018.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF ELECTRONIC ENGINEERING



Ivan B. Krstić

IIR MULTIPLE-NOTCH FILTERS DESIGN
AND REALIZATION

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2018.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:

Др Саша В. Николић, ванредни професор,
Универзитет у Нишу, Електронски факултет

Наслов:

Синтеза и реализација ускопојасних рекурзивних дигиталних филтара непропусника опсега

Резиме:

У овој дисертацији су разматрани нови методи синтезе ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега који резултују потпуним задовољењем спецификација амплитудске карактеристике филтра везаних за положај централних фреквенција непропусних опсега и ширина непропусних опсега дефинисаних за произвољну вредност појачања на граничним фреквенцијама непропусних опсега. Већина предложених метода синтезе пружа могућност додатног побољшања амплитудске карактеристике филтра у пропусним опсезима повећањем реда филтра. Са друге стране, како предложени методи полазе од претпоставке да се филтар са жељеном амплитудском карактеристиком може добити паралелном везом линије за кашњење и стабилног филтра свепропусника фреквенција, побољшање амплитудске карактеристике ускопојасног филтра непропусника опсега у пропусним опсезима праћено је мањом оствареном грешком линеарности фазне карактеристике филтра у пропусним опсезима. Поређење са постојећим методама синтезе ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега показује да предложени методи могу резултовати краћим потребним временом потискивања синусоидалних сметњи, као и побољшањем фазне карактеристике филтра у пропусним опсезима. Осетљивост амплитудске карактеристике ускопојасних рекурзивних непропусника опсега на заокруживање вредности коефицијената множача је разматрана са становишта правилног избора постојећих (стандардних) реализационих структура, као и начина добијања нових структура. Предложени су алгоритам за одређивање заокружених вредности коефицијента множача у циљу добијања што је могуће ниже потребног броја битова за представљање коефицијената множача, као и алгоритам за одређивање оптималних представа преносне функције филтра свепропусника фреквенција (који у потпуности карактерише ускопојасни филтар непропусник опсега), који се реализује каскадном спрегом нестандардних секција свепропусника фреквенција првог и другог реда. Кроз примере је показана ефикасност предложених алгоритама при чему је генерални закључак да се коришћењем нестандардних реализационих структура секција свепропусника фреквенција првог и другог реда може постићи знатно смањење потребног броја битова за представљање вредности коефицијената множача.

Кључне речи:

ускопојасни дигитални филтар непропусник опсега, филтар свепропусник фреквенција, симетричност амплитудске карактеристике око централних фреквенција непропусних опсега, осетљивост амплитудске карактеристике на заокруживање вредности коефицијената множача, реализационе структуре, оптимални начини представе преносне функције.

Научна област:

Електротехничко и рачунарско инжењерство

Научна дисциплина:

Дигитална обрада сигнала

УДК број:

((621.372+621.372.544): 004.424.36):621.38

CERIF класификација:

T170 Електроника

Тип лиценце
Креативне заједнице:

CC BY-NC-ND

Data on doctoral dissertation

Doctoral
Supervisor:

Dr Saša V. Nikolić, associate professor,
University of Niš, Faculty of Electronic Engineering

Title:

IIR multiple-notch filters design and realization

Abstract:

New IIR multiple-notch filters design methods, whose utilization lead to complete satisfaction of specifications regarding positions of notch frequencies and notch-bandwidths defined for an arbitrary attenuation value at cutoff frequencies, are investigated in this thesis. Most of the proposed design methods offer the possibility of further pass-bands magnitude response improvement by increasing the order of the filter. On the other hand, since proposed design methods are based on the assumption that IIR multiple-notch filter with desired magnitude response can be obtained by parallel connection of the delay line and the stable all-pass filter, pass-bands magnitude response improvement is followed by the improvement of linearity of the pass-bands phase response. Comparison with the existing IIR multiple-notch filter design methods showed that proposed design methods could result in shorter duration of transient response to sum of sinusoidal interferences, as well as in improvement of pass-bands phase response.

Sensitivity of the IIR multiple-notch filter's magnitude response to coefficient quantization is considered from the point of view of the right choice of existing (standard) and development of the new realization structures. Algorithm for determination of the multipliers coefficients' quantized values such that needed number of bits for theirs representation is minimized, as well as the algorithm for determination of the optimal representations of the all-pass filter transfer function (characterizing the IIR multiple-notch filter), realized by cascade connection of the first- and second-order nonstandard all-pass sections, are proposed. Efficiency of the proposed algorithms is verified through several examples. General conclusion is that significant reduction in total number of bits needed for representation of multipliers coefficients can be achieved if nonstandard realization structures are used.

Key words:

digital multiple-notch filter, all-pass filter, symmetrical magnitude response about notch frequencies, sensitivity of the magnitude response to coefficients quantization, realization structures, optimal transfer function's forms.

Scientific
Field:

Electronic and computer engineering

Scientific
Discipline:

Digital signal processing

UDC:

((621.372+621.372.544): 004.424.36):621.38

CERIF
classification:

T170 Electronics

Creative
Commons
License Type:

CC BY-NC-ND

Списак слика

2.1	Реализација ускопојасног ПР филтра непропусника опсега заснована на паралелној вези линије за кашњење и филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$	10
2.2	Графичка интерпретација спецификација ускопојасног ПР филтра непропусника опсега.	14
3.1	Пример 3.1. Карактеристике појачања, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом предложених метода.	28
3.2	Пример 3.2. Карактеристике појачања, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом предложених метода.	30
3.3	Пример 3.3. Карактеристике појачања, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом предложених метода.	31
3.4	Графичка интерпретација недостатка метода Па и Пб. Слабљење филтра је бесконачно на додатном броју фреквенција које су лоциране у прелазним областима, тј. фазна карактеристика $\varphi_P(\omega)$ и права $-K\omega + (2k-1)\pi/2$ имају више од једне заједничке тачке за $\omega \in (\omega_{l,k}, \omega_{r,k})$	33
3.5	Пример 3.4. Карактеристике појачања и групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом метода Па и Ша.	39
3.6	Пример 3.5. Карактеристике појачања, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом метода IV, Па и Пб.	44

3.7	Пример 3.6. Карактеристике појачања, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом метода IV, Па и Пб.	46
3.8	Пример 3.7. Грешке линеарности фазне карактеристике, појачање у пропусним опсезима и карактеристике групног кашњења.	49
3.9	Пример 3.7. Одзиви филтара на побуду збиром синусоидалних сметњи.	50
3.10	Пример 3.8. Грешке линеарности фазне карактеристике, појачање у пропусним опсезима и карактеристике групног кашњења.	52
3.11	Пример 3.8. Одзиви филтара на побуду збиром синусоидалних сметњи.	53
3.12	Пример 3.9. Грешке линеарности фазне карактеристике, појачање у пропусним опсезима и карактеристике групног кашњења.	55
3.13	Пример 3.9. Одзиви филтара на побуду збиром синусоидалних сметњи.	56
4.1	Реализациона структура ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега. Филтар свепропусник фреквенција реализован је директно.	68
4.2	Решеткаста реализација филтра свепропусника фреквенција.	70
4.3	Једна од више могућих каноничних реализација секције свепропусника фреквенција првог реда $A_{1,i}(z) = \frac{\eta_i + z^{-1}}{1 + \eta_i z^{-1}}$ [49].	71
4.4	Једна од више могућих каноничних реализација секције свепропусника фреквенција другог реда $A_{2,j}(z) = \frac{\beta_{j,2} + \beta_{j,1}z^{-1} + z^{-2}}{1 + \beta_{j,1}z^{-1} + \beta_{j,2}z^{-2}}$ [49].	72
4.5	Пример 4.1. Функције апсолутне осетљивости у најгорем случају за случај директне, каскадне и решеткасте реализације филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$	74
4.6	Пример 4.2. Функције апсолутне осетљивости у најгорем случају за случај директне, каскадне и решеткасте реализације филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$	76
4.7	Пример 4.3. Функција апсолутне осетљивости амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега у најгорем случају.	88
4.8	Пример 4.3. Реализациона структура секције $A_{2,2}(z)$ која садржи 4 кола за кашњење. Множење са 3 реализује се померањем и сабирањем.	89
4.9	Пример 4.3. Канонична реализациона структура секције $A_{2,3}^{(1)}(z)$	90

4.10	Пример 4.4. Функције апсолутне осетљивости амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега у најгорем случају.	92
A.1	Представа реализационе структуре са минималним бројем множача секције свепропусника фреквенција другог реда [30,48].	108
B.1	Представа каноничне реализације са минималним бројем множача секције свепропусника фреквенција другог реда [53].	117

Списак табела

3.1	Пример 3.1. Модули и фазни углови полова ускопојасног ПР филтра непропусника опсега и вредност мере грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.	29
3.2	Пример 3.2. Модули и фазни углови полова ускопојасног ПР филтра непропусника опсега и вредност мере грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.	30
3.3	Пример 3.3. Модули и фазни углови полова ускопојасног ПР филтра непропусника опсега и вредност мере грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.	32
3.4	Пример 3.4. Метод IIIa, модули и фазни углови полова ускопојасног ПР филтра непропусника опсега и вредност мере грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.	38
3.5	Пример 3.5. Модули и фазни углови полова ускопојасног ПР филтра непропусника опсега и вредност мере грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.	45
3.6	Пример 3.6. Модули и фазни углови полова ускопојасног ПР филтра непропусника опсега и вредност мере грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.	45
4.1	Пример 4.1. Номиналне вредности коефицијената множака реализационих структура заокружене на 6 децимала и максималне апсолутне вредности осетљивости амплитудске карактеристике и функције осетљивости амплитудске карактеристике у најгорем случају, у пропусним и непропусним опсезима.	74

4.2	Пример 4.1. Вредности коефицијената множача реализационих структура и потребне дужине дигиталних речи за представљање разломљених делова вредности коефицијената.	75
4.3	Пример 4.2. Номиналне вредности коефицијената множача реализационих структура заокружене на 6 децимала и максималне апсолутне вредности осетљивости амплитудске карактеристике и функције осетљивости амплитудске карактеристике у најгорем случају, у пропусним и непропусним опсезима.	78
4.4	Пример 4.2. Вредности коефицијената множача реализационих структура и потребне дужине дигиталних речи за представљање разломљених делова вредности коефицијената.	79
4.5	Пример 4.3. Секције свепропусника фреквенција другог реда, заокружене вредности коефицијената множача и потребне дужине дигиталних речи за представљање разломљених делова вредности коефицијената.	87
4.6	Пример 4.3. Једна од могућих вредности матрица \mathbf{T} (дефинисана у делу А.2.1). Истој представи преносне функције секције свепропусника фреквенција другог реда може одговарати већи број матрица \mathbf{T} , тј. иста представа преносне функције може се реализовати на више начина.	89
4.7	Пример 4.4. Секције свепропусника првог и другог реда, заокружене вредности коефицијената множача и потребне дужине дигиталних речи за представљање разломљених делова вредности коефицијената.	91
4.8	Пример 4.4. Једна од могућих вредности матрица \mathbf{T} на основу којих се могу одредити реализационе структуре појединачних секција свепропусника другог реда.	93

Садржај

1	Увод	1
1.1	Организација дисертације	3
2	Поставка проблема синтезе ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега	5
2.1	Спецификације амплитудске карактеристике ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега	5
2.2	Постојећи методи синтезе ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега	6
2.2.1	Пристап заснован на каскадној спрези	7
2.2.2	Пристап заснован на одређивању оптималног положаја полова	8
2.2.3	Пристап заснован на примени филтра свепропусника фреквенција	9
2.3	Трансформација спецификација амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног филтра непропусника опсега	10
2.4	Веза фазне карактеристике и коефицијената нерекурзивне дигиталне мреже	15
3	Нови методи синтезе ускопојасних ПР филтара непропусника опсега	17
3.1	Мера грешке амплитудске карактеристике филтра	20
3.2	Директно одређивање коефицијената филтра безусловном минимизацијом квадратне мере грешке	23
3.2.1	Метод Па	24
3.2.2	Метод Пб	26

3.2.3	Примери синтезе	28
3.3	Директно одређивање коефицијената филтра условном минимизацијом квадратне мере грешке	32
3.3.1	Метод Ша	35
3.3.2	Метод ШБ	37
3.3.3	Пример синтезе	38
3.4	Синтеза заснована на сукцесивном одређивању коефицијената каскадно спрегнутих филтара свепропусника фреквенција – Метод IV	39
3.4.1	Примери синтезе	43
3.5	Поређење са постојећим методима синтезе ускопојасних IIR филтара непропусника опсега	46
3.6	Закључак	57
4	Реализационе структуре ускопојасних IIR филтара непропусника опсега	59
4.1	Осетљивост амплитудске карактеристике филтра на заокруживање вредности коефицијената множача	60
4.2	Потребна дужина речи за представљање вредности коефицијената множача	61
4.2.1	Претпоставка једнакости максималних апсолутних одступања вредности коефицијената од номиналних вредности	64
4.2.2	Претпоставка неједнакости максималних апсолутних одступања вредности коефицијената од номиналних вредности	65
4.3	Стандардне реализационе структуре	66
4.3.1	Директна реализација филтра свепропусника фреквенција	67
4.3.2	Решеткаста реализација филтра свепропусника фреквенција	69
4.3.3	Каскадна реализација филтра свепропусника фреквенција	71
4.3.4	Примери реализације	73
4.4	Нестандардне реализационе структуре	80
4.4.1	Одређивање оптималних представа преносне функције филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$	81
4.4.2	Примери реализације	85

4.5	Закључак	93
5	Закључак	96
	Литература	99
	Прилози	104
A	Представе преносних функција секција свепропусника фреквенција првог и другог реда које припадају скуповима Φ_1 и Φ_2	104
A.1	Одређивање представа преносне функције свепропусника фреквенција првог реда у скупу Φ_1	104
A.2	Одређивање представа преносне функције свепропусника фреквенција другог реда у скупу Φ_2	105
A.2.1	Потребан услов могућности реализације са минималним бројем множача секције свепропусника фреквенција другог реда	108
B	Одређивање вредности коефицијената множача различитих представа преносне функције свепропусника фреквенција другог реда из скупа Φ_2	113
B	Немогућност каноничне реализације са минималним бројем множача свих представа преносне функције свепропусника фреквенција другог реда из скупа Φ_2	116
	Биографија аутора	119

1

Увод

У многим практичним применама, од обраде аудио сигнала до биомедицинског инжењерства [1–3], постоји потреба за ускопојасним дигиталним филтрима непропусницима опсега чији је задатак да потисну једну или више спектралних компоненти улазног сигнала, док преостале спектралне компоненте треба да остану непромењене. Преносна функција поменутих филтара је, у идеалном случају, облика

$$H_{\text{ideal}}(z) = \begin{cases} 0, & \omega \in \{\omega_{n,k} \mid k = 1, 2, \dots, K\} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (1.1)$$

где је са $\omega_{n,k}$ означена фреквенција k -те спектралне компоненте улазног сигнала коју је потребно потиснути, при чему је њихов број означен са K . Претходна релација сугерише нулте вредности ширина непропусних опсега идеалног ускопојасног дигиталног филтра непропусника опсега, као и константну фазну карактеристику филтра у пропусним опсезима.

Нулте вредности ширина непропусних опсега, релација (1.1), не само да се не могу реализовати, већ су и непожељне имајући у виду да би време потребно за елиминацију синусоидалних сметњи фреквенција $\omega_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, K$, било бесконачно дуго [4]. С тим у вези, спецификацијама реалног ускопојасног филтра непропусника опсега прописане су и ширине непропусних опсега BW_k , $k = 1, 2, \dots, K$, на основу којих се могу одредити граничне фреквенције непропусних опсега на којима је појачање филтра у dB једнако a . Треба имати у виду да је време потребно да би се синусоидална сметња фреквенције $\omega_{n,k}$ у потпуности потиснула у директној вези са

ширином одговарајућег непропусног опсега BW_k , односно вредношћу модула пола најближег јединичној кружници чији је фазни угао близак по вредности $\omega_{n,k}$. По правилу, што је BW_k веће по вредности, то је поменуто време краће, и обратно [4,5]. Обично се усваја да је $a = -3$ dB.

Константна фазна карактеристика, тј. нулта вредност карактеристике групног кашњења, у пропусним опсезима идеалног ускопојасног филтра непропусника опсега, релација (1.1), има за последицу немогућност додатног побољшања амплитудске карактеристике у пропусним опсезима, о чему ће бити речи у дисертацији. Са друге стране, у већини практичних примена чињеница да фазна карактеристика није константна не представља проблем, уколико јесте линеарна (или приближно линеарна) функција фреквенције у пропусним опсезима.

Генерално, дигитални ускопојасни филтри непропусници опсега могу се пројектовати као рекурзивне (IIR, енг. *Infinite Impulse Response*) или као нерекурзивне (FIR, енг. *Finite Impulse Response*) дигиталне мреже. И поред чињенице да је линеарну фазну карактеристику једноставно добити нерекурзивном мрежом, као и да се ради о увек стабилним мрежама, добијени ред филтра је знатно виши у поређењу са одговарајућим рекурзивним филтром код којег је могуће добити јако уске ширине непропусних опсега чак и за мале вредности реда филтра. Поступак синтезе рекурзивних ускопојасних дигиталних филтара непропусника једног опсега разматра се у литератури већ дуги низ година [6–12]. Међутим, истраживања везана за пројектовање рекурзивних ускопојасних филтара непропусника више опсега достижу врхунац актуелности тек крајем прошлог и почетком овог века [12–26].

Након што су коефицијенти ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега одређени, преносна функција може бити реализована коришћењем више еквивалентних структура. Осетљивост било које реализације на квантизацију коефицијената множача зависи од усвојене структуре за реализацију филтарске функције. Ово је посебно случај код разматраних рекурзивних филтара, с обзиром да неки полови преносне функције леже близу јединичне кружнице због чега услед квантизације коефицијената, поред тога што реализовани филтар може да не задовољи задате спецификације, добијена преносна функција може још и постати нестабилна. Стандардне реализационе структуре [27–33] (којих има ограничени број), зависно од конкретног случаја представљају мање или више погодно решење за

реализацију. Са друге стране, коришћењем процесорске моћи данашњих рачунара, а на бази јасно дефинисаних правила и одговарајуће представе преносне функције филтра, могуће је истражити и много већи скуп структура за реализацију.

Главни допринос ове дисертације јесу нове итеративне и неитеративне технике за синтезу ускопојасних рекурзивних дигиталних филтара непропусника опсега, које полазе од паралелне везе линије за кашњење и филтра свепропусника фреквенција, а резултују оствареном симетријом граничних фреквенција непропусних опсега око централних фреквенција непропусних опсега. Додатно, већина предложених метода синтезе пружа могућност побољшања амплитудске карактеристике филтра у пропусним опсезима повећањем реда филтра свепропусника фреквенција. Осетљивост, као и потребна дужина дигиталних речи за представљање вредности коефицијената множача добијених филтара су такође разматране у контексту правилног избора постојећих, као и начина добијања нових реализационих структура.

1.1 Организација дисертације

Текст дисертације састоји се од пет поглавља и три прилога. Поред првог, уводног поглавља, у другом поглављу дато је разматрање спецификација амплитудске карактеристике ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега, њихова трансформација у спецификације фазне карактеристике филтра свепропусника фреквенција чијом се паралелном везом са линијом за кашњење добија ускопојасни рекурзивни филтар непропусник опсега, као и разматрање предности и недостатака постојећих метода синтезе разматраних филтара.

Тема трећег поглавља јесу нови методи синтезе ускопојасних рекурзивних дигиталних филтара непропусника опсега, при чему је предложено укупно пет метода. Кроз већи број примера извршено је поређење предложених метода, анализиране су њихове предности и евентуални недостаци. Коначно, предложени методи упоређени су са постојећим методима из литературе који се могу генерализовати на случај произвољне вредности слабљења на граничним фреквенцијама непропусних опсега. Поменуто поређење подразумева разматрање задовољења спецификација амплитудске карактеристике филтра, грешке линеарности фазне карактеристике, вредности модула пола најближег јединичној кружници, реда филтра као и времена потребног

за потискивање синусоидалних сметњи.

Четврто поглавље садржи разматрање реализационих структура ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега, тј. реализационих структура филтра свепропусника фреквенција чијом се паралелном везом са линијом за кашњење добија жељени селективни филтар. Поред стандардних реализационих структура, размотрени су и нестандартни приступи реализацији. Приступима заокруживању вредности коефицијената множача посвећена је посебна пажња, обзиром на њихову улогу приликом одређивања потребних дужина дигиталних речи за представљање истих.

У закључку су сумарни најважнији научни доприноси и правци будућих истраживања.

Поставка проблема синтезе ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега

У овом поглављу ће бити размотрене спецификације амплитудске карактеристике ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега, трансформација поменутих спецификација у спецификације фазне карактеристике филтра непропусника фреквенција који у потпуности карактерише ускопојасни филтар непропусник опсега, као и предности и недостаци постојећих метода синтезе разматраних филтара.

2.1 Спецификације амплитудске карактеристике ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега

Ширинама непропусних опсега BW_k и положајем централних фреквенција непропусних опсега $\omega_{n,k}$, за $k = 1, 2, \dots, K$, одређене су доње и горње граничне фреквенције непропусних опсега

$$\begin{aligned}\omega_{l,k} &= \omega_{n,k} - \frac{BW_k}{2}, \\ \omega_{r,k} &= \omega_{n,k} + \frac{BW_k}{2},\end{aligned}\tag{2.1}$$

на којима је појачање филтра у dB једнако a , а које се могу тумачити и као граничне фреквенције пропусних опсега

$$\mathcal{P}_k = \begin{cases} \{\omega \mid 0 \leq \omega \leq \omega_{l,1}\}, & k = 1 \\ \{\omega \mid \omega_{r,k-1} \leq \omega \leq \omega_{l,k}\}, & 2 \leq k \leq K, \\ \{\omega \mid \omega_{r,K} \leq \omega < \pi\}, & k = K + 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

чији је број једнак $K + 1$. Спецификације амплитудске карактеристике реалног ускопојасног дигиталног филтра непропусника опсега могу се написати у виду спецификација положаја централних и граничних фреквенција непропусних опсега

$$\left| H(e^{j\omega_{n,k}}) \right| = 0, \quad (2.3)$$

$$20 \log_{10} \left| H(e^{j\omega_{l,k}}) \right| = a, \quad (2.4)$$

$$20 \log_{10} \left| H(e^{j\omega_{r,k}}) \right| = a, \quad (2.5)$$

за $k = 1, 2, \dots, K$, и спецификација везаних за појачање филтра у пропусним опсезима

$$a \leq 20 \log_{10} \left| H(e^{j\omega}) \right| \leq 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{P} = \bigcup_{k=1}^{K+1} \mathcal{P}_k. \quad (2.6)$$

2.2 Постојећи методи синтезе ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега

Основни недостатак постојећих метода синтезе јесте чињеница да ширине непропусних опсега добијеног филтра не одговарају задатим. Поред тога, највећи број метода не може се генерализовати на случај произвољне вредности слабљења на граничним фреквенцијама непропусних опсега, нити пружа могућност побољшања амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.

Док методи [12, 25, 26] не узимају у обзир спецификације везане за ширине непропусних опсега, методи приказани у радовима [13, 14, 20, 21, 24] полазе од вредности појачања на граничним фреквенцијама које је једнако -3 dB. Резултујуће ширине

непропусних опсега, у оба случаја, не одговарају онима задатим спецификацијама амплитудске карактеристике филтра, што обично за последицу има или дуго време потребно за потискивање синусоидалне интерференције (резултујуће ширине непропусних опсега су уже од задатих) или дисторзију спектралних компоненти у околини централних фреквенција непропусних опсега (резултујуће ширине непропусних опсега су шире од задатих).

Највећи број постојећих метода за синтезу ПР ускопојасних филтара непропусника више опсега припада једном од три основна приступа синтези, чије разматрање је дато у наставку.

2.2.1 Приступ заснован на каскадној спрези

Генерално, ускопојасни ПР филтар непропусник више опсега може се добити каскадним спрезањем више ускопојасних ПР непропусника једног опсега од којих сваки може бити добијен неком од метода приказаних у радовима [6–12]. Ипак, најзаступљенија су два типа преносних функција ускопојасних ПР филтара непропусника више опсега заснованих на каскадној спрези, коришћена у радовима [15–19], за које је карактеристично да се њихови коефицијенти могу једноставно одредити на основу познатих -3 dB ширина као и централних фреквенција непропусних опсега:

- *Тип I*

$$H(z) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_k + b_k(1 + a_k)z^{-1} + z^{-2}}{1 + b_k(1 + a_k)z^{-1} + a_k z^{-2}} \right), \quad (2.7)$$

при чему су коефицијенти филтра одређени са

$$b_k = -\cos \omega_{n,k}, \quad (2.8)$$

$$a_k = \left(1 - \operatorname{tg} \frac{BW_k}{2} \right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{BW_k}{2} \right)^{-1}. \quad (2.9)$$

- *Тип II*

$$H(z) = \prod_{k=1}^K \frac{1 + b_k z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_k b_k z^{-1} + a_k^2 z^{-2}}, \quad (2.10)$$

при чему су коефицијенти филтра одређени са

$$b_k = -2 \cos \omega_{n,k}, \quad (2.11)$$

$$a_k = 1 - \operatorname{tg} \frac{BW_k}{2}. \quad (2.12)$$

Поменути приступ синтези даје добре резултате уколико је број непропусних опсега мали и уколико су -3 dB ширине непропусних опсега уске. Међутим, у супротном, добијени филтар има неконтролисано појачање у пропусним опсезима [20, 24]. Додатно, максимална вредност амплитудске карактеристике филтра Типа II није једнака јединици, већ зависи од положаја полова, што за последицу има дисторзију сигнала.

2.2.2 Приступ заснован на одређивању оптималног положаја полова

Поменути приступ полази од преносне функције ускопојасног рекурзивног филтра непропусника опсега, дате са

$$H(z) = \prod_{k=1}^K \frac{1 - 2 \cos \omega_{n,k} z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r_k \cos \omega_{p,k} z^{-1} + r_k^2 z^{-2}}, \quad (2.13)$$

при чему су непознате вредности модула r_k и фазних углова полова $\omega_{p,k}$, за $k = 1, 2, \dots, K$. Оптималан положај полова добија се минимизацијом квадратне грешке

$$J = \int_0^{\pi} W(\omega) \left| H_{\text{ideal}}(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega, \quad (2.14)$$

где је са $W(\omega)$ означена тежинска функција.

Проблем минимизације функције дате релацијом (2.14) представља нелинеарни оптимизациони проблем до чијег решења се, у општем случају, не може доћи аналитичким методама. Итеративни приступ решавању, који не узима у обзир спецификације везане за ширине непропусних опсега, предложен у раду [12], заснива се на примени SM (Steiglitz-McBride) шеме [34], Rouché-овој теореме [35, 36] и квадратном програмирању, при чему су вредности модула свих полова у првој итерацији једнаки и унапред дефинисани од стране корисника. Са друге стране, у раду [23] вредности модула полова су фиксирани и одређене -3 dB ширинама

непропусних опсега

$$r_k = \sqrt{\frac{1 - \sin BW_k}{\cos BW_k}}, \quad (2.15)$$

за $k = 1, 2, \dots, K$, док су фазни углови полова $\omega_{p,k}$ одређени минимизацијом постављеног оптимизационог проблема коришћењем генетског алгорита.

Међутим, локални максимуми амплитудске карактеристике филтара добијени методима [12, 23], односно максимуми по пропусним опсезима, у општем случају нису једнаки.

2.2.3 Приступ заснован на примени филтара свепропусника фреквенција

Методи овог приступа синтези полазе од преносне функције ускопојасног рекурзивног дигиталног филтара непропусника K опсега, представљене на следећи начин:

$$H(z) = \frac{1}{2} [z^{-(L-2K)} + A_L(z)], \quad (2.16)$$

где је са $A_L(z)$ означена преносна функција стабилног ПР филтара свепропусника фреквенција L -тог реда. У зависности од реда филтара свепропусника фреквенција $A_L(z)$, методи поменутог приступа синтези могу се поделити на оне код којих је $L = 2K$ [13, 14, 20, 21, 24] и оне код којих је $L > 2K$ [25, 26].

Метод одређивања коефицијената ускопојасног рекурзивног филтара свепропусника фреквенција приказан у радовима [21, 22], полази од следеће представе преносне функције $A_L(z)$, $L = 2K$:

$$A_L(z) = \prod_{k=1}^K \frac{a_k + b_k(1 + a_k)z^{-1} + z^{-2}}{1 + b_k(1 + a_k)z^{-1} + a_k z^{-2}}, \quad (2.17)$$

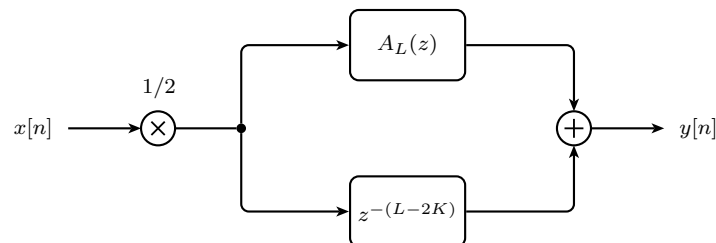
при чему су коефицијенти a_k , за $k = 1, 2, \dots, K$, одређени дефинисаним ширинама непропусних опсега, релација (2.9), док се вредности непознатих коефицијената b_k налазе решавањем система нелинеарних једначина добијеним на основу познатог положаја нула преносне функције.

Са друге стране, методи приказани у радовима [13, 14, 24–26] проблем апроксимације амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног филтара непропусника

опсега своде на проблем апроксимације фазне карактеристике филтра свепропусника фреквенције $A_L(z)$. Код итеративних метода [13, 14, 24] ред филтра свепропусника фреквенција једнак је двоструком броју непропусних опсега, $L = 2K$, при чему се непознатих $2K$ коефицијената филтра добијају решавањем система линеарних једначина који је формиран узимањем у обзир непотпуних спецификација амплитудске карактеристике жељеног филтра. Ови методи, међутим, не нуде могућност даљег побољшања амплитудске карактеристике у пропусним опсезима, при чему је резултујућа фазна карактеристика приближно константна у пропусним опсезима. Са друге стране, примена итеративног метода [25, 26] нуди могућност побољшања амплитудске карактеристике у пропусним опсезима, али не узима у обзир спецификације везане за ширине непропусних опсега. Непознатих $L > 2K$ коефицијената филтра одређено је тако да положај централних фреквенција непропусних опсега буде задовољен и да фазна карактеристика филтра апроксимира линеарну функцију фреквенције у пропусним опсезима у Чебишевљевом смислу.

2.3 Трансформација спецификација амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног филтра непропусника опсега

С обзиром да у дисертацији предложене технике за синтезу ускопојасних рекурзивних дигиталних филтара непропусника опсега припадају трећем приступу синтези, преносна функција дата је релацијом (2.16), односно претпоставља се да се жељени филтар може добити паралелном везом линије за кашњење $z^{-(L-2K)}$ и стабилног филтра свепропусника фреквенција L -тог реда $A_L(z)$, слика 2.1.



Сл. 2.1: Реализација ускопојасног ИР филтра непропусника опсега заснована на паралелној вези линије за кашњење и филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$.

Преласком у Фуријеов домен, $z = e^{j\omega}$, и накнадним сређивањем, добија се израз за фреквентни одзив ускопојасног филтра непропусника опсега

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\frac{\varphi_A(\omega) - (L-2K)\omega}{2}} \cos \frac{\varphi_A(\omega) + (L-2K)\omega}{2}, \quad (2.18)$$

где је са $\varphi_A(\omega)$ означена фазна карактеристика филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$. На основу релације (2.18) изрази за амплитудску и фазну карактеристику ускопојасног филтра непропусника фреквенција одређени су са

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \left| \cos \frac{\varphi_A(\omega) + (L-2K)\omega}{2} \right|, \quad (2.19)$$

$$\varphi_H(\omega) = \frac{\varphi_A(\omega) - (L-2K)\omega}{2} + \arg \left\{ \cos \frac{\varphi_A(\omega) + (L-2K)\omega}{2} \right\}. \quad (2.20)$$

Имајући у виду да је фазна карактеристика стабилног филтра свепропусника фреквенција монотono опадајућа функција фреквенције за $\omega \in [0, \pi)$, као и да важи $\varphi_A(0) = 0$ и $\varphi_A(\pi) = -L\pi$ [7, 13, 14, 21], амплитудска карактеристика дата релацијом (2.19) одговараће амплитудској карактеристици идеалног ускопојасног филтра непропусника опсега, релација (1.1), уколико важи

$$\varphi_{A, \text{ideal}}(\omega) = \begin{cases} -(L-2K)\omega, & \omega \in [0, \omega_{n,1}) \\ -(L-2K)\omega - 2k\pi, & \omega \in (\omega_{n,k}, \omega_{n,k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, K-1 \\ -(L-2K)\omega - 2K\pi, & \omega \in (\omega_{n,K}, \pi) \\ -(L-2K)\omega_{n,k} - (2k-1)\pi, & \omega \in \{\omega_{n,k} \mid k = 1, 2, \dots, K\} \end{cases}. \quad (2.21)$$

На основу релација (2.20) и (2.21), може се закључити да је фазна карактеристика $\varphi_{H, \text{ideal}}(\omega)$ идеалног ускопојасног рекурзивног филтра непропусника фреквенција, чија је преносна функција дата релацијом (2.16), линеарна функција фреквенције у пропусним опсезима.

С обзиром да се нулте ширине непропусних опсега не могу реализовати, амплитудска карактеристика дата релацијом (2.19) одговараће амплитудској карактеристици реалног ускопојасног филтра непропусника опсега, релације (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6),

уколико важи

$$\varphi_A(\omega_{n,k}) = -(L - 2K)\omega_{n,k} - (2k - 1)\pi, \quad (2.22)$$

$$\varphi_A(\omega_{l,k}) = -(L - 2K)\omega_{n,k} - 2(k - 1)\pi - \varepsilon, \quad (2.23)$$

$$\varphi_A(\omega_{r,k}) = -(L - 2K)\omega_{n,k} - 2k\pi + \varepsilon, \quad (2.24)$$

за $k = 1, 2, \dots, K$, и

$$\left| \varphi_A(\omega) + (L - 2K)\omega + 2(k - 1)\pi \right| \leq \varepsilon, \quad \omega \in \mathcal{P}_k, \quad (2.25)$$

за $k = 1, 2, \dots, K + 1$, при чему је

$$\varepsilon = 2 \arccos 10^{a/20}. \quad (2.26)$$

Како је преносна функција филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$:

$$A_L(z) = z^{-L} \frac{P_L(z^{-1})}{P_L(z)} = z^{-L} \frac{1 + \sum_{l=1}^L p_l z^l}{1 + \sum_{l=1}^L p_l z^{-l}}, \quad (2.27)$$

у потпуности одређена полиномом у имениоцу $P_L(z)$, то је

$$\varphi_A(\omega) = \arg \{A_L(e^{j\omega})\} = -L\omega - 2\varphi_P(\omega), \quad (2.28)$$

где је са $\varphi_P(\omega)$ означена фазна карактеристика FIR мреже минималне фазе $P_L(z)$.

Коришћењем релације (2.28), релације (2.19) и (2.20) могу се записати у алтернативном облику на следећи начин

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \left| \cos(\varphi_P(\omega) + K\omega) \right|, \quad (2.29)$$

$$\varphi_H(\omega) = -(\varphi_P(\omega) + (L - K)\omega) + \arg \{ \cos(\varphi_P(\omega) + K\omega) \}. \quad (2.30)$$

Аналогно, релације (2.22), (2.23) и (2.24) постају

$$\varphi_P(\omega_{n,k}) = -K\omega_{n,k} + (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad (2.31)$$

$$\varphi_P(\omega_{l,k}) = -K\omega_{l,k} + (k-1)\pi + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.32)$$

$$\varphi_P(\omega_{r,k}) = -K\omega_{r,k} + k\pi - \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.33)$$

за $k = 1, 2, \dots, K$, док се релација (2.25) може написати у облику

$$\left| \varphi_P(\omega) + K\omega - (k-1)\pi \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega \in \mathcal{P}_k, \quad (2.34)$$

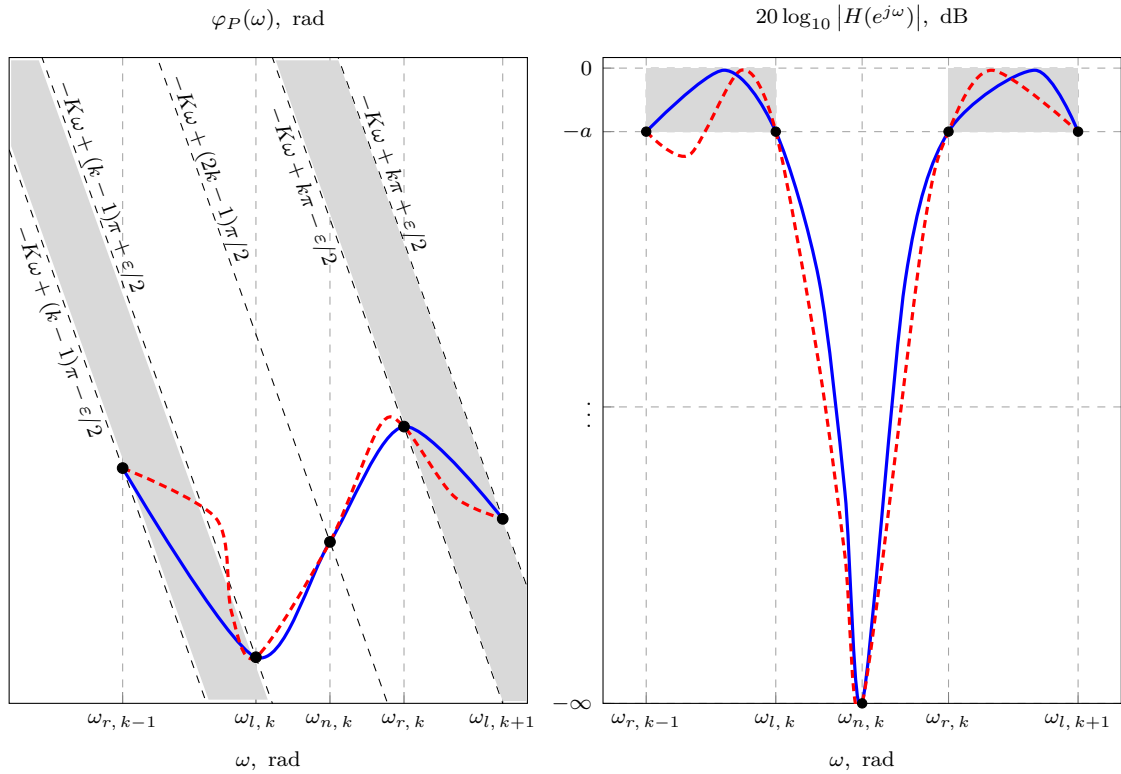
за $k = 1, 2, \dots, K+1$. Треба приметити да у релацијама (2.29) – (2.34) не фигурише ред филтра свепропусника фреквенција L , за разлику од релација (2.19), (2.20), (2.22) – (2.25).

