



UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET



Aleksandar V. Marković

**RAZVOJ METODA I ALGORITAMA ZA
PROCENU PERFORMANSI KOMUNIKACIONIH
SISTEMA PRIMENOM APROKSIMACIJA
SPECIJALNIH FUNKCIJA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2018.



UNIVERSITY OF NIŠ

FACULTY OF ELECTRONIC ENGINEERING



Aleksandar V. Marković

**DEVELOPMENT OF THE METHOD AND
ALGORITHMS FOR ESTIMATION OF THE
PERFORMANCE OF COMMUNICATION
SYSTEMS BY APPLICATION OF
APPROXIMATION OF SPECIAL FUNCTIONS**

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2018.

PODACI O MENTORU I ČLANOVIMA KOMISIJE

Mentor: dr Zoran Perić, redovni profesor, Elektronski fakultet u Nišu, Univerzitet u Nišu

Komisija za odbranu disertacije:

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

Datum odbrane:

PODACI O DOKTORSKOJ DISERTACIJI

Naslov: Razvoj metoda i algoritama za procenu performansi komunikacionih sistema primenom aproksimacija specijalnih funkcija

Broj stranica: 116

Broj slika: 35

Broj tabela: 32

Broj bibliografskih jedinica: 117

Naučna oblast: Telekomunikacije

UDK broj:

Rezime:

Intenzivni razvoj servisa bežičnih komunikacionih sistema praćen je potrebom za razvojem metoda i algoritama za implementaciju odgovarajućih aproksimacija specijalnih funkcija kako bi se njihovom primenom izvršila efikasna procena odgovarajućih performansi navedenih servisa. U cilju estimacije ponašanja digitalnih komunikacionih sistema, potrebno je proceniti standardne mere performansi za posmatrane realizacije bežičnih komunikacionih sistema za slučajeve primene različitih tipova modulacija, vrsta detekcija kao i modela kanala i posmatrati veze između performansi i ključnih vrednosti parametara sistema. Jedan od alata kojim se vrši procena performansi servisa, koje na najbolji način opisuju prirodu ponašanja bežičnog komunikacionog sistema, jeste analiza veličine srednje verovatnoće greške po bitu na prijemu za primenjeni modulacioni format. Da bi se analitički procenile vrednosti srednje verovatnoće greške po bitu za primenjeni format modulacije, neophodno je izvršiti što precizniju implementaciju aproksimacije specijalnih funkcija $\operatorname{erfc}(x)$, $\operatorname{erf}(x)$, Marcum Q , u što širem ulaznom opsegu vrednosti.

U disertaciji će biti predstavljeni kompozitni metodi aproksimacija specijalnih funkcija. Osim jednostavnosti realizacije pri aproksimaciji posmatranih funkcija, biće

razmatran i aspekt robusnosti apsolutnih i relativnih vrednosti greške aproksimacije u širokom opsegu ulaznih vrednosti parametara.

Direktnim poređenjem sa vrednostima apsolutnih i relativnih grešaka dobijenih primenom aproksimacija specijalnih funkcija koje su poznate u literaturi, biće istaknute prednosti predloženih rešenja. Dalje, pri prenosu informacija kroz komunikacione kanale sa fedingom za slučajeve primene predloženih aproksimacija specijalnih funkcija, biće pokazano da se performanse sistema mogu jednostavnije odrediti na osnovu primene rešenja predloženih u disertaciji. Na taj način bi se postiglo jednostavnije određivanje verovatnoće greške komunikacionih sistema usled delovanja različitih vrsta fedinga u kanalu. Poređenjem predviđanja vrednosti srednjeg broja pogrešno prenetih simbola na prijemu, pri prenosu signala kroz različite medijume komunikacionih kanala, za slučajeve primene ranije predloženih aproksimacija specijalnih funkcija sa vrednostima srednjeg broja pogrešno prenetih simbola na prijemu dobijenih na osnovu proračuna zasnovanog na predloženim metodama aproksimacija, biće pokazano da se performanse prenosa mogu tačnije proračunati na osnovu primene rešenja predloženih u disertaciji. Predložene aproksimacije bi mogle pronaći primenu i pri izvornom kodovanju signala, i omogućile jednostavnije projektovanje i realizaciju kvantizera.

Ključne reči:

α - k - μ model fedinga, Nakagami- m model fedinga, *spline* funkcija, Q-funkcija, srednja verovatnoća greške po bitu, intervalni metod, kompozitni metod, genetski algoritam.