Претходним релацијама проблем апроксимације амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног филтра непропусника опсега сведен је на проблем апроксимације фазне карактеристике FIR филтра минималне фазе. Графичка интерпретација спецификација датих релацијама (2.31) – (2.34) приказана је на слици 2.2, где су осенчене области одређене неједнакошћу (2.34). Уколико фазна карактеристика $\varphi_P(\omega)$ пролази кроз осенчене области за $\omega \in \mathcal{P}_k \cup \mathcal{P}_{k+1}$ и тачке дефинисане релацијама (2.31), (2.32) и (2.33), спецификације амплитудске карактеристике су задовољене (плава линија). Са друге стране, уколико фазна карактеристика $\varphi_P(\omega)$ не пролази кроз осенчену област за $\omega \in \mathcal{P}_k$, спецификације везане за појачање у k -том пропусном опсегу нису задовољене (црвена испрекидана линија).

Уколико је ред филтра свепропусника фреквенција једнак двоструком броју непропусних опсега, $L = 2K$, релација (2.19) постаје

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \left| \cos \frac{\varphi_A(\omega)}{2} \right|. \quad (2.35)$$

Обзиром да је спецификација филтра одређено $3K$ тачака на фазној карактеристици филтра свепропусника фреквенција, релације (2.22), (2.23) и (2.24), односно FIR филтра минималне фазе, релације (2.31), (2.32) и (2.33), док је број непознатих коефицијената филтра једнак $2K$, поменуте спецификације везане за положај централних и граничних фреквенција непропусних опсега, у општем случају, не могу



Сл. 2.2: Графичка интерпретација спецификација ускопојасног IIR филтра непропусника опсега.

бити истовремено задовољене. Са друге стране, како је фазна карактеристика $\varphi_A(\omega)$ монотono опадајућа функција фреквенције, највеће слабљење у појединачним пропусним опсезима биће на једној од његових граничних фреквенција – тј. амплитудска карактеристика добијеног филтра је по пропусним опсезима конкавна функција фреквенције. Практичан успех метода [13, 14, 24] лежи управо у овој чињеници, иако оне не пружају могућност додатног побољшања амплитудске карактеристике у пропусним опсезима, нити стриктно задовољење спецификација везаних за положај централних и граничних фреквенција непропусних опсега. Још једна предност ових метода јесте њихова неитеративна природа.

Међутим, уколико је $L > 2K$, аргумент косинусне функције, релација (2.19), није у општем случају монотono опадајућа функција фреквенције, због чега се у поступку синтезе мора узети у обзир и релација (2.25), односно релација (2.34). Методи код којих је $L > 2K$ могу резултовати побољшањем амплитудске карактеристике филтра у пропусним опсезима и/или задовољењем свих спецификација везаних за положај централних и граничних фреквенција непропусних опсега. У радовима [25, 26] приказан је итеративни метод за синтезу који, осим задовољења

спецификација везаних за положај централних фреквенција непропусних опсега, пружа могућност побољшања амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.

2.4 Веза фазне карактеристике и коефицијената нерекурзивне дигиталне мреже

Ограничења која се постављају пред фазну карактеристику филтра свепропусника фреквенција, релације (2.22), (2.23) и (2.24), односно одговарајућег FIR филтра минималне фазе, релације (2.31), (2.32) и (2.33), су нелинеарна по непознатим коефицијентима филтра. У излагању које следи изведена је релација која даје везу између фазне карактеристике и коефицијената FIR филтра. С обзиром да неке од, у овој дисертацији, предложених метода синтезе полазе од погодне декомпозиције филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$, тј. непознати коефицијенти филтра се индиректно одређују, закључци приказани у наставку односе се на FIR филтре у општем случају.

Нека је са $G_N(z)$ означена преносна функција FIR филтра N -тог реда

$$G_N(z) = 1 + \sum_{n=1}^N g_n z^{-n}, \quad (2.36)$$

док је са $\varphi_G(\omega)$ означена његова фазна карактеристика. Полазећи од релације

$$\operatorname{tg} \varphi_G(\omega) = \frac{\sin \varphi_G(\omega)}{\cos \varphi_G(\omega)} = - \frac{\sum_{n=1}^N g_n \sin(n\omega)}{1 + \sum_{n=1}^N g_n \cos(n\omega)}, \quad (2.37)$$

унакрским множењем добија се

$$\sin \varphi_G(\omega) \left[1 + \sum_{n=1}^N g_n \cos(n\omega) \right] = - \cos \varphi_G(\omega) \sum_{n=1}^N g_n \sin(n\omega). \quad (2.38)$$

Применом адиционе формуле

$$\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta),$$

релација (2.38) се своди на

$$\sin \varphi_G(\omega) + \sum_{n=1}^N g_n \sin(\varphi_G(\omega) + n\omega) = 0. \quad (2.39)$$

Иако се последња релација једноставно изводи, њен значај у поступку синтезе ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега заснованог на примени филтра свепропусника фреквенција је велики. Разлог за поменути тврдњу лежи у чињеници да се, уколико је позната (тј. унапред задата) вредност фазне карактеристике FIR мреже на одређеној фреквенцији, претходна релација своди на линеарну по непознатим коефицијентима филтра.

Треба истаћи да је релација (2.39) коришћена у радовима [13, 14, 24], мада у нешто сложенијем облику. У радовима [13, 14] ова релација је облика

$$\sum_{n=1}^N g_n [\sin(n\omega) + \operatorname{tg} \varphi_G(\omega) \cdot \cos(n\omega)] = -\operatorname{tg} \varphi_G(\omega), \quad (2.40)$$

због чега метод приказан у овим радовима није применљив у случајевима када су спецификације филтра такве да је на некој фреквенцији од интереса, $\omega = \omega_s$, вредност фазне карактеристике $\varphi_G(\omega_s)$ блиска или једнака $\pi/2$. Овај недостатак је отклоњен у раду [24] где је коришћена следећа релација

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N g_n \left\{ \cos[2\varphi_G(\omega) + n\omega] - \sin[2\varphi_G(\omega) + n\omega] - \cos(n\omega) - \sin(n\omega) \right\} \\ = 1 - \cos 2\varphi_G(\omega) + \sin 2\varphi_G(\omega). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Нови методи синтезе ускопојасних IIR филтара непропусника опсега

ТЕМА овог поглавља јесу нови методи синтезе ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега чија примена резултује оствареном симетријом граничних фреквенција око централних фреквенција непропусних опсега. Додатно, нови методи биће упоређени са оним постојећим методима синтезе из литературе који узимају о обзир спецификације везане за ширине непропусних опсега дефинисане за произвољну вредност појачања на граничним фреквенцијама непропусних опсега и који гарантују стриктно задовољење спецификација везаних за положај централних фреквенција непропусних опсега.

Коришћењем релације (2.39), која даје везу између фазне карактеристике и коефицијената FIR филтра, релације (2.31), (2.32) и (2.33) могу се свести на линеарне по непознатим коефицијентима филтра:

$$\sum_{i=1}^L p_i \cos(\omega_{n,k}(K-i)) = -\cos K\omega_{n,i}, \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^L p_i \sin\left(\omega_{l,k}(K-i) - \frac{\varepsilon}{2}\right) = -\sin\left(K\omega_{l,k} - \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^L p_i \sin\left(\omega_{r,k}(K-i) + \frac{\varepsilon}{2}\right) = -\sin\left(K\omega_{r,k} + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad (3.3)$$

за $k = 1, 2, \dots, K$. Уколико је $L < 3K$, истовремено задовољење спецификација везаних за положај левих и десних граничних, као и централних фреквенција непропусних опсега, у општем случају, није могуће, с обзиром да је број једначина једнак троструком броју непропусних опсега.

Са друге стране, уколико је $L = 3K$, непознатих $3K$ коефицијената филтра једнозначно је одређено решењем система од $3K$ линеарних једначина са $3K$ непознатих, релације (3.1), (3.2) и (3.3),

$$\mathbf{p} = \mathbf{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\gamma}, \quad (3.4)$$

где је

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_L]^T, \quad (3.5)$$

$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_k]$ вектор димензија $3K \times 1$, док је $\mathbf{\Phi} = [\phi_{ki}]$ матрица димензија $3K \times 3K$, при чему важи

$$\gamma_k = \begin{cases} -\cos K\omega_{n,k}, & k \leq K \\ -\sin(K\omega_{l,k-K} - \varepsilon/2), & K < k \leq 2K, \\ -\sin(K\omega_{r,k-2K} + \varepsilon/2), & k > 2K \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\phi_{ki} = \begin{cases} \cos(\omega_{n,k}(K-i)), & k \leq K \\ \sin(\omega_{l,k-K}(K-i) - \varepsilon/2), & K < k \leq 2K. \\ \sin(\omega_{r,k-2K}(K-i) + \varepsilon/2), & k > 2K \end{cases}$$

Релацијама (3.4) и (3.6) одређен је нов метод синтезе ускопојасних ПР филтара непропусника опсега назван метод I. Примена овог метода резултује оствареном симетријом одговарајућих граничних фреквенција око централних фреквенција непропусних опсега, тј. спецификације везане за ширине непропусних опсега су задовољене. Међутим, како аргумент косинусне функције, релација (2.19), није у општем случају монотono опадајућа функција фреквенције за $L > 2K$, слабљење у пропусним опсезима не мора бити највеће на граничним фреквенцијама. Другим речима, примена метода I не резултује, у општем случају, задовољењем релације (2.34), односно (2.6), тј. опсег њене примене је ограничен. Додатно, поменути

метод не пружа могућност побољшања амплитудске карактеристике филтра у пропусним опсезима.

Са друге стране, нумерички се може показати да амплитудска карактеристика ускопојасног IIR филтра непропусника једног опсега чији су коефицијенти одређени применом метода I, задовољава релацију (2.6) у широком интервалу вредности појачања на граничним фреквенцијама $a \in [-3, -10^{-3}]$ dB, положаја централне фреквенције непропусног опсега $\omega_{n,1} \in [0,1\pi, 0,9\pi]$ rad и ширине непропусног опсега $BW_1 \in [10^{-3}\pi, 0,1\pi]$ rad. У овом случају, тј. за $K = 1$, једноставно се могу одредити релације по непознатим коефицијентима филтра p_2 и p_3 у затвореном облику:

$$p_3 = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{BW_1}{4} \sin(2\varepsilon) \cos \omega_{n,1}}{\cos^2 \omega_{n,1} \left[\cos \frac{BW_1}{4} + \sin \left(\frac{3BW_1}{4} - \varepsilon \right) \sin \varepsilon \right] - \cos \frac{BW_1}{4} \cos^2 \left(\frac{BW_1}{2} - \varepsilon \right)}, \quad (3.7)$$

$$p_2 = \frac{\cos^2 \omega_{n,1} \left[\cos \varepsilon - 2 \sin \frac{BW_1}{2} \sin \varepsilon \right] \cos \left(\frac{BW_1}{4} - \varepsilon \right)}{\cos^2 \omega_{n,1} \left[\cos \frac{BW_1}{4} + \sin \left(\frac{3BW_1}{4} - \varepsilon \right) \sin \varepsilon \right] - \cos \frac{BW_1}{4} \cos^2 \left(\frac{BW_1}{2} - \varepsilon \right)} - \frac{\cos \frac{BW_1}{4} \cos \left(\frac{BW_1}{2} - \varepsilon \right) \cos \left(\frac{BW_1}{2} + \varepsilon \right)}{\cos^2 \omega_{n,1} \left[\cos \frac{BW_1}{4} + \sin \left(\frac{3BW_1}{4} - \varepsilon \right) \sin \varepsilon \right] - \cos \frac{BW_1}{4} \cos^2 \left(\frac{BW_1}{2} - \varepsilon \right)}, \quad (3.8)$$

док је коефицијент p_1 одређен релацијом

$$p_1 = -(1 + p_2) \cos \omega_{n,1} - p_3 \cos(2\omega_{n,1}). \quad (3.9)$$

У даљем разматрању ће бити представљени методи синтезе ускопојасних рекурзивних дигиталних филтара непропусника опсега који представљају генерализацију метода I, а чија примена резултује задовољењем спецификација везаних за појачање филтра у пропусним опсезима, што је остварено минимизацијом погодне изабране мере грешке амплитудске карактеристике. Поменуто побољшање долази по цени нешто вишег реда филтра свепропусника фреквенција који карактерише ускопојасни IIR филтар непропусник опсега.

3.1 Мера грешке амплитудске карактеристике филтра

Имајући у виду релацију (2.29), природно се намеће усвајање следеће функције грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима

$$E_p(\omega) = \sin(\varphi_P(\omega) + K\omega), \quad (3.10)$$

која је уједно и функција грешке фазне карактеристике $\varphi_P(\omega)$ у пропусним опсезима, релација (2.34).

Непознати коефицијенти филтра, код свих предложених метода, одређени су минимизацијом квадратне мере грешке амплитудске карактеристике

$$J = \int_{\mathcal{P}} E_p^2(\omega) d\omega, \quad (3.11)$$

уз услов да су остварене ширине непропусних опсега једнаке задатим спецификацијама, тј. важе релације (3.1), (3.2) и (3.3), као и евентуална додатна ограничења, о којима ће бити речи касније.

Сви разматрани методи могу се поделити на:

- Директне, код којих се непознати коефицијенти филтра,

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_L]^T,$$

добивају као решење постављеног минимизационог проблема.

Како је

$$\varphi_P(\omega) + K\omega = \arg \{ e^{jK\omega} \cdot P_L(e^{j\omega}) \}, \quad (3.12)$$

и имајући у виду тригонометријску идентичност

$$\sin(\arg\{\cdot\}) = \frac{\text{Im}\{\cdot\}}{|\cdot|},$$

где је са $\text{Im}\{\cdot\}$ означен имагинарни део одговарајуће комплексне функције,

релација (3.10) може се написати у следећем облику

$$E_p(\omega) = \frac{\sin K\omega + \sum_{l=1}^L p_l \sin(\omega(K-l))}{|P_L(e^{j\omega})|}. \quad (3.13)$$

Како се захтева да остварене ширине непропусних опсега буду једнаке задатим спецификацијама, непознати вектор коефицијената \mathbf{p} мора бити такав да важе једнакости (3.1), (3.2) и (3.3). Елиминацијом променљивих

$$\mathbf{p}_e = [p_1, p_2, \dots, p_{3K}]^T = \mathbf{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{\Upsilon}\mathbf{p}_x), \quad (3.14)$$

где су елементи вектора $\boldsymbol{\gamma}$ и матрице $\mathbf{\Phi}$ одређени релацијом (3.6), $\mathbf{\Upsilon} = [v_{ki}]$ је матрица димензија $3K \times (L - 3K)$ чији су елементи

$$v_{ki} = \begin{cases} \cos(\omega_{n,k}(2K+i)), & k \leq K \\ -\sin(\omega_{l,k-K}(2K+i) + \varepsilon/2), & K < k \leq 2K, \\ -\sin(\omega_{r,k-2K}(2K+i) - \varepsilon/2), & k > 2K \end{cases} \quad (3.15)$$

док је

$$\mathbf{p}_x = [p_{3K+1}, p_{3K+2}, \dots, p_L]^T, \quad (3.16)$$

релација (3.13) постаје:

$$E_p(\omega, \mathbf{p}_x) = \frac{\sin K\omega + \mathbf{c}(\omega)\mathbf{\Phi}^{-1}\boldsymbol{\gamma} - (\mathbf{c}(\omega)\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{\Upsilon} - \mathbf{d}(\omega))\mathbf{p}_x}{|P_L(e^{j\omega}, \mathbf{p}_x)|}, \quad (3.17)$$

где је

$$P_L(e^{j\omega}, \mathbf{p}_x) = 1 + [e^{-j\omega}, e^{-j2\omega}, \dots, e^{-jL\omega}] \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{\Upsilon}\mathbf{p}_x) \\ \mathbf{p}_x \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

док су $\mathbf{c}(\omega) = [c_i(\omega)]$ и $\mathbf{d}(\omega) = [d_i(\omega)]$ вектори димензија $1 \times 3K$ и $1 \times (L - 3K)$,

респективно, са елементима једнаким

$$\begin{aligned} c_i(\omega) &= \sin(\omega(K - i)), \\ d_i(\omega) &= -\sin(\omega(2K + i)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Коначно, коефицијенти филтра код директних метода одређени су минимизацијом квадратне мере грешке

$$J(\mathbf{p}_x) = \int_{\mathcal{P}} E_p^2(\omega, \mathbf{p}_x) d\omega, \quad (3.20)$$

уз или без додатних ограничења. Једном када су коефицијенти \mathbf{p}_x одређени, преостали коефицијенти \mathbf{p}_e могу се одредити применом релације (3.14).

- Индиректне, код којих се непознати коефицијенти филтра \mathbf{p} индиректно одређују. Наиме, полази се од претпоставке да се преносна функција FIR филтра $P_L(z)$, која у потпуности дефинише преносну функцију IIR филтра непропусника опсега, релације (2.16) и (2.27), може представити у виду каскадне спреге две нерекурзивне преносне функције са реалним коефицијентима

$$P_L(z) = B_{3K}(z)F_{L-3K}(z), \quad (3.21)$$

при чему је

$$B_{3K}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{3K} b_k z^{-k}, \quad F_{L-3K}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{L-3K} f_k z^{-k}. \quad (3.22)$$

Како је на основу претходне релације фазна карактеристика $\varphi_P(\omega)$ одређена са

$$\varphi_P(\omega) = \varphi_B(\omega) + \varphi_F(\omega), \quad (3.23)$$

где су $\varphi_B(\omega)$ и $\varphi_F(\omega)$ фазне карактеристике нерекурзивних мрежа $B_{3K}(z)$ и $F_{L-3K}(z)$, респективно, то се функција грешке амплитудске карактеристике ускопојасног IIR филтра непропусника опсега, релација (3.10), може написати у следећем облику

$$E_p(\omega) = \sin(\varphi_B(\omega) + K\omega) \cos \varphi_F(\omega) + \cos(\varphi_B(\omega) + K\omega) \sin \varphi_F(\omega). \quad (3.24)$$

Уврштавајући идентичности

$$\sin(\varphi_F(\omega)) = -\frac{\sum_{k=1}^{L-3K} f_k \sin(k\omega)}{\left|F_{L-3K}(e^{j\omega})\right|}, \quad \cos(\varphi_F(\omega)) = \frac{1 + \sum_{k=1}^{L-3K} f_k \cos(k\omega)}{\left|F_{L-3K}(e^{j\omega})\right|}, \quad (3.25)$$

након краћег сређивања, релација (3.24) постаје

$$E_p(\omega, \mathbf{b}, \mathbf{f}) = \frac{\sin(\varphi_B(\omega, \mathbf{b}) + K\omega) + \sum_{k=1}^{L-3K} f_k \sin(\varphi_B(\omega, \mathbf{b}) + \omega(K-k))}{\left|F_{L-3K}(e^{j\omega}, \mathbf{f})\right|}, \quad (3.26)$$

при чему је $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_{L-3K}]^T$ и $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_{3K}]^T$.

Идеја предложеног индиректног итеративног метода, којим је одређен и ред филтра свепропусника фреквенција L^1 , јесте да се рекурзивном мрежом $B_{3K}(z)$ изврши подешавање положаја централних и граничних фреквенција непропусних опсега, док се мрежом $F_{L-3K}(z)$ контролише вредност грешке амплитудске карактеристике ускопојасног ПР филтра непропусника опсега у пропусним опсезима.

3.2 Директно одређивање коефицијената филтра безусловном минимизацијом квадратне мере грешке

У наставку ће бити изложени директни методи синтезе рекурзивног ускопојасног филтра непропусника опсега, а који полазе од нелинеарног безусловног минимационог проблема

$$\underset{\mathbf{p}_x}{\text{минимизирати}} \quad J(\mathbf{p}_x), \quad (3.27)$$

који не припада скупу решивих задатака нелинеарног програмирања. Међутим, показује се да се до прихватљивог решења може доћи на најмање два начина, који

¹За разлику од директних метода, ред филтра свепропусника фреквенција L не задаје се спецификацијама већ је одређен итеративним алгоритмом и представља минимални ред филтра за који су спецификације задовољене.

карактеришу итеративан, Па, и неитеративан, Пб, метод, који ће бити представљени у даљем излагању.

3.2.1 Метод Па

Вредност вектора непознатих коефицијената \mathbf{p}_x одређује се итеративним поступком коришћењем SM (Steiglitz-McBride) приступа [34], при чему се у i -тој итерацији решава следећи минимизациони проблем

$$\underset{\mathbf{p}_x^{(i)}}{\text{минимизирати}} \quad \tilde{J}_i(\mathbf{p}_x^{(i)}) = \int_{\mathcal{P}} \left[\frac{\sin K\omega + \mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\gamma} - (\mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} - \mathbf{d}(\omega))\mathbf{p}_x^{(i)}}{|P_L(e^{j\omega}, \mathbf{p}_x^{(i-1)})|} \right]^2 d\omega. \quad (3.28)$$

Како се $\tilde{J}_i(\mathbf{p}_x^{(i)})$ може представити у облику

$$\tilde{J}_i(\mathbf{p}_x^{(i)}) = (\mathbf{p}_x^{(i)})^T \mathbf{Q}_i \mathbf{p}_x^{(i)} - 2\mathbf{s}_i \mathbf{p}_x^{(i)} + t_i, \quad (3.29)$$

где је

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i &= \int_{\mathcal{P}} \frac{(\mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} - \mathbf{d}(\omega))^T (\mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} - \mathbf{d}(\omega))}{|P_L(e^{j\omega}, \mathbf{p}_x^{(i-1)})|^2} d\omega, \\ \mathbf{s}_i &= \int_{\mathcal{P}} \frac{(\sin K\omega + \mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\gamma}) (\mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} - \mathbf{d}(\omega))}{|P_L(e^{j\omega}, \mathbf{p}_x^{(i-1)})|^2} d\omega, \\ t_i &= \int_{\mathcal{P}} \frac{(\sin K\omega + \mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\gamma})^2}{|P_L(e^{j\omega}, \mathbf{p}_x^{(i-1)})|^2} d\omega, \end{aligned} \quad (3.30)$$

решење безусловног минимизационог проблема одређено је релацијом

$$\mathbf{p}_x^{(i)} = \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{s}_i^T, \quad (3.31)$$

што је еквивалентно решавању система линеарних једначина $\mathbf{Q}_i \mathbf{p}_x^{(i)} = \mathbf{s}_i^T$. Како се интеграл који одређује матрицу \mathbf{Q}_i и вектор \mathbf{s}_i , релација (3.30), не могу решити аналитички, потребно је користити неку од расположивих метода нумеричке интеграције.

Имајући у виду претходна разматрања, као и чињеницу да је

$$J(\mathbf{p}_x^{(i-1)}) = (\mathbf{p}_x^{(i-1)})^T \mathbf{Q}_i \mathbf{p}_x^{(i-1)} - 2\mathbf{s}_i \mathbf{p}_x^{(i-1)} + t_i, \quad (3.32)$$

непознати коефицијенти филтра у случају примене метода Па могу се одредити следећим алгоритмом:

Корак 1. Задати појачање филтра на граничним фреквенцијама непропусних опсега a у dB, број непропусних опсега K , централне фреквенције $\omega_{n,k}$ и ширине непропусних опсега BW_k за $k = 1, 2, \dots, K$, као и ред филтра свепропусника фреквенција L . Одредити $\omega_{l,k}$, $\omega_{r,k}$, и ε коришћењем релација (2.1) и (2.26).

Корак 2. Одредити вектор $\boldsymbol{\gamma}$ и матрице Φ и Υ коришћењем релација (3.6) и (3.15). Иницијализовати вредност вектора непознатих коефицијената филтра

$$\mathbf{p}_x^{(0)} = [0, 0, \dots, 0]^T.$$

Иницијализовати вредност тренутне итерације $i = 1$.

Корак 3. Одредити \mathbf{Q}_i , \mathbf{s}_i и t_i коришћењем релације (3.30).

Корак 4. Одредити меру грешке амплитудске карактеристике у итерацији $(i - 1)$, $J(\mathbf{p}_x^{(i-1)})$, коришћењем релације (3.32).

Корак 5. Уколико је $i = 1$ прећи на корак 7. У супротном прећи на корак 6.

Корак 6. Уколико је $\alpha \cdot J(\mathbf{p}_x^{(i-2)}) \leq J(\mathbf{p}_x^{(i-1)})$, где је $\alpha \leq 1$ фактор конвергенције, прећи на корак 8. У супротном прећи на корак 7.

Корак 7. Одредити вектор $\mathbf{p}_x^{(i)}$ коришћењем релације (3.31). Инкрементирати вредност тренутне итерације $i = i + 1$ и прећи на корак 3.

Корак 8. Крај алгоритма. Вектор коефицијената филтра једнак је

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \Phi^{-1}(\boldsymbol{\gamma} - \Upsilon \mathbf{p}_x^{(i-2)}) \\ \mathbf{p}_x^{(i-2)} \end{bmatrix}.$$

3.2.2 Метод Пб

Вредност вектора непознатих коефицијената \mathbf{p}_x одређена је решењем минимизационог проблема

$$\underset{\mathbf{p}_x}{\text{минимизирати}} \quad \hat{J}(\mathbf{p}_x) = \int_{\mathcal{P}} \left[\sin K\omega + \mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\gamma} - \left(\mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} - \mathbf{d}(\omega) \right) \mathbf{p}_x \right]^2 d\omega, \quad (3.33)$$

добијеног занемаривањем имениоца подинтегралне функције $E_p^2(\omega, \mathbf{p}_x)$, релација (3.17). Како се $\hat{J}(\mathbf{p}_x)$ може представити у облику

$$\hat{J}(\mathbf{p}_x) = \mathbf{p}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{p}_x - 2\mathbf{s} \mathbf{p}_x + t, \quad (3.34)$$

где је

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \int_{\mathcal{P}} \left(\mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} - \mathbf{d}(\omega) \right)^T \left(\mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} - \mathbf{d}(\omega) \right) d\omega, \\ \mathbf{s} &= \int_{\mathcal{P}} \left(\sin K\omega + \mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\gamma} \right) \left(\mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} - \mathbf{d}(\omega) \right) d\omega, \\ t &= \int_{\mathcal{P}} \left(\sin K\omega + \mathbf{c}(\omega)\Phi^{-1}\boldsymbol{\gamma} \right)^2 d\omega, \end{aligned} \quad (3.35)$$

решење безусловног минимизационог проблема одређено је релацијом

$$\mathbf{p}_x = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{s}^T, \quad (3.36)$$

што је еквивалентно решавању система линеарних једначина $\mathbf{Q} \mathbf{p}_x = \mathbf{s}^T$.

За разлику од метода Па, решења интеграла којима су одређени матрица \mathbf{Q} и вектор \mathbf{s} , релација (3.35), могу се наћи у затвореном облику:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (\Phi^{-1}\boldsymbol{\Upsilon})^T \boldsymbol{\Theta} \Phi^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} - (\Phi^{-1}\boldsymbol{\Upsilon})^T \mathbf{X} - \left[(\Phi^{-1}\boldsymbol{\Upsilon})^T \mathbf{X} \right]^T + \boldsymbol{\Delta}, \\ \mathbf{s} &= \left[(\Phi^{-1}\boldsymbol{\gamma})^T \boldsymbol{\Theta} + \boldsymbol{\mu} \right] \Phi^{-1}\boldsymbol{\Upsilon} - (\Phi^{-1}\boldsymbol{\gamma})^T \mathbf{X} - \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где су $\boldsymbol{\mu} = [\mu_i]$ и $\boldsymbol{\eta} = [\eta_i]$ вектори димензија $1 \times 3K$ и $1 \times (L-3K)$, док су $\boldsymbol{\Theta} = [\vartheta_{ij}]$, $\mathbf{X} = [\xi_{ij}]$ и $\boldsymbol{\Delta} = [\delta_{ij}]$ матрице димензија $3K \times 3K$, $3K \times (L-3K)$ и $(L-3K) \times (L-3K)$,

респективно, при чему је

$$\begin{aligned}
 \mu_i &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K+1} \left\{ \omega [\text{sinc}(i\omega) - \text{sinc}(\omega(2K - i))] \right\}_{\min \mathcal{P}_k}^{\max \mathcal{P}_k}, \\
 \eta_i &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K+1} \left\{ \omega [\text{sinc}(\omega(3K + i)) - \text{sinc}(\omega(K + i))] \right\}_{\min \mathcal{P}_k}^{\max \mathcal{P}_k}, \\
 \vartheta_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K+1} \left\{ \omega [\text{sinc}(\omega(i - j)) - \text{sinc}(\omega(i + j - 2K))] \right\}_{\min \mathcal{P}_k}^{\max \mathcal{P}_k}, \\
 \xi_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K+1} \left\{ \omega [\text{sinc}(\omega(3K - i + j)) - \text{sinc}(\omega(K + i + j))] \right\}_{\min \mathcal{P}_k}^{\max \mathcal{P}_k}, \\
 \delta_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K+1} \left\{ \omega [\text{sinc}(\omega(i - j)) - \text{sinc}(\omega(4K + i + j))] \right\}_{\min \mathcal{P}_k}^{\max \mathcal{P}_k}.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Имајући у виду претходна разматрања, непознати коефицијенти ускопојасног ПР филтра непропусника опсега, у случају примене метода Пб, одређени су неитеративним алгоритмом који се састоји из следећих корака:

Корак 1. Задати појачање филтра на граничним фреквенцијама непропусних опсега a у dB, број непропусних опсега K , централне фреквенције $\omega_{n,k}$ и ширине непропусних опсега BW_k за $k = 1, 2, \dots, K$, као и ред филтра свепропусника фреквенција L . Одредити $\omega_{l,k}$, $\omega_{r,k}$, и ε коришћењем релација (2.1) и (2.26).

Корак 2. Одредити вектор γ и матрице Φ и Υ коришћењем релација (3.6) и (3.15).

Корак 3. Одредити \mathbf{Q} и \mathbf{s} коришћењем релације (3.37).

Корак 4. Одредити вектор \mathbf{p}_x коришћењем релације (3.36).

Корак 5. Крај алгоритма. Вектор непознатих коефицијената филтра једнак је

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \Phi^{-1}(\gamma - \Upsilon \mathbf{p}_x) \\ \mathbf{p}_x \end{bmatrix}.$$

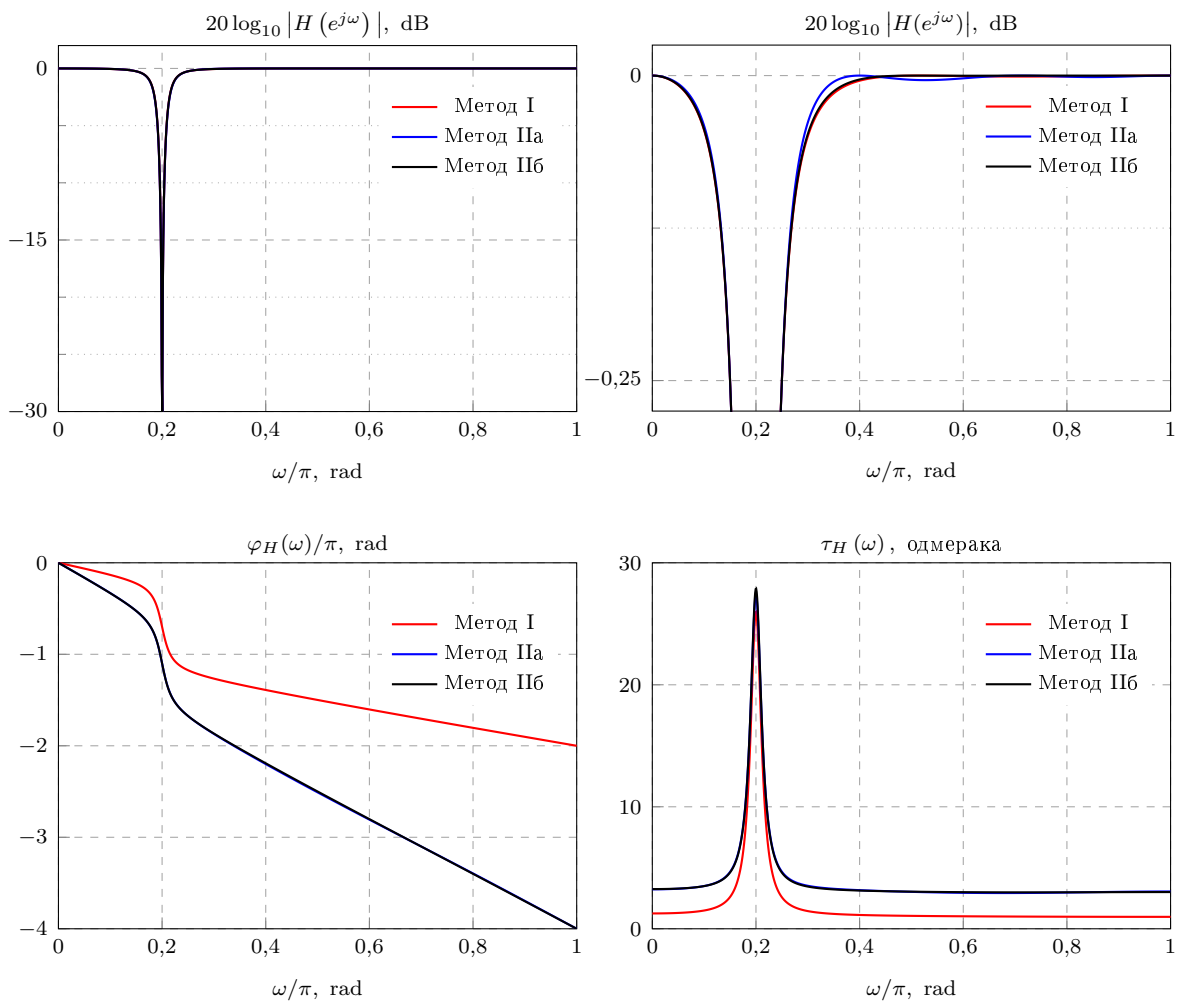
Овде треба поменути да је дискретни еквивалент метода Пб за случај када је $a = -3$ dB приказан у раду [37].

3.2.3 Примери синтезе

До сада описани методи синтезе, тј. методи I, IIa и IIб, биће искоришћени за одређивање коефицијената три ускопојасна ПР филтра непропусника опсега. У случају примене метода IIa, усвојено је да је вредност фактора конвергенције α једнака 0,99.

Пример 3.1 Спецификације филтра су $\omega_{n,1} = 0,2\pi$, $BW_1 = 0,1\pi$, $a = -0,25$ dB. У случају примене метода IIa и IIб ред филтра свепропусника фреквенција је $L = 5$.

На слици 3.1 приказане су карактеристике појачања, увећане карактеристике појачања у пропусним опсезима, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом предложених метода. Модули ρ и фазни



Сл. 3.1: Пример 3.1. Карактеристике појачања, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом предложених метода.

3.2. Директно одређивање коефицијената филтра безусловном минимизацијом квадратне мере грешке

углови θ полова, као и вредности квадратне мере грешке амплитудске карактеристике добијених филтара у пропусним опсезима, J , дати су у табели 3.1.

Таб. 3.1: Пример 3.1. Модули и фазни углови полова ускопојасног ПР филтра непропусника опсега и вредност мере грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.

Метод	$\rho \cdot 10^3$	θ/π , rad	$J \cdot 10^3$
I	960,6959 46,7214	$\pm 0,20001213$ 0	10,65
IIa/IIб	959,6393/960,5133 282,0755/176,0542 277,0112/174,8203	$\pm 0,19998937 / \pm 0,20000881$ $\pm 0,29743125 / \pm 0,28702582$ 1/1	9,82/10,28

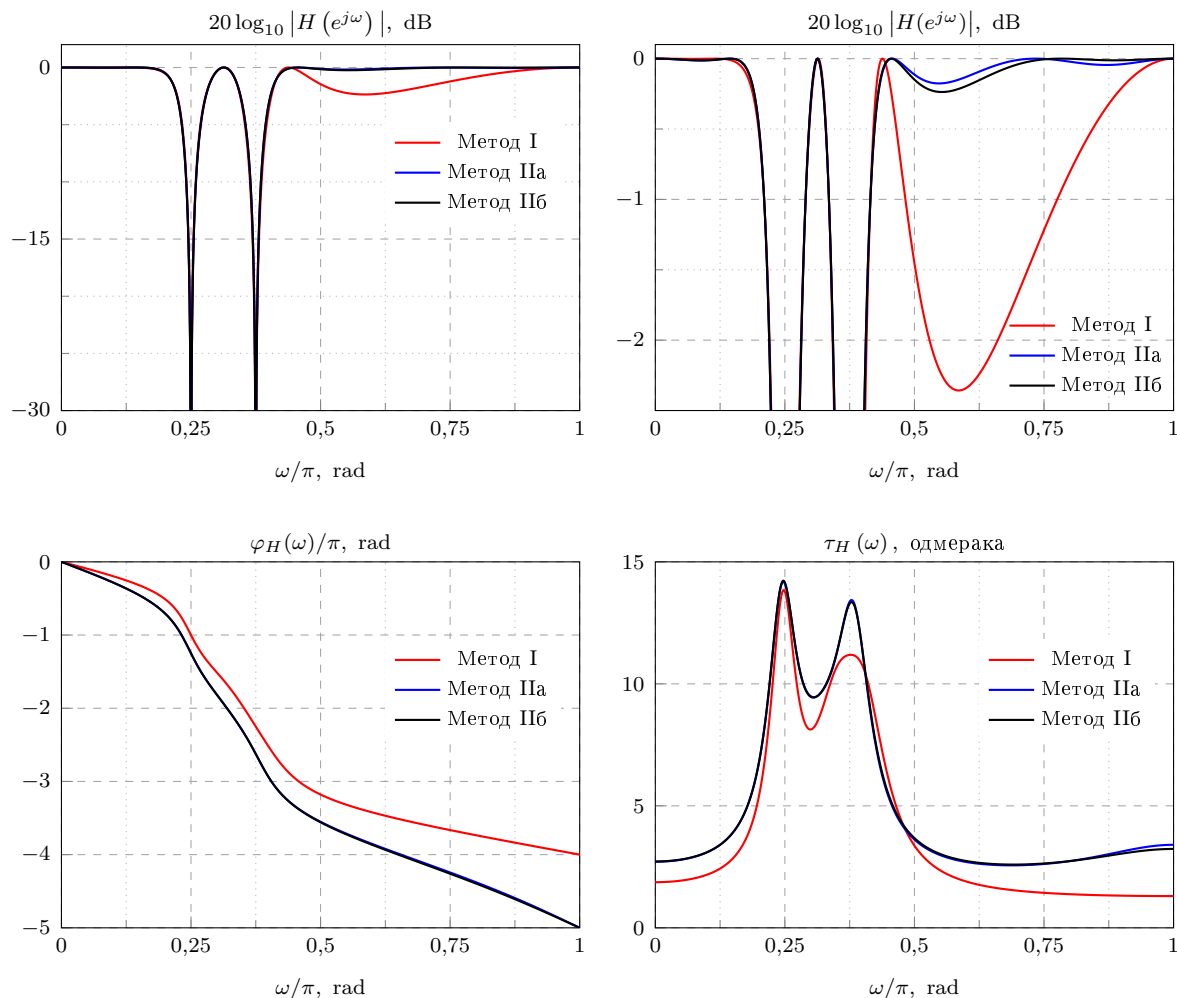
Као што се може уочити на слици 3.1, остварено побољшање амплитудске карактеристике у пропусним опсезима у случају коришћења метода IIa и IIб је незнатно у поређењу са методом I. Додатно, модули и фазни углови најудаљених полова код поменутих метода су приближно исти, табела 3.1. Имајући претходно у виду, може се закључити да је за задате спецификације филтра боље користити метод I обзиром да његова примена резултује нижим групним кашњењем филтра у пропусним опсезима, слика 3.1.

Пример 3.2 Спецификације филтра су $\omega_{n,1} = 0,25\pi$, $\omega_{n,2} = 0,375\pi$, $BW_1 = BW_2 = 0,08\pi$, $a = -1$ dB. У случају примене метода IIa и IIб ред филтра свепропусника фреквенција је $L = 7$.

На слици 3.2 приказане су карактеристике појачања, увећане карактеристике појачања у пропусним опсезима, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом предложених метода. Модули ρ и фазни углови θ полова, као и вредности квадратне мере грешке амплитудске карактеристике добијених филтара у пропусним опсезима, J , дати су у табели 3.2.

За задате спецификације филтра примена метода I не резултује применљивим ускопојасним филтром непропусником опсега што се може уочити на слици 3.2, обзиром да је максимална вредност слабљења у трећем пропусном опсегу већа од слабљења на граничним фреквенцијама непропусних опсега. Примена метода IIa и IIб резултује сличним карактеристикама филтара при чему је мера грешке нешто нижа у случају примене метода IIa, табела 3.2.

3.2. Директно одређивање коефицијената филтра безусловном минимизацијом квадратне мере грешке



Сл. 3.2: Пример 3.2. Карактеристике појачања, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом предложених метода.

Таб. 3.2: Пример 3.2. Модули и фазни углови полова ускопојасног IIR филтра непропусника опсега и вредност мере грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.

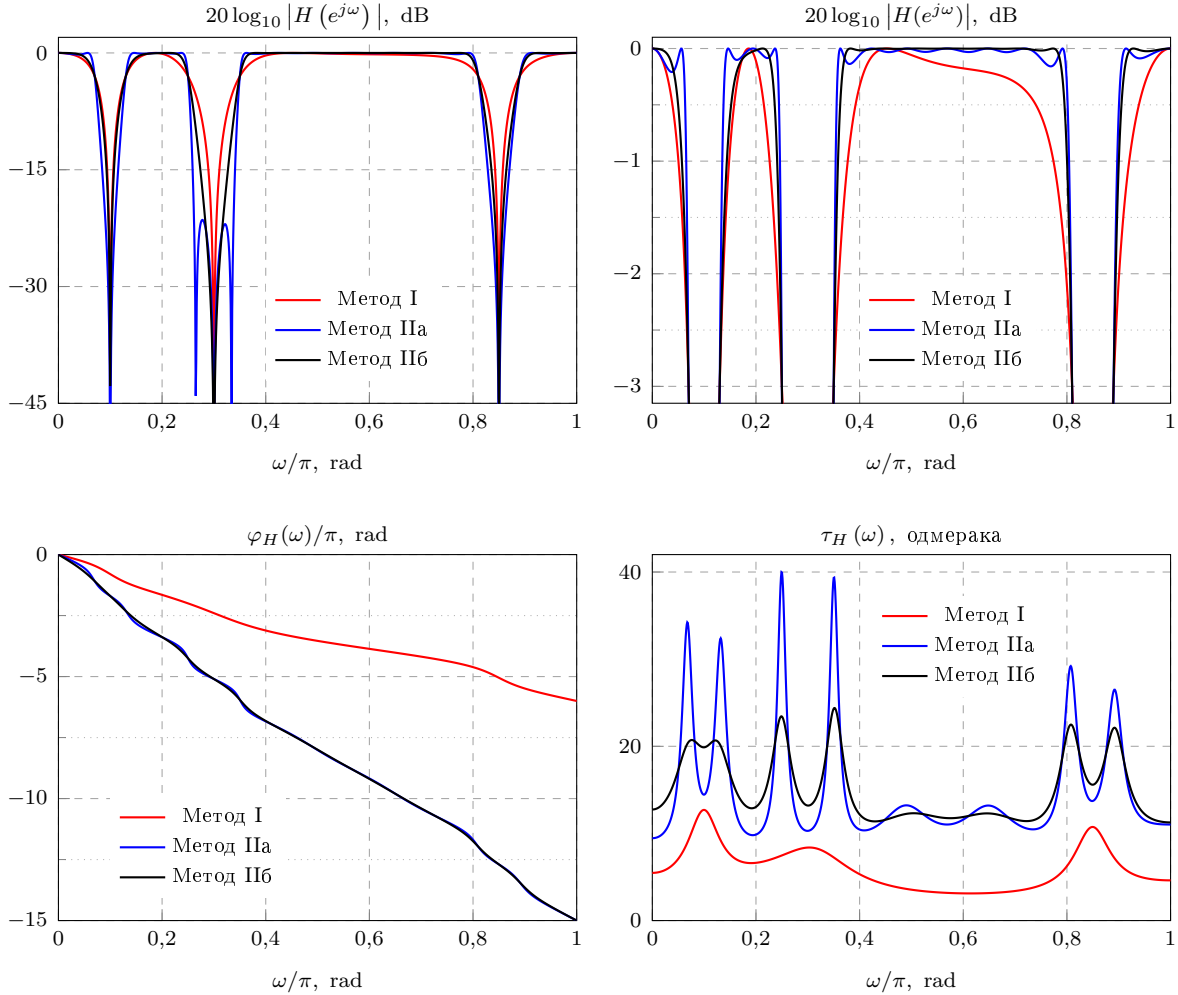
Метод	$\rho \cdot 10^3$	$\theta/\pi, \text{ rad}$	$J \cdot 10^2$
I	910,9047	$\pm 0,24656915$	40,38
	846,9173	$\pm 0,40277479$	
	838,8017	$\pm 0,35020686$	
IIa / IIб	901,7092 / 902,4443	$\pm 0,24513313 / \pm 0,24526668$	4,78 / 5,31
	886,1860 / 883,7630	$\pm 0,38216640 / \pm 0,38248135$	
	773,9361 / 774,6084	$\pm 0,32624294 / \pm 0,32885566$	
	521,0457 / 478,2370	1 / 1	

Пример 3.3 Спецификације филтра су $\omega_{n,1} = 0,1\pi$, $\omega_{n,2} = 0,3\pi$, $\omega_{n,3} = 0,85\pi$, $BW_1 = 0,06\pi$, $BW_2 = 0,1\pi$, $BW_3 = 0,08\pi$, $a = -3 \text{ dB}$. У случају примене метода IIa и IIб ред филтра свепропусника фреквенција је $L = 18$.

На слици 3.3 приказане су карактеристике појачања, увећане карактеристике по-

3.2. Директно одређивање коефицијената филтра безусловном минимизацијом квадратне мере грешке

јачања у пропусним опсезима, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом предложених метода. Модули ρ и фазни углови θ полова, као и вредности усвојене мере грешке амплитудске карактеристике добијених филтара у пропусним опсезима, J , дати су у табели 3.3.



Сл. 3.3: Пример 3.3. Карактеристике појачања, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом предложених метода.

Примена сва три метода резултује потпуним задовољењем спецификација везаних за положај централних фреквенција и ширине непропусних опсега, при чему је побољшање амплитудске карактеристике у пропусним опсезима уочљиво у случају примене методи IIa и IIb, слика 3.3 и табела 3.3. Међутим, примена метода IIa, а због високог реда филтра свепропусника фреквенција, $L = 18$, резултује филтарском функцијом са додатним нулама преноса које леже на јединичној кружници, тј. слабљење филтра је бесконачно на додатном броју фреквенција које су лоциране у прелазним областима, слика 3.3. Поменуто резултује повећањем вредности мо-

3.3. Директно одређивање коефицијената филтра условном минимизацијом квадратне мере грешке

Таб. 3.3: Пример 3.3. Модули и фазни углови полова ускопојасног ИР филтра непропусника опсега и вредност мере грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.

Метод	$\rho \cdot 10^3$	$\theta/\pi, \text{ rad}$	$J(\mathbf{p}_x) \cdot 10^2$
I	890,4374	$\pm 0,09914697$	26,95
	875,4062	$\pm 0,84896079$	
	770,2581	$\pm 0,31451441$	
	654,9159	$\pm 0,25976359$	
	506,0458	1	
IIa / IIб	969,0815 / 935,0980	$\pm 0,24966887 / \pm 0,35162018$	6,41 / 10,17
	968,1948 / 930,2307	$\pm 0,35049173 / \pm 0,24909782$	
	961,6788 / 922,9982	$\pm 0,06762252 / \pm 0,80730552$	
	958,8403 / 919,7530	$\pm 0,13197067 / \pm 0,89225542$	
	951,2099 / 897,0926	$\pm 0,80720106 / \pm 0,12685196$	
	942,8716 / 896,9328	$\pm 0,89199539 / \pm 0,07121556$	
	827,7341 / 759,4924	$\pm 0,48851588 / \pm 0,49884549$	
	823,7973 / 756,2763	$\pm 0,64926483 / \pm 0,65058005$	
	691,5639 / 629,4624	1 / 1	
	121,7945 / 283,4172	0 / 0	

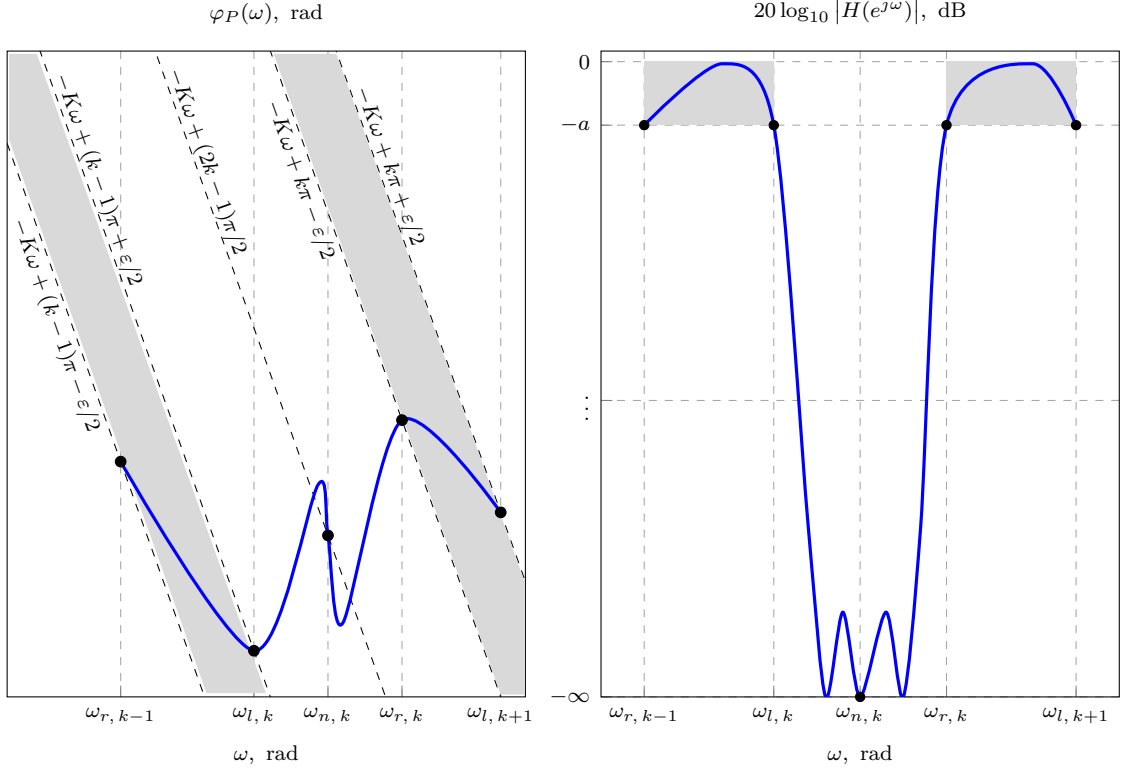
дула најудаљених полова, табела 3.3, што практично значи и повећану осетљивост карактеристика реализованог филтра на заокруживање вредности коефицијената множача као и дуже време потребно за потискивање синусоидалних сметњи. Треба истаћи да поменути ефекат није карактеристичан само за метод IIa, већ и за метод IIб, мада за задате спецификације филтра не долази до изражаја.

Један од начина превазилажења овог проблема јесте коришћење нижег реда филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$, док други подразумева минимизацију усвојене мере грешке амплитудске карактеристике филтра у пропусним опсезима, релација (3.20), уз додатна ограничења која морају задовољити коефицијенти филтра о чему ће бити речи у даљем излагању.

3.3 Директно одређивање коефицијената филтра условном минимизацијом квадратне мере грешке

Основни недостатак метода IIa и IIб, који долази до изражаја при вишим вредностима реда филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$, представља чињеница да се занемарује понашање амплитудске карактеристике филтра у прелазним областима што може резултовати бесконачним слабљењем филтра на додатном броју фреквенција које су лоциране у прелазним областима, слика 3.4. Као и на слици 2.2, осенчене области на слици 3.4 одређене су неједнакошћу (2.34), тј. представљају

области кроз које је потребно да прође фазна карактеристика $\varphi_P(\omega)$ за $\omega \in \mathcal{P}_k \cup \mathcal{P}_{k+1}$ како би спецификације везане за појачање филтра у пропусним опсезима биле задовољене, релација (2.6). Тачке на слици 3.4 одређене су релацијама (2.31), (2.32) и (2.33), тј. уколико $\varphi_P(\omega)$ пролази кроз њих, спецификације везане за ширине непропусних опсега су задовољене.



Сл. 3.4: Графичка интерпретација недостатка метода Па и Пб. Слабљење филтра је бесконачно на додатном броју фреквенција које су лоциране у прелазним областима, тј. фазна карактеристика $\varphi_P(\omega)$ и праве $-K\omega + (2k - 1)\pi/2$ имају више од једне заједничке тачке за $\omega \in (\omega_{l,k}, \omega_{r,k})$.

Имајући у виду да косинусна функција $\cos(\varphi_P(\omega) + K\omega)$, чијом апсолутном вредношћу је одређена амплитудска карактеристика филтра, релација (2.29), мења знак након сваког пресека фазне карактеристике $\varphi_P(\omega)$ и праве $-K\omega + (2k - 1)\pi/2$ за $\omega \in (\omega_{l,k}, \omega_{r,k})$, при чему је

$$\operatorname{sgn}\{\cos(\varphi_P(\omega) + K\omega)\} = \begin{cases} (-1)^{k-1}, & \omega = \omega_{l,k} \\ 0, & \omega = \omega_{n,k} \\ (-1)^k, & \omega = \omega_{r,k} \end{cases}, \quad (3.39)$$

потребан и довољан услов да карактеристика $\varphi_P(\omega)$ сече праву $-K\omega + (2k - 1)\pi/2$ у

само једној тачки за $\omega \in (\omega_{l,k}, \omega_{r,k})$, тј. у свега K тачака $\omega = \omega_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, K$, за $\omega \in \bigcup_{k=1}^K (\omega_{l,k}, \omega_{r,k})$, може се формулисати на следећи начин

$$(-1)^{k-1} \cos(\varphi_P(\omega) + K\omega) > 0, \quad \omega \in (\omega_{l,k}, \omega_{n,k}), \quad (3.40)$$

$$(-1)^k \cos(\varphi_P(\omega) + K\omega) > 0, \quad \omega \in (\omega_{n,k}, \omega_{r,k}), \quad (3.41)$$

за $k = 1, 2, \dots, K$.

Увођењем следеће нотације

$$\mathcal{T}_i = \begin{cases} \left\{ \omega \mid \omega_{l, \frac{i+1}{2}} < \omega < \omega_{n, \frac{i+1}{2}} \right\}, & i \text{ непарно} \\ \left\{ \omega \mid \omega_{n, \frac{i}{2}} < \omega < \omega_{r, \frac{i}{2}} \right\}, & i \text{ парно} \end{cases}, \quad (3.42)$$

за $i = 1, 2, \dots, 2K$, и коришћењем тригонометријске идентичности

$$\cos(\arg\{\cdot\}) = \frac{\operatorname{Re}\{\cdot\}}{|\cdot|},$$

након краћег сређивања, релације (3.40) и (3.41) постају

$$(-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \sum_{l=1}^L p_l \cos(\omega(K-l)) > (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 1} \cos K\omega, \quad \omega \in \mathcal{T}_i, \quad (3.43)$$

за $i = 1, 2, \dots, 2K$.

Уколико сваки од континуалних скупова фреквенција \mathcal{T}_i , $i = 1, 2, \dots, 2K$, заменимо дискретним скупом фреквенција $\tilde{\omega}_m^{(i)} \in \mathcal{T}_i$, за $m = 1, 2, \dots, M_i$, и коришћењем релације (3.14) која даје везу између вектора \mathbf{p}_e и \mathbf{p}_x , релација (3.43) може се написати у виду матричне неједнакости

$$\left(\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_{2K} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_{2K} \end{bmatrix} \Phi^{-1} \Upsilon \right) \mathbf{p}_x > \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_{2K} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_{2K} \end{bmatrix} \Phi^{-1} \gamma, \quad (3.44)$$

где су $\Lambda_i = [\lambda_{ml}^{(i)}]$ и $\Psi_i = [\psi_{ml}^{(i)}]$ матрице димензија $M_i \times (3K)$ и $M_i \times (L - 3K)$,

респективно, док је $\boldsymbol{\tau}_i = [\tau_m^{(i)}]$ вектор димензија $M_i \times 1$, чији су елементи

$$\begin{aligned}\lambda_{ml}^{(i)} &= (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \cos(\tilde{\omega}_m^{(i)}(K-l)), \\ \psi_{ml}^{(i)} &= (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \cos(\tilde{\omega}_m^{(i)}(2K+l)), \\ \tau_m^{(i)} &= (-1)^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor - 1} \cos K\tilde{\omega}_m^{(i)}.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Коначно, минимизациони проблем који је потребно решити како би слабљење филтра било бесконачно само на контролисаном броју фреквенција, тј. на K фреквенција одређених централним фреквенцијама непропусних опсега, $\omega_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, K$, може се формулисати на следећи начин:

$$\begin{aligned}\text{минимизирати } & J(\mathbf{p}_x), \\ & \mathbf{p}_x \\ \text{по ограничењима: } & (3.44).\end{aligned}\tag{3.46}$$

За разлику од минимизационог проблема датог релацијом (3.27), проблем (3.46) укључује линеарна ограничења по непознатим коефицијентима филтра дата неједнакостима. И овде, до прихватљивог решења се може доћи на најмање два начина, који карактеришу итеративни и неитеративни метод IIIа и IIIб, респективно.

3.3.1 Метод IIIа

Вредност вектора непознатих коефицијената \mathbf{p}_x одређује се итеративним поступком коришћењем SM приступа [34], при чему се у i -тој итерацији решава минимизациони проблем

$$\begin{aligned}\text{минимизирати } & \tilde{J}_i(\mathbf{p}_x^{(i)}) = (\mathbf{p}_x^{(i)})^T \mathbf{Q}_i \mathbf{p}_x^{(i)} - 2\mathbf{s}_i \mathbf{p}_x^{(i)} + t_i, \\ & \mathbf{p}_x^{(i)} \\ \text{по ограничењима: } & (3.44),\end{aligned}\tag{3.47}$$

где су \mathbf{Q}_i , \mathbf{s}_i и t_i одређени релацијом (3.30). Дефинисани минимизациони проблем је квадратни са линеарним ограничењима датим неједнакостима и може се решити коришћењем неког од доступних решавача попут CVXOPT-а [38].

Непознати коефицијенти ускопојасног IIR филтра непропусника опсега у случају примене метода IIIа одређени су следећим алгоритмом:

Корак 1. Задати појачање филтра на граничним фреквенцијама непропусних опсега a у dB, број непропусних опсега K , централне фреквенције $\omega_{n,k}$ и ширине непропусних опсега BW_k за $k = 1, 2, \dots, K$, као и ред филтра свепропусника фреквенција L . Одредити $\omega_{l,k}$, $\omega_{r,k}$, и ε коришћењем релација (2.1) и (2.26).

Корак 2. За задати број N_t и за свако $i = 1, 2, \dots, 2K$ одредити M_i дискретних фреквенција у i -тој прелазној области $\tilde{\omega}_m^{(i)}$, $m = 1, 2, \dots, M_i$, пресеком дискретног

$$\left\{ \frac{\pi}{N_t + 1}, \frac{2\pi}{N_t + 1}, \dots, \frac{N_t\pi}{N_t + 1} \right\},$$

и континуалног скупа фреквенција \mathcal{T}_i , релација (3.42), а затим и матрице $\mathbf{\Lambda}_i$, $\mathbf{\Psi}_i$ и вектор $\boldsymbol{\tau}_i$ коришћењем релације (3.45).

Корак 3. Одредити вектор $\boldsymbol{\gamma}$ и матрице $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Upsilon}$ коришћењем релација (3.6) и (3.15). Иницијализовати вредност вектора непознатих коефицијената филтра

$$\mathbf{p}_x^{(0)} = [0, 0, \dots, 0]^T.$$

Иницијализовати вредност тренутне итерације $i = 1$.

Корак 4. Одредити \mathbf{Q}_i , \mathbf{s}_i и t_i коришћењем релације (3.30).

Корак 5. Одредити меру грешке амплитудске карактеристике у итерацији $(i - 1)$, $J(\mathbf{p}_x^{(i-1)})$, коришћењем релације (3.32).

Корак 6. Уколико је $i = 1$ прећи на корак 8. У супротном прећи на корак 7.

Корак 7. Уколико је $\alpha \cdot J(\mathbf{p}_x^{(i-2)}) \leq J(\mathbf{p}_x^{(i-1)})$, где је $\alpha \leq 1$ фактор конвергенције, прећи на корак 9. У супротном прећи на корак 8.

Корак 8. Одредити вектор $\mathbf{p}_x^{(i)}$ решавањем проблема квадратног програмирања (3.47). Инкрементирати вредност тренутне итерације $i = i + 1$ и прећи на корак 4.

Корак 9. Крај алгоритма. Вектор коефицијената филтра једнак је

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \Phi^{-1} \left(\boldsymbol{\gamma} - \Upsilon \mathbf{p}_x^{(i-2)} \right) \\ \mathbf{p}_x^{(i-2)} \end{bmatrix}.$$

3.3.2 Метод IIIб

Вредност вектора непознатих коефицијената \mathbf{p}_x одређена је решењем минимизационог проблема

$$\underset{\mathbf{p}_x^{(i)}}{\text{минимизирати}} \quad \widehat{J}(\mathbf{p}_x) = \mathbf{p}_x^T \mathbf{Q} \mathbf{p}_x - 2\mathbf{s}^T \mathbf{p}_x + t, \quad (3.48)$$

по ограничењима: (3.44),

где су \mathbf{Q} , \mathbf{s} и t дефинисани релацијом (3.37). Као и у случају метода IIIа, оптимизациони проблем је квадратни са линеарним ограничењима датим неједнакостима.

Непознати коефицијенти ускопојасног ПР филтра непропусника опсега у случају примене метода IIIб одређени су следећим итеративним алгоритмом:

Корак 1. Задати појачање филтра на граничним фреквенцијама непропусних опсега a у dB, број непропусних опсега K , централне фреквенције $\omega_{n,k}$ и ширине непропусних опсега BW_k за $k = 1, 2, \dots, K$, као и ред филтра свепропусника фреквенција L . Одредити $\omega_{l,k}$, $\omega_{r,k}$, и ε коришћењем релација (2.1) и (2.26).

Корак 2. За задати број N_t и за свако $i = 1, 2, \dots, 2K$ одредити M_i дискретних фреквенција у i -тој прелазној области $\tilde{\omega}_m^{(i)}$, $m = 1, 2, \dots, M_i$, пресеком дискретног скупа фреквенција

$$\left\{ \frac{\pi}{N_t + 1}, \frac{2\pi}{N_t + 1}, \dots, \frac{N_t \pi}{N_t + 1} \right\},$$

и континуалног скупа фреквенција \mathcal{T}_i , релација (3.42), а затим и матрице $\mathbf{\Lambda}_i$, $\mathbf{\Psi}_i$ и вектор $\boldsymbol{\tau}_i$ коришћењем релације (3.45).

Корак 3. Одредити вектор $\boldsymbol{\gamma}$ и матрице Φ и Υ коришћењем релација (3.6) и (3.15).

Корак 4. Одредити \mathbf{Q} , \mathbf{s} и t коришћењем релације (3.37).

Корак 5. Одредити вектор \mathbf{p}_x решавањем проблема квадратног програмирања (3.48).

Корак 6. Крај алгоритма. Вектор коефицијената филтра једнак је

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \Phi^{-1}(\boldsymbol{\gamma} - \Upsilon \mathbf{p}_x) \\ \mathbf{p}_x \end{bmatrix}.$$

3.3.3 Пример синтезе

Пример 3.4 Методи IIIа и IIIб биће примењени на проблем одређивања коефицијената ускопојасног ПР филтра непропусника опсега из примера 3.3, при чему је вредност додатног параметра N_t једнака 1000.

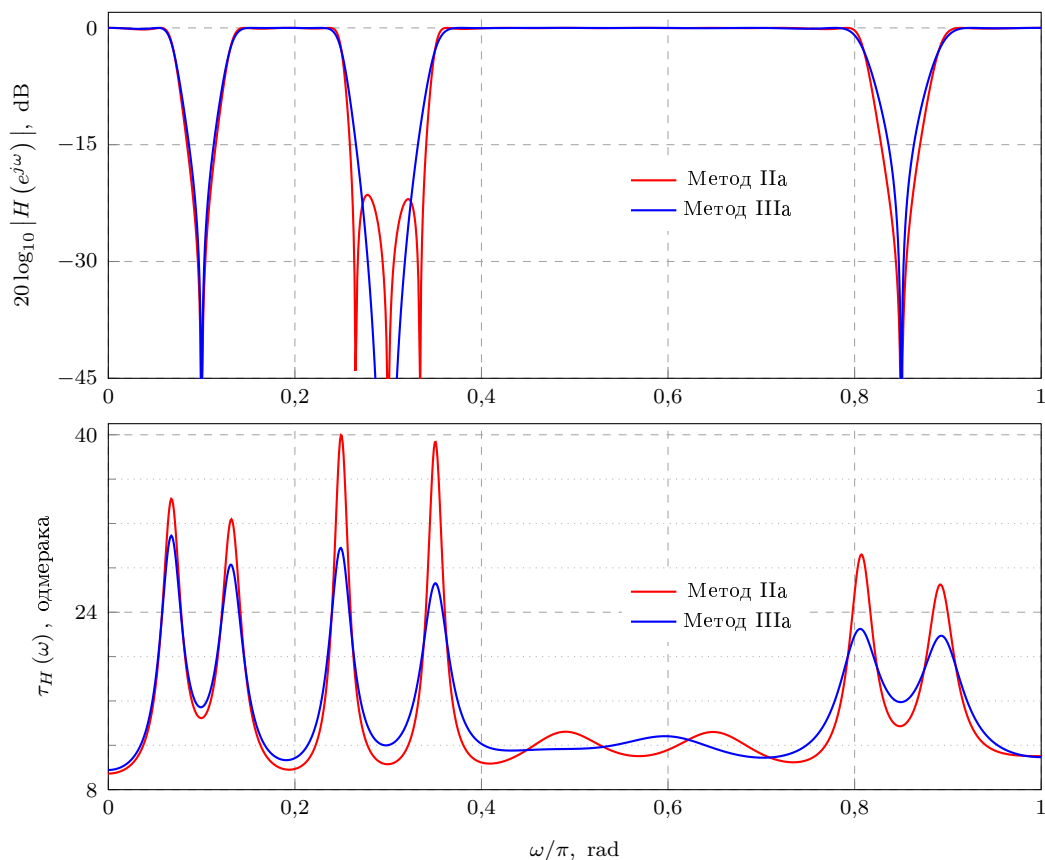
За задате спецификације филтра, а што је било и за очекивати, примена метода IIIб резултује истим коефицијентима филтра као и примена метода IIб (пример 3.3). У табели 3.4 дате су вредности модула ρ и фазних углова θ полова, као и квадратне мере грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима, J , добијене применом метода IIIа. У циљу поређења, на слици 3.5 приказане су карактеристике појачања и групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом метода IIIа и IIа.

Таб. 3.4: Пример 3.4. Метод IIIа, модули и фазни углови полова ускопојасног ПР филтра непропусника опсега и вредност мере грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.

$\rho \cdot 10^3$	$\theta/\pi, \text{ rad}$	$J(\mathbf{p}_x) \cdot 10^2$
955,5810	$\pm 0,06737980$	
953,7080	$\pm 0,24900490$	
949,7847	$\pm 0,13153990$	
943,8625	$\pm 0,35055008$	
920,3766	$\pm 0,80535114$	
915,9943	$\pm 0,89360088$	7,72
777,2951	$\pm 0,60093524$	
712,3046	$\pm 0,46153814$	
543,0651	$\pm 0,85773121$	

Упркос нешто нижој вредности квадратне мере грешке амплитудске карактеристике филтра у случају примене метода IIа ($6,41 \cdot 10^{-2}$) наспрам метода IIIа ($7,72 \cdot 10^{-2}$), вредност модула најудаљенијег пола је смањена, 0,9691 наспрам 0,9556,

табеле 3.3 и 3.4. Поменуто се може уочити и на карактеристици групног кашњења, слика 3.5.



Сл. 3.5: Пример 3.4. Карактеристике појачања и групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом метода IIa и IIIa.

3.4 Синтеза заснована на sukcesивном одређивању коефицијената каскадно спрегнутих филтара свепропусника фреквенција – Метод IV

У овом делу ће бити приказан метод чији је дискретни еквивалент разматран у раду [39], а која припада групи индиректних метода. Замисао предложеног метода, названог метод IV, јесте да се нерекурзивном мрежом $B_{3K}(z)$ изврши подешавање положаја централних и граничних фреквенција непропусних опсега, док се мрежом $F_{L-3K}(z)$, релација (3.22), контролише вредност грешке амплитудске карактеристике ускопојасног IIR филтара непропусника опсега у пропусним опсезима.

Наиме, под претпоставком познатих вредности коефицијената \mathbf{f} преносне

функције $F_{L-3K}(z)$, релација (3.22), а на основу $3K$ једначина које су одређене положајем централних и граничних фреквенција непропусних опсега, релације (2.31), (2.32) и (2.33), могуће је једнозначно одредити вектор коефицијената \mathbf{b} , релација (3.22). Са друге стране, уколико је познат вектор коефицијената \mathbf{b} , вектор непознатих коефицијената \mathbf{f} може се одредити минимизацијом квадратне мере грешке амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног филтра непропусника опсега у пропусним опсезима, релација (3.26). За фиксирану вредност реда филтра свепропусника фреквенција $L > 3K$, најважнији кораци у i -тој итерацији ($i \geq 1$) предложеног алгорита су:

- Одређивање вектора коефицијената $\mathbf{f}^{(i)}$ коришћењем претходно одређеног вектора коефицијената $\mathbf{b}^{(i-1)}$, односно решавањем минимизационог проблема

$$\text{минимизирати}_{\mathbf{f}^{(i)}} \int_{\omega \in \mathcal{P}} \left[\sin \left(\varphi_B^{(i-1)}(\omega) + K\omega \right) + \sum_{k=1}^{L-3K} f_k^{(i)} \sin \left(\varphi_B^{(i-1)}(\omega) + \omega(K-k) \right) \right]^2 d\omega, \quad (3.49)$$

где је $\varphi_B^{(i-1)}(\omega) = \varphi_B(\omega, \mathbf{b}^{(i-1)})$. Треба приметити да функција циља постављеног оптимизационог проблема представља квадратну меру поједностављене функције грешке амплитудске карактеристике филтра у пропусним опсезима, при чему се поменуто поједностављење односи на занемаривање имениоца функције грешке $E_p(\omega, \mathbf{b}^{(i-1)}, \mathbf{f}^{(i)})$, релација (3.26).

Решење безусловног проблема квадратног програмирања, релација (3.49), одређено је релацијом

$$\mathbf{f}^{(i)} = \mathbf{Q}_i^{-1} \mathbf{s}_i, \quad (3.50)$$

где су $\mathbf{Q}_i = [q_{km}^{(i)}]$ и $\mathbf{s}_i = [s_k^{(i)}]$ матрица димензија $(L-3K) \times (L-3K)$ и вектор димензија $(L-3K) \times 1$, респективно, са елементима једнаким

$$q_{km}^{(i)} = \int_{\omega \in \mathcal{P}} \sin \left(\varphi_B^{(i-1)}(\omega) + \omega(K-k) \right) \sin \left(\varphi_B^{(i-1)}(\omega) + \omega(K-m) \right) d\omega, \quad (3.51)$$

$$s_k^{(i)} = - \int_{\omega \in \mathcal{P}} \sin \left(\varphi_B^{(i-1)}(\omega) + \omega(K-k) \right) \sin \left(\varphi_B^{(i-1)}(\omega) + K\omega \right) d\omega.$$

- На основу одређеног вектора коефицијената $\mathbf{f}^{(i)}$ одредити вектор коефицијената $\mathbf{b}^{(i)}$ тако да фазна карактеристика

$$\varphi_P^{(i)}(\omega) = \varphi_B^{(i)}(\omega) + \varphi_F^{(i)}(\omega),$$

задовољава релације (2.31), (2.32) и (2.33), тј. тако да положај централних и граничних фреквенција непропусних опсега буде задовољен. Претходно је остварено уколико важи:

$$\varphi_B^{(i)}(\omega_{n,k}) = -K\omega_{n,k} + (2k-1)\frac{\pi}{2} - \varphi_F^{(i)}(\omega_{n,k}), \quad (3.52)$$

$$\varphi_B^{(i)}(\omega_{l,k}) = -K\omega_{l,k} + (k-1)\pi + \frac{\varepsilon}{2} - \varphi_F^{(i)}(\omega_{l,k}), \quad (3.53)$$

$$\varphi_B^{(i)}(\omega_{r,k}) = -K\omega_{r,k} + k\pi - \frac{\varepsilon}{2} - \varphi_F^{(i)}(\omega_{r,k}), \quad (3.54)$$

за $k = 1, 2, \dots, K$.

Коришћењем релације (2.39), која даје везу између фазне карактеристике и коефицијената произвољне нерекурзивне мреже, претходне релације могу се свести на линеарне по непознатим коефицијентима $\mathbf{b}^{(i)}$,

$$\mathbf{\Phi}_i \mathbf{b}^{(i)} = \boldsymbol{\gamma}_i, \quad (3.55)$$

где је $\boldsymbol{\gamma}_i = [\gamma_k^{(i)}]$ вектор димензија $3K \times 1$, док је $\mathbf{\Phi}_i = [\phi_{km}^{(i)}]$ матрица димензија $3K \times 3K$, при чему важи

$$\boldsymbol{\gamma}_k^{(i)} = \begin{cases} -\cos\left(\varphi_F^{(i)}(\omega_{n,k}) + K\omega_{n,k}\right), & k \leq K \\ -\sin\left(\varphi_F^{(i)}(\omega_{l,k-K}) + K\omega_{l,k-K} - \varepsilon/2\right), & K < k \leq 2K, \\ -\sin\left(\varphi_F^{(i)}(\omega_{r,k-2K}) + K\omega_{r,k-2K} + \varepsilon/2\right), & k > 2K \end{cases} \quad (3.56)$$

$$\phi_{km}^{(i)} = \begin{cases} \cos\left(\varphi_F^{(i)}(\omega_{n,k}) + \omega_{n,k}(K-m)\right), & k \leq K \\ \sin\left(\varphi_F^{(i)}(\omega_{l,k-K}) + \omega_{l,k-K}(K-m) - \varepsilon/2\right), & K < k \leq 2K. \\ \sin\left(\varphi_F^{(i)}(\omega_{r,k-2K}) + \omega_{r,k-2K}(K-m) + \varepsilon/2\right), & k > 2K \end{cases}$$

Коначно, вектор непознатих коефицијената преносне функције $B_{3K}(z)$ у i -тој

итерацији одређен је релацијом

$$\mathbf{b}^{(i)} = \Phi_i^{-1} \boldsymbol{\gamma}_i. \quad (3.57)$$

Вредности непознатих коефицијената филтара $F_{L-3K}(z)$ и $B_{3K}(z)$ се наизменично одређују све док то води смањењу максималне апсолутне вредности грешке амплитудске карактеристике филтра у пропусним опсезима и она је већа од $\sqrt{1 - 10^{a/10}} = \sin \frac{\varepsilon}{2}$, што представља максималну апсолутну вредност функције грешке за коју су спецификације везане за појачање ускопојасног ПР филтра непропусника опсега задовољене. Уколико за неко L претходни кораци не воде задовољењу спецификација везаних за минимално појачање у пропусним опсезима, ред филтра свепропусника фреквенција је потребно повећати, а затим поновити поступак сукцесивног одређивања коефицијената каскадно спрегнутих филтара свепропусника фреквенција.

Предложени поступак одређивања вектора непознатих коефицијената \mathbf{b} и \mathbf{f} , а тиме и потребног реда филтра свепропусника фреквенција L , тако да све спецификације буду задовољене, заснива се на итеративном алгоритму који се састоји из следећих корака:

Корак 1. Иницијализовати вредности реда филтра свепропусника фреквенција, $L = 3K$, и тренутне итерације, $i = 0$. За задате спецификације филтра a , применом метода I одредити вектор непознатих коефицијената филтра $P_L(z)$, који је за $L = 3K$ уједно и вектор непознатих коефицијената филтра $B_{3K}(z)$ у нултој итерацији, $\mathbf{b}^{(0)}$. Приметимо да је за $L = 3K$, $F_{L-3K}(z) = 1$, тј. $\mathbf{f}^{(0)} = []$.

Уколико је $\max_{\omega \in \mathcal{P}} |E_p(\omega, \mathbf{b}^{(i)}, \mathbf{f}^{(i)})| \leq \sin \frac{\varepsilon}{2}$, тј. остварено појачање филтра у пропусним опсезима је веће или једнако a dB, прећи на корак 10.

Корак 2. Инкрементирати вредност реда филтра свепропусника фреквенција, $L = L + 1$. Иницијализовати вредност остварене максималне грешке амплитудске карактеристике филтра у пропусним опсезима, а за фиксирани ред филтра свепропусника фреквенција L , на јако велику вредност, нпр. $e_{\max}^{(L)} = 10$.

Корак 3. Инкрементирати вредност тренутне итерације, $i = i + 1$.

Корак 4. Одредити $\mathbf{f}^{(i)}$ коришћењем релације (3.50).

Корак 5. Одредити $\mathbf{b}^{(i)}$ коришћењем релације (3.57).

Корак 6. Одредити максималну апсолутну вредност грешке амплитудске карактеристике филтра у пропусним опсезима у i -тој итерацији, $e_{\text{new}} = \max_{\omega \in \mathcal{P}} \left| E_p(\omega, \mathbf{b}^{(i)}, \mathbf{f}^{(i)}) \right|$, коришћењем релације (3.26).