INFORMATION ABOUT THE DOCTORAL DISSERTATION

Title: Development of the method and algorithms for estimation of the performance of communication systems by application of approximation of special functions

Number of pages: 116

Number of figures: 35

Number of tables: 32

Number of bibliographic items: 117

Scientific field: Telecommunications

UDC:

Summary:

The intensive development of wireless communication systems has been accompanied by the need to develop methods and algorithms for implementing appropriate approximations of special functions in order to efficiently estimate the corresponding performance of these services through their application. In order to evaluate the behavior of digital communications systems, it is necessary to estimate standard performance measures for the observed wireless communications systems, various modulation types application, detection types, as well as channel models, and observe relations between performance and key values of system parameters. The analysis of the average bit error rate at reception for the applied modulation format is one of the tools for assessing service performance, that describes the nature of the wireless communication system in the best manner. In order to analytically evaluate the average bit error rate for the applied modulation format, it is necessary to perform the most accurate implementation of the approximation of special functions $erfc(x)$, $erf(x)$, $Marcum Q$, in the widest input range values.

The dissertation will present composite methods of the special functions' approximations. In addition to the simplicity of realization in approximating the observed

functions, the aspect of robustness of approximations absolute and relative error values in a wide range of input parameters values will be considered.

The advantages of the proposed solutions will be highlighted by direct comparison with the absolute and relative errors obtained by using the known special functions' approximations from the literature. Furthermore, when transferring information through fading communication channels, for cases of application of proposed special functions' approximations, it will be proved that system performance can be determined more easily by applying solutions proposed in the dissertation. In this way, it would be easier to determine the probability of the error of communication systems due to different types of fading existence in the channel. By comparing predicted values of the average bit error rate at reception, when transmitting signals through various communication channels medias, for cases of application of existing, previously proposed special functions' approximations, with the average bit error rate at reception obtained by calculation based on the proposed approximation solutions, it will be shown that communication performances can be calculated more precisely. Proposed approximations could also be used in the source coding of the signal and could simplify design and realization of the quantizers.

Key Words:

α - k - μ fading model, Nakagami- m fading model, spline function, Q-function, average bit error rate, interval method, composite method, genetic algorithm.

PREGLED SLIKA

Slika 3.1: Grafički prikaz spline aproksimacije za $L = 2$ segmenta.

Slika 3.2: Grafički prikaz spline aproksimacije za $L = 4$ segmenta.

Slika 3.3: Grafički prikaz spline aproksimacije za $L = 8$ segmenata.

Slika 3.4: Grafički prikaz deo po deo spline aproksimacije iz Tabele 4.4.

Slika 4.1: Blok dijagram algoritma za određivanje najboljih vrednosti aproksimacija $erfc$ -funkcije (Q-funkcije) za predloženi intervalni metod.

Slika 4.2: Poređenje aproksimacija $erfc(x)$ funkcija.

Slika 4.3: Apsolutne relativne greške aproksimacija $erfc(x)$ funkcija.

Slika 4.4: ASEP za BPSK u prisustvu Nakagami- m fading kanala.

Slika 4.5: Apsolutna relativna greška predložene intervalne aproksimacije ASEP za BPSK u prisustvu Nakagami- m fading kanala za različite vrednosti parametra m .

Slika 4.6: ASEP za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala, za različite vrednosti parametra m .

Slika 4.7: Apsolutna relativna greška predložene intervalne aproksimacije ASEP za DEQPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fadinga za različite vrednosti parametra m .

Slika 4.8: Poređenje Q(x) funkcije i njenih aproksimacija.

Slika 4.9: Blok dijagram algoritma za određivanje najboljih vrednosti aproksimacija Q-funkcije za predloženi kompozitni metod.

Slika 4.10: Apsolutna relativna greška za novu kompozitnu aproksimaciju Q(x) funkcije u poređenju sa drugim aproksimacijama.

Slika 4.11: Tačne i aproksimirane vrednosti ABER za BPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala za različite vrednosti parametra m .

Slika 4.12: Apsolutna relativna greška ABER za BPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala za različite vrednosti parametra m .

Slika 4.13: Tačne i aproksimirane vrednosti ABER za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m feding kanala za različite vrednosti parametra m .

Slika 4.14: Apsolutna relativna greška predložene aproksimacije ASEP za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m modela fedinga za različite vrednosti parametra m .

Slika 4.15: Poređenje aproksimacija $Q(x)$ funkcije sa novim kompozitnim metodama aproksimacije $Q(x)$ funkcije na intervalima pomoću gornjih granica.

Slika 4.16: Blok dijagram algoritma za određivanje najboljih vrednosti aproksimacija Q -funkcije na intervalima pomoću gornjih granica.