Корак 7. Уколико је $e_{\text{new}} \leq \sin \frac{\varepsilon}{2}$, тј. остварено појачање филтра у пропусним опсезима је веће или једнако a dB, прећи на корак 10.

Корак 8. Уколико је $e_{\text{new}} \geq \alpha \cdot e_{\text{max}}^{(L)}$, где је $\alpha \leq 1$ фактор конвергенције, прећи на корак 2.

Корак 9. Сачувати остварену максималну апсолутну вредност грешке амплитудске карактеристике, $e_{\text{max}}^{(L)} = e_{\text{new}}$, и прећи на корак 3.

Корак 10. Крај алгоритма, непознати коефицијенти нерекурзивних мрежа су $\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(i)}$ и $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(i)}$.

^aкоје не укључују вредност реда филтра свепропусника фреквенција

Треба приметити да се разматрани метод своди на метод I уколико његова примена резултује задовољењем спецификација везаних за максимално слабљење у пропусним опсезима, релација (2.34), односно (2.6).

3.4.1 Примери синтезе

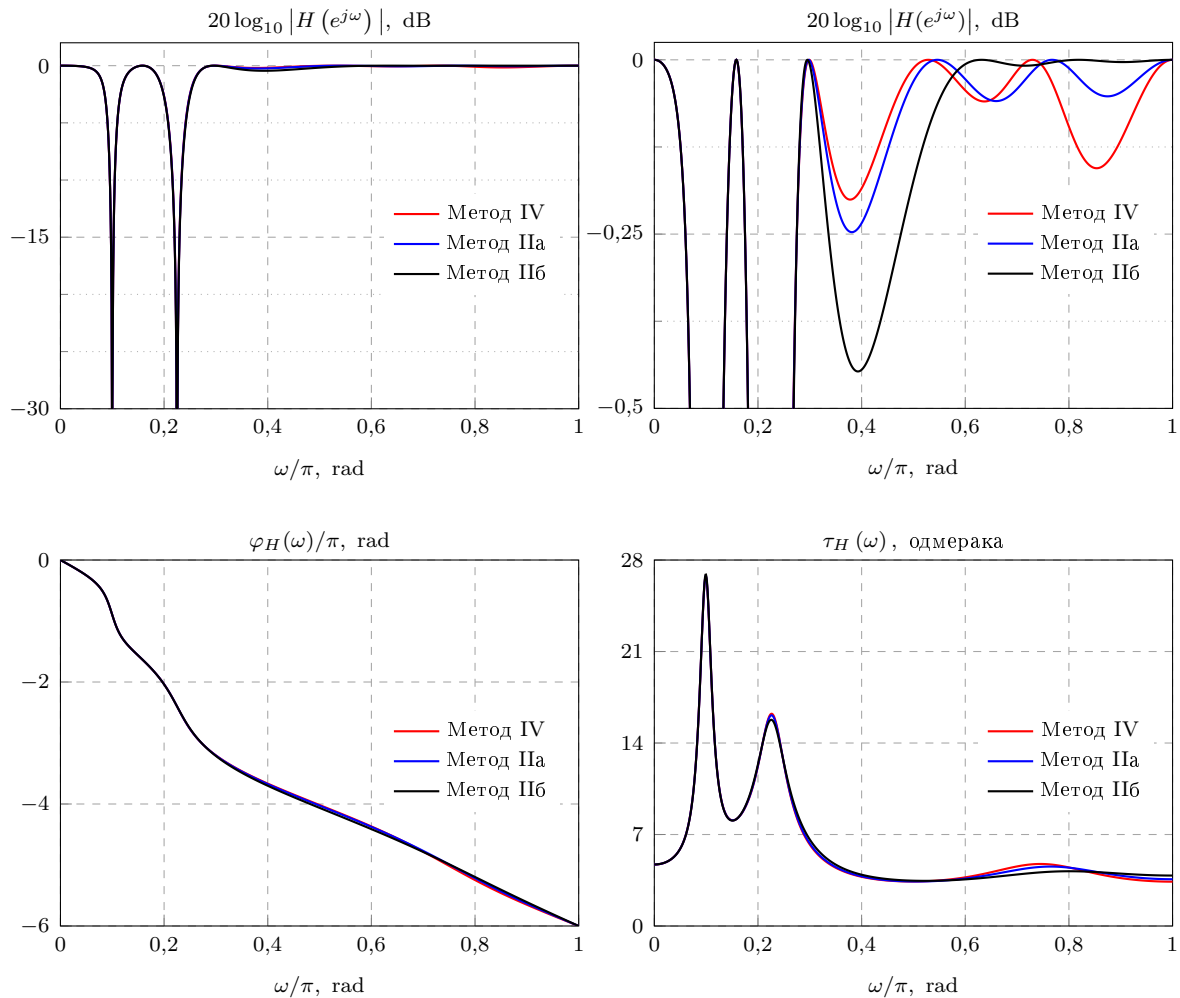
Описани метод, као и методи IIа и IIб, биће искоришћени за одређивање коефицијената два ускопојасна IIR филтра непропусника опсега. У случају примене метода IIа и IV, усвојено је да је вредност фактора конвергенције α једнака 0,985.

Ред филтра свепропусника фреквенција, L , у случају примене метода IIа и IIб једнака је вредности која је добијена применом метода IV.

Пример 3.5 Спецификације филтра су $\omega_{n,1} = 0,1\pi$, $\omega_{n,2} = 0,225\pi$, $BW_1 = 0,08\pi$, $BW_2 = 0,1\pi$, $a = -0,25$ dB.

На слици 3.6 приказане су карактеристике појачања, увећане карактеристике појачања у пропусним опсезима, фазне и карактеристике групног кашњења филтара

чији су коефицијенти одређени применом метода IV, IIa и IIб. Примена метода IV резултује задовољењем спецификација везаних за појачање у пропусним опсезима за вредност реда филтара свепропусника фреквенција $L = 8$. Са друге стране, а за исти ред филтара $A_L(z)$, примена метода IIб не резултује употребљивим ускопојасним IIR филтром непропусником опсега, с обзиром да је појачање у трећем пропусном опсегу мање од a dB, слика 3.6. Додатно, примена метода IV резултује нижом таласношћу амплитудске карактеристике у пропусним опсезима у поређењу са методом IIa.



Сл. 3.6: Пример 3.5. Карактеристике појачања, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом метода IV, IIa и IIб.

Модули ρ и фазни углови θ полова, као и вредности усвојене мере грешке амплитудске карактеристике филтара у пропусним опсезима, J , добијени применом метода IV и IIa, дати су у табели 3.5.

3.4. Синтеза заснована на сукцесивном одређивању коефицијената каскадно спрегнутих филтара свепропусника фреквенција – Метод IV

Таб. 3.5: Пример 3.5. Модули и фазни углови полова ускопојасног ПР филтра непропусника опсега и вредност мере грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.

Метод	$\rho \cdot 10^3$	θ/π , rad	$J \cdot 10^2$
Па / IV	955,6767 / 955,5820	$\pm 0,09915824 / \pm 0,09915053$	3,60 / 4,09
	902,3615 / 904,1646	$\pm 0,22676836 / \pm 0,22697691$	
	750,3237 / 748,2178	$\pm 0,21909660 / \pm 0,21656384$	
	600,0778 / 634,5859	$\pm 0,76274109 / \pm 0,74501480$	

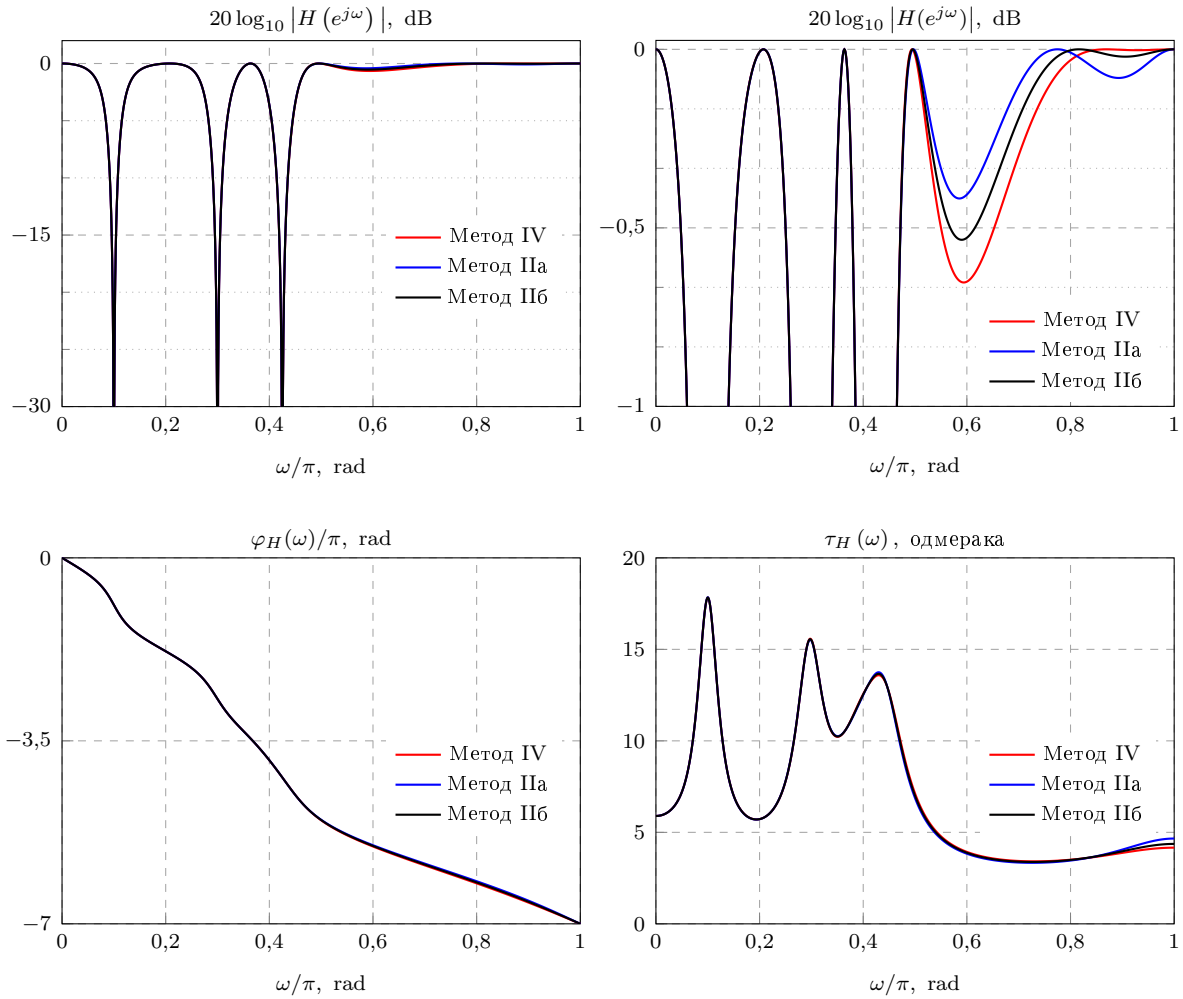
Пример 3.6 Спецификације филтра су $\omega_{n,1} = 0,1\pi$, $\omega_{n,2} = 0,3\pi$, $\omega_{n,3} = 0,425\pi$, $BW_1 = BW_2 = BW_3 = 0,08\pi$, $a = -1$ dB.

На слици 3.7 приказане су карактеристике појачања, увећане карактеристике појачања у пропусним опсезима, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом метода IV, Па и Пб. Примена метода IV резултује задовољењем спецификација везаних за појачање у пропусним опсезима за вредност реда филтра свепропусника фреквенција $L = 10$. У поређењу са методима Па и Пб, примена метода IV резултује највећом таласношћу амплитудске карактеристике у пропусним опсезима, слика 3.7.

Модули ρ и фазни углови θ полова, као и вредности мере грешке амплитудске карактеристике добијених филтара у пропусним опсезима, J , дати су у табели 3.6.

Таб. 3.6: Пример 3.6. Модули и фазни углови полова ускопојасног ПР филтра непропусника опсега и вредност мере грешке амплитудске карактеристике у пропусним опсезима.

Метод	$\rho \cdot 10^3$	θ/π , rad	$J \cdot 10^2$
IV	927,5726	$\pm 0,10020795$	12,00
	907,6197	$\pm 0,29660760$	
	858,7405	$\pm 0,44200480$	
	821,2205	$\pm 0,39782780$	
	530,4067	1	
	521,2923	0	
Па / Пб	927,7012 / 927,6326	$\pm 0,10021767 / \pm 0,10021249$	9,28 / 10,34
	906,9302 / 907,2986	$\pm 0,29647520 / \pm 0,29654639$	
	864,7624 / 861,4764	$\pm 0,43908350 / \pm 0,44051382$	
	812,5898 / 817,0457	$\pm 0,39564771 / \pm 0,39691417$	
	619,9013 / 571,9083	1 / 1	
	527,7830 / 524,3717	0 / 0	



Сл. 3.7: Пример 3.6. Карактеристике појачања, фазне и карактеристике групног кашњења филтара чији су коефицијенти одређени применом метода IV, IIa и IIb.

3.5 Поређење са постојећим методама синтезе

ускопојасних IIR филтара непропусника опсега

У циљу адекватног поређења предложених метода синтезе са постојећим методама синтезе ускопојасних рекурзивних дигиталних филтара непропусника опсега, постојећи методи морају узимати у обзир спецификације везане за ширине непропусних опсега дефинисане за произвољну вредност појачања на граничним фреквенцијама непропусних опсега и гарантовати стриктно задовољење спецификација везаних за положај централних фреквенција непропусних опсега. Имајући претходно у виду, показује се да у обзир долази једино метод дат у раду [40], при чему се и методи I и II приказани у раду [24] могу генерализовати на случај произвољне вредности појачања на граничним фреквенцијама непропусних опсега. Ред филтра свепропу-

сника фреквенција, који у потпуности карактерише ускопојасни дигитални филтар непропусник опсега, код поменутих метода из литературе једнак је двоструком броју централних фреквенција непропусних опсега.

Примена метода приказаног у раду [40] резултује задовољењем спецификација везаних за положај централних фреквенција непропусних опсега, релација (2.3), као и спецификација везаних за максималну вредност слабљења у пропусним опсезима, релација (2.6), али су резултујуће ширине непропусних опсега, у општем случају, уже од задатих. Поменуто најчешће води ка дугом времену потребном за потискивање синусоидалних сметњи. Са друге стране, примена метода I (II) [24] резултује потпуним задовољењем спецификација везаних за положај левих (десних) граничних и централних фреквенција непропусних опсега, при чему резултујуће ширине непропусних опсега могу бити уже или шире од задатих.

Поређење подразумева разматрање грешке линеарности фазне карактеристике добијених филтара у пропусним опсезима, $\Delta\varphi_P(\omega)|_{\omega \in \mathcal{P}}$, времена потребних за елиминацију синусоидалних сметњи

$$x[n] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sin\left(n \cdot \omega_{n,k} + k \cdot \frac{\pi}{3}\right), \quad (3.58)$$

као и вредности модула полова најближих јединичној кружници.

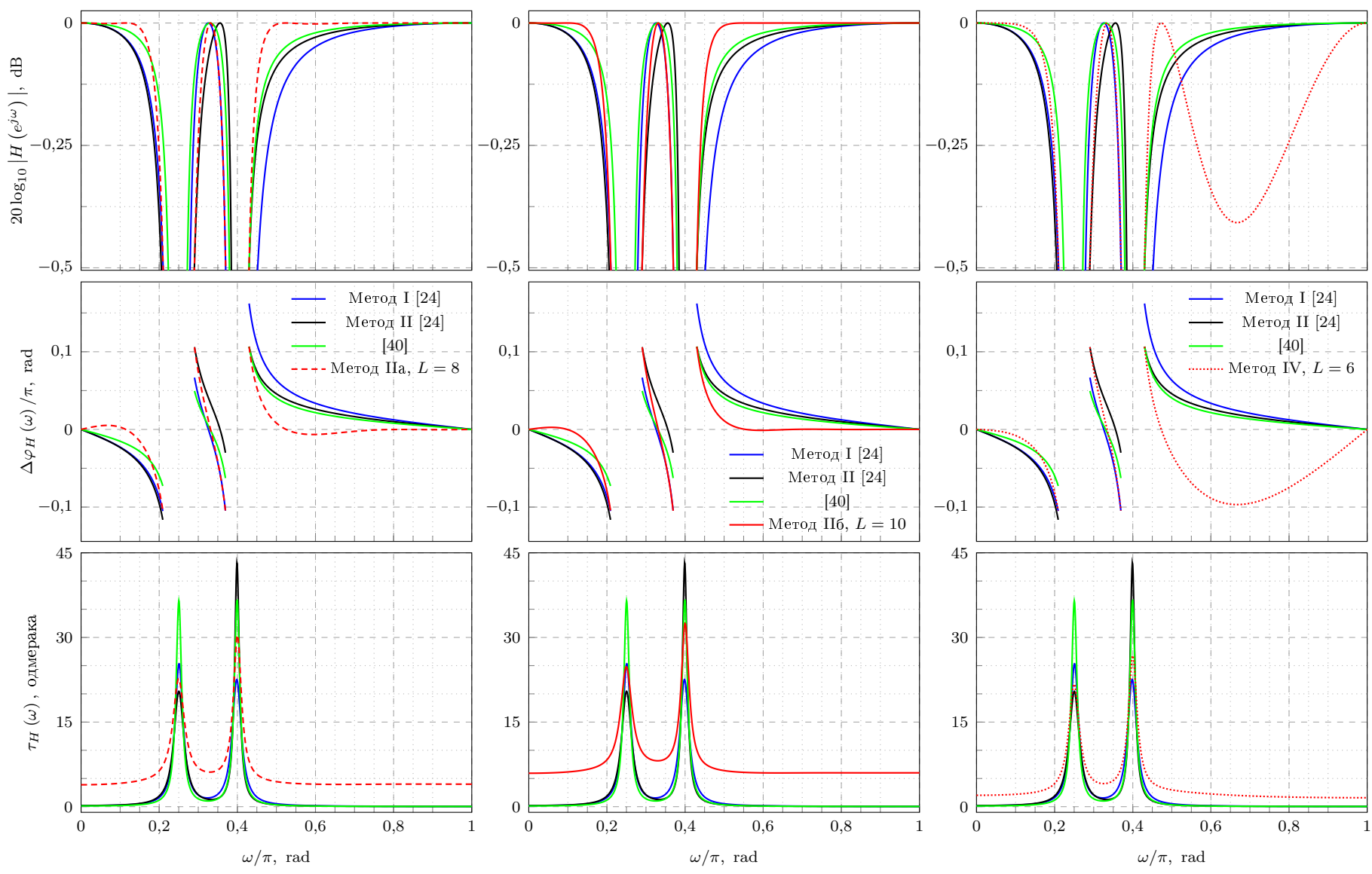
Пример 3.7 Спецификације филтра су $\omega_{n,1} = 0,25\pi$, $\omega_{n,2} = 0,4\pi$, $BW_1 = 0,08\pi$, $BW_2 = 0,06\pi$, $a = -0,5$ dB. У случају примене метода IIa и IIb ред филтра свепропусника фреквенција, L , једнак је 8 и 10, респективно.

На слици 3.8 приказане су грешке линеарности фазне карактеристике филтра у пропусним опсезима, карактеристике појачања у пропусним опсезима и карактеристике групног кашњења. За задате спецификације филтра, метод IV своди се на метод I, тј. добијени ред филтра свепропусника фреквенција једнак је троструком броју непропусних опсега. Поред тога, примена метода IV резултује знатном таласношћу амплитудске карактеристике филтра у трећем пропусном опсегу, где је и грешка линеарности фазне карактеристике највећа, слика 3.8. Резултујућа ширина првог непропусног опсега је нешто већа од задате вредности у случају примене метода II [24], док је ужа у случају примене метода I [24]. Обратно важи у случају другог

непропусног опсега.

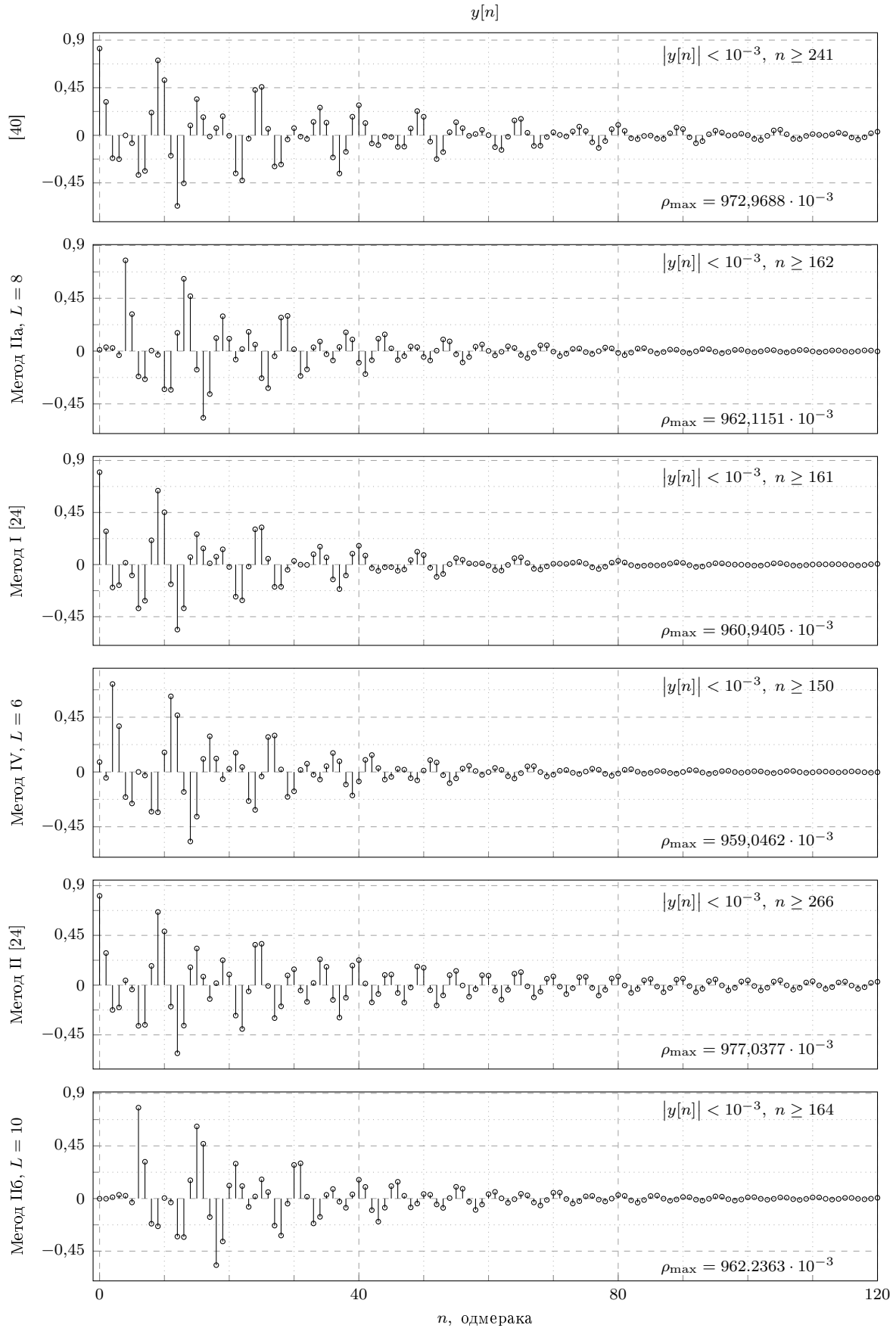
Примена метода Па и Пб резултује мањом грешком фазне карактеристике филтра у пропусним опсезима у поређењу са осталим методима, што је очекивани резултат имајући у виду нешто виши ред филтра свепропусника фреквенција, L .

Одзиви добијених филтара на побуду сигналом $x[n]$, релација (3.58), као и вредности модула полова најближих јединичној кружници приказани су на слици 3.9. Најнижа и највећа вредност модула пола најближег јединичној кружници, добијене су применом метода IV ($959,0462 \cdot 10^{-3}$) и метода II [24] ($977,0377 \cdot 10^{-3}$), респективно, због чега је и било за очекивати да ће време потребно за потискивање збира синусоидалних сметњи бити најкраће и најдуже у случају примене ових метода, слика 3.9. Са друге стране, филтрима који су добијени применом метода Па, Пб и I [24] потребно је приближно исто време за потискивање збира синусоидалних сметњи, слика 3.9, али у случају примене прва два метода неће доћи до дисторзије спектралних компоненти сигнала у околини граничних фреквенција непропусних опсега, слика 3.8, док је амплитудска карактеристика у пропусним опсезима знатно побољшана.



Сл. 3.8: Пример 3.7. Грешке линеарности фазне карактеристике, појачање у пропусним опсезима и карактеристике групног кашњења.

3.5. Поређење са постојећим методама синтезе ускопојасних ПР филтара
непропусника опсега

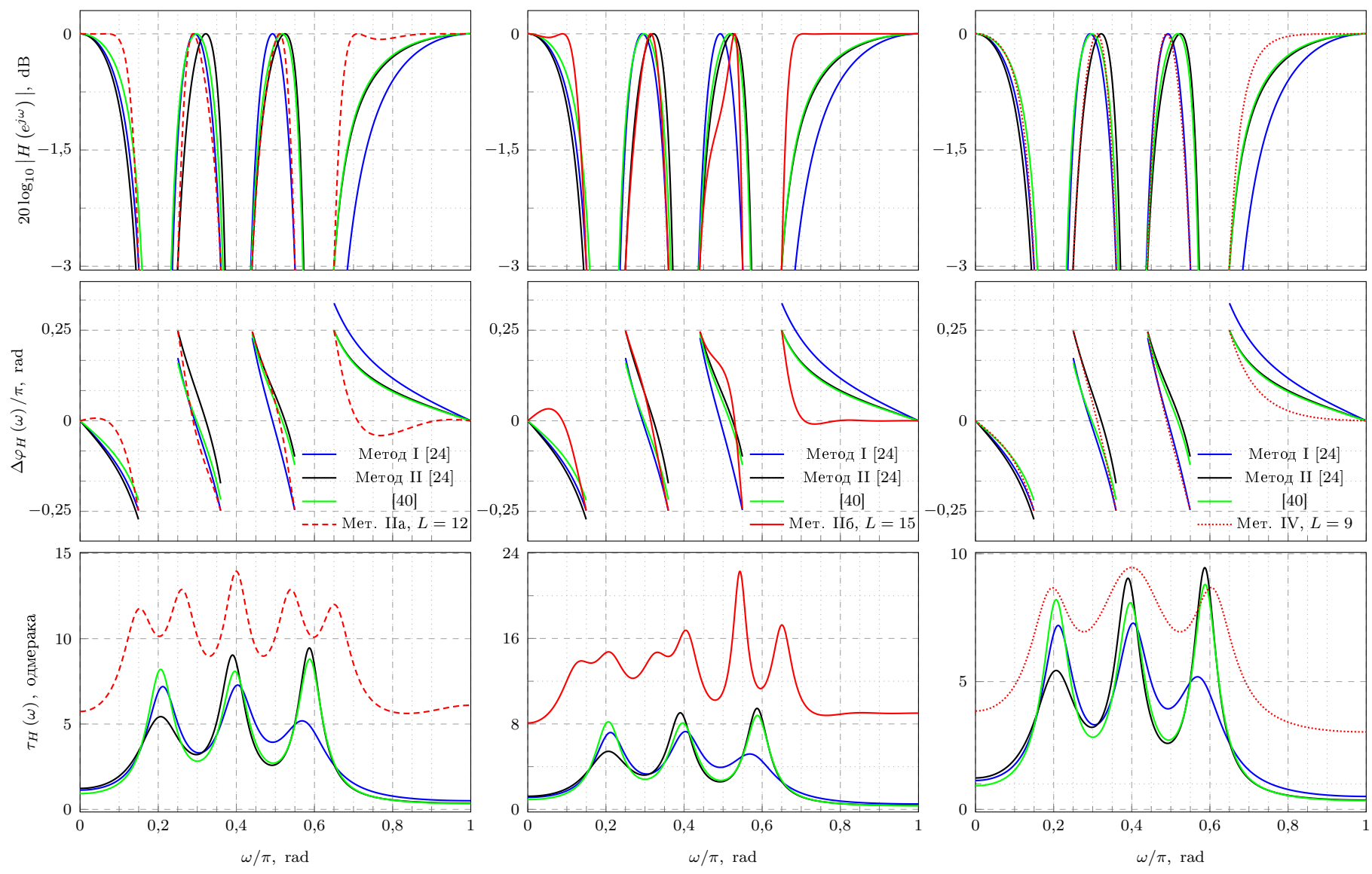


Сл. 3.9: Пример 3.7. Одзиви филтара на побуду збиром синусоидалних сметњи.

Пример 3.8 Спецификације филтра су $\omega_{n,1} = 0,2\pi$, $\omega_{n,2} = 0,4\pi$, $\omega_{n,3} = 0,6\pi$, $BW_1 = 0,1\pi$, $BW_2 = 0,08\pi$, $BW_3 = 0,1\pi$, $a = -3$ dB. У случају примене метода Па и Пб ред филтра свепропусника фреквенција, L , једнак је 12 и 15, респективно.

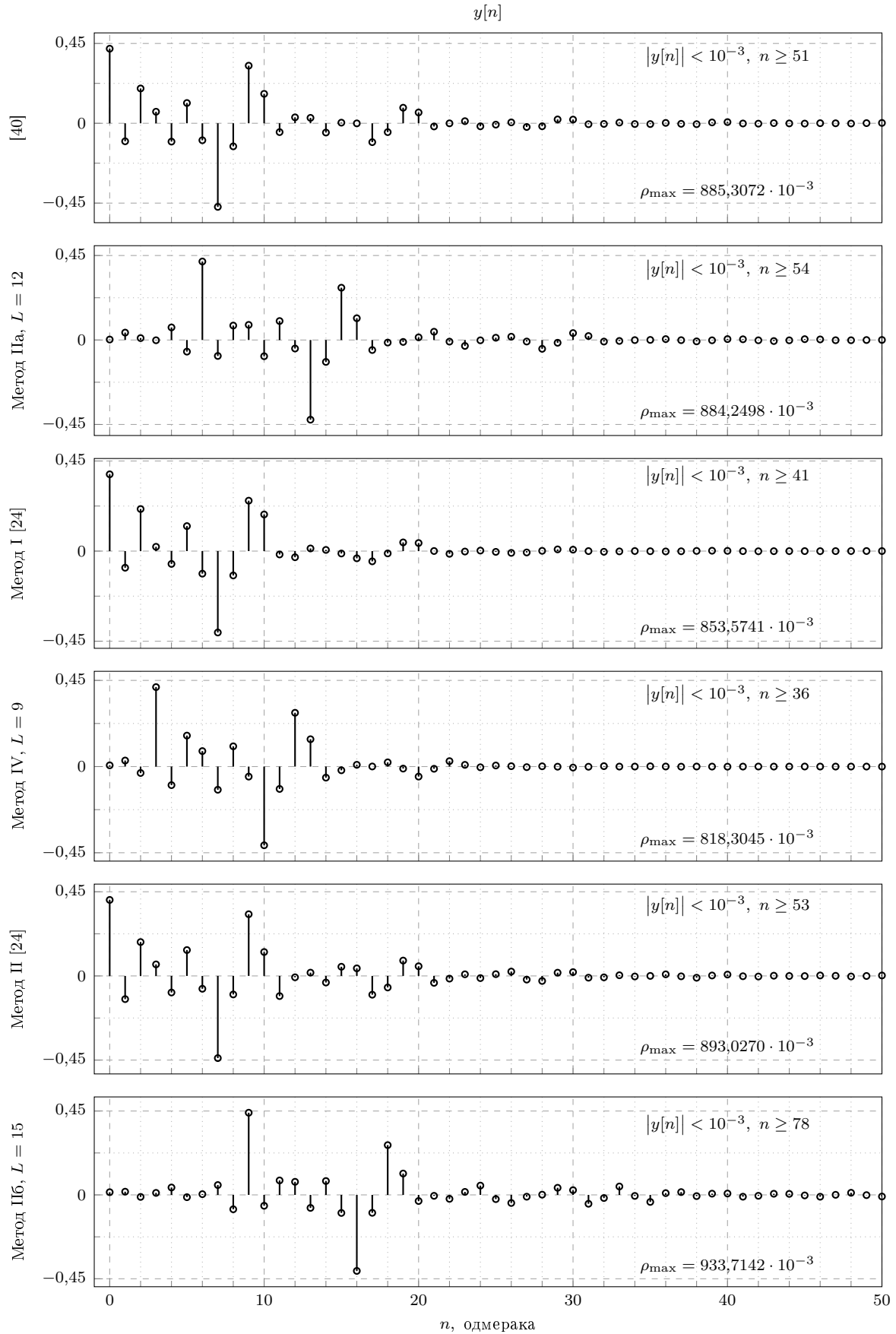
На слици 3.10 приказане су карактеристике појачања и грешке линеарности фазне карактеристике филтара у пропусним опсезима, као и карактеристике групног кашњења. За задате спецификације филтра метод IV своди се на метод I, тј. добијени ред филтра свепропусника фреквенција једнак је троструком броју непропусних опсега. Одступање резултујућих граничних фреквенција непропусних опсега од вредности задатих спецификацијама у случају примене метода из литературе [24, 40], као и побољшање амплитудске карактеристике (а самим тим и фазне карактеристике филтра) у случају примене предложених метода јасно се уочава на слици 3.10.

Одзиви добијених филтара на побуду сигналом $x[n]$, као и вредности модула полова најближих јединичној кружници приказани су на слици 3.11. Време потребно за потискивање збира синусоидалних сметњи најкраће је у случају примене метода IV, а најдуже у случају примене метода Пб, што је донекле и било за очекивати имајући у виду вредности модула полова најближих јединичној кружници, као и вишу вредност реда филтра свепропусника опсега у случају примене метода Пб. Са друге стране, метод Па и метод приказан у раду [40] су упоредиви у смислу брзине потискивања синусоидалних сметњи, независно од више усвојене вредности реда филтра у случају примене метода Па, слика 3.11.



Сл. 3.10: Пример 3.8. Грешке линеарности фазне карактеристике, појачање у пропусним опсезима и карактеристике групног кашњења.

3.5. Поређење са постојећим методама синтезе ускопојасних ИР филтара
непропусника опсега

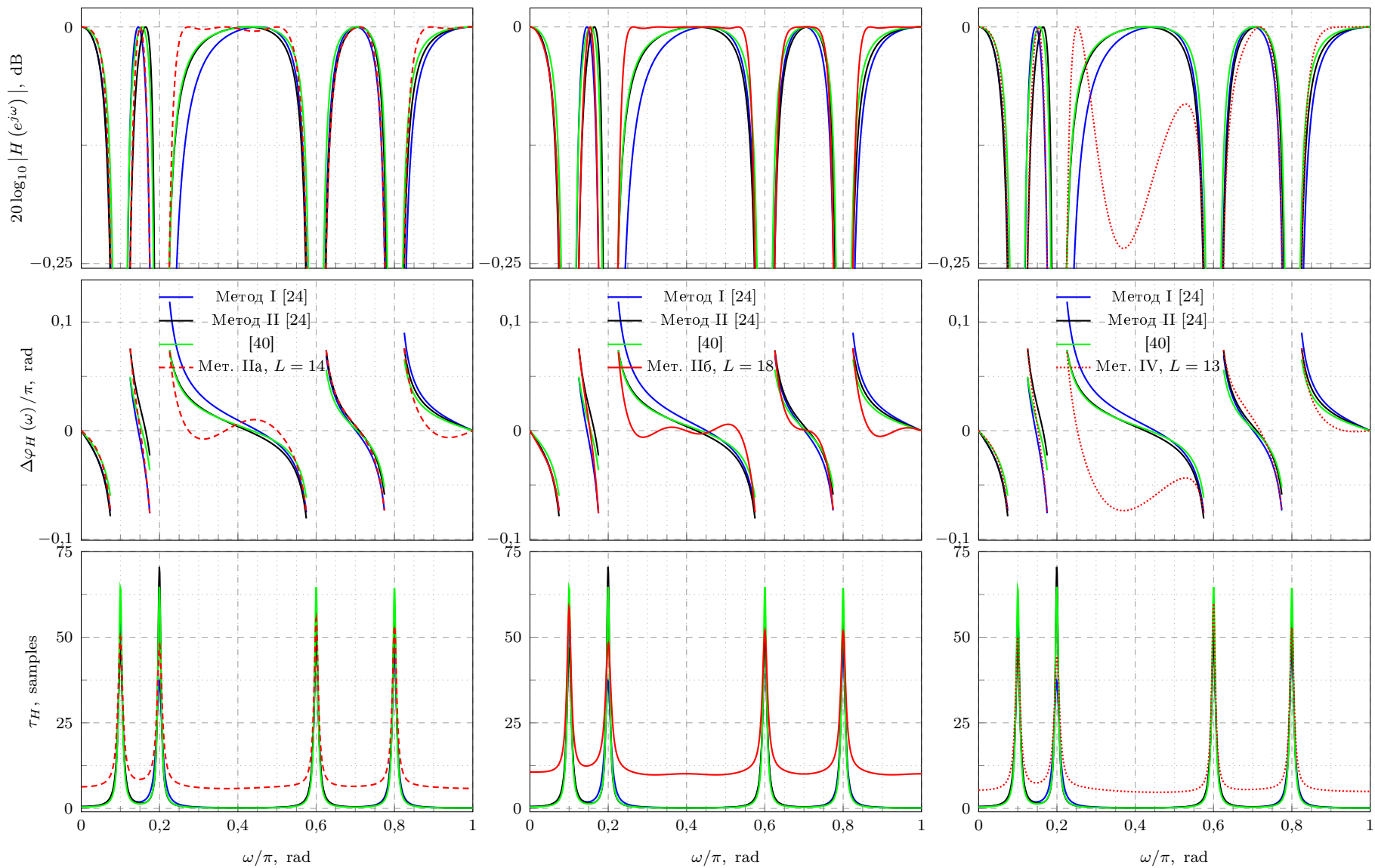


Сл. 3.11: Пример 3.8. Одзиви филтара на побуду збиром синусоидалних сметњи.

Пример 3.9 Спецификације филтра су $\omega_{n,1} = 0,1\pi$, $\omega_{n,2} = 0,2\pi$, $\omega_{n,3} = 0,6\pi$, $\omega_{n,4} = 0,8\pi$, $BW_1 = BW_2 = BW_3 = BW_4 = 0,05\pi$, $a = -0,25$ dB. У случају примене метода IIa и IIб ред филтра свепропусника фреквенција, L , једнак је 14 и 18, респективно.

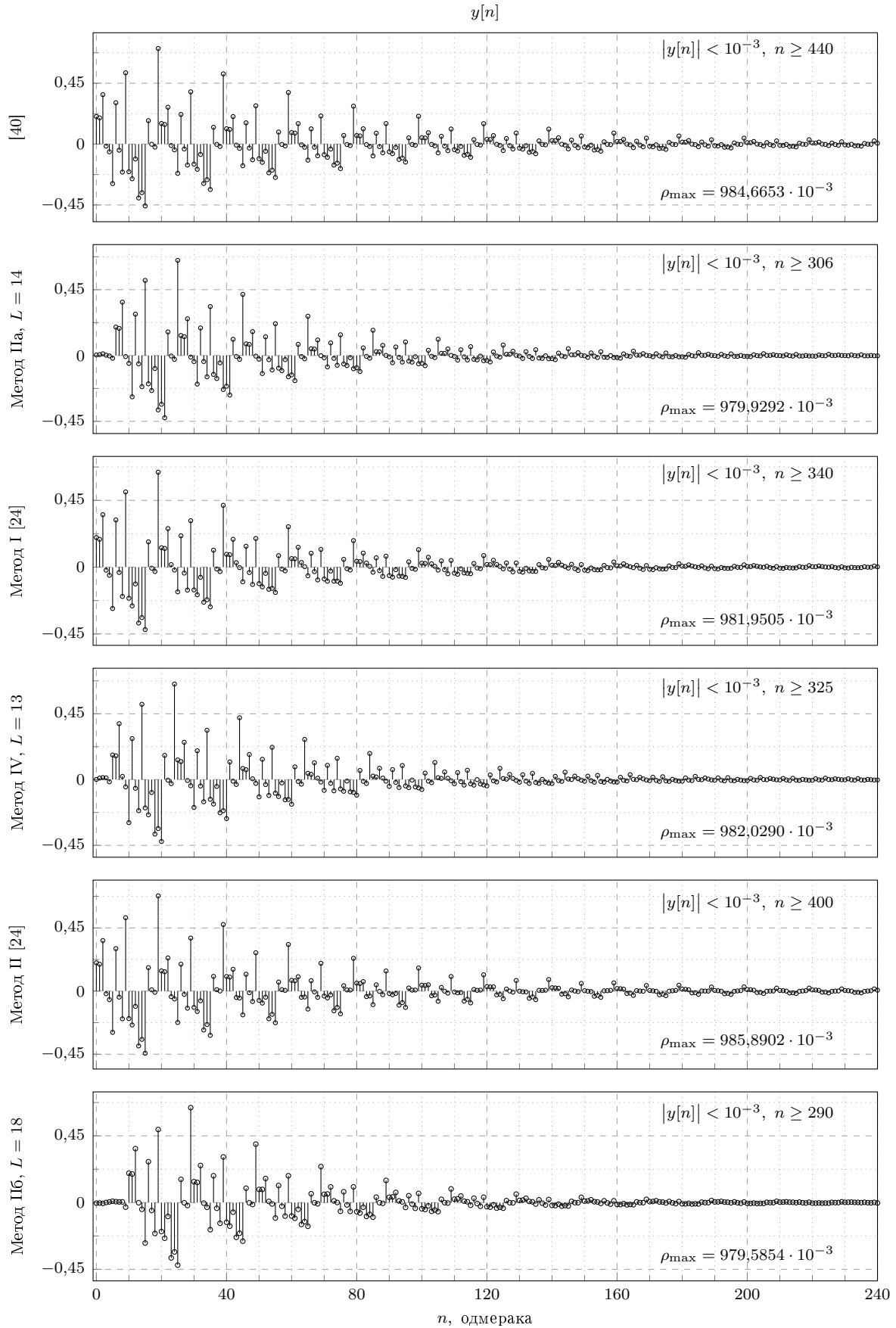
На слици 3.12 приказане су карактеристике појачања и грешке линеарности фазне карактеристике филтара у пропусним опсезима, као и карактеристике групног кашњења. Примена метода IV резултује задовољењем спецификација при вредности реда филтра $L = 13$, при чему је изражена таласност амплитудске карактеристике филтра у трећем пропусном опсегу. Са становишта грешке линеарности фазне карактеристике филтра, метод IIб се најбоље показао, што се јасно уочава на слици 3.12, што је последица високе усвојене вредности реда филтра свепропусника фреквенција у поређењу са другим методима.

Додатно, и време потребно за потискивање збира синусоидалних сметњи је најкраће код филтра чији су коефицијенти одређени применом метода IIб, слика 3.13, при чему је и вредност модула пола најближег јединичној кружници најмања. Овај резултат је посебно интересантан имајући у виду доста висок ред филтра свепропусника фреквенција, $L = 18$, што значи да је у случају филтра, чији су коефицијенти одређени овим методом, виша вредност групног кашњења компензована краћим временом потребним за елиминацију збира синусоидалних сметњи. Са друге стране, са становишта брзине потискивања сметњи, најлошије се показао филтар чији су коефицијенти одређени применом метода из рада [40], слика 3.13.



Сл. 3.12: Пример 3.9. Грешке линеарности фазне карактеристике, појачање у пропусним опсезима и карактеристике групног кашњења.

3.5. Поређење са постојећим методама синтезе ускопојасних ПР филтара
непропусника опсега



Сл. 3.13: Пример 3.9. Одзиви филтара на побуду збиром синусоидалних сметњи.

3.6 Закључак

Сви предложени методи, изузев метода I, могу се формулисати као дискретни, уколико се квадратна мера континуалне функције грешке амплитудске карактеристике филтра у пропусним опсезима, релација (3.11), замени својим дискретним еквивалентном:

$$J_d = \sum_{m=1}^M E_p^2(\omega_m),$$

где су са ω_i , $i = 1, 2, \dots, M$, означене, по пропусним опсезима, еквидистантне фреквенције при чему мора важити $M \geq 10 \cdot N$ [36], где је са N означен број непознатих коефицијената које је потребно одредити минимизацијом усвојене мере грешке. Код свих предложених метода има се да је $N = L - 3K$, при чему је дискретизацију посебно погодно извршити у случају метода IIa, IIIa и IV, с обзиром да њихова примена захтева израчунавање вредности интеграла применом неке од расположивих техника нумеричке интеграције, и то у свакој итерацији алгоритма. У сваком случају, имајући у виду процесорску моћ данашњих рачунара чијом применом се обично врши одређивање коефицијената филтара, рачунарска комплексност алгоритама није од суштинског значаја.

Методи IIa, IIb, IIIa, IIIb и IV представљају генерализацију метода I, чија примена у општем случају не резултује употребљивом филтарском функцијом, с обзиром да слабљење у пропусним опсезима не мора бити највеће на граничним фреквенцијама непропусних опсега. Са друге стране, применом метода I могу се пројектовати ускопојасни ПР непропусници једног опсега и то у широком распону вредности појачања на граничним фреквенцијама $a \in [-3, -10^{-3}]$ dB, положаја централне фреквенције непропусног опсега $\omega_{n,1} \in [0,1\pi, 0,9\pi]$ rad и ширине непропусног опсега $BW_1 \in [10^{-3}\pi, 0,1\pi]$.

Основни недостатак итеративног и неитеративног метода IIa и IIb, који долази до изражаја при вишим вредностима реда FIR филтра минималне фазе, $P_L(z)$, представља чињеница да се занемарује понашање амплитудске карактеристике ускопојасног филтра непропусника опсега у прелазним областима, што резултује додатним нулама преноса које су лоциране управо у прелазним областима, а што практично значи и повећање вредности модула најудаљенијег пола, тј. осетљивости филтарске функције на заокруживање вредности коефицијената. Овај недостатак је отклоњен

код метода IIIa и IIIb, респективно.

У случају свих метода, осим метода I, задовољење спецификација везаних за минималну вредност појачања филтра у пропусним опсезима врши се индиректно минимизацијом квадратне мере грешке амплитудске карактеристике филтра. Додатно, примена метода IIa, IIb, IIIa и IIIb не гарантује задовољење поменутих спецификација при свакој вредности реда филтра свепропусника фреквенција $L > 3K$, када је потребно повећати ред филтра. Код метода IV, са друге стране, ред филтра L не задаје се спецификацијама, већ се добија његовом применом и представља минималну вредност реда филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$ за коју су спецификације везане за појачање филтра у пропусним опсезима задовољене. Добијени минимални ред филтра у случају примене метода IV не мора бити нужно и најмања вредност реда филтра за који су спецификације задовољене у случају примене методи IIa и IIb, при чему важи и обратно.

Са повећањем реда филтра свепропусника опсега, L , имајући у виду релацију (2.20), повећава се и нагиб фазне карактеристике ускопојасног IIR филтра непропусника опсега као и њена линеарност, што значи и повећану вредност карактеристике групног кашњења филтра у пропусним опсезима. У већини практичних примена, ово не представља проблем. Са друге стране, како примена предложених метода резултује задовољењем спецификација везаних за положај граничних фреквенција непропусних опсега, не долази до изобличења спектралних компоненти улазног сигнала у околини непропусних опсега. У поређењу са неком од постојећих метода, чија примена резултује ужим ширинама непропусних опсега (тј. ужом ширином непропусног опсега уколико се ради о непропуснику једног опсега), поменута виша вредност групног кашњења обично је компензована краћим временом потребним за елиминацију синусоидалних сметњи (тј. синусоидалне сметње у случају непропусника једног опсега).

Избор коришћеног метода синтезе ускопојасног IIR филтра непропусника једног или више опсега свакако је ствар компромиса између жељене линеарности фазне карактеристике филтра (која је у директној вези са амплитудском карактеристиком), вредности реда филтра свепропусника фреквенција, максималне дозвољене таласности амплитудске карактеристике филтра и максималне вредности модула полова преносне функције филтра.

4

Реализационе структуре ускопојасних ПР филтара непропусника опсега

ГЕНЕРАЛНО гледано, након што су коефицијенти ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега одређени, преносна функција може бити реализована коришћењем више алтернативних структура различитих осетљивости карактеристика филтра на представљање вредности коефицијената множача коначном дужином дигиталне речи. Овде ће бити размотрена реализација ускопојасног филтра непропусника K опсега паралелном везом линије за кашњење $z^{-(L-2K)}$ и филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$, при чему ће бити размотрени стандардни и нестандартни начини реализације преносне функције $A_L(z)$. Излагање ће почети дискусијом осетљивости амплитудске карактеристике ускопојасног филтра непропусника фреквенција на заокруживање вредности коефицијената множача, након чега ће бити размотрени приступи одређивању потребних дужина дигиталних речи за представљање вредности коефицијената множача у формату непокретног зареза.

4.1 Осетљивост амплитудске карактеристике филтра на заокруживање вредности коэффицијената множача

Нека је са $\bar{\mathbf{d}} = [\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_L]$ означен вектор номиналних вредности коэффицијената множача (чији је укупан број једнак L) усвојене реализационе структуре, док је са $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_L]$ означен вектор вредности коэффицијената множача који се, у циљу разматрања утицаја заокруживања вредности коэффицијената множача на амплитудску карактеристику филтра, може сматрати вектором случајних променљивих. Развојем амплитудске карактеристике филтра $|H(e^{j\omega}, \mathbf{d})|$ у околини вектора номиналних вредности коэффицијената $\bar{\mathbf{d}}$ у Тејлоров развој и занемаривањем чланова развоја вишег реда добија се

$$|H(e^{j\omega}, \mathbf{d})| = |H(e^{j\omega}, \bar{\mathbf{d}})| + \sum_{k=1}^L \left. \frac{\partial |H(e^{j\omega}, \mathbf{d})|}{\partial d_k} \right|_{\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}} \cdot (d_k - \bar{d}_k). \quad (4.1)$$

Имајући у виду да је осетљивост амплитудске карактеристике филтра на промене вредности коэффицијента d_k дефинисана на следећи начин [41, 42]:

$$S_{d_k}^{|H(e^{j\omega}, \mathbf{d})|}(\omega) = \frac{\partial |H(e^{j\omega}, \mathbf{d})|}{\partial d_k}, \quad (4.2)$$

као и релацију (4.1), за одступање амплитудске карактеристике услед заокруживања вредности коэффицијената множача, може се писати

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\omega, \Delta \mathbf{d} = [\Delta d_1, \Delta d_2, \dots, \Delta d_N]) &= |H(e^{j\omega}, \mathbf{d})| - |H(e^{j\omega}, \bar{\mathbf{d}})| \\ &= \sum_{k=1}^L \bar{S}_{d_k}^{|H|}(\omega) \cdot \Delta d_k, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где је

$$\bar{S}_{d_k}^{|H|}(\omega) = \left[S_{d_k}^{|H(e^{j\omega}, \mathbf{d})|}(\omega) \right]_{\mathbf{d}=\bar{\mathbf{d}}} \quad (4.4)$$

функција осетљивости амплитудске карактеристике филтра на промене вредности

коефицијента d_k израчуната за $\mathbf{d} = \bar{\mathbf{d}}$, док је

$$\Delta d_k = d_k - \bar{d}_k \quad (4.5)$$

одступање вредности коефицијента d_k од номиналне вредности \bar{d}_k .

Имајући у виду релације (4.2) и (2.29), за осетљивост амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног филтра непропусника опсега, реализованог паралелном везом линије за кашњење и филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$, на промене вредности коефицијената множача d_k , може се писати

$$S_{d_k}^{|H(e^{j\omega}, \mathbf{d})|}(\omega) = -\text{sgn}\{\cos(\varphi_P(\omega, \mathbf{d}) + K\omega)\} \cdot \sin(\varphi_P(\omega, \mathbf{d}) + K\omega) \cdot S_{d_k}^{\varphi_P(\omega, \mathbf{d})}(\omega), \quad (4.6)$$

где је

$$S_{d_k}^{\varphi_P(\omega, \mathbf{d})}(\omega) = \frac{\partial \varphi_P(\omega, \mathbf{d})}{\partial d_k} \quad (4.7)$$

осетљивост фазне карактеристике FIR мреже минималне фазе $P_L(z)$ на промене вредности коефицијента d_k .

4.2 Потребна дужина речи за представљање вредности коефицијената множача

Генерално гледано, потребне дужине дигиталних речи за представљање коефицијената множача треба одредити тако да за одступање амплитудске карактеристике услед заокруживања, релација (4.3), важи

$$|\mathcal{D}(\omega, \Delta \mathbf{d})| \leq \mu_p, \quad \omega \in \mathcal{P}, \quad (4.8)$$

и

$$|\mathcal{D}(\omega_{n,i}, \Delta \mathbf{d})| \leq \mu_s, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (4.9)$$

где су μ_p и μ_s максимална дозвољена одступања амплитудске карактеристике реализованог филтра од пројектоване карактеристике у пропусним и непропусним опсезима, респективно.

У складу са претходним неједнакостима, проблем одређивања потребних дужина

дигиталних речи за представљање вредности коефицијената множача може се тумачити и на следећи начин:

- У поступку синтезе одређена је преносна функција чија амплитудска карактеристика $\left| H(e^{j\omega}, \bar{\mathbf{d}}) \right|$ задовољава строже спецификације од задатих,
- Потребно је одредити што је могуће краће дужине дигиталних речи за представљање вредности коефицијената множача \mathbf{d} тако да задате спецификације буду задовољене.

Проблем одређивања потребног броја битова за представљање вредности коефицијената множача се у пракси обично решава под претпоставком једнаких дужина дигиталних речи за представљање коефицијента, при чему се за потребну дужину усваја најмања за коју су неједнакости (4.8) и (4.9) задовољене.

За разлику од аналогних мрежа где је одступање вредности елемената реализационе структуре од номиналних вредности последица процеса производње [41], при чему је вредност одступања случајна променљива и може се говорити само о њеној максималној апсолутној вредности, код дигиталних структура оно је последица заокруживања вредности коефицијената множача због чега може узимати вредност из дискретног скупа. Проблем одређивања минимално потребног броја битова за представљање коефицијената множача тако да не дође до деградације карактеристика филтара је јако сложен и у општем случају нерешив задатак, чак и у случају малог броја коефицијената множача реализационе структуре [43]. У раду [43] може се наћи више детаља о постојећим техникама одређивања потребног броја битова за представљање вредности коефицијената множача. Са друге стране, у дисертацији је проблем одређивања минимално потребног броја битова за представљање коефицијената множача третиран као проблем одређивања максималних дозвољених апсолутних одступања вредности коефицијената од номиналних вредности тако да релације (4.8) и (4.9) буду задовољене, мада решење потоњег проблема не води нужно минимално потребном броју битова за представљање вредности коефицијената, с обзиром да он зависи и од номиналних вредности коефицијената множача.

У циљу процене максималних апсолутних одступања вредности коефицијената од номиналних вредности, $\left| \Delta d_k \right|_{\max}$, за $k = 1, 2, \dots, L$, тако да релације (4.8) и (4.9) буду задовољене за сваки вектор коефицијената \mathbf{d} за који важи $\left| \mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}} \right| \leq$

$\left[|\Delta d_1|_{\max}, |\Delta d_2|_{\max}, \dots, |\Delta d_L|_{\max} \right]$, биће коришћена неједнакост

$$\left| \mathcal{D}(\omega, \Delta \mathbf{d}) \right| \leq \sum_{k=1}^L \left| \bar{S}_{d_k}^{|H|}(\omega) \right| \cdot |\Delta d_k| \quad (4.10)$$

која следи директно из релације (4.3). Даље, уколико је

$$\sum_{k=1}^L \left| \bar{S}_{d_k}^{|H|}(\omega) \right| \cdot |\Delta d_k| \leq \mu_p, \quad \omega \in \mathcal{P}, \quad (4.11)$$

и

$$\sum_{k=1}^L \left| \bar{S}_{d_k}^{|H|}(\omega_{n,i}) \right| \cdot |\Delta d_k| \leq \mu_s, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (4.12)$$

релације (4.8) и (4.9) су, имајући у виду неједнакост (4.10), сигурно задовољене.

У даљем излагању ће бити размотрена два начина одређивања максималних апсолутних одступања вредности коефицијента од номиналне вредности $|\Delta d_k|_{\max}$, за $k = 1, 2, \dots, L$, на основу чијег познавања је једноставно одредити потребне дужине дигиталних речи за представљање вредности коефицијената множача, а која ће зависити од начина представе и номиналних вредности $\bar{\mathbf{d}}$. У случају представљања коефицијената множача у непокретном зарезу, што је формат представе који ће бити коришћен у дисертацији, број битова за разломљени део коефицијента d_k може се одредити добро познатим алгоритмом заокруживања вредности коефицијента на најближу дозвољену вредност:

Корак 1. Иницијализовати вредност потребног броја битова за представљање разломљеног дела вредности коефицијента d_k , $F_{d_k} = 0$.

Корак 2. Уколико $\frac{\text{sgn}(\bar{d}_k)}{2^{F_{d_k}}} \cdot \lfloor 2^{F_{d_k}} \cdot |\bar{d}_k| \rfloor$ или $\frac{\text{sgn}(\bar{d}_k)}{2^{F_{d_k}}} \cdot \lceil 2^{F_{d_k}} \cdot |\bar{d}_k| \rceil$ припадају интервалу $\left[\bar{d}_k - |\Delta d_k|_{\max}, \bar{d}_k + |\Delta d_k|_{\max} \right]$, прећи на корак 4.

Корак 3. $F_{d_k} = F_{d_k} + 1$. Прећи на корак 2.

Корак 4. Потребан број битова за представљање разломљеног дела вредности коефицијента d_k једнак је F_{d_k} . За вредност коефицијента усваја се једна од

следећих вредности

$$\tilde{d}_k = \frac{\text{sgn}(\bar{d}_k)}{2^{F_{d_k}}} \cdot \lfloor 2^{F_{d_k}} \cdot |\bar{d}_k| \rfloor, \quad \hat{d}_k = \frac{\text{sgn}(\bar{d}_k)}{2^{F_{d_k}}} \cdot \lceil 2^{F_{d_k}} \cdot |\bar{d}_k| \rceil,$$

на следећи начин:

- уколико и \hat{d}_k и \tilde{d}_k припадају интервалу $[\bar{d}_k - |\Delta d_k|_{\max}, \bar{d}_k + |\Delta d_k|_{\max}]$, за вредност коефицијента узима се она за коју је апсолутно одступање од номиналне вредности коефицијента мање,
- уколико једна од вредности \hat{d}_k и \tilde{d}_k не припада интервалу $[\bar{d}_k - |\Delta d_k|_{\max}, \bar{d}_k + |\Delta d_k|_{\max}]$, за вредност коефицијента узима се она која припада поменутом интервалу.

4.2.1 Претпоставка једнакости максималних апсолутних одступања вредности коефицијената од номиналних вредности

Уврштавајући претпоставку о једнакости максималних апсолутних вредности величина Δd_k , за $k = 1, 2, \dots, L$, тј. $\Delta d = |\Delta d_1|_{\max} = |\Delta d_2|_{\max} = \dots = |\Delta d_L|_{\max}$, у релацију (4.10) добија се

$$|\mathcal{D}(\omega, \Delta \mathbf{d})| \leq \Delta d \cdot WS(\omega), \quad (4.13)$$

где је

$$WS(\omega) = \sum_{k=1}^L \left| \bar{S}_{d_k}^{|H|}(\omega) \right| \quad (4.14)$$

функција апсолутне осетљивости амплитудске карактеристике у најгорем случају (енг. *worst-case*) [42] која се код разматраних филтара, имајући у виду релацију (4.6), може написати у следећем облику

$$WS(\omega) = \left| \sin(\varphi_P(\omega, \bar{\mathbf{d}}) + K\omega) \right| \cdot \sum_{k=1}^L \left| \bar{S}_{d_k}^{\varphi_P}(\omega) \right|. \quad (4.15)$$

Максималне апсолутне вредности величина Δd_k , за $k = 1, 2, \dots, L$, које су код

разматраног приступа једнаке Δd , узимају вредност

$$\Delta d = \min \left\{ \frac{\mu_p}{\max_{\omega \in \mathcal{P}} WS(\omega)}, \frac{\mu_s}{\max_{1 \leq i \leq K} WS(\omega_{n,i})} \right\}, \quad (4.16)$$

те су релације (4.11) и (4.12) за свако $|\Delta d_k| \leq \Delta d$, $k = 1, 2, \dots, L$, задовољене.

4.2.2 Претпоставка неједнакости максималних апсолутних одступања вредности коефицијената од номиналних вредности

Други приступ одређивању апсолутних толеранција вредности коефицијената множача заснива се на претпоставци да коефицијенту на чију промену је амплитудска карактеристика филтра најосетљивија, узимајући у обзир и максимално дозвољена одступања μ_p и μ_s , одговара најмања апсолутна толеранција вредности у односу на номиналну. С тим у вези, нека је са $I_d = (i_1, i_2, \dots, i_L)$ означена уређена L -торка индекса коефицијената, тако да важи

$$\max \left\{ \frac{\max_{\omega \in \mathcal{P}} |\overline{S}_{d_{i_m}}^{|H|}(\omega)|}{\mu_p}, \frac{\max_{1 \leq l \leq K} |\overline{S}_{d_{i_m}}^{|H|}(\omega_{n,l})|}{\mu_s} \right\} \geq \max \left\{ \frac{\max_{\omega \in \mathcal{P}} |\overline{S}_{d_{i_{m+1}}}^{|H|}(\omega)|}{\mu_p}, \frac{\max_{1 \leq l \leq K} |\overline{S}_{d_{i_{m+1}}}^{|H|}(\omega_{n,l})|}{\mu_s} \right\}, \quad (4.17)$$

за $m = 1, 2, \dots, L - 1$. Вредности непознатих, тј. заокружених, вредности коефицијената множача одређују се почев од коефицијента за чију се апсолутну толеранцију вредности у односу на номиналну очекује да буде најмања, тј. од коефицијента d_{i_1} .

Вредност коефицијента d_{i_j} , $1 \leq j \leq L$, представљеног у формату непокретног зареза одређена је на основу претходно одређених вредности коефицијената d_{i_m} , $m = 1, 2, \dots, j - 1$, алгоритмом који се састоји из следећих корака:

Корак 1. Одређивање вредности максимално дозвољеног одступања амплитудске карактеристике реализованог филтра од пројектоване карактеристике у пропусним и непропусним опсезима услед заокруживања вредности коефиције-

нта d_{i_j} , а за познате вредности коефицијената d_{i_m} , $m = 1, 2, \dots, j - 1$:

$$\mu_p^{(j)}(\omega) = \begin{cases} \mu_p, & j = 1 \\ \mu_p^{(j-1)}(\omega) - \left| \overline{S}_{d_{i_{j-1}}}^{|H|}(\omega) \cdot (d_{i_{j-1}} - \bar{d}_{i_{j-1}}) \right|, & j > 1 \end{cases}, \quad (4.18)$$

$$\mu_s^{(j)}(\omega) = \begin{cases} \mu_s, & j = 1 \\ \mu_s^{(j-1)}(\omega) - \left| \overline{S}_{d_{i_{j-1}}}^{|H|}(\omega) \cdot (d_{i_{j-1}} - \bar{d}_{i_{j-1}}) \right|, & j > 1 \end{cases}, \quad (4.19)$$

као и функције апсолутне осетљивости амплитудске карактеристике на заокруживање вредности коефицијената d_{i_j} у најгорем случају

$$WS^{(j)}(\omega) = \begin{cases} WS(\omega), & j = 1 \\ WS^{(j-1)}(\omega) - \left| \overline{S}_{d_{i_{j-1}}}^{|H|}(\omega) \right|, & j > 1 \end{cases}, \quad (4.20)$$

поново, за познате вредности коефицијената d_{i_m} , $m = 1, 2, \dots, j - 1$.

Корак 2. Одређивање максималног апсолутног одступања вредности коефицијента d_{i_j} коришћењем релације:

$$|\Delta d_{i_j}|_{\max} = \min \left\{ \frac{\min_{\omega \in \mathcal{P}} \mu_p^{(j)}(\omega)}{\max_{\omega \in \mathcal{P}} WS^{(j)}(\omega)}, \frac{\min_{1 \leq l \leq K} \mu_s^{(j)}(\omega_{n,l})}{\max_{1 \leq l \leq K} WS^{(j)}(\omega_{n,l})} \right\}. \quad (4.21)$$

Корак 3. Израчунавање вредности d_{i_j} применом већ разматраног алгоритма за одређивање потребног броја битова за представљање разломљеног дела вредности коефицијента.

Треба напоменути да су Y.C. Lim и Y.J. Yu користили сличан приступ заокруживању вредности коефицијената множача решеткасте реализације банке филтара [44].

4.3 Стандардне реализационе структуре

Разматрање реализационих структура ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега почеће са стандардним реализационим структурама, од којих

ће бити размотрена паралелна веза линије за кашњење и директне, каскадне и решеткасте реализације филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$. У циљу поређења различитих реализационих структура са становишта осетљивости амплитудске карактеристике филтра на заокруживање вредности коефицијената множача, биће разматрана функција апсолутне осетљивости амплитудске карактеристике у најгорем случају, $WS(\omega)$, максималне вредности осетљивости амплитудске карактеристике на заокруживање вредности коефицијената множача у пропусним и непропусним опсезима, као и потребне дужине дигиталних речи за представљање вредности коефицијената множача.

Познато је да је осетљивост амплитудске карактеристике произвољног филтра реализованог паралелном спрегом два филтра свепропусника фреквенција (у нашем случају је један од свепропусника фреквенција заправо линија за кашњење) јако мала у пропусним опсезима [45, 46], а висока у непропусним опсезима, због чега је потребна дужина дигиталних речи за представљање коефицијената множача обично одређена осетљивошћу амплитудске карактеристике филтра у непропусним опсезима.

4.3.1 Директна реализација филтра свепропусника фреквенција

У случају паралелне везе линије за кашњење и директне реализације филтра свепропусника фреквенција

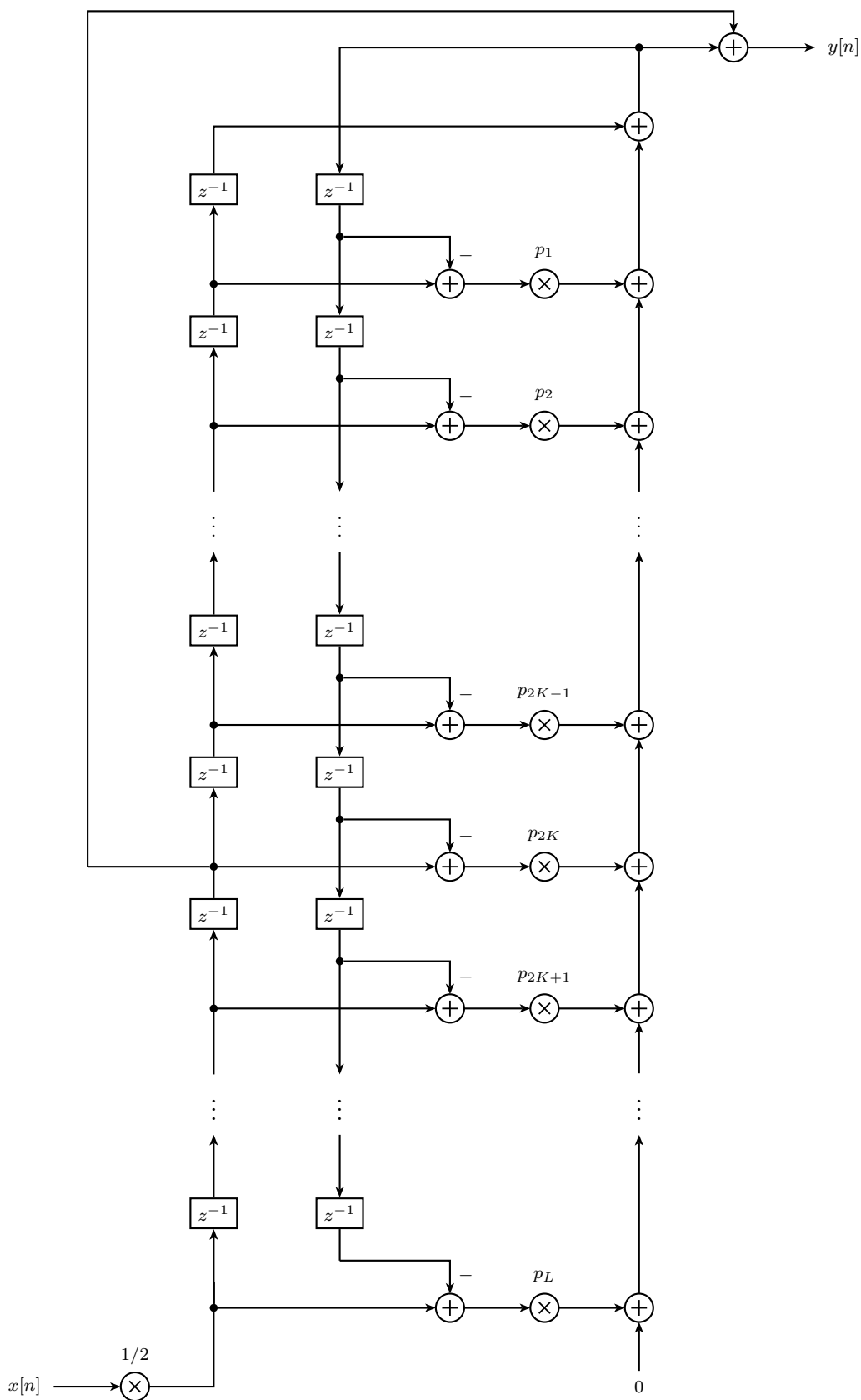
$$H(z) = \frac{1}{2} \left[z^{-(L-2K)} + \frac{z^{-L} + \sum_{k=0}^{L-1} p_{L-k} z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^L p_k z^{-k}} \right], \quad (4.22)$$

коефицијенти множача реализационе структуре одговарају коефицијентима директне реализације филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$, тј.

$$\mathbf{d}_{dir} = [d_1^{(dir)}, d_2^{(dir)}, \dots, d_L^{(dir)}] = [p_1, p_2, \dots, p_L]. \quad (4.23)$$

Једна од могућих реализационих структура разматране представе преносне функције приказана је на слици 4.1, при чему се очигледно ради о неканоничној

структури.



Сл. 4.1: Реализациона структура ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега. Филтар свепропусник фреквенција реализован је директно.

Како је фазна карактеристика FIR мреже $P_L(z)$, $\varphi_P(\omega)$, изражена преко коефицијената реализационе структуре облика

$$\varphi_P(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\sum_{i=1}^L p_i \sin(i\omega)}{1 + \sum_{i=1}^L p_i \cos(i\omega)}, \quad (4.24)$$

израз за осетљивост $S_{p_k}^{\varphi_P}(\omega)$, потребан за одређивање функције апсолутне осетљивости амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега у најгорем случају, релација (4.15), за случај разма-тране реализације постаје

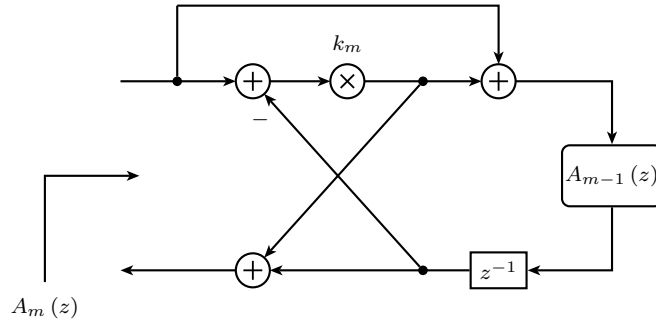
$$S_{p_k}^{\varphi_P}(\omega) = \frac{\partial \varphi_P(\omega)}{\partial p_k} = -\frac{\sin k\omega + \sum_{i=1}^L p_i \sin(\omega(k-i))}{\left(1 + \sum_{i=1}^L p_i \cos i\omega\right)^2}. \quad (4.25)$$

4.3.2 Решеткаста реализација филтра свепропусника фреквенција

Још један начин реализације ускопојасног рекурзивног филтра непропусника опсега јесте паралелном везом линије за кашњење и решеткасте реализационе структуре филтра свепропусника фреквенција дефинисане рекурзивном релацијом [7, 29, 30, 33]:

$$A_m(z) = z^{-m} \frac{P_m(z^{-1})}{P_m(z)} = \frac{k_m + z^{-1} A_{m-1}(z)}{1 + z^{-1} k_m A_{m-1}(z)}, \quad k_m = A_m(\infty), \quad (4.26)$$

за $m = L, L-1, \dots, 1$, слика 4.2, којом се постиже ниска осетљивост карактеристика филтра на заокруживање вредности коефицијената множака, обзиром на робустан начин реализације имениоца преносне функције филтра свепропусника фреквенција, који је уједно и именилац преносне функције ускопојасног рекурзивног филтра непропусника опсега. Треба нагласити да је решеткаста реализација због своје модуларности посебно погодна за VLSI (енг. *Very Large Scale Integration*) имплементацију [33].



Сл. 4.2: Решеткаста реализација филтра свепропусника фреквенција.

Како је на основу релације (4.26):

$$P_m(z) = P_{m-1}(z) + k_m z^{-m} P_{m-1}(z^{-1}), \quad (4.27)$$

за $m = L, L-1, \dots, 1$, фазна карактеристика FIR мреже $P_m(z)$ је облика:

$$\varphi_{P_m}(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi_{P_{m-1}}(\omega) - k_m \sin(m\omega + \varphi_{P_{m-1}}(\omega))}{\cos \varphi_{P_{m-1}}(\omega) + k_m \cos(m\omega + \varphi_{P_{m-1}}(\omega))}, \quad (4.28)$$

при чему је $\varphi_P(\omega) = \varphi_{P_L}(\omega)$ и $\varphi_{P_0}(\omega) = 0$. Имајући у виду претходну релацију, осетљивост фазне карактеристике $\varphi_P(\omega)$ на промене вредности коефицијента множача k_m може се одредити коришћењем релације

$$S_{k_m}^{\varphi_P}(\omega) = \frac{\partial \varphi_{P_m}(\omega)}{\partial k_m} \prod_{i=m+1}^L \frac{\partial \varphi_{P_i}(\omega)}{\partial \varphi_{P_{i-1}}(\omega)}, \quad (4.29)$$

при чему је

$$\frac{\partial \varphi_{P_m}(\omega)}{\partial k_m} = \frac{-\sin(2\varphi_{P_{m-1}}(\omega) + m\omega)}{k_m^2 + 2k_m \cos(2\varphi_{P_{m-1}}(\omega) + m\omega) + 1}, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \varphi_{P_i}(\omega)}{\partial \varphi_{P_{i-1}}(\omega)} = \frac{1 - k_i^2}{k_i^2 + 2k_i \cos(2\varphi_{P_{i-1}}(\omega) + i\omega) + 1}. \quad (4.31)$$

Коефицијенти множача разматране реализационе структуре су

$$\mathbf{d}_{latc} = \left[d_1^{(latc)}, d_2^{(latc)}, \dots, d_L^{(latc)} \right] = \left[k_1, k_2, \dots, k_L \right]. \quad (4.32)$$

4.3.3 Каскадна реализација филтра свепропусника фреквенција

У случају када се филтар свепропусник фреквенција реализује каскадно, посматра се следећа представа преносне функције ускопојасног рекурзивног филтра непропусника опсега

$$H(z) = \frac{1}{2} \left[z^{-(L-2K)} + \prod_{i=1}^m A_{1,i}(z) \cdot \prod_{j=1}^{\frac{L-m}{2}} A_{2,j}(z) \right], \quad (4.33)$$

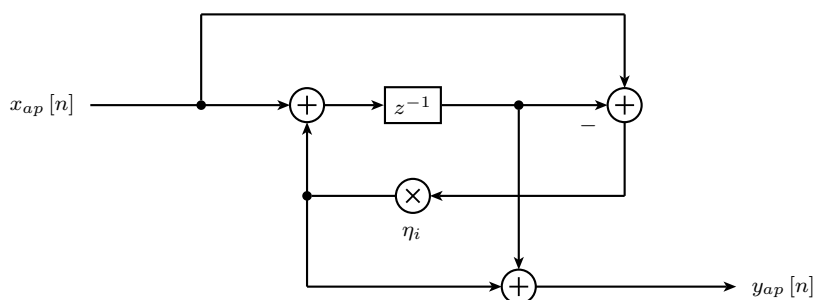
где је са m означен број секција првог реда, што је уједно и број реалних полова преносне функције филтра, док су

$$A_{1,i}(z) = \frac{\eta_i + z^{-1}}{1 + \eta_i z^{-1}} = z^{-1} \frac{C_i(z^{-1})}{C_i(z)}, \quad (4.34)$$

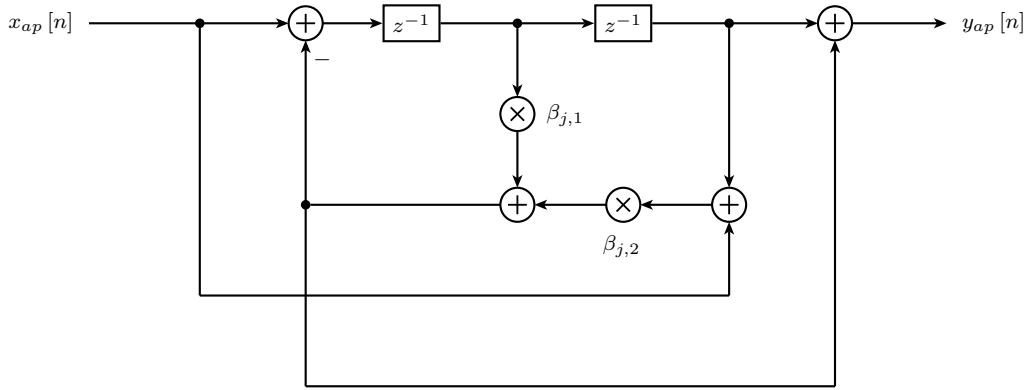
$$A_{2,j}(z) = \frac{\beta_{j,2} + \beta_{j,1}z^{-1} + z^{-2}}{1 + \beta_{j,1}z^{-1} + \beta_{j,2}z^{-2}} = z^{-2} \frac{B_j(z^{-1})}{B_j(z)}, \quad (4.35)$$

секције свепропусника фреквенција првог и другог реда, респективно.