Slika 4.17: Apsolutna relativna greška za novu kompozitnu aproksimaciju Q funkcije, Q^{com_1} , u poređenju sa drugim poznatim aproksimacijama.

Slika 4.18: Apsolutna relativna greška za novu kompozitnu aproksimaciju Q funkcije, Q^{com_2} , u poređenju sa drugim poznatim aproksimacijama.

Slika 4.19: Poređenje vrednosti za ASEP za BPSK u prisustvu Nakagami- m feding kanala, dobijene aproksimacijama Q funkcija i predloženom intervalnom metodom Q^{com_2} .

Slika 4.20: Apsolutna relativna greška tačnih i aproksimiranih vrednosti Q^{com_2} , ASEP za BPSK format modulacije.

Slika 4.21: ASEP za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m feding kanala.

Slika 4.22: Apsolutna relativna greška tačnih i aproksimiranih vrednosti ASEP za DE-QPSK format modulacije.

Slika 4.23: Blok dijagram algoritma za određivanje najboljih vrednosti aproksimacija Q -funkcije dobijenih pomoću GA.

Slika 4.24: Poređenje vrednosti apsolutnih relativnih grešaka Isukapalli, Chiani, Benitez aproksimacija sa predloženim kompozitnim metodom aproksimacije.

Slika 4.25: Poređenje vrednosti apsolutnih relativnih grešaka Karagianidis, Borjesson aproksimacija sa predloženim kompozitnim metodom aproksimacije.

Slika 4.26: Poređenje vrednosti apsolutnih relativnih grešaka Chiani, Loskot aproksimacija sa predloženim kompozitnim metodom aproksimacije.

Slika 4.27: Poređenje vrednosti apsolutnih relativnih grešaka Sofotasios, Benitez aproksimacija sa predloženim kompozitnim metodom aproksimacije.

Slika 4.28: Tačne i aproksimirane vrednosti ABER za BPSK.

Slika 4.29: Apsolutna relativna greška ABER za BPSK.

Slika 4.30: Tačne i aproksimirane vrednosti ABER za DE-QPSK.

Slika 4.31: Apsolutna relativna greška predložene aproksimacije ASEP za DE-QPSK.

SKRAĆENICE

QoS - Quality of Service

GoS - Grade of Service

CCI - Co-channel Interference

MRC - Maximum Ratio Combining

EGC - Equal Gain Combining

SC - Selection Combining

SSC - Switch And Stay Combining

SNR - signal-to-noise ratio

OP - Outage Probability

ABER - Average Bit Error Probability

ASEP - Average Symbol Error probability

CPSK - Coherent Phase Shift Keying

PSK - Coherent Detection of Differentially Encoded

CFSK - Coherent Frequency Shift Keying

DPSK - Differential Phase Shift Keying

NFSK - Non-Coherent Frequency Shift Keying

QPSK - Quadrature Phase Shift Keying

MSK - Minimum Shift Keying

SQAM - Square Quadrature Amplitude Modulation

MPSK - Multiple Phase Shift Keying

MDPSK - M -ary Differential Phase-Shift Keying

AoF - amount of fading

LCR - Level Crossing Rate

AFD - Average Fade Duration

BPSK - Binary Phase Shift Keying

DE-QPSK - Differentially Encoded-Quadrature Phase Shift Keying

GA – Genetic Algorithm

SADRŽAJ

| | |
|---|----|
| 1. UVOD | 1 |
| 2. BEŽIČNI KOMUNIKACIONI SISTEMI I STANDARDNE MERE | |
| PERFORMANSI | 6 |
| 2.1. Brzi feding | 9 |
| 2.2. Nakagami- m raspodela | 10 |
| 2.3. α - k - μ model fedinga | 12 |
| 2.4. Diverziti tehnika prijema | 17 |
| 2.5. Srednja vrednost odnosa signal-šum | 18 |
| 2.6. Verovatnoća otkaza | 19 |
| 2.7. Srednja verovatnoća greške po bitu | 20 |
| 2.8. Količina fedinga | 23 |
| 2.9. Srednji broj osnih preseka | 23 |
| 2.10. Srednje trajanje fedinga | 24 |
| 3. SREDNJA VEROVATNOĆA GREŠKE PO BITU PRIMENOM <i>SPLINE</i> | |
| APROKSIMACIJE | 25 |
| 3.1. Model <i>spline</i> aproksimacije | 26 |
| 3.2. Aproksimacija α - k - μ feding modela | 28 |
| 4. SPECIJALNE FUNKCIJE I NEKE APROKSIMACIJE SPECIJALNIH | |
| FUNKCIJA | 37 |
| 4.1. Marcum Q-funkcija | 39 |
| 4.2. Nuttall Q-funkcija | 42 |
| 4.3. Gausova Q-funkcija | 44 |
| 4.4. Poboljšani metod za procenu srednje verovatnoće greške po simbolu (ASEP) zasnovan na intervalnoj aproksimaciji erfc funkcije (Q-funkcije) | 46 |