Постоји већи број каноничних и неканоничних реализационих структура преносних функција облика $\frac{\eta_i + z^{-1}}{1 + \eta_i z^{-1}}$ и $\frac{\beta_{j,2} + \beta_{j,1}z^{-1} + z^{-2}}{1 + \beta_{j,1}z^{-1} + \beta_{j,2}z^{-2}}$ са минималним бројем множача које се могу добити методом екстракције множача [30, 47, 48]. Један од могућих начина реализације секција свепропусника фреквенција првог и другог реда приказан је на сликама 4.3 и 4.4.



Сл. 4.3: Једна од више могућих каноничних реализација секције свепропусника фреквенција првог реда $A_{1,i}(z) = \frac{\eta_i + z^{-1}}{1 + \eta_i z^{-1}}$ [49].



Сл. 4.4: Једна од више могућих каноничних реализација секције свепропусника фреквенција другог реда $A_{2,j}(z) = \frac{\beta_{j,2} + \beta_{j,1}z^{-1} + z^{-2}}{1 + \beta_{j,1}z^{-1} + \beta_{j,2}z^{-2}}$ [49].

Како у случају каскадне реализације филтра свепропусника фреквенција важи

$$\varphi_P(\omega) = \sum_{i=1}^m \varphi_{C_i}(\omega) + \sum_{i=1}^{\frac{L-m}{2}} \varphi_{B_i}(\omega), \quad (4.36)$$

где је

$$\varphi_{C_i}(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\eta_i \sin \omega}{1 + \eta_i \cos \omega}, \quad (4.37)$$

$$\varphi_{B_i}(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\beta_{i,1} \sin \omega + \beta_{i,2} \sin 2\omega}{1 + \beta_{i,1} \cos \omega + \beta_{i,2} \cos 2\omega}, \quad (4.38)$$

једноставно је одредити изразе за осетљивости фазне карактеристике $\varphi_P(\omega)$ на заокруживање вредности коефицијената η_i , $\beta_{i,1}$ и $\beta_{i,2}$:

$$S_{\eta_i}^{\varphi_P}(\omega) = S_{\eta_i}^{\varphi_{C_i}}(\omega) = -\frac{\sin \omega}{1 + \eta_i^2 + 2\eta_i \cos \omega}, \quad (4.39)$$

$$S_{\beta_{i,1}}^{\varphi_P}(\omega) = S_{\beta_{i,1}}^{\varphi_{B_i}}(\omega) = -\frac{(1 - \beta_{i,2}) \sin \omega}{(1 - \beta_{i,2})^2 + (\beta_{i,1} + 2 \cos \omega)(\beta_{i,1} + 2\beta_{i,2} \cos \omega)}, \quad (4.40)$$

$$S_{\beta_{i,2}}^{\varphi_P}(\omega) = S_{\beta_{i,2}}^{\varphi_{B_i}}(\omega) = -\frac{(\beta_{i,1} + 2 \cos \omega) \sin \omega}{(1 - \beta_{i,2})^2 + (\beta_{i,1} + 2 \cos \omega)(\beta_{i,1} + 2\beta_{i,2} \cos \omega)}. \quad (4.41)$$

Коефицијенти множача разматране реализационе структуре су

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{cas} &= \left[\eta_1, \dots, \eta_m, \beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \dots, \beta_{\frac{L-m}{2},1}, \beta_{\frac{L-m}{2},2} \right] \\ &= \left[d_1^{(cas)}, d_2^{(cas)}, \dots, d_L^{(cas)} \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

4.3.4 Примери реализације

У наредним примерима биће извршена анализа осетљивости амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега на промене вредности коефицијената множача, а за различите стандардне реализационе структуре. Поред анализе осетљивости паралелне везе линије за кашњење и филтра све-пропусника фреквенција који је реализован директном, решеткастом или каскадном структуром биће одређене и потребне дужине дигиталних речи за представљање разломљених делова вредности коефицијената множача, представљених у формату непокретног зареза.

У оба разматрана примера који следе усвојено је да је $\mu_p = \mu_s = 0,01$. Вредност μ_s од 0,01 гарантује да је слабљење на централним фреквенцијама непропусних опсега бар 40 dB.

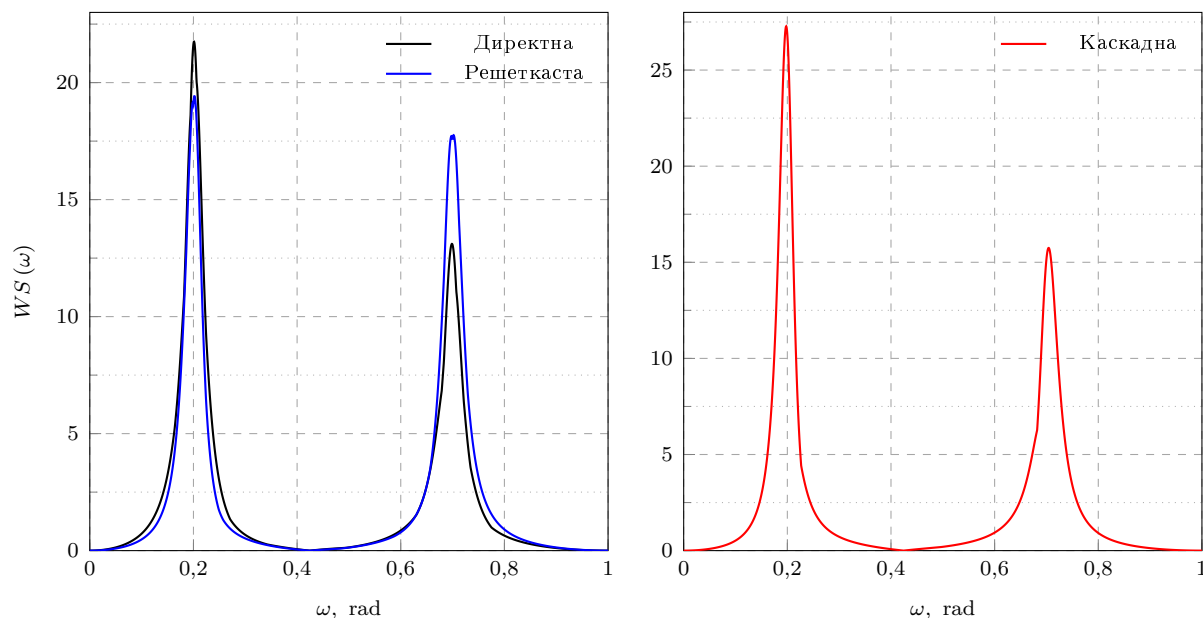
Пример 4.1 *Преносну функцију ускопојасног дигиталног филтра непропусника опсега чије су спецификације: $\omega_{n,1} = 0,2\pi$, $\omega_{n,2} = 0,7\pi$, $BW_1 = 0,08\pi$, $BW_2 = 0,1\pi$, $a = -1$ dB, одређену применом метода IV, реализовати паралелном везом линије за кашњење и филтра свепропусника фреквенција који је реализован директном, решеткастом и каскадном структуром.*

У случају примене метода IV, добијени ред филтра свепропусника фреквенција једнак је $L = 6$, при чему преносна функција нема реалних полова. Номиналне вредности коефицијената реализационих структура, као и максималне вредности апсолутних осетљивости амплитудске карактеристике филтра и функције осетљивости амплитудске карактеристике у најгорем случају, у пропусним и непропусним опсезима, дате су у табели 4.1. Функције апсолутне осетљивости амплитудске карактеристике филтра у најгорем случају приказане су на слици 4.5.

У табели 4.2 дате су вредности коефицијената множача разматраних реализационих структура, као и потребне дужине дигиталних речи за представљање разломљених делова вредности коефицијената. Суперскриптом I означене су вредности коефицијената одређене под претпоставком једнаких максималних апсолутних одступања вредности коефицијената од номиналних, релација (4.16). Суперскриптом II означене су вредности добијене применом поступка описаног у делу 4.2.2, док

Таб. 4.1: Пример 4.1. Номиналне вредности коефицијената множача реализационих структура заокружене на 6 децимала и максималне апсолутне вредности осетљивости амплитудске карактеристике и функције осетљивости амплитудске карактеристике у најгорем случају, у пропусним и непропусним опсезима.

k	1	2	3	4	5	6
Директна реализација филтра свепропусника, $\max_{\omega \in \mathcal{P}} WS(\omega) = 4,56$, $\max_{1 \leq i \leq K} WS(\omega_{n,i}) = 21,66$						
\bar{d}_k	-0,445790	0,087804	-0,336060	0,747036	-0,009811	-0,002262
$\max_{\omega \in \mathcal{P}} \bar{S}_{d_k}^{H1}(\omega) $	1,044	0,538	0,981	1,182	1,091	0,730
$\max_{1 \leq i \leq K} \bar{S}_{d_k}^{H1}(\omega_{n,i}) $	4,332	5,355	4,332	1,655	2,926	4,332
Решеткаста реализација филтра свепропусника, $\max_{\omega \in \mathcal{P}} WS(\omega) = 3,56$, $\max_{1 \leq i \leq K} WS(\omega_{n,i}) = 19,15$						
\bar{d}_k	-0,403114	0,039154	-0,024158	0,742502	-0,010820	-0,002262
$\max_{\omega \in \mathcal{P}} \bar{S}_{d_k}^{H1}(\omega) $	0,832	0,700	0,686	0,836	0,448	0,431
$\max_{1 \leq i \leq K} \bar{S}_{d_k}^{H1}(\omega_{n,i}) $	7,546	6,806	5,564	0,038	0,813	0,951
Каскадна реализација филтра свепропусника, $\max_{\omega \in \mathcal{P}} WS(\omega) = 4,58$, $\max_{1 \leq i \leq K} WS(\omega_{n,i}) = 26,84$						
\bar{d}_k	-0,014595	-0,003047	1,082624	0,848081	-1,513819	0,875374
$\max_{\omega \in \mathcal{P}} \bar{S}_{d_k}^{H1}(\omega) $	0,398	0,458	0,789	1,716	1,341	2,548
$\max_{1 \leq i \leq K} \bar{S}_{d_k}^{H1}(\omega_{n,i}) $	0,796	0,967	8,129	4,974	13,622	11,391



Сл. 4.5: Пример 4.1. Функције апсолутне осетљивости у најгорем случају за случај директне, каскадне и решеткасте реализације филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$.

су суперскриптом III означене вредности добијене приступом најчешће коришћеним у пракси² (након заокруживања одбачене су безначајне нуле разломљених делова

²трећи пасус у делу 4.2

вредности коефицијената због чега су потребне дужине дигиталних речи за представљање истих различите).

Таб. 4.2: Пример 4.1. Вредности коефицијената множача реализационих структура и потребне дужине дигиталних речи за представљање разломљених делова вредности коефицијената.

Директна реализација филтра свепропусника фреквенција,

$$\sum_{k=1}^6 F_{d_k^I} = 55, \quad \sum_{k=1}^6 F_{d_k^{II}} = 43, \quad \sum_{k=1}^6 F_{d_k^{III}} = 45$$

k	d_k^I	d_k^{II}	d_k^{III}	$F_{d_k^I}$	$F_{d_k^{II}}$	$F_{d_k^{III}}$
1	-0,44580078125	-0,4453125	-0,4453125	11	7	7
2	0,087890625	0,087890625	0,0859375	9	9	7
3	-0,3359375	-0,3359375	-0,3359375	7	7	7
4	0,7470703125	0,75	0,74609375	10	2	8
5	-0,009765625	-0,009765625	-0,01171875	9	9	8
6	-0,001953125	-0,001953125	-0,00390625	9	9	8

Решеткаста реализација филтра свепропусника фреквенција,

$$\sum_{k=1}^6 F_{d_k^I} = 53, \quad \sum_{k=1}^6 F_{d_k^{II}} = 38, \quad \sum_{k=1}^6 F_{d_k^{III}} = 46$$

k	d_k^I	d_k^{II}	d_k^{III}	$F_{d_k^I}$	$F_{d_k^{II}}$	$F_{d_k^{III}}$
1	-0,4033203125	-0,4033203125	-0,40234375	10	10	8
2	0,0390625	0,0390625	0,0390625	7	7	7
3	-0,0244140625	-0,0234375	-0,0234375	10	7	7
4	0,7421875	0,7421875	0,7421875	7	7	7
5	-0,0107421875	-0,0078125	-0,01171875	10	7	8
6	-0,001953125	0	-0,001953125	9	0	9

Каскадна реализација филтра свепропусника фреквенција,

$$\sum_{k=1}^6 F_{d_k^I} = 62, \quad \sum_{k=1}^6 F_{d_k^{II}} = 45, \quad \sum_{k=1}^6 F_{d_k^{III}} = 45$$

k	d_k^I	d_k^{II}	d_k^{III}	$F_{d_k^I}$	$F_{d_k^{II}}$	$F_{d_k^{III}}$
1	-0,0146484375	-0,015625	-0,013671875	10	6	9
2	-0,0029296875	-0,00390625	-0,00390625	10	8	8
3	1,08251953125	1,08251953125	1,08203125	11	11	8
4	0,84814453125	0,84765625	0,84765625	11	8	8
5	-1,513671875	-1,513671875	-1,513671875	9	9	9
6	0,87548828125	0,875	0,875	11	3	3

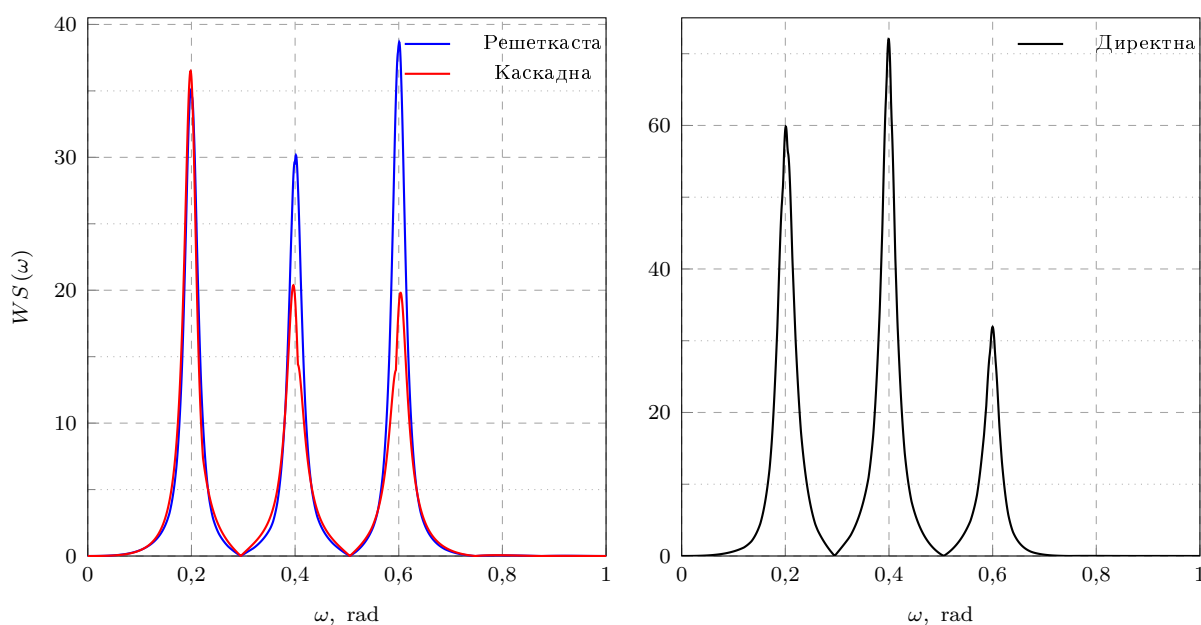
Овим вредностима, а независно од примењеног приступа заокруживању вредности коефицијената множача, одговара слабљење на централним фреквенцијама непропусних опсега веће од 42 dB, 41 dB и 48 dB, за случај директне, решеткасте и каскадне реализације филтра свепропусника фреквенција, респективно. Додатно, и релација (4.8) је задовољена, док преносна функција и након заокруживања вредности коефицијената остаје стабилна.

Имајући у виду табелу 4.2, може се закључити да приступ заокруживању вредности коефицијената множача има важну улогу приликом избора одговарајуће

реализационе структуре. С тим у вези, посебно је интересантна чињеница да се коришћењем приступа описаног у делу 4.2.2 на случај решеткасте реализације филтра свепропусника фреквенција, број потребних множача реализационе структуре смањује. Први приступ (означен суперскриптом I) заокруживању вредности коефицијената множача се, независно од реализационе структуре, показао најлошијим, обзиром да резултује у збиру највећим бројем битова за представљање разломљених делова вредности коефицијената множача, табела 4.2.

Пример 4.2 Преносну функцију ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега чије су спецификације: $L = 11$, $\omega_{n,1} = 0,2\pi$, $\omega_{n,2} = 0,4\pi$, $\omega_{n,3} = 0,6\pi$, $BW_1 = BW_2 = BW_3 = 0,05\pi$, $a = -1,5$ dB, одређену применом метода Пб, реализовати паралелном везом линије за кашњење и филтра свепропусника фреквенција који је реализован директном, решеткастом и каскадном структуром.

Номиналне вредности коефицијената реализационих структура, као и максималне вредности апсолутних осетљивости амплитудске карактеристике филтра и функције осетљивости амплитудске карактеристике у најгорем случају, у пропусним и непропусним опсезима, дате су у табели 4.3, при чему треба поменути да преносна функција има један реалан пол. Функције апсолутне осетљивости амплитудске карактеристике филтра у најгорем случају приказане су на слици 4.6.



Сл. 4.6: Пример 4.2. Функције апсолутне осетљивости у најгорем случају за случај директне, каскадне и решеткасте реализације филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$.

Вредности коефицијената множача разматраних реализационих структура, као и потребне дужине дигиталних речи за представљање разломљених делова вредности коефицијената, дате су у табели 4.4. Овим вредностима, а независно од примењеног приступа заокруживању, одговара слабљење на централним фреквенцијама непропусних опсега веће од 50 dB, 40 dB и 48 dB, за случај директне, решеткасте и каскадне реализације филтра свепропусника фреквенција, респективно. Додатно, и релација (4.8) је задовољена, док преносна функција остаје стабилна и након заокруживања вредности коефицијената.

Имајући у виду табелу 4.4, може се закључити да се решеткастом и каскадном реализацијом филтра свепропусника фреквенција, које су међусобно упоредиве обзиром на укупан потребан број битова за представљање разломљених делова вредности коефицијената множача, постиже нижа сложеност реализационе структуре, у поређењу са каскадном реализацијом. Генерални закључак, имајући у виду табелу 4.4 и претходни пример (тј. табелу 4.2), јесте да поступак одређивања потребних дужина дигиталних речи за представљање разломљених делова вредности коефицијената множача, описан у делу 4.2.2, резултује нижим или приближно истим средњим бројем битова потребним за представљање разломљених делова вредности коефицијената множача, у поређењу са приступом најчешће коришћеним у пракси. Са друге стране, приступ дефинисан релацијом (4.16) се у посматраним примерима показао најлошије.

Таб. 4.3: Пример 4.2. Номиналне вредности коефицијената множача реализационих структура заокружене на 6 децимала и максималне апсолутне вредности осетљивости амплитудске карактеристике и функције осетљивости амплитудске карактеристике у најгорем случају, у пропусним и непропусним опсезима.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<i>Директна реализација филтра свепропусника фреквенција, $\max_{\omega \in \mathcal{P}} WS(\omega) = 22,97$, $\max_{1 \leq i \leq K} WS(\omega_{n,i}) = 71,86$</i>											
\bar{d}_k	-1,606250	2,555827	-2,540485	2,501802	-1,578376	0,982464	-0,108457	0,010283	0,064551	-0,037912	0,027642
$\max_{\omega \in \mathcal{P}} \bar{S}_{d_k}^{H1}(\omega) $	3,102	2,883	1,713	3,126	2,523	3,011	2,919	0,556	3,101	2,845	2,805
$\max_{1 \leq i \leq K} \bar{S}_{d_k}^{H1}(\omega_{n,i}) $	7,985	7,106	9,870	7,106	7,985	7,985	7,106	9,870	7,106	7,985	7,985
<i>Решеткаста реализација филтра свепропусника фреквенција, $\max_{\omega \in \mathcal{P}} WS(\omega) = 9,40$, $\max_{1 \leq i \leq K} WS(\omega_{n,i}) = 38,49$</i>											
\bar{d}_k	-0,446844	0,703036	-0,350023	0,555078	-0,272934	0,753211	-0,058638	0,070930	0,004329	0,006493	0,027642
$\max_{\omega \in \mathcal{P}} \bar{S}_{d_k}^{H1}(\omega) $	2,104	1,648	1,922	1,953	1,637	1,450	0,618	0,564	0,554	0,556	0,368
$\max_{1 \leq i \leq K} \bar{S}_{d_k}^{H1}(\omega_{n,i}) $	11,285	7,912	9,104	10,728	6,602	0,385	0,876	0,888	0,893	1,005	$< 10^{-12}$
<i>Каскадна реализација филтра свепропусника фреквенција, $\max_{\omega \in \mathcal{P}} WS(\omega) = 10,75$, $\max_{1 \leq i \leq K} WS(\omega_{n,i}) = 35,98$</i>											
\bar{d}_k	0,457730	-0,823987	0,288445	0,292677	0,290260	0,585211	0,895406	-1,531900	0,896027	-0,585981	0,899018
$\max_{\omega \in \mathcal{P}} \bar{S}_{d_k}^{H1}(\omega) $	0,580	1,049	1,162	0,782	0,503	1,793	3,094	2,878	4,806	1,763	3,131
$\max_{1 \leq i \leq K} \bar{S}_{d_k}^{H1}(\omega_{n,i}) $	1,026	1,879	2,096	1,446	0,928	10,052	3,154	16,345	13,541	10,412	3,305

Таб. 4.4: Пример 4.2. Вредности коефицијената множака реализационих структура и потребне дужине дигиталних речи за представљање разломљених делова вредности коефицијената.

Директна реализација филтра свепропусника фреквенција,

$$\sum_{k=1}^{11} F_{d_k^I} = 122, \quad \sum_{k=1}^{11} F_{d_k^{II}} = 114, \quad \sum_{k=1}^{11} F_{d_k^{III}} = 111$$

k	d_k^I	d_k^{II}	d_k^{III}	$F_{d_k^I}$	$F_{d_k^{II}}$	$F_{d_k^{III}}$
1	-1,606201171875	-1,606201171875	-1,6064453125	12	12	10
2	2,555908203125	2,5556640625	2,5556640625	12	10	10
3	-2,54052734375	-2,54052734375	-2,54052734375	11	11	11
4	2,501708984375	2,501953125	2,501953125	12	9	9
5	-1,578369140625	-1,578369140625	-1,57861328125	12	12	11
6	0,982421875	0,982421875	0,982421875	9	9	9
7	-0,1083984375	-0,1083984375	-0,1083984375	10	10	10
8	0,01025390625	0,01025390625	0,01025390625	11	11	11
9	0,064453125	0,064453125	0,064453125	9	9	9
10	-0,037841796875	-0,0380859375	-0,0380859375	12	10	10
11	0,027587890625	0,02783203125	0,02783203125	12	11	11

Решеткаста реализација филтра свепропусника фреквенција,

$$\sum_{k=1}^{11} F_{d_k^I} = 113, \quad \sum_{k=1}^{11} F_{d_k^{II}} = 91, \quad \sum_{k=1}^{11} F_{d_k^{III}} = 95$$

k	d_k^I	d_k^{II}	d_k^{III}	$F_{d_k^I}$	$F_{d_k^{II}}$	$F_{d_k^{III}}$
1	-0,44677734375	-0,44677734375	-0,447265625	11	11	9
2	0,703125	0,703125	0,703125	6	6	6
3	-0,35009765625	-0,35009765625	-0,349609375	11	11	9
4	0,55517578125	0,55517578125	0,5546875	11	11	7
5	-0,27294921875	-0,2734375	-0,2724609375	11	7	10
6	0,75341796875	0,75390625	0,7529296875	11	8	10
7	-0,05859375	-0,05859375	-0,05859375	8	8	8
8	0,07080078125	0,0703125	0,0712890625	11	7	10
9	0,00439453125	0,00390625	0,00390625	11	8	8
10	0,00634765625	0,005859375	0,0068359375	11	9	10
11	0,02783203125	0,03125	0,02734375	11	5	8

Каскадна реализација филтра свепропусника фреквенција,

$$\sum_{k=1}^{11} F_{d_k^I} = 111, \quad \sum_{k=1}^{11} F_{d_k^{II}} = 92, \quad \sum_{k=1}^{11} F_{d_k^{III}} = 102$$

k	d_k^I	d_k^{II}	d_k^{III}	$F_{d_k^I}$	$F_{d_k^{II}}$	$F_{d_k^{III}}$
1	0,45751953125	0,45703125	0,4580078125	11	8	10
2	-0,82421875	-0,82421875	-0,82421875	8	8	8
3	0,28857421875	0,2890625	0,2880859375	11	7	10
4	0,29248046875	0,29296875	0,29296875	11	8	8
5	0,2900390625	0,2890625	0,2900390625	10	7	10
6	0,5849609375	0,5849609375	0,5849609375	10	10	10
7	0,8955078125	0,89453125	0,8955078125	10	8	10
8	-1,53173828125	-1,53173828125	-1,5322265625	11	11	10
9	0,89599609375	0,89599609375	0,896484375	11	11	9
10	-0,5859375	-0,5859375	-0,5859375	7	7	7
11	0,89892578125	0,8984375	0,8994140625	11	7	10

4.4 Нестандардне реализационе структуре

На основу претходних примера јасно је да приступ заокруживању вредности коефицијената множача има јако важну улогу приликом избора реализационе структуре, при чему стандардне реализационе структуре, којих има ограничени број, представљају мање или више погодно решење у општем случају. Под нестандартном реализационом структуром ускопојасног дигиталног филтра непропусника опсега биће подразумевана паралелна веза линије за кашњење и филтра свепропусника фреквенција који је реализован на нестандартан начин. Број каноничних нестандартних реализационих структура произвољне дигиталне мреже, а тиме и филтра свепропусника фреквенција, чак и у случају коришћења минималног броја множача зависи од броја употребљених сабирача: уколико не постоји ограничење броја сабирача, број реализационих структура је практично неограничен.

Филтар свепропусник фреквенција се најчешће реализује каскадно, при чему се у литератури обично акценат ставља на смањење осетљивости амплитудске карактеристике филтра на заокруживање вредности коефицијената множача, те се реализационе структуре секција свепропусника фреквенција првог и другог реда бирају у зависности од положаја полова [50–52]. Неке до реализационих структура секција свепропусника фреквенција првог реда дате су у радовима [30, 51], док је у раду [53] приказан поступак којим се може одредити одређени број каноничних реализационих структура свепропусника фреквенција другог реда са минималним бројем множача. Додатно, још неке од каноничних реализационих структура секција свепропусника другог реда са минималним бројем множача, разматране су у радовима [50, 52, 54].

Треба напоменути да иста представа преносне функције секције свепропусника фреквенција првог или другог реда може бити реализована коришћењем више реализационих структура које се разликују у броју употребљених сабирача, по шуму који се генерише на излазу мреже као и динамичком опсегу [53]. У дисертацији ће проблем одређивања оптималних реализационих структура секција свепропусника фреквенција првог и другог реда бити третиран као проблем одређивања оптималних представа преносних функција истих, при чему ће као критеријум оптималности бити коришћен укупан број битова потребан за представљање разломљених

делова вредности коефицијената множача. Додатно, биће уведено и ограничење броја битова за представљање целих делова вредности коефицијената.

У даљем излагању је предложен алгоритам помоћу којег се могу одредити оптимални начини представе преносне функције филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$, реализованог каскадном спрегом секција свепропусника фреквенција првог и другог реда које се реализују нестандартно, а чије се реализационе структуре могу одредити применом метода екстракције множача [30, 47, 48].

4.4.1 Одређивање оптималних представа преносне функције филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$

Јасно је да се правилним избором представа преносних функција секција свепропусника фреквенција првог и другог реда може постићи нижи број битова за представљање вредности коефицијената множача ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега, али би се, имајући у виду описане поступке одређивања максималних апсолутних толеранција вредности коефицијената у односу на номиналне вредности, релација (4.16) и део 4.2.2, потребне дужине дигиталних речи могле одредити тек након усвајања представа преносних функција свих секција свепропусника фреквенција. Ово, са друге стране, повлачи потребу разматрања великог броја комбинација чак и у случају ограниченог броја представа преносних функција секција свепропусника првог и другог реда. У циљу превазилажења поменутог проблема, приликом одређивања оптималних представа преносних функција појединачних секција, максимална апсолутна толеранција вредности коефицијента d_k у односу на номиналну вредност \bar{d}_k биће третирана као функција одговарајуће осетљивости и укупног броја множача који је једнак реду филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$:

$$|\Delta d_k^*|_{\max} = \frac{1}{L} \cdot \min \left\{ \frac{\mu_p}{\max_{\omega \in \mathcal{P}} |\bar{S}_{d_k}^{|H|}(\omega)|}, \frac{\mu_s}{\max_{1 \leq l \leq K} |\bar{S}_{d_k}^{|H|}(\omega_{n,l})|} \right\}. \quad (4.43)$$

Треба приметити да су релације (4.11) и (4.12) задовољене за свако $|\Delta d_k| \leq |\Delta d_k^*|_{\max}$, $k = 1, 2, \dots, L$. Након усвајања оптималних представа преносних функција свих секција, коначне потребне дужине дигиталних речи за представљање

вредности коефицијената множача биће одређене поступком описаним у делу 4.2.2.

Разматране представе преносних функција секција свепропусника фреквенција првог и другог реда су облика:

$$A_{1,i}(z) = \frac{\eta_i(\zeta_i) + z^{-1}}{1 + \eta_i(\zeta_i)z^{-1}}, \quad (4.44)$$

$$A_{2,j}(z) = \frac{\beta_{j,2}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2}) + \beta_{j,1}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2})z^{-1} + z^{-2}}{1 + \beta_{j,1}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2})z^{-1} + \beta_{j,2}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2})z^{-1}}, \quad (4.45)$$

при чему важи

$$\eta_i(\zeta_i) = c_0^{(i)} + c_1^{(i)}\zeta_i, \quad (4.46)$$

$$\beta_{j,1}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2}) = b_0^{(j)} + b_1^{(j)}\gamma_{j,1} + b_2^{(j)}\gamma_{j,2} + b_3^{(j)}\gamma_{j,1}\gamma_{j,2}, \quad (4.47)$$

$$\beta_{j,2}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2}) = b_4^{(j)} + b_5^{(j)}\gamma_{j,1} + b_6^{(j)}\gamma_{j,2} + b_7^{(j)}\gamma_{j,1}\gamma_{j,2}, \quad (4.48)$$

док је у циљу ограничавања броја сабирача реализационих структура усвојено да $b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, b_3^{(j)} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, док $c_0^{(i)}, c_1^{(i)}, b_0^{(j)}, b_4^{(j)}, b_5^{(j)}, b_6^{(j)}, b_7^{(j)} \in \{-1, 0, 1\}$, за $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, \frac{L-m}{2}$, где је са m означен број секција првог реда каскадне реализације филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$. Додатно, све представе преносне функције секције свепропусника другог реда морају испуњавати потребан услов могућности реализације са минималним бројем множача, о чему ће бити речи у наставку излагања. Другим речима, i -та секција првог и j -та секција другог реда, релације (4.34) и (4.35), не реализују се директно већ се за њихову реализацију користе коефицијенти множача ζ_i и $\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2}$, респективно, па се за вектор коефицијената множача разматраних реализационих структура може писати

$$\mathbf{d}_{nst} = \left[\zeta_1, \dots, \zeta_m, \gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \dots, \gamma_{\frac{L-m}{2},1}, \gamma_{\frac{L-m}{2},2} \right]. \quad (4.49)$$

Израз за осетљивост фазне карактеристике нерекурзивне мреже минималне фазе $P_L(z)$ на заокруживање вредности коефицијента множача ζ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, је облика

$$S_{\zeta_i}^{\varphi_P}(\omega) = S_{\eta_i}^{\varphi_P}(\omega) \cdot \frac{\partial \eta_i}{\partial \zeta_i} = S_{\eta_i}^{\varphi_P}(\omega) \cdot c_1^{(i)}, \quad (4.50)$$

док су осетљивости на заокруживање вредности коефицијената множача $\gamma_{j,1}$ и $\gamma_{j,2}$,

за $j = 1, 2, \dots, \frac{L-m}{2}$, одређене релацијама

$$\begin{aligned} S_{\gamma_{j,1}}^{\varphi P}(\omega) &= S_{\beta_{j,1}}^{\varphi P}(\omega) \cdot \frac{\partial \beta_{j,1}}{\partial \gamma_{j,1}} + S_{\beta_{j,2}}^{\varphi P}(\omega) \cdot \frac{\partial \beta_{j,2}}{\partial \gamma_{j,1}} \\ &= S_{\beta_{j,1}}^{\varphi P}(\omega) \cdot \left(b_1^{(j)} + b_3^{(j)} \gamma_{i,2} \right) + S_{\beta_{j,2}}^{\varphi P}(\omega) \cdot \left(b_5^{(j)} + b_7^{(j)} \gamma_{j,2} \right), \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} S_{\gamma_{j,2}}^{\varphi P}(\omega) &= S_{\beta_{j,1}}^{\varphi P}(\omega) \cdot \frac{\partial \beta_{j,1}}{\partial \gamma_{j,2}} + S_{\beta_{j,2}}^{\varphi P}(\omega) \cdot \frac{\partial \beta_{j,2}}{\partial \gamma_{j,2}} \\ &= S_{\beta_{j,1}}^{\varphi P}(\omega) \cdot \left(b_2^{(j)} + b_3^{(j)} \gamma_{j,1} \right) + S_{\beta_{j,2}}^{\varphi P}(\omega) \cdot \left(b_6^{(j)} + b_7^{(j)} \gamma_{j,1} \right), \end{aligned} \quad (4.52)$$

где су $S_{\eta_i}^{\varphi P}(\omega)$, $S_{\beta_{j,1}}^{\varphi P}(\omega)$ и $S_{\beta_{j,2}}^{\varphi P}(\omega)$ осетљивости дефинисане релацијама (4.39), (4.40) и (4.41), респективно.

Нека су са Φ_1 и Φ_2 означени скупови свих различитих представа преносних функција секција свепропусника фреквенција првог и другог реда, релације (4.44) и (4.45), респективно, Прилог А. Одређивање оптималних представа преносне функције филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$ заснива се на следећем алгоритму:

Корак 1. На основу познатих вредности модула и фазних углова полова преносне функције $A_L(z)$ одредити номиналне вредности коефицијената директних реализационих структура секција свепропусника првог и другог реда: $\bar{\eta}_i$, $\bar{\beta}_{j,1}$ и $\bar{\beta}_{j,2}$, за $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, \frac{L-m}{2}$.

Корак 2. Одредити осетљивости $\bar{S}_{\eta_i}^{\varphi P}(\omega)$, $\bar{S}_{\beta_{j,1}}^{\varphi P}(\omega)$ и $\bar{S}_{\beta_{j,2}}^{\varphi P}(\omega)$, за $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, \frac{L-m}{2}$, коришћењем релација (4.39), (4.40) и (4.41).

Корак 3. За свако $i = 1, 2, \dots, m$, одредити $\Phi_1^{(i)} \subset \Phi_1$, тако да сви начини представе преносне функције из скупа $\Phi_1^{(i)}$ резултују минимално потребним бројем битова за представљање разломљеног дела вредности коефицијента множака ζ_i и важи ограничење $|\bar{\zeta}_i| < 1$, где је са $\bar{\zeta}_i$ означена номинална вредност коефицијента ζ_i . У овом кораку, за свако $1 \leq i \leq m$ и сваки начин представе преносне функције из скупа Φ_1 потребно је одредити номиналну вредност коефицијента $\bar{\zeta}_i$ решавањем једначине (4.46) (смена $\eta_i \rightarrow \bar{\eta}_i$, $\zeta_i \rightarrow \bar{\zeta}_i$, док су вредности $c_0^{(i)}$ и $c_1^{(i)}$

одређене усвојеним начином представе из скупа Φ_1):

$$\bar{\zeta}_i = \frac{\bar{\eta}_i - c_0^{(i)}}{c_1^{(i)}},$$

и уколико је $|\bar{\zeta}_i| < 1$:

- а) Одредити осетљивост амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега на заокруживање вредности коефицијената множача ζ_i коришћењем релација (4.50) и (4.6),
- б) Одредити максималну апсолутну толеранцију вредности коефицијента ζ_i у односу на номиналну вредност $\bar{\zeta}_i$ коришћењем релације (4.43),
- в) Одредити потребну дужину дигиталне речи за представљање разломљеног дела вредности коефицијента ζ_i .

Корак 4. За свако $j = 1, 2, \dots, \frac{L-m}{2}$, одредити $\Phi_2^{(j)} \subset \Phi_2$, тако да сви начини представе преносне функције из скупа $\Phi_2^{(j)}$ резултују у збиру минимално потребним бројем битова за представљање разломљених делова вредности коефицијената $\gamma_{j,1}$ и $\gamma_{j,2}$ и важи $|\bar{\gamma}_{j,1}| < 1$ и $|\bar{\gamma}_{j,2}| < 1$. У овом кораку, за свако $1 \leq j \leq \frac{L-m}{2}$ и сваки начин представе преносне функције из скупа Φ_2 потребно је одредити, у општем случају, парове номиналних вредности коефицијената $(\bar{\gamma}_{j,1}, \bar{\gamma}_{j,2})$ решавањем система једначина (4.47) и (4.48)^b (смена $\gamma_{j,1} \rightarrow \bar{\gamma}_{j,1}$, $\gamma_{j,2} \rightarrow \bar{\gamma}_{j,2}$, $\beta_{j,1} \rightarrow \bar{\beta}_{j,1}$, $\beta_{j,2} \rightarrow \bar{\beta}_{j,2}$, док су вредности $b_0^{(j)}, b_1^{(j)}, \dots, b_7^{(j)}$ одређене усвојеним начином представе из скупа Φ_2) такве да важи $|\bar{\gamma}_{j,1}| < 1$ и $|\bar{\gamma}_{j,2}| < 1$, након чега је за сваки добијени пар решења потребно:

- а) Одредити осетљивости амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега на заокруживање вредности коефицијената множача $\gamma_{j,1}$ и $\gamma_{j,2}$ коришћењем релација (4.51), (4.52) и (4.6).
- б) Одредити максималне апсолутне толеранције вредности коефицијената $\gamma_{j,1}$ и $\gamma_{j,2}$ у односу на номиналне вредности $\bar{\gamma}_{j,1}$ и $\bar{\gamma}_{j,2}$, респективно, коришћењем релације (4.43),
- в) Одредити потребне дужине дигиталних речи за представљање ра-

зломљених делова вредности коефицијената $\gamma_{j,1}$ и $\gamma_{j,2}$.

Корак 5. Коришћењем поступка описаног у делу 4.2.2 одредити потребне дужине дигиталних речи за представљање разломљених делова вредности коефицијената множача за све могуће комбинације начина представа преносних функција секција свепропусника првог и другог реда, при чему начини представа преносних функција i -те секције првог реда и j -те секције другог реда припадају скуповима $\Phi_1^{(i)}$ и $\Phi_2^{(j)}$. Коначно, за оптималне начине представе преносне функције филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$ усвојити оне за које је збир потребних дужина дигиталних речи за представљање вредности коефицијената множача ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега минималан.

^bЗависно од вредности b_0, b_1, \dots, b_7 и $\bar{\beta}_{j,1}, \bar{\beta}_{j,2}$, систем који чине једначине (4.47) и (4.48) може имати једно, два или немати решења по непознатим номиналним вредностима коефицијената множача у скупу \mathbb{R} . Уколико постоје решења, могуће их је наћи у затвореном облику, Прилог Б.

Једном када су оптимални начини представе преносне функције $A_L(z)$ одређени, реализационе структуре појединачних секција свепропусника фреквенција првог и другог реда могу се одредити применом метода екстракције множача [30, 47, 48].

4.4.2 Примери реализације

У наредним примерима, за преносне функције ускопојасних рекурзивних дигиталних филтара непропусника опсега из примера 4.1 и 4.2 и $\mu_p = \mu_s = 0,01$, биће одређени оптимални начини представе преносне функције филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$, реализованог каскадном спрегом нестандартних секција свепропусника првог и другог реда, чијом се паралелном везом са линијом за кашњење $z^{-(L-2K)}$ реализује ускопојасни филтар непропусник K опсега. Додатно, коришћењем метода екстракције множача [30, 47, 48] биће одређене реализационе структуре одговарајућих секција свепропусника фреквенција другог реда. Треба имати у виду да се све представе преносне функције секције свепропусника другог реда из скупа Φ_2 не могу реализовати каноничном структуром уколико је употребљен минималан број множача, Прилог В.

Пример 4.3 *Под претпоставком каскадне реализације филтра свепропусника фреквенција $A_L(z)$ из примера 4.1 одредити оптималне начине представе преносне функције, а затим и реализационе структуре појединачних секција свепропусника фреквенција другог реда.*

У разматраном примеру има се да је $L = 6$, при чему преносна функција $A_L(z)$ нема реалних полова, тј. може се представити каскадном спрегом три секције свепропусника фреквенција другог реда

$$A_{2,j}(z) = \frac{\beta_{j,2}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2}) + \beta_{j,1}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2})z^{-1} + z^{-2}}{1 + \beta_{j,1}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2})z^{-1} + \beta_{j,2}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2})z^{-1}}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где се номиналне вредности коефицијената множача директних реализација појединачних секција: $\bar{\beta}_{j,1}, \bar{\beta}_{j,2}$, за $j = 1, 2, 3$, имајући у виду релацију (4.42), могу прочитати из табеле 4.1.

Извршењем алгоритма разматраног у делу 4.4.1 добија се да оптималне начине представа преносне функције свепропусника фреквенција $A_L(z)$ карактеришу преносне функције секција другог реда дате у табели 4.5, тј.

$$A_L(z) = A_{2,1}^{(k_1)}(z) \cdot A_{2,2}(z) \cdot A_{2,3}^{(k_2)}(z),$$

где $1 \leq k_1 \leq 4$ и $1 \leq k_2 \leq 3$. Укупан број оптималних представа је једнак 12, али је, обзиром на вредности коефицијента $\gamma_{1,2}$ код свих секција $A_{2,1}^{(k_1)}$, $1 \leq k_1 \leq 4$:

$$\begin{aligned} A_{2,1}^{(1)}(z) &= A_{2,1}^{(2)}(z) = z^{-1} \frac{\gamma_{1,1} + z^{-1}}{1 + \gamma_{1,1}z^{-1} + z^{-2}}, \\ A_{2,1}^{(3)}(z) &= A_{2,1}^{(4)}(z) = z^{-1} \frac{\gamma_{1,1} - 1 + z^{-2}}{1 + (\gamma_{1,1} - 1)z^{-1}}, \end{aligned}$$

те је стваран број оптималних представа једнак 6. Укупан потребан број множача реализационе структуре је једнак $L - 1 = 5$, тј. смањен је у односу на каскадну реализацију разматрану у примеру 4.2. С тим у вези, ускопојасни рекурзивни филтар непропусник опсега са идентичном амплитудском карактеристиком и сниженом вредношћу групног кашњења може се реализовати елиминацијом по једног кола за кашњење из прве секције другог реда и линије за кашњење $z^{-(L-2K)}$.

Додатно, и укупан потребан број битова за представљање разломљених делова

вредности коефицијената је смањен (29 према 45), док је потребан број битова за представљање целих делова вредности коефицијената једнак нули.

Таб. 4.5: Пример 4.3. Секције свепропусника фреквенција другог реда, заокружене вредности коефицијената множача и потребне дужине дигиталних речи за представљање разломљених делова вредности коефицијената.

k	$A_{2,1}^{(k)}(z)$	$\gamma_{1,1}^{(k)}$	$\gamma_{1,2}^{(k)}$	$F_{\gamma_{1,1}^{(k)}}$	$F_{\gamma_{1,2}^{(k)}}$
1	$\frac{\gamma_{1,1}\gamma_{1,2} + \gamma_{1,1}z^{-1} + z^{-2}}{1 + \gamma_{1,1}z^{-1} + \gamma_{1,1}\gamma_{1,2}z^{-2}}$	-0,015625	0	6	0
2	$\frac{\gamma_{1,1}(1 + \gamma_{1,2}) + \gamma_{1,1}z^{-1} + z^{-2}}{1 + \gamma_{1,1}z^{-1} + \gamma_{1,1}(1 + \gamma_{1,2})z^{-2}}$	-0,015625	-1	6	0
3	$\frac{-\gamma_{1,2}(\gamma_{1,1} - 1) + (\gamma_{1,1} - 1)z^{-1} + z^{-2}}{1 + (\gamma_{1,1} - 1)z^{-1} - \gamma_{1,2}(\gamma_{1,1} - 1)z^{-2}}$	0,984375	0	6	0
4	$\frac{-(\gamma_{1,1} - 1)(\gamma_{1,2} - 1) + (\gamma_{1,1} - 1)z^{-1} + z^{-2}}{1 + (\gamma_{1,1} - 1)z^{-1} - (\gamma_{1,1} - 1)(\gamma_{1,2} - 1)z^{-2}}$	0,984375	1	6	0

	$A_{2,2}(z)$	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{2,2}$	$F_{\gamma_{2,1}}$	$F_{\gamma_{2,2}}$
	$\frac{1 - \gamma_{2,1}(1 - \gamma_{2,2}) + [1 + \gamma_{2,1}(2 + \gamma_{2,2})]z^{-1} + z^{-2}}{1 + [1 + \gamma_{2,1}(2 + \gamma_{2,2})]z^{-1} + [1 - \gamma_{2,1}(1 - \gamma_{2,2})]z^{-2}}$	0,078125	-0,9375	6	4

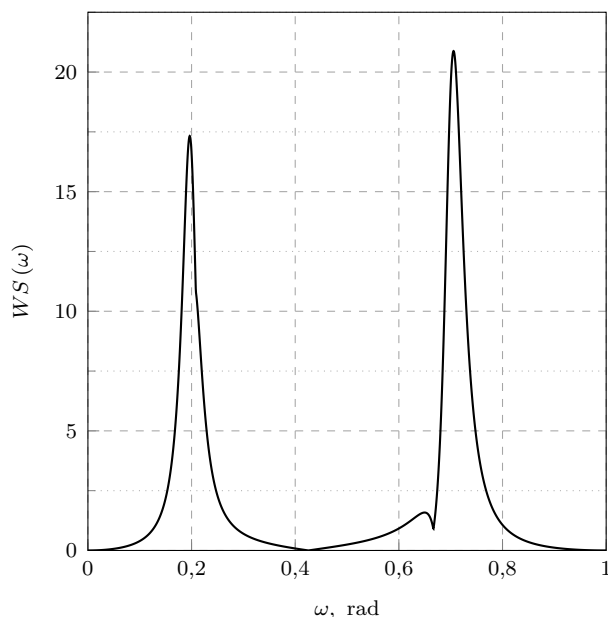
k	$A_{2,3}^{(k)}(z)$	$\gamma_{3,1}^{(k)}$	$\gamma_{3,2}^{(k)}$	$F_{\gamma_{3,1}^{(k)}}$	$F_{\gamma_{3,2}^{(k)}}$
1	$\frac{-\gamma_{3,2} - (1 + \gamma_{3,1}\gamma_{3,2})z^{-1} + z^{-2}}{1 - (1 + \gamma_{3,1}\gamma_{3,2})z^{-1} - \gamma_{3,2}z^{-2}}$	-0,5869140625	-0,875	10	3
2	$\frac{-\gamma_{3,2} + [-1 + \gamma_{3,2}(1 + \gamma_{3,1})]z^{-1} + z^{-2}}{1 + [-1 + \gamma_{3,2}(1 + \gamma_{3,1})]z^{-1} - \gamma_{3,2}z^{-2}}$	-0,4130859375	-0,875	10	3
3	$\frac{1 + \gamma_{3,2} + [-1 + \gamma_{3,1}(1 + \gamma_{3,2})]z^{-1} + z^{-2}}{1 + [-1 + \gamma_{3,1}(1 + \gamma_{3,2})]z^{-1} + (1 + \gamma_{3,2})z^{-2}}$	-0,5869140625	-0,125	10	3

Имајући у виду релације (4.51) и (4.52), као и преносне функције приказане у табели 4.5, може се закључити да је функција апсолутне осетљивости амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног филтра непропусника опсега у најгорем случају за све оптималне начине представа преносне функције $A_L(z)$, иста, слика 4.7.

Како је на основу табеле 4.5,

$$A_{2,1}^{(3)}(z, \gamma_{1,1}) = A_{2,1}^{(1)}(z, \gamma_{1,1} - 1),$$

реализационе структуре секција $A_{2,1}^{(1)}(z)$ и $A_{2,1}^{(3)}(z)$ могу се одредити једна из друге, тј. непотребно је одређивати обе методом екстракције множача. Исто важи и за



Сл. 4.7: Пример 4.3. Функција апсолутне осетљивости амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега у најгорем случају.

реализационе структуре секција $A_{2,3}^{(1)}(z)$, $A_{2,3}^{(2)}(z)$ и $A_{2,3}^{(3)}(z)$, обзиром да важи:

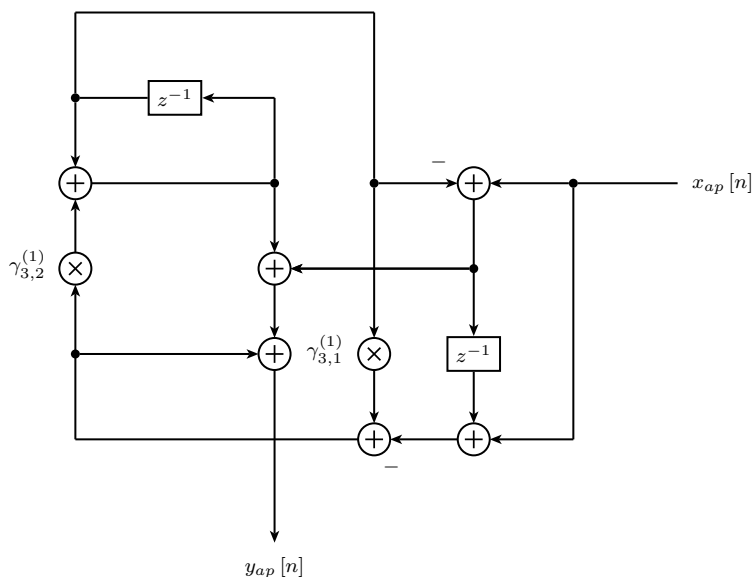
$$A_{2,3}^{(2)}(z, \gamma_1, \gamma_2) = A_{2,3}^{(1)}(z, -1 - \gamma_1, \gamma_2),$$

$$A_{2,3}^{(3)}(z, \gamma_1, \gamma_2) = A_{2,3}^{(1)}(z, \gamma_1, -1 - \gamma_2).$$

Један од могућих начина реализације следеће представе ускопојасног рекурзивног филтра непропусника опсега

$$H(z) = \frac{1}{2} \left[z^{-2} + A_{2,1}^{(1)}(z) A_{2,2}(z) A_{2,3}^{(1)}(z) \right]$$

у потпуности је окарактерисан табелом 4.6 и реализационом структуром секције првог реда, слика 4.3, чијом каскадном спрегом са z^{-1} се може реализовати $A_{2,1}^{(1)}(z)$. Слабљење на централним фреквенцијама непропусних опсега овакве реализације веће је од 49 dB, при чему су реализационе структуре секција $A_{2,2}(z)$ и $A_{2,3}^{(1)}(z)$ приказане на сликама 4.8 и 4.9. Треба уочити да обе структуре садрже интеграторе $1/(1 - z^{-1})$, при чему су структуре које садрже интеграторе познате по ниској осетљивости на заокруживање вредности коефицијената множача [55–57].



Сл. 4.9: Пример 4.3. Канонична реализациона структура секције $A_{2,3}^{(1)}(z)$.

и пет секција свепропусника фреквенција другог реда

$$A_{2,j}(z) = \frac{\beta_{j,2}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2}) + \beta_{j,1}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2})z^{-1} + z^{-2}}{1 + \beta_{j,1}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2})z^{-1} + \beta_{j,2}(\gamma_{j,1}, \gamma_{j,2})z^{-1}}, \quad j = 1, 2, \dots, 5,$$

где се номиналне вредности коефицијената множача директних реализација појединачних секција: η_1 и $\bar{\beta}_{j,1}$, $\bar{\beta}_{j,2}$, за $j = 1, 2, \dots, 5$, имајући у виду релацију (4.42), могу прочитати из табеле 4.3.

Извршењем алгоритма разматраног у делу 4.4.1 добија се да оптималне начине представа преносне функције свепропусника фреквенција $A_L(z)$ карактеришу преносне функције секције првог и секција другог реда приказане у табели 4.7, тј.

$$A_L(z) = A_{1,1}^{(k_1)}(z) \cdot A_{2,1}^{(k_2)}(z) \cdot A_{2,2}(z) \cdot A_{2,3}(z) \cdot A_{2,4}(z) \cdot A_{2,5}(z),$$

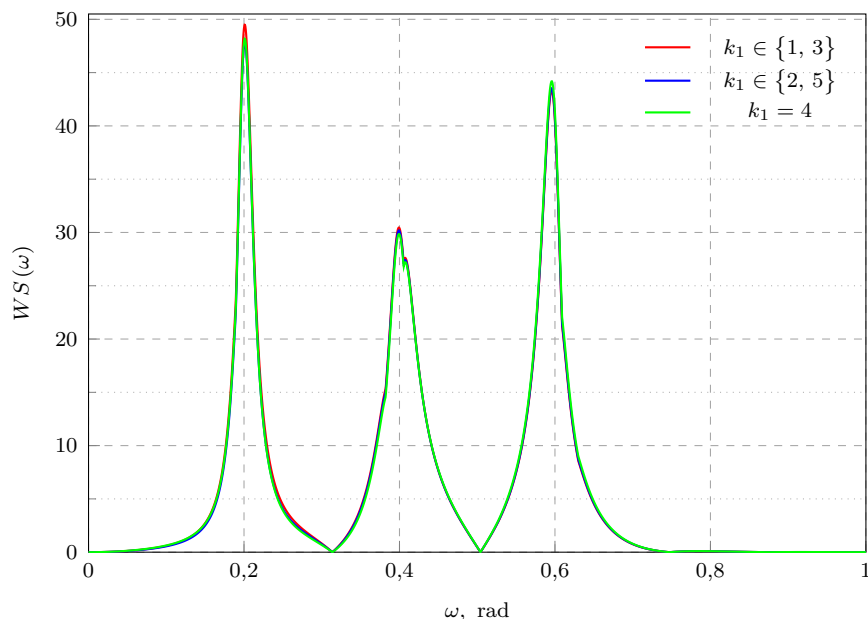
где $1 \leq k_1 \leq 2$ и $1 \leq k_2 \leq 5$. Укупан број оптималних представа је очигледно једнак 10. Укупан потребан број битова за представљање разломљених делова вредности коефицијената је смањен (67 према 92) у односу на случај када се секције првог и другог реда реализују директно, пример 4.3, док је потребан број битова за представљање целих делова вредности коефицијената једнак нули.

Имајући у виду релације (4.50), (4.51) и (4.52), као и секције свепропусника приказане у табели 4.7, може се закључити да свим начинима представе преносне функције свепропусника фреквенција $A_L(z)$ не одговара различита функција апсо-

Таб. 4.7: Пример 4.4. Секције свепропусника првог и другог реда, заокружене вредности коефицијената множилача и потребне дужине дигиталних речи за представљање разломљених делова вредности коефицијената.

k	$A_{1,1}^{(k)}(z)$	$\zeta_1^{(k)}$	$F_{\zeta_1^{(k)}}$
1	$\frac{\zeta_1 + z^{-1}}{1 + \zeta_1 z^{-1}}$	0,45703125	8
2	$\frac{1 + \zeta_1 + z^{-1}}{1 + (1 + \zeta_1) z^{-1}}$	-0,54296875	8
	$A_{2,1}^{(k)}(z)$	$\begin{bmatrix} \gamma_{1,1}^{(k)} \\ \gamma_{1,2}^{(k)} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{\gamma_{1,1}^{(k)}} \\ F_{\gamma_{1,2}^{(k)}} \end{bmatrix}$
1	$\frac{-\gamma_{1,1}\gamma_{1,2} + [1 + \gamma_{1,1}(2 + \gamma_{1,2})]z^{-1} + z^{-2}}{1 + [1 + \gamma_{1,1}(2 + \gamma_{1,2})]z^{-1} - \gamma_{1,1}\gamma_{1,2}z^{-2}}$	$\begin{bmatrix} -0,767578125 \\ 0,375 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$
2	$\frac{-\gamma_{1,2}(1 - \gamma_{1,1}) + [\gamma_{1,1} + \gamma_{1,2}(1 - \gamma_{1,1})]z^{-1} + z^{-2}}{1 + [\gamma_{1,1} + \gamma_{1,2}(1 - \gamma_{1,1})]z^{-1} - \gamma_{1,2}(1 - \gamma_{1,1})z^{-2}}$	$\begin{bmatrix} -0,53515625 \\ -0,1875 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$
3	$\frac{-\gamma_{1,2}(1 - \gamma_{1,1}) + [1 - (1 - \gamma_{1,1})(2 - \gamma_{1,2})]z^{-1} + z^{-2}}{1 + [1 - (1 - \gamma_{1,1})(2 - \gamma_{1,2})]z^{-1} - \gamma_{1,2}(1 - \gamma_{1,1})z^{-2}}$	$\begin{bmatrix} 0,232421875 \\ -0,375 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$
4	$\frac{-1 + \gamma_{1,1} - \gamma_{1,2}(1 + \gamma_{1,1}) + \gamma_{1,2}(1 + \gamma_{1,1})z^{-1} + z^{-2}}{1 + \gamma_{1,2}(1 + \gamma_{1,1})z^{-1} + [-1 + \gamma_{1,1} - \gamma_{1,2}(1 + \gamma_{1,1})]z^{-2}}$	$\begin{bmatrix} 0,46484375 \\ -0,5625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$
5	$\frac{(1 - \gamma_{1,1})(1 - \gamma_{1,2}) + [\gamma_{1,1} - (1 - \gamma_{1,1})(1 - \gamma_{1,2})]z^{-1} + z^{-2}}{1 + [\gamma_{1,1} - (1 - \gamma_{1,1})(1 - \gamma_{1,2})]z^{-1} + (1 - \gamma_{1,1})(1 - \gamma_{1,2})z^{-2}}$	$\begin{bmatrix} -0,53515625 \\ 0,8125 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$
	$A_{2,2}(z)$	$\begin{bmatrix} \gamma_{2,1} \\ \gamma_{2,2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{\gamma_{2,1}} \\ F_{\gamma_{2,2}} \end{bmatrix}$
	$\frac{1 - \gamma_{2,2} - \gamma_{2,1}(1 + \gamma_{2,2}) + 2\gamma_{2,1}(1 + \gamma_{2,2})z^{-1} + z^{-2}}{1 + 2\gamma_{2,1}(1 + \gamma_{2,2})z^{-1} + [1 - \gamma_{2,2} - \gamma_{2,1}(1 + \gamma_{2,2})]z^{-2}}$	$\begin{bmatrix} 0,09375 \\ 0,5625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$
	$A_{2,3}(z)$	$\begin{bmatrix} \gamma_{3,1} \\ \gamma_{3,2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{\gamma_{3,1}} \\ F_{\gamma_{3,2}} \end{bmatrix}$
	$\frac{\gamma_{3,2} + \gamma_{3,1}(1 + \gamma_{3,2}) - [1 - 2\gamma_{3,1}(1 + \gamma_{3,2})]z^{-1} + z^{-2}}{1 - [1 - 2\gamma_{3,1}(1 + \gamma_{3,2})]z^{-1} + [\gamma_{3,2} + \gamma_{3,1}(1 + \gamma_{3,2})]z^{-2}}$	$\begin{bmatrix} 0,71875 \\ 0,1025390625 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$
	$A_{2,4}(z)$	$\begin{bmatrix} \gamma_{4,1} \\ \gamma_{4,2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{\gamma_{4,1}} \\ F_{\gamma_{4,2}} \end{bmatrix}$
	$\frac{-\gamma_{4,2} - \gamma_{4,1}(1 + \gamma_{4,2}) - [1 - 2(\gamma_{4,1} + \gamma_{4,2})]z^{-1} + z^{-2}}{1 - [1 - 2(\gamma_{4,1} + \gamma_{4,2})]z^{-1} - [\gamma_{4,2} + \gamma_{4,1}(1 + \gamma_{4,2})]z^{-2}}$	$\begin{bmatrix} -0,9375 \\ 0,671875 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$
	$A_{2,5}(z)$	$\begin{bmatrix} \gamma_{5,1} \\ \gamma_{5,2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} F_{\gamma_{5,1}} \\ F_{\gamma_{5,2}} \end{bmatrix}$
	$\frac{-\gamma_{5,1}(1 + \gamma_{5,2}) + \gamma_{5,2} + 2\gamma_{5,1}z^{-1} + z^{-2}}{1 + 2\gamma_{5,1}z^{-1} + [-\gamma_{5,1}(1 + \gamma_{5,2}) + \gamma_{5,2}]z^{-2}}$	$\begin{bmatrix} -0,29296875 \\ 0,46875 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$

лутне осетљивости амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног филтра непропусника опсега у најгорем случају, слика 4.10. Генерални закључак сложености реализационе структуре (у смислу потребног броја бита за представљање разломљених делова вредности коефицијената множача), на основу вредности функције апсолутне осетљивости амплитудске карактеристике у најгорем случају, имајући у виду слике 4.10 и 4.6, не може се извести.



Сл. 4.10: Пример 4.4. Функције апсолутне осетљивости амплитудске карактеристике ускопојасног рекурзивног дигиталног филтра непропусника опсега у најгорем случају.

Како је на основу табеле 4.7,

$$A_{1,1}^{(2)}(z, \zeta_1) = A_{1,1}^{(1)}(z, 1 + \zeta_1),$$

реализационе структуре секција $A_{1,1}^{(2)}(z)$ и $A_{1,1}^{(1)}(z)$ могу се одредити једна из друге. Исто важи и за реализационе структуре секција $A_{2,1}^{(1)}(z)$ и $A_{2,1}^{(3)}(z)$, с обзиром да важи, табела 4.7,

$$A_{2,1}^{(3)}(z, \gamma_1, \gamma_2) = A_{2,1}^{(1)}(z, -1 + \gamma_1, -\gamma_2),$$

као и за реализационе структуре секција $A_{2,1}^{(2)}(z)$ и $A_{2,1}^{(5)}(z)$, јер је

$$A_{2,1}^{(5)}(z, \gamma_1, \gamma_2) = A_{2,1}^{(2)}(z, \gamma_1, -1 + \gamma_2).$$

Један од начина реализације следеће представе преносне функције ускопојасног

рекурзивног филтра непропусника опсега

$$H(z) = \frac{1}{2} \left[z^{-5} + A_{1,1}^{(1)}(z) A_{2,1}^{(1)}(z) A_{2,2}(z) A_{3,2}(z) A_{4,1}(z) A_{5,1}(z) \right],$$

у потпуности је окарактерисан табелом 4.8 (реализациона структура секције $A_{1,1}^{(1)}(z)$ приказана је на слици 4.3), при чему је слабљење на централним фреквенцијама непропусних опсега веће од 47 dB. Реализационе структуре секција свепропусника другог реда једноставно је одредити на основу поменуте табеле, при чему треба водити рачуна да структура не сме садржати комбинационе петље.

Таб. 4.8: Пример 4.4. Једна од могућих вредности матрица \mathbf{T} на основу којих се могу одредити реализационе структуре појединачних секција свепропусника другог реда.

секција	\mathbf{T}
$A_{2,1}^{(1)}(z), A_{2,5}(z)$	$\begin{bmatrix} z^{-1} & 1 & 0 \\ 2z^{-1} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} & \frac{-2z^{-1}}{1+z^{-1}} & \frac{-1+z^{-1}}{1+z^{-1}} \\ 1+z^{-2} & z^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z^{-2} & (1-z^{-1})^2 & 1+z^{-2} \\ -1+z^{-2} & -z^{-1}(2-z^{-1}) & z^{-2} \\ 1-z^{-2} & 1+2z^{-1}-z^{-2} & -z^{-2} \end{bmatrix}$
$A_{2,2}(z), A_{2,3}(z)$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1-z^{-2}}{1+z^{-2}} & \frac{1-z^{-2}}{1+z^{-2}} \\ -1 & -z^{-1} \frac{2-z^{-1}}{1+z^{-2}} & -z^{-1} \frac{2-z^{-1}}{1+z^{-2}} \\ -1 & \frac{1+2z^{-2}}{1+z^{-2}} & z^{-2} \frac{1}{1+z^{-2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -z^{-1} & \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}} & \frac{1-z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-1}} \\ 1+z^{-1} & -z^{-1} \frac{2+z^{-1}}{1-z^{-1}} & \frac{1-z^{-1}-z^{-2}}{1-z^{-1}} \\ 1+z^{-1} & -z^{-1} \frac{2+z^{-1}}{1-z^{-1}} & -z^{-2} \frac{1}{1-z^{-1}} \end{bmatrix}$
$A_{2,4}(z)$	$\begin{bmatrix} -z^{-1} & \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} & (1+z^{-1})(1-3z^{-1}+z^{-2}) \\ -1+3z^{-1}-z^{-2} & z^{-1} \frac{-2+z^{-1}}{1-z^{-1}} & z^{-2}(5-5z^{-1}+z^{-2}) \\ -\frac{1}{1-z^{-1}} & \frac{1}{(1-z^{-1})^2} & z^{-1} \frac{-2+z^{-1}}{1-z^{-1}} \end{bmatrix}$

4.5 Закључак

Реализационе структуре ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега, разматране у овом поглављу, карактерише паралелна веза линије за кашњење и филтра свепропусника фреквенција, чије су стандардне и нестандардне реализационе структуре разматране. Треба имати у виду да стандардни приступи реализацији, поред њиховог ограниченог броја, представљају мање или више погодно решење у општем случају.

За разлику од аналогних мрежа, одступање вредности елемената реализационе

структуре дигиталних мрежа, тј. вредности коефицијената множача, од вредности одређених у поступку синтезе последица је заокруживања због чега може узимати вредности из дискретног скупа. Додатно, потребан број битова за представљање вредности коефицијената множача јако зависи од самог приступа заокруживању као и номиналних вредности. С тим у вези, анализа осетљивости карактеристика филтара на заокруживање вредности елемената реализационе структуре нема исту тежину какву има код аналогних мрежа. Поменути тврдња илустрована је у примерима 4.4 и 4.2, где је показано да лошијој апсолутној осетљивости амплитудске карактеристике ускопојасног филтра непропусника опсега у најгорем случају (пример 4.4) одговарају ниже потребне дужине дигиталних речи за представљање вредности коефицијената множача.

Главни допринос овог поглавља јесу предложени алгоритам за сукцесивно одређивање вредности коефицијената множача представљених у формату непокретног зареза (уз минималне модификације могућа је његова примена и у случају када су вредности коефицијената множача представљене у формату покретног зареза) који користи информацију о оствареном одступању већ заокружених вредности од номиналних, а затим и алгоритам за одређивање оптималних представа преносне функције филтра свепропусника фреквенција (чијом паралелном везом са линијом за кашњење се реализује ускопојасни рекурзивни филтар непропусник опсега), који се реализује каскадном спрегом секција свепропусника првог и другог реда. Ефикасност предложених алгоритама илустрована је кроз четири примера у којима је показано да се нестандартним реализационим структурама може постићи знатно смањење потребног броја битова за представљање вредности коефицијената множача. Поменуто смањење је у оба примера праћено повећањем броја кола за кашњење. Уколико постоји потреба за што нижим бројем кола за кашњење, потребно је из скупа Φ_2 елиминисати оне представе преносне функције секције свепропусника фреквенција другог реда за чију реализацију је потребан повећани број кола за кашњење (мада се то одражава на потребан број битова за представљање вредности коефицијената множача), што се може релативно једноставно остварити.

Мада математички није доказано да је потребан услов могућности реализације са минималним бројем множача секције свепропусника фреквенција другог реда,

део A.2.1, уједно и довољан, на основу великог броја урађених примера намеће се закључак да се све представе (или бар највећи број њих) преносне функције из скупа Φ_2 могу реализовати коришћењем минимално потребног броја множача.

Закључак

ОСНОВНИ недостатак постојећих метода синтезе ускопојасних рекурзивних дигиталних филтара непропусника опсега представља чињеница да се њиховом применом не може остварити потпуно задовољење спецификација везаних за положај централних фреквенција непропусних опсега, као и задатих ширина непропусних опсега дефинисаних за произвољну вредност слабљења на граничним фреквенцијама. Уколико су остварене ширине непропусних опсега шире од вредности задатих спецификација долази до дисторзије спектралних компоненти улазног сигнала у околини граничних фреквенција непропусних опсега, док уже остварене ширине непропусних опсега од вредности задатих спецификација обично прати повећана вредност модула пола преносне функције најближег јединичној кружници, што за последицу има дуго време потребно за потискивање синусоидалних сметњи фреквенција једнаких централним фреквенцијама непропусних опсега.

Са друге стране, применом у дисертацији предложених метода постиже се стриктно задовољење свих спецификација амплитудске карактеристике филтра по цени повећаног реда филтра свепропусника фреквенција, којим је у потпуности окарактерисан ускопојасни рекурзивни филтар непропусник опсега, у поређењу са постојећим методима. Већина предложених метода пружа могућност додатног побољшања амплитудске карактеристике филтра у пропусним опсезима повећањем реда филтра свепропусника фреквенција, чиме се постиже и смањење грешке линеарности фазне карактеристике ускопојасног филтра непропусника опсега у пропусним опсезима. Са друге стране, поменуто повећање реда филтра свепропусника

фреквенција које је праћено повећањем нагиба фазне карактеристике ускопојасног филтра непропусника опсега, а тиме и вредности карактеристике групног кашњења филтра, није увек праћено дужим временом потребним за потискивање синусоидалних сметњи у поређењу са постојећим методима (чија примена резултује ужим ширинама непропусних опсега од вредности задатих спецификацијама амплитудске карактеристике филтра) што је у дисертацији илустровано софтверском имплементацијом одређеног броја ускопојасних филтара непропусника опсега.

Избор коришћеног метода синтезе рекурзивног ускопојасног дигиталног филтра непропусника једног или више опсега свакако је ствар компромиса између жељене линеарности фазне карактеристике филтра која је у директној вези са амплитудском карактеристиком, вредности реда филтра свепропусника фреквенција, максималне дозвољене таласности амплитудске карактеристике филтра и максималне вредности модула полова.

Реализационе структуре ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега, разматране у дисертацији, карактерише паралелна веза линије за кашњење и филтра свепропусника фреквенција чије су стандардне и нестандартне реализационе структуре разматране. За разлику од аналогних мрежа где су одступања вредности елемената реализационе структуре од номиналних вредности последица технолошког процеса производње истих, при чему је ово одступање случајна променљива и може се говорити само о њеној максималној апсолутној или релативној вредности, код дигиталних структура одступање вредности елемената реализационе структуре (тј. вредности коефицијената множача) од вредности одређених у поступку синтезе преносне функције последица је заокруживања, због чега може узимати вредност из дискретног скупа. С тим у вези, показано је да је избор приступа заокруживању вредности коефицијената од суштинског значаја приликом одређивања потребног броја битова за представљање вредности коефицијента множача.

У дисертацији је предложен алгоритам који у сваком кораку врши заокруживање по једне вредности коефицијента множача, користећи информацију о оствареном одступању претходно одређених заокружених вредности коефицијената множача од номиналних вредности, а са циљем добијања у збиру што је могуће ниже потребног броја битова за представљање разломљених делова вредности коефиције-

ната множача. Ефикасност поменутог алгоритма потврђена је кроз више примера где је извршено поређење са приступом најчешће коришћеним у пракси (који се заснива на претпоставци једнаких дужина дигиталних речи за представљање вредности коефицијента, при чему се за потребну дужину усваја најмања за коју не долази до деградације амплитудске карактеристике филтра), као и приступом који полази од претпоставке једнаких максималних апсолутних одступања вредности коефицијената од номиналних вредности.

Коначно, у дисертацији предложени алгоритам одређивања оптималних представа преносне функције филтра свепропусника фреквенција (који у потпуности карактерише ускопојасни рекурзивни филтар непропусник опсега), реализованог каскадном спрегом нестандардних секција свепропусника фреквенција првог и другог реда, пружа могућност добијања реализационих структура које одликује ниска средња потребна дужина дигиталних речи за представљање вредности коефицијената множача.

Даља истраживања везана за разматрање реализационих структура могу ићи у смеру усавршавања предложеног или изналажењу нових приступа заокруживању вредности коефицијената множача, као и побољшању алгоритма за одређивање оптималних (за усвојене различите критеријуме оптималности) представа преносне функције филтра свепропусника фреквенција. Са друге стране, даља истраживања везана за синтезу ускопојасних рекурзивних филтара непропусника опсега могу се заснивати на укључивању могућности контроле вредности модула полова преносне функције филтра у предложеним методима, као и развоју нових метода синтезе које полазе од паралелне везе линије за кашњење и филтра свепропусника фреквенција са вишеструким половима.

Литература

- [1] D. Borio, L. Camoriano, L. L. Presti, “Two-Pole and Multi-Pole Notch Filters: A Computationally Effective Solution for GNSS Interference Detection and Mitigation,” *IEEE Systems Journal*, vol. 2, no. 1, pp. 38–47, March 2008.
- [2] Y. D. Jou, Z. P. Lin, F. K. Chen, “Interference elimination of electrocardiogram signals using IIR multiple notch filters,” in *2016 IEEE 5th Global Conference on Consumer Electronics*, Oct 2016, pp. 1–2.
- [3] K. Song, Q. Xue, “Asymmetric dual-line coupling structure for multiple-notch implementation in UWB bandpass filters,” *Electronics Letters*, vol. 46, no. 20, pp. 1388–1390, September 2010.
- [4] X.-L. Wang, Y.-J. Ge, J.-J. Zhang, Q.-J. Song, “Discussion on the -3 dB rejection bandwidth of IIR notch filters,” in *6th International Conference on Signal Processing, 2002.*, vol. 1, Aug 2002, pp. 151–154.
- [5] L. Tan, J. Jiang, L. Wang, “Pole-radius-varying IIR notch filter with transient suppression,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 61, no. 6, pp. 1684–1691, 2012.
- [6] K. Hirano, S. Nishimura, S. Mitra, “Design of digital notch filters,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 22, no. 7, pp. 964–970, Jul 1974.
- [7] P. A. Regalia, S. K. Mitra, P. Vaidyanathan, “The digital all-pass filter: A versatile signal processing building block,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, no. 1, pp. 19–37, 1988.
- [8] Y. Joshi, S. D. Roy, “Design of IIR digital notch filters,” *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 16, no. 4, pp. 415–427, 1997.
- [9] —, “Design of IIR notch filters with different passband gains,” *IEE Proceedings-Vision, Image and Signal Processing*, vol. 145, no. 1, pp. 6–10, 1998.
- [10] A. Fernandez-Vazquez, G. Jovanovic-Dolecek, “Design of IIR notch filters with maximally flat or equiripple magnitude characteristics,” in *14th European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2006*, 2006.
- [11] S.-C. Pei, B.-Y. Guo, W.-Y. Lu, “Narrowband notch filter using feedback structure tips & tricks,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 33, no. 3, pp. 115–118, 2016.
- [12] C. C. Tseng, S. C. Pei, “Stable IIR notch filter design with optimal pole placement,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 11, pp. 2673–2681, Nov 2001.

-
- [13] S. C. Pei, C. C. Tseng, "IIR multiple notch filter design based on allpass filter," in *TENCON '96. Proceedings., 1996 IEEE TENCON. Digital Signal Processing Applications*, vol. 1, Nov 1996, pp. 267–272.
- [14] —, "IIR multiple notch filter design based on allpass filter," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 44, no. 2, pp. 133–136, 1997.
- [15] N. Kudoh, Y. Tadokoro, "Adaptive IIR notch filter by frequency estimation for notch Fourier transform," in *Signal Processing Proceedings, ICSP'98. 1998 Fourth International Conference on.* IEEE, 1998, pp. 490–493.
- [16] D. S. Marić, S. Hiti, C. C. Stancu, J. M. Nagashima, D. B. Rutledge, "An application of a constrained adaptive lattice-structure allpass-based notch filter for advanced control of surface-mounted permanent-magnet synchronous drives," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 46, no. 12, pp. 1513–1516, 1999.
- [17] V. DeBrunner, S. Torres, "Multiple fully adaptive notch filter design based on allpass sections," *IEEE transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 2, pp. 550–552, 2000.
- [18] J. Okello, S. Arita, Y. Itoh, Y. Fukui, M. Kobayashi, "An adaptive notch filter for eliminating multiple sinusoids with reduced bias," in *Circuits and Systems, Proceedings. ISCAS 2000 Geneva. The 2000 IEEE International Symposium on*, vol. 3. IEEE, 2000, pp. 551–554.
- [19] Y. Xiao, Y. Takeshita, K. Shida, "Steady-state analysis of a plain gradient algorithm for a second-order adaptive IIR notch filter with constrained poles and zeros," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 48, no. 7, pp. 733–740, 2001.
- [20] A. Thamrongmas, C. Charoenlarnnoppa, "All-pass based IIR multiple notch filter design using Gröbner Basis," in *Multidimensional (nD) Systems (nDs), 2011 7th International Workshop on.* IEEE, 2011, pp. 1–6.
- [21] Y. V. Joshi, S. D. Roy, "Design of IIR multiple notch filters based on all-pass filters," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 46, no. 2, pp. 134–138, 1999.
- [22] A. Thamrongmas, C. Charoenlarnnoppa, P. Prempre, "A novel design of IIR multiple notch filter based on an all-pass filter by using a pole-reposition technique," *SCIENCEASIA*, vol. 40, no. 5, pp. 362–370, 2014.
- [23] Q. Wang, J. Song, H. Yuan, "Digital Multiple Notch Filter Design Based on Genetic Algorithm," in *2014 Fourth International Conference on Instrumentation and Measurement, Computer, Communication and Control*, Sept 2014, pp. 180–183.
- [24] Q. Wang, D. Kundur, "A generalized design framework for IIR digital multiple notch filters," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2015, no. 1, p. 1, 2015.