| | |
|---|------------|
| 4.5. Poboljšana kompozitna aproksimacija Q-funkcije i njena primena za procenu ASEP u kanalu sa fedingom | 60 |
| 4.6. Aproksimacija Q-funkcije na intervalima pomoću gornjih granica | 74 |
| 4.7. Aproksimacija Q-funkcije dobijena pomoću genetskog algoritma | 89 |
| 5. ZAKLJUČAK | 102 |
| 6. LITERATURA | 105 |
| BIOGRAFIJA | 116 |

1. UVOD

Intenzivni razvoj različitih usluga bežičnih komunikacionih sistema dovodi do trajne potrebe za analizom mogućnosti poboljšanja karakteristika navedenih servisa. Nažalost, prostiranje signala u bežičnom mediju praćeno je različitim neželjenim efektima i smetnjama kao što su višeputajni fading i efekat senke.

Matematička karakterizacija ovih kompleksnih fenomena se sprovodi u cilju opisivanja različitih tipova propagacionih okruženja razvojem različitih modela korišćenih za stohastičko modelovanje višeputajnog fadinga. Najčešće korišćeni modeli fadinga u literaturi su: Rayleigh, Ricean, Hoyt, Nakagami- m , Weibull, α - μ , η - μ , κ - μ i α - κ - μ , dok su najpoznatiji modeli za karakterizaciju efekta senke: log-normal i Gamma shadowing model. U cilju lakše karakterizacije propagacije konstruisani su i kompozitni modeli koji odgovaraju scenarijima kada se uticaj višeputajnog fadinga superponira sa uticajem efekta senke: Suzuki, Ricean-shadowing i Generalizovani K kompozitni model. Sa aspekta analize performansi bežičnog prijema neophodno je i izvršiti matematičku karakterizaciju efekta korelisanosti signala na prijemu zbog čega su u literaturi uvedeni i neki modeli korelisanog fadinga gde je korelacija između vremenski pomerenih delova signala modelovana eksponencijalnim, konstantnim i generalnim modelom korelisanosti slučajnih procesa [1]-[3].

Najznačajnije mere performansi bežičnih komunikacionih sistema koje definišu meru kvaliteta signala na prijemu su: srednja vrednost odnosa signal-šum, kapacitet kanala, verovatnoća otkaza, srednja verovatnoća greške po bitu, iznos fadinga, srednji broj osnih preseka i srednje vreme trajanja otkaza. Vrednosti ovih mera performansi odgovaraju kvalitetu bežičnog prenosa zbog čega se u procesu projektovanja bežičnih komunikacionih sistema vrši estimacija njihovih vrednosti u cilju određivanja optimalnih vrednosti parametra prenosa kako bi se dostigli neophodni standardi kvaliteta prenosa. Matematička karakterizacija ovih mera performansi je detaljno razrađena u statističkoj teoriji telekomunikacija. Gde su

razvijeni postupci za izračunavanje srednje vrednosti verovatnoće greške po bitu prilikom primene različitih koherentnih i nekoherentnih modulacionih tehnika prenosa [2].

U cilju smanjenja neželjenog uticaja višeputajnog fedinga pri bežičnom prenosu, kao i smanjenja uticaja ko-kanalne interferencije, preslušavanje koje se javlja zbog upotrebe istih nosećih frekvencija za bežične signale iz različitih klastera primenjuje se niz koncepata diverziti prijema. Najčešće primenjivani koncept diverziti prijema je prostorni diverziti, prijem različitih kopija istog signala pomoću višeantenskog terminala gde se na osnovu unapred utvrđenog algoritma vrši kombinovanje primljenih kopija signala sa različitih prijemnih antena. U praksi se realizuje nekoliko tehnika kombinovanja od kojih su najpoznatije tehnike: selektivnog kombinovanja (SC - Selection Combining), prekidačkog kombinovanja (SSC - Switch and Stay Combining), kombinovanja signala sa maksimalnim odnosom (MRC - Maximal Ratio Combining), kombinovanje signala sa podjednakim težinama (EGC - Equal Gain Combining) [4].