-
- [25] G. Stančić, S. Nikolić, “Digital linear phase notch filter design based on IIR all-pass filter application,” *Digital Signal Processing: A Review Journal*, vol. 23, no. 3, pp. 1065–1069, 2013.
- [26] S. Nikolić, G. Stančić, “Design of IIR Notch Filter with Approximately Linear Phase,” *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 31, no. 6, pp. 2119–2131, 2012. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/s00034-012-9426-x>
- [27] A. V. Oppenheim, *Discrete-time signal processing*. Pearson Education India, 1999.
- [28] B. A. Sheno, *Introduction to digital signal processing and filter design*. John Wiley & Sons, 2005.
- [29] A. Antoniou, *Digital Signal Processing—Signals, Systems, and Filters*. McGraw-Hill, 2006.
- [30] S. K. Mitra, Y. Kuo, *Digital signal processing: a computer-based approach*. McGraw-Hill Higher Education New York, 2006, vol. 2.
- [31] J. G. Proakis, D. G. Manolakis, *Digital signal processing: principles, algorithms, and applications*. Pearson Prentice Hall, 2007.
- [32] S. K. Mitra, *Digital signal processing laboratory using MATLAB*. WCB/McGraw-Hill, 1999.
- [33] J.-G. Chung, K. K. Parhi, *Pipelined lattice and wave digital recursive filters*. Springer Science & Business Media, 2012, vol. 344.
- [34] K. Steiglitz, L. McBride, “A technique for the identification of linear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 10, no. 4, pp. 461–464, 1965.
- [35] M. C. Lang, “Weighted least squares IIR filter design with arbitrary magnitude and phase responses and specified stability margin,” in *Advances in Digital Filtering and Signal Processing, 1998 IEEE Symposium on*. IEEE, 1998, pp. 82–86.
- [36] M. Lang, *Algorithms for the constrained design of digital filters with arbitrary magnitude and phase responses*. Österreichischer Kunst-und Kulturverlag, 2000.
- [37] S. Nikolić, I. Krstić, G. Stančić, “Noniterative design of IIR multiple-notch filters with improved passband magnitude response,” *International Journal of Circuit Theory and Applications*, 2018. [Online]. Available: <https://www.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cta.2525>
- [38] M. S. Andersen, J. Dahl, L. Vandenberghe, “CVXOPT: A Python package for convex optimization, version 1.1.9,” *Available at cvxopt.org*, 2016.
- [39] I. Krstić, S. Nikolić, G. Stančić, P. Lekić, “Design of IIR Multiple-Notch Filters with Symmetric Magnitude Responses about Notch Frequencies,” *Circuits, Systems, and Signal Processing*, May 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s00034-018-0841-5>
- [40] C. Duarte, K. E. Barner, K. Goossen, “Design of IIR Multi-Notch Filters Based on Polynomially-Represented Squared Frequency Response,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 64, no. 10, pp. 2613–2623, May 2016.

-
- [41] W. K. Chen, *Passive, active, and digital filters*. CRC Press, 2009.
- [42] P. S. Diniz, E. A. Da Silva, S. L. Netto, *Digital signal processing: system analysis and design*. Cambridge University Press, 2010.
- [43] J. Skaf, S. P. Boyd, "Filter design with low complexity coefficients," *IEEE Transactions on Signal processing*, vol. 56, no. 7, pp. 3162–3169, 2008.
- [44] Y. Lim, Y. J. Yu, "A successive reoptimization approach for the design of discrete coefficient perfect reconstruction lattice filter bank," in *Circuits and Systems, 2000. Proceedings. ISCAS 2000 Geneva. The 2000 IEEE International Symposium on*, vol. 2. IEEE, 2000, pp. 69–72.
- [45] P. Vaidyanathan, S. Mitra, Y. Neuvo, "A new approach to the realization of low-sensitivity IIR digital filters," *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing*, vol. 34, no. 2, pp. 350–361, 1986.
- [46] A. Fettweis, "Wave digital filters: Theory and practice," *Proceedings of the IEEE*, vol. 74, no. 2, pp. 270–327, 1986.
- [47] J. Szczupak, S. Mitra, "Digital filter realization using successive multiplier-extraction approach," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 23, no. 2, pp. 235–239, 1975.
- [48] S. D. Roy, P. U. Kiran, B. R. Vyas, T. Aggarwal, D. S. Kumar, "Derivation of second order canonic all-pass digital filter realizations," *IETE Journal of Education*, vol. 47, no. 4, pp. 153–157, 2006.
- [49] S. Mitra, K. Hirano, "Digital all-pass networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 21, no. 5, pp. 688–700, 1974.
- [50] G. Stoyanov, Z. Nikolova, K. Ivanova, V. Anzova, "Design and realization of efficient IIR digital filter structures based on sensitivity minimizations," in *2007 8th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services*, Sept 2007, pp. 299–308.
- [51] G. Stoyanov, H. Clausert, "A Comparative Study of First-Order Digital Allpass Filter Sections," *Frequenz*, vol. 48, pp. 221–226, 1994.
- [52] G. Stoyanov, K. Nikolova, M. Kawamata, "Low-Sensitivity Design of Allpass Based Fractional Delay Digital Filters," in *Digital Filters*, Prof. Fausto Pedro García Márquez, Ed. InTech, 2011, ch. 7. [Online]. Available: <http://www.intechopen.com/books/digital-filters/low-sensitivity-design-of-allpass-based-fractional-delay-digital-filters>
- [53] J. Szczupak, S. K. Mitra, J. Fadavi-Ardekani, "A computer-based synthesis method of structurally LBR digital allpass networks," *IEEE transactions on circuits and systems*, vol. 35, no. 6, pp. 755–760, 1988.
- [54] K. Nikolova, G. Stoyanov, M. Kawamata, "Low-sensitivity design and implementation of allpass based fractional delay digital filters," in *2009 European Conference on Circuit Theory and Design*, Aug 2009, pp. 603–606.

- [55] S. Nishimura, K. Hirano, R. Pal, “A new class of very low sensitivity and low roundoff noise recursive digital filter structures,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 28, no. 12, pp. 1152–1158, 1981.
- [56] R. Agarwal, C. Burrus, “New recursive digital filter structures having very low sensitivity and roundoff noise,” *IEEE Transactions on circuits and Systems*, vol. 22, no. 12, pp. 921–927, 1975.
- [57] K. Uesaka, M. Kawamata, “Synthesis of low coefficient sensitivity digital filters using genetic programming,” in *Circuits and Systems, 1999. ISCAS’99. Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on*, vol. 3. IEEE, 1999, pp. 307–310.

Прилог А

Представе преносних функција секција свепропусника фреквенција првог и другог реда које припадају скуповима Φ_1 и Φ_2

А.1 Одређивање представа преносне функције свепропусника фреквенција првог реда у скупу Φ_1

У скупу Φ_1 не могу се наћи све представе преносне функције секције свепропусника фреквенција првог реда облика датог десном страном релације (4.44) који ће у наставку бити означен са $G_1(z, \mathbf{c}, \zeta)$:

$$G_1(z, \mathbf{c}, \zeta) = \frac{c_0 + c_1\zeta + z^{-1}}{1 + (c_0 + c_1\zeta)z^{-1}}, \quad (\text{A.1})$$

где $c_0, c_1 \in \{-1, 0, 1\}$, тј. број елемената скупа Φ_1 није једнак броју могућих вредности вектора $\mathbf{c} = [c_0, c_1]$, с обзиром да постоје комбинације вредности c_0 и c_1 које не резултују:

- Преносном функцијом првог реда са једним множаčem. С тим у вези, у скупу

Φ_1 могу се наћи само оне представе преносне функције свепропусника првог реда за које важи

$$c_1 \neq 0. \quad (\text{A.2})$$

- Суштински различитом представом преносне функције првог реда, која се огледа у томе да вредности коефицијената множака различитих представа нису једнаке по апсолутној вредности. Наиме, следеће представе преносне функције секције свепропусника фреквенција првог реда

$$G_1(z, \mathbf{c}, \zeta), \quad G_1\left(z, \begin{bmatrix} c_0, & -c_1 \end{bmatrix}, \zeta\right) = G_1(z, \mathbf{c}, -\zeta),$$

су еквивалентне, и по начину реализације и по броју битова потребном за представљање разломљених делова вредности коефицијената множака.

Имајући претходно у виду, показује се да је број елемената скупа Φ_1 једнак 3:

$$\Phi_1 = \left\{ \frac{1 + \zeta + z^{-1}}{1 + (1 + \zeta)z^{-1}}, \quad \frac{\zeta + z^{-1}}{1 + \zeta z^{-1}}, \quad \frac{-1 + \zeta + z^{-1}}{1 + (-1 + \zeta)z^{-1}} \right\}, \quad (\text{A.3})$$

при чему је реализација свих добијених представа могућа уз коришћење једног множака и једног кола за кашњење [51].

A.2 Одређивање представа преносне функције свепропусника фреквенција другог реда у скупу Φ_2

У скупу Φ_2 не могу се наћи све представе преносне функције секције свепропусника фреквенција другог реда облика датог десном страном релације (4.45) који ће у наставку бити означен са $G_2(z, \mathbf{b}, \gamma_1, \gamma_2)$:

$$G_2(z, \mathbf{b}, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{b_4 + b_5\gamma_1 + b_6\gamma_2 + b_7\gamma_1\gamma_2 + (b_0 + b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_1\gamma_2)z^{-1} + z^{-2}}{1 + (b_0 + b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_1\gamma_2)z^{-1} + (b_4 + b_5\gamma_1 + b_6\gamma_2 + b_7\gamma_1\gamma_2)z^{-2}}, \quad (\text{A.4})$$

где $b_1, b_2, b_3 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, док $b_0, b_4, b_5, b_6, b_7 \in \{-1, 0, 1\}$, тј. број елемената скупа Φ_2 није једнак броју могућих вредности вектора $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_7]$, односно $5^3 \cdot 3^5 = 30375$, с обзиром да постоје комбинације које не резултују:

- Преносном функцијом другог реда са два множача. С тим у вези, у скупу Φ_2 могу се наћи само оне представе преносне функције свепропусника другог реда за које важи:

$$|b_1| + |b_3| + |b_5| + |b_7| \neq 0, \quad (\text{A.5})$$

$$|b_2| + |b_3| + |b_6| + |b_7| \neq 0, \quad (\text{A.6})$$

иначе коефицијенти γ_1 и γ_2 не фигуришу у преносној функцији, респективно.

- Преносном функцијом у чијем имениоцу коефицијенти уз z^{-1} и z^{-2} нису целобројне константе. Поменуто повлачи да се у скупу Φ_2 могу наћи само оне представе преносне функције за које важи:

$$|b_1| + |b_2| + |b_3| \neq 0, \quad (\text{A.7})$$

$$|b_5| + |b_6| + |b_7| \neq 0. \quad (\text{A.8})$$

- Преносном функцијом где $\gamma_1\gamma_2$ не игра улогу једног множача, што повлачи да се скупу Φ_2 могу наћи само оне представе за које важи:

$$|b_1| + |b_2| + |b_5| + |b_6| \neq 0. \quad (\text{A.9})$$

- Линеарном независношћу вектора (b_1, b_2, b_3) и (b_5, b_6, b_7) . У супротном, тј. уколико су поменути вектори линеарно зависни, количник

$$\frac{b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_1\gamma_2}{b_5\gamma_1 + b_6\gamma_2 + b_7\gamma_1\gamma_2}$$

једнак је константи независно од вредности коефицијената множача. Поменуто повлачи да се у скупу Φ_2 могу наћи само оне представе преносних функција секција другог реда за које важи:

$$|b_2b_7 - b_3b_6| + |b_3b_5 - b_1b_7| + |b_1b_6 - b_2b_5| \neq 0. \quad (\text{A.10})$$

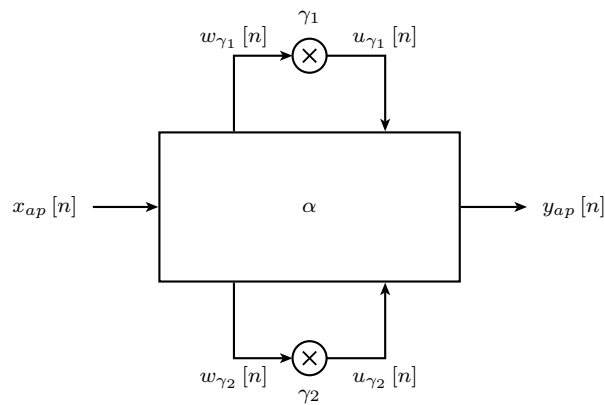
- Суштински различитом представом преносне функције, која се огледа у томе да вредности коефицијената множача различитих представа нису једнаке по апсолутној вредности. Наиме, следеће представе преносне функције секције свепропусника фреквенција другог реда су еквивалентне, и по начину реализације и по броју битова потребном за представљање разломљених делова вредности коефицијената множача:

$$\begin{aligned}
 & G_2(z, \mathbf{b}, \gamma_1, \gamma_2), \\
 G_2\left(z, [b_0, -b_1, b_2, -b_3, b_4, -b_5, b_6, -b_7], \gamma_1, \gamma_2\right) &= G_2(z, \mathbf{b}, -\gamma_1, \gamma_2), \\
 G_2\left(z, [b_0, b_1, -b_2, -b_3, b_4, b_5, -b_6, -b_7], \gamma_1, \gamma_2\right) &= G_2(z, \mathbf{b}, \gamma_1, -\gamma_2), \\
 G_2\left(z, [b_0, -b_1, -b_2, b_3, b_4, -b_5, -b_6, b_7], \gamma_1, \gamma_2\right) &= G_2(z, \mathbf{b}, -\gamma_1, -\gamma_2), \\
 G_2\left(z, [b_0, b_2, b_1, b_3, b_4, b_6, b_5, b_7], \gamma_1, \gamma_2\right) &= G_2(z, \mathbf{b}, \gamma_2, \gamma_1), \\
 G_2\left(z, [b_0, -b_2, b_1, -b_3, b_4, -b_6, b_5, -b_7], \gamma_1, \gamma_2\right) &= G_2(z, \mathbf{b}, -\gamma_2, \gamma_1), \\
 G_2\left(z, [b_0, b_2, -b_1, -b_3, b_4, b_6, -b_5, -b_7], \gamma_1, \gamma_2\right) &= G_2(z, \mathbf{b}, \gamma_2, -\gamma_1), \\
 G_2\left(z, [b_0, -b_2, -b_1, b_3, b_4, -b_6, -b_5, b_7], \gamma_1, \gamma_2\right) &= G_2(z, \mathbf{b}, -\gamma_2, -\gamma_1).
 \end{aligned}$$

Претходним условима и еквиваленцијама је број могућих представа преносне функције свепропусника фреквенција другог реда смањен са 30375 на 3870. Додатни услов који се поставља пред представу преносне функције из скупа Φ_2 јесте испуњеност потребног услова могућности реализације са минималним бројем множача, због чега је потребно размотрити метод екстракције множача [47] примењен на проблем одређивања реализационих структура са минималним бројем множача секција свепропусника фреквенција другог реда [30, 48]. У даљем разматрању је дато једно уопштење метода екстракције множача примењеног на поменути проблем, на основу којег је изведен услов који морају задовољавати вредности вектора \mathbf{b} како би реализација са минималним бројем множача била могућа.

А.2.1 Потребан услов могућности реализације са минималним бројем множача секције свепропусника фреквенција другог реда

Поступак одређивања реализационих структура са минималним бројем множача секције свепропусника другог реда полази од представе реализационе структуре приказане на слици А.1, где је са α означена мрежа која може садржати само сабираче и кола за кашњење и у потпуности је одређена матрицом $\mathbf{T} = [t_{ij}]_{3 \times 3}$, чиме се проблем одређивања реализационе структуре своди на проблем налажења вредности елемената матрице \mathbf{T} .



Сл. А.1: Представа реализационе структуре са минималним бројем множача секције свепропусника фреквенција другог реда [30, 48].

Коришћењем релације

$$\begin{bmatrix} Y_{ap}(z) \\ W_{\gamma_1}(z) \\ W_{\gamma_2}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{ap}(z) \\ U_{\gamma_1}(z) \\ U_{\gamma_2}(z) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

где су са $W_{\gamma_1}(z)$, $U_{\gamma_1}(z)$, $W_{\gamma_2}(z)$, $U_{\gamma_2}(z)$ означене \mathcal{Z} -трансформације сигнала на улазу и излазу множача γ_1 и γ_2 , респективно, при чему очигледно важи

$$\begin{bmatrix} U_{\gamma_1}(z) \\ U_{\gamma_2}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_{\gamma_1}(z) \\ W_{\gamma_2}(z) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

за преносну функцију мреже са слике А.1 може се писати

$$G_2(z) = \frac{Y_{ap}(z)}{X_{ap}(z)} = \frac{t_{11} + \gamma_1(t_{12}t_{21} - t_{11}t_{22}) + \gamma_2(t_{13}t_{31} - t_{11}t_{33}) + \gamma_1\gamma_2 \det \mathbf{T}}{1 - \gamma_1t_{22} - \gamma_2t_{33} + \gamma_1\gamma_2(t_{22}t_{33} - t_{23}t_{32})}. \quad (\text{A.13})$$

У циљу поређења ове релације са преносном функцијом секције свепропусника другог реда, релација (А.4), ову другу треба преформулисати:

$$G_2(z) = \frac{\frac{b_4+b_0z^{-1}+z^{-2}}{1+b_0z^{-1}+b_4z^{-2}} + \gamma_1 \frac{b_5+b_1z^{-1}}{1+b_0z^{-1}+b_4z^{-2}} + \gamma_2 \frac{b_6+b_2z^{-1}}{1+b_0z^{-1}+b_4z^{-2}} + \gamma_1\gamma_2 \frac{b_7+b_3z^{-1}}{1+b_0z^{-1}+b_4z^{-2}}}{1 + \gamma_1z^{-1} \frac{b_1+b_5z^{-1}}{1+b_0z^{-1}+b_4z^{-2}} + \gamma_2z^{-1} \frac{b_2+b_6z^{-1}}{1+b_0z^{-1}+b_4z^{-2}} + \gamma_1\gamma_2z^{-1} \frac{b_3+b_7z^{-1}}{1+b_0z^{-1}+b_4z^{-2}}}, \quad (\text{A.14})$$

па се, након поређења, за вредности елемената t_{11} , t_{22} и t_{33} добија да важи:

$$t_{11} = \frac{b_4 + b_0z^{-1} + z^{-2}}{1 + b_0z^{-1} + b_4z^{-2}}, \quad (\text{A.15})$$

$$t_{22} = -z^{-1} \frac{b_1 + b_5z^{-1}}{1 + b_0z^{-1} + b_4z^{-2}}, \quad (\text{A.16})$$

$$t_{33} = -z^{-1} \frac{b_2 + b_6z^{-1}}{1 + b_0z^{-1} + b_4z^{-2}}, \quad (\text{A.17})$$

док за вредности преосталих елемената матрице \mathbf{T} вреди

$$\det \mathbf{T} = \frac{b_7 + b_3z^{-1}}{1 + b_0z^{-1} + b_4z^{-2}}, \quad (\text{A.18})$$

$$t_{22}t_{33} - t_{23}t_{32} = z^{-1} \frac{b_3 + b_7z^{-1}}{1 + b_0z^{-1} + b_4z^{-2}}, \quad (\text{A.19})$$

$$t_{12}t_{21} - t_{11}t_{22} = \frac{b_5 + b_1z^{-1}}{1 + b_0z^{-1} + b_4z^{-2}}, \quad (\text{A.20})$$

$$t_{13}t_{31} - t_{11}t_{33} = \frac{b_6 + b_2z^{-1}}{1 + b_0z^{-1} + b_4z^{-2}}. \quad (\text{A.21})$$

Последње три релације се коришћењем релација (А.15), (А.16) и (А.17) могу написати у следећем облику

$$t_{23}t_{32} = \theta_{23}(z, \mathbf{b}) = z^{-1} \frac{-b_3 + \lambda_0z^{-1} + \lambda_1z^{-2} + \lambda_2z^{-3}}{(1 + b_0z^{-1} + b_4z^{-2})^2}, \quad (\text{A.22})$$

$$t_{12}t_{21} = \theta_{12}(z, \mathbf{b}) = (1 - z^{-2}) \frac{b_5(1 + z^{-2}) + \lambda_3z^{-1}}{(1 + b_0z^{-1} + b_4z^{-2})^2}, \quad (\text{A.23})$$

$$t_{13}t_{31} = \theta_{13}(z, \mathbf{b}) = (1 - z^{-2}) \frac{b_6(1 + z^{-2}) + \lambda_4z^{-1}}{(1 + b_0z^{-1} + b_4z^{-2})^2}, \quad (\text{A.24})$$

где је

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= b_1 b_2 - b_0 b_3 - b_7, & \lambda_1 &= b_1 b_6 - b_0 b_7 + b_2 b_5 - b_3 b_4, \\ \lambda_2 &= b_5 b_6 - b_4 b_7, & \lambda_3 &= b_1 (1 - b_4) + b_0 b_5, & \lambda_4 &= b_2 (1 - b_4) + b_0 b_6,\end{aligned}$$

док се уврштавањем (A.15), (A.16), (A.17), (A.22), (A.23) и (A.24) у релацију (A.18) добија

$$t_{12} t_{23} t_{31} + t_{13} t_{21} t_{32} = \Theta(z, \mathbf{b}) = (1 - z^{-2}) \frac{b_7 + \lambda_5 z^{-1} + \lambda_6 z^{-2} + \lambda_7 z^{-3} + \lambda_8 z^{-4}}{(1 + b_0 z^{-1} + b_4 z^{-2})^3}, \quad (\text{A.25})$$

где је

$$\begin{aligned}\lambda_5 &= b_3 (1 - b_4) + 2b_0 b_7 - b_1 b_6 - b_2 b_5, \\ \lambda_6 &= (b_0 b_3 - 2b_1 b_2) (1 - b_4) - b_0 (b_1 b_6 + b_2 b_5) + b_7 (1 + b_4 + b_0^2) - 2b_5 b_6, \\ \lambda_7 &= b_0 b_7 (1 + b_4) + b_3 b_4 (1 - b_4) + (b_1 b_6 + b_2 b_5) (b_4 - 2) - 2b_0 b_5 b_6, \\ \lambda_8 &= b_4 b_7 - 2b_5 b_6.\end{aligned}$$

Треба приметити да у релацијама (A.22), (A.23), (A.24) и (A.25) фигуришу само вредности 6 непознатих елемената матрице \mathbf{T} , тј. не фигуришу t_{11} , t_{22} и t_{33} одређени релацијама (A.15), (A.16) и (A.17).

У циљу одређивања потребног услова који морају задовољити вредности вектора \mathbf{b} , како би реализација са минималним бројем множача била могућа, узима се у разматрање производ чланова који у збиру чине леву страну релације (A.25), $t_{12} t_{23} t_{31} t_{13} t_{21} t_{32}$, који се коришћењем релација (A.22), (A.23) и (A.24) може се написати у облику

$$t_{12} t_{23} t_{31} t_{13} t_{21} t_{32} = \theta_{23}(z, \mathbf{b}) \theta_{12}(z, \mathbf{b}) \theta_{13}(z, \mathbf{b}). \quad (\text{A.26})$$

Претходна релација се коришћењем (A.25) своди на квадратну једначину по непознатом производу $t_{12} t_{23} t_{31}$:

$$(t_{12} t_{23} t_{31})^2 - (t_{12} t_{23} t_{31}) \Theta(z, \mathbf{b}) + \theta_{23}(z, \mathbf{b}) \theta_{12}(z, \mathbf{b}) \theta_{13}(z, \mathbf{b}) = 0, \quad (\text{A.27})$$

чија су решења одређена са

$$t_{12}t_{23}t_{31} = \frac{1}{2} \left[\Theta(z, \mathbf{b}) \pm \sqrt{\Theta^2(z, \mathbf{b}) - 4\theta_{23}(z, \mathbf{b})\theta_{12}(z, \mathbf{b})\theta_{13}(z, \mathbf{b})} \right]. \quad (\text{A.28})$$

Имајући у виду претходну релацију, као и чињеницу да су вредности елемената матрице \mathbf{T} рационалне полиномске функције, потребан услов који морају задовољити вредности вектора \mathbf{b} како би преносна функција (A.4) могла бити реализована коришћењем минималног броја множача јесте да $\sqrt{\Theta^2(z, \mathbf{b}) - 4\theta_{23}(z, \mathbf{b})\theta_{12}(z, \mathbf{b})\theta_{13}(z, \mathbf{b})}$ буде рационална полиномска функција.

Сменом израза за $\theta_{12}(z, \mathbf{b})$, $\theta_{23}(z, \mathbf{b})$, $\theta_{13}(z, \mathbf{b})$ и $\Theta(z, \mathbf{b})$, релације (A.22), (A.23), (A.24) и (A.25), респективно, потребан услов своди се на услов представљања следећег полинома четвртог реда:

$$Q(z, \mathbf{b}) = b_7^2 + \lambda' z^{-1} + \lambda'' z^{-2} + \lambda' z^{-3} + b_7^2 z^{-4} \quad (\text{A.29})$$

квадратом тринома, где је

$$\begin{aligned} \lambda' &= 2b_7(b_3 - b_3b_4 + b_0b_7 - b_1b_6 - b_2b_5) + 4b_3b_5b_6, \\ \lambda'' &= 2b_7^2 + (b_3 - b_3b_4 + b_0b_7 - b_1b_6 - b_2b_5)^2 \\ &\quad + 4(1 - b_4)(b_1b_3b_6 + b_2b_3b_5 - b_1b_2b_7) \\ &\quad + 4b_5b_6(b_0b_3 - b_1b_2). \end{aligned}$$

Обзиром да је $Q(z, \mathbf{b})$ реципрочни полином, могућа је представа квадратом тринома, уколико важи:

1. За $b_7 = 0$, λ' мора бити нула, тј.

$$b_3b_5b_6 = 0. \quad (\text{A.30})$$

Додатно, мора важити

$$\sqrt{\lambda''} \in \mathbb{N}_0. \quad (\text{A.31})$$

2. Уколико је $b_7 \neq 0$, мора важити

$$\left(\frac{\lambda'}{2b_7} \right)^2 = \lambda'' - 2b_7^2. \quad (\text{A.32})$$

Коначно, елиминацијом представа преносне функције свепропусника фреквенција другог реда за које није испуњен услов могућности реализације са минималним бројем множача, добија се да је број елемената скупа Φ_2 једнак 1920, при чему сви начини представе који се могу добити поступком описаним у раду [53] припадају овом скупу.

Прилог Б

Одређивање вредности коэффицијената множача различитих представа преносне функције свепропусника фреквенција другог реда из скупа Φ_2

АЛГОРИТАМ за одређивање оптималних представа преносних функција филтра свепропусника фреквенција, део 4.4.1, у кораку 4 захтева одређивање номиналних вредности коэффицијената множача свих представа преносних функција из скупа Φ_2 , а у функцији номиналних вредности коэффицијената множача директне реализације секције свепропусника фреквенција другог реда. Другим речима, имајући у виду релације (4.47) и (4.48), потребно је решити, у општем случају, систем од две нелинеарне једначине

$$b_0 + b_1\bar{\gamma}_1 + b_2\bar{\gamma}_2 + b_3\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2 = \bar{\beta}_1, \quad (\text{Б.1})$$

$$b_4 + b_5\bar{\gamma}_1 + b_6\bar{\gamma}_2 + b_7\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2 = \bar{\beta}_2, \quad (\text{Б.2})$$

по непознатим коефицијентима $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$, при чему су вредности b_0, b_1, \dots, b_7 одређене начином представе преносне функција секције свепропусника другог реда из скупа Φ_2 .

Имајући у виду релацију (А.5), без умањења општости може се усвојити да је $|b_1| + |b_3| \neq 0$, па се релација (Б.1) може написати у следећем облику

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{\bar{\beta}_1 - b_0 - b_2\bar{\gamma}_2}{b_1 + b_3\bar{\gamma}_2}. \quad (\text{Б.3})$$

Заменом (Б.3) у (Б.2), након краћег сређивања, добија се квадратна једначина по непознатом коефицијенту $\bar{\gamma}_2$:

$$\alpha_2\bar{\gamma}_2^2 + \alpha_1\bar{\gamma}_2 + \alpha_0 = 0, \quad (\text{Б.4})$$

где је

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= b_3b_6 - b_2b_7, \\ \alpha_1 &= -b_2b_5 + b_1b_6 + b_7(\bar{\beta}_1 - b_0) + b_3(b_4 - \bar{\beta}_2), \\ \alpha_0 &= b_1(b_4 - \bar{\beta}_2) + b_5(\bar{\beta}_1 - b_0). \end{aligned}$$

У циљу налажења решења по непознатим номиналним вредностима коефицијената множача $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$, при чему треба имати у виду да број решења система једначина није нужно једнак броју решења по номиналним вредностима коефицијената множача, могу се разликовати четири случаја:

- а) $\alpha_2 = 0$, добија се следеће решење по непознатим номиналним вредностима коефицијената множача:

$$\bar{\gamma}_2 = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1}, \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{b_2\alpha_0 + \alpha_1(\bar{\beta}_1 - b_0)}{b_1\alpha_1 - b_3\alpha_0}. \quad (\text{Б.5})$$

- б) $\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 = 0$, квадратна једначина (Б.4) може се представити у виду квадрата бинома, те је решењем система једначина одређено једно решење по непознатим номиналним вредностима $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$:

$$\bar{\gamma}_2 = -\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}, \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{b_2\alpha_1 + 2\alpha_2(\bar{\beta}_1 - b_0)}{2b_1\alpha_2 - b_3\alpha_1}. \quad (\text{Б.6})$$

- в) $\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 > 0$, једно или оба решења система једначина представљају решење

по непознатим номиналним вредностима коефицијената множача. Уколико је $b_1 = b_2$ и $b_5 = b_6$, добија се једно решење:

$$\bar{\gamma}_2 = \frac{-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2}, \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{2\alpha_2(\bar{\beta}_1 - b_0) - b_2 \left[-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2} \right]}{2b_1\alpha_2 + b_3 \left[-\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2} \right]}, \quad (\text{Б.7})$$

док се у супротном добијају два решења од којих је једно одређено претходном релацијом, док је друго облика:

$$\bar{\gamma}_2 = -\frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2}}{2\alpha_2}, \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{2\alpha_2(\bar{\beta}_1 - b_0) + b_2 \left[\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2} \right]}{2b_1\alpha_2 - b_3 \left[\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2} \right]}. \quad (\text{Б.8})$$

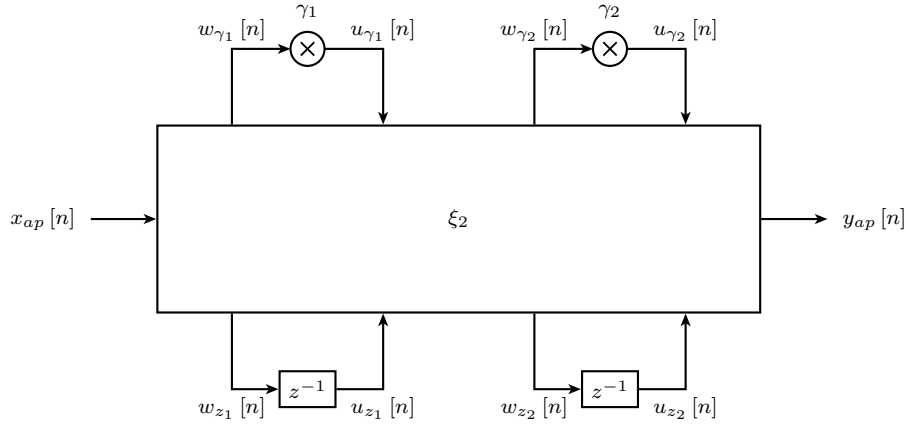
г) $\alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_2 < 0$, систем једначина нема решења по непознатим номиналним вредностима коефицијената.

Прилог В

Немогућност каноничне реализације са минималним бројем множача свих представа преносне функције свепропусника фреквенција другог реда из скупа Φ_2

На слици В.1 приказана је представа каноничне реализационе структуре са минималним бројем множача секције свепропусника фреквенција другог реда, при чему је са ξ_2 означена мрежа сабирача са 5 улаза и 5 излаза, која је у потпуности одређена матрицом $P_{\xi_2} = [p_{ij}]_{5 \times 5}$. Јасно је да вредности елемената p_{ij} морају испуњавати одређене услове како би резултујућа преносна функција одговарала филтру свепропуснику фреквенција другог реда.

Како реализациона структура не сме садржати комбинационе петље то p_{44} , p_{55} и $p_{54} \cdot p_{45}$ морају бити једнаки нули. Без губитка општости усвојићемо да је $p_{54} = 0$,



Сл. В.1: Представа каноничне реализације са минималним бројем множака секције свепропусника фреквенција другог реда [53].

па се коришћењем релације:

$$\begin{bmatrix} Y_{ap}(z) \\ W_{z_1}(z) \\ W_{z_2}(z) \\ W_{\gamma_1}(z) \\ W_{\gamma_2}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & 0 & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{ap}(z) \\ U_{z_1}(z) \\ U_{z_2}(z) \\ U_{\gamma_1}(z) \\ U_{\gamma_2}(z) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

где су са $W_{z_1}(z)$, $U_{z_1}(z)$, $W_{z_2}(z)$, $U_{z_2}(z)$ означене \mathcal{Z} -трансформације сигнала на улазу и излазу првог и другог кола за кашњење, респективно, док су са $W_{\gamma_1}(z)$, $U_{\gamma_1}(z)$, $W_{\gamma_2}(z)$, $U_{\gamma_2}(z)$ означене \mathcal{Z} -трансформације сигнала на улазу и излазу множака γ_1 и γ_2 , при чему важи:

$$\begin{bmatrix} U_{z_1}(z) \\ U_{z_2}(z) \\ U_{\gamma_1}(z) \\ U_{\gamma_2}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_{z_1}(z) \\ W_{z_2}(z) \\ W_{\gamma_1}(z) \\ W_{\gamma_2}(z) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

за преносну функцију мреже са слике В.1 може се писати

$$G_2(z) = \frac{Y_{ap}(z)}{X_{ap}(z)} = p_{11} + \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{15} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} z - p_{22} & -p_{23} & -p_{24} & -p_{25} \\ -p_{32} & z - p_{33} & -p_{34} & -p_{35} \\ -p_{42} & -p_{43} & \gamma_1^{-1} & -p_{45} \\ -p_{52} & -p_{53} & 0 & \gamma_2^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{31} \\ p_{41} \\ p_{51} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Након краћег сређивања, $G_2(z)$ се може представити у облику

$$G_2(z) = \frac{g'_4 + g'_5\gamma_1 + g'_6\gamma_2 + g'_7\gamma_1\gamma_2 + (g'_0 + g'_1\gamma_1 + g'_2\gamma_2 + g'_3\gamma_1\gamma_2)z^{-1}}{1 + (g_0 + g_1\gamma_1 + g_2\gamma_2 + g_3\gamma_1\gamma_2)z^{-1} + (g_4 + g_5\gamma_1 + g_6\gamma_2 + g_7\gamma_1\gamma_2)z^{-2}} + \frac{(g_8 + g_9\gamma_1 + g_{10}\gamma_2 + g_{11}\gamma_1\gamma_2)z^{-2}}{1 + (g_0 + g_1\gamma_1 + g_2\gamma_2 + g_3\gamma_1\gamma_2)z^{-1} + (g_4 + g_5\gamma_1 + g_6\gamma_2 + g_7\gamma_1\gamma_2)z^{-2}}, \quad (\text{B.4})$$

при чему је, у циљу доказивања немогућности каноничне реализације свих представа из скупа Φ_2 , довољно посматрати зависност g'_5 , g'_6 , g'_7 и g_3 од вредности елемената матрице p_{ij} :

$$\begin{aligned} g'_5 &= p_{14}p_{41}, & g'_6 &= p_{15}p_{51}, \\ g'_7 &= -p_{14}p_{45}p_{51}, & g_3 &= p_{45}(p_{24}p_{52} + p_{34}p_{53}). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Наиме, претходне релације указују да g_3 не може имати вредност различиту од нуле уколико је $g'_5 \neq 0$, $g'_6 \neq 0$ и $g'_7 = 0$, тј. немогућа је канонична реализација са минималним бројем множача за оне представе из скупа Φ_2 , релација (A.4), којима одговарају вредности вектора \mathbf{b} :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x & x & x & -2 & x & x^* & x^* & 0 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} x & x & x & 1 & x & x^* & x^* & 0 \end{bmatrix}, \\ &\begin{bmatrix} x & x & x & -1 & x & x^* & x^* & 0 \end{bmatrix}, & & \begin{bmatrix} x & x & x & 2 & x & x^* & x^* & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

за свако $x \in \mathbb{Z}$ и $x^* \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Биографија аутора

Иван Крстић је рођен 21.05.1988. године у Крагујевцу. Основне и мастер академске студије завршио је на Факултету техничких наука у Косовској Митровици Универзитета у Приштини, одсек Електротехничко и рачунарско инжењерство, модул Електроника и телекомуникације, са просечном оценом 9,21 односно 9,79, респективно. Докторске академске студије уписао је школске 2012./2013. године на студијском програму Електроника и микрорачунарска техника Електронског факултета Универзитета у Нишу и испите положио са просечном оценом 10,00. Од марта 2012. године ангажован је као сарадник у настави, а затим као асистент на Факултету техничких наука у Косовској Митровици Универзитета у Приштини.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

СИНТЕЗА И РЕАЛИЗАЦИЈА УСКОПОЈАСНИХ РЕКУРЗИВНИХ ДИГИТАЛНИХ ФИЛТАРА НЕПРОПУСНИКА ОПСЕГА

која је одбрањена на Електронском факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио ауторска права, нити злоупотребио интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, _____.

Потпис аутора дисертације:

Иван Б. Крстић

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ
ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Наслов дисертације:

**СИНТЕЗА И РЕАЛИЗАЦИЈА УСКОПОЈАСНИХ РЕКУРЗИВНИХ
ДИГИТАЛНИХ ФИЛТАРА НЕПРОПУСНИКА ОПСЕГА**

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу**, истоветан штампаном облику.

У Нишу, _____.

Потпис аутора дисертације:

Иван Б. Крстић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла” да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

СИНТЕЗА И РЕАЛИЗАЦИЈА УСКОПОЈАСНИХ РЕКУРЗИВНИХ ДИГИТАЛНИХ ФИЛТАРА НЕПРОПУСНИКА ОПСЕГА.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство - некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство - некомерцијално - без прераде (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство - без прераде (CC BY-ND)
6. Ауторство - делити под истим условима (CC BY-SA)

У Нишу, _____.

Потпис аутора дисертације:

Иван Б. Крстић