Za navedene tehnike kombinovanja signala je neophodno izvršiti matematičku evaluaciju vrednosti standardnih mera performansi na prijemu za slučajeve primene različitih koherentnih i nekoherentnih modulacionih tehnika prenosa, kao i za različite modele korelisanosti signala sa prijemnih grana višeantenskog terminala.

U cilju smanjenja uticaja efekta senke uz simulatno smanjenje uticaja efekta višeputajnog fedinga primenjuje se diverziti prijem na makro nivou kombinovanjem signala sa različitih baznih stanica. Neophodnost i validnost upotrebe makrodiverziti prijema se demonstrira preko razvoja matematičkih modela za procenu vrednosti navedenih mera performansi na prijemu za slučajeve upotrebe različitih tehnika makrodiverziti kombinovanja prilikom prenosa signala primenom različitih koherentnih i nekoherentnih modulacionih formata.

Zbog svega gore navedenog matematička karakterizacija standardnih meri performansi bežičnog prenosa definiše osnovni pravac istraživanja statističke teorije telekomunikacija.

U drugoj glavi date su osnovne karakteristike bežičnog prenosa signala sa posebnim osvrtom na smetnje koje se javljaju pri prenosu kao i matematički modeli za njihovo opisivanje [1],[3]. Bežični prenos karakteriše vremenska fluktuacija anvelope i faze prenosnog signala. Uticaj varijacije faze se često može zanemariti, naročito kada se pri prenosu koriste nekoherentni modulacioni formati, što je najčešći slučaj u praksi. Brzi feding opisuje kompleksne pojave propagacije uzrokovane refleksijom posmatranog signala sa različitih objekata na način na koji su one na prijemu reflektovane, rasejane i slučajno

zakasnele komponente signala kombinuju na konstruktivan ili češće destruktivan način. U ovom poglavlju više pažnje će biti posvećeno vremenskoj varijaciji anvelope željenog signala. Ova pojava prouzrokuje da je trajanje simbola veće od vremenskog trajanja. Brzi feding, koji uzrokuje kratkoročne varijacije signala i način na koji se menja anvelopa signala prilikom izlaganja njegovom uticaju, do sada je modelovan sa nekoliko različitih modela. U ovom poglavlju biće posvećena posebna pažnja specifičnim modelima sa širokim opsegom primene. Spori feding se često javlja kada se između predajnika i prijemnika pojavljuju neki topografski elementi poput drveća ili visokih zgrada, tako da varijacije signala uzrokuju sporiji odziv impulsa kanala od vremenskog trajanja simbola. Uticaj senke na anvelopu signala statistički je modelovan najčešća sa dva modela: Gamma i log-normal model fedinga.

Postizanje potrebnog kvaliteta usluge (QoS - Quality of Service) i nivoa usluga (GoS - Grade of Service) u pogledu zahteva spektralne efikasnosti jedan je od glavnih ciljeva dizajniranja bežičnih komunikacionih sistema. Ključni problem u ovom procesu predstavlja analiza svojstva i uticaja bilo kakvih smetnji na bežični komunikacioni sistem. Ko-kanalna interferencija (CCI - Co-channel Interference) predstavlja signal koji ima istu noseću frekvenciju kao željeni informacioni signal. Naime, pošto svi bežični sistemi imaju tendenciju da čuvaju raspoloživi spektar, ponovnim korišćenjem dodeljenih frekvencijskih kanala u područjima koja su geografski locirana blizu jedna drugima, često usled ponovnog korišćenja frekvencija signali iz različitih kanala koji rade na istoj frekvenciji ali iz različitih izvora se mešaju. U ovom poglavlju biće analizirano kako CCI utiče na kriterijume performansi prijema bežičnih komunikacionih sistema.

U trećoj glavi prikazane su matematičke metode za procenu i određivanje nekih kriterijuma performansi neophodnih za dizajniranje bežičnog komunikacionog sistema kao što su: verovatnoća otkaza i srednja verovatnoća greške po bitu (ABEP - Average Bit Error Probability). Verovatnoća otkaza je definisana u odnosu na statistiku signala na prijemu kao verovatnoća da je signal manji od nivoa zaštite. U okolini u kojoj je interferencija dominantna smetnja verovatnoća otkaza je definisana kao verovatnoća da je odnos signal-interferencija (SIR – signal-to-interference ratio) na prijemu manji od unapred određenog praga [2]. ABEP predstavlja meru performansi koja na najbolji način opisuje prirodu ponašanja bežičnog komunikacionog sistema. Za sve prijemnike potrebno je odrediti statističke karakteristike signala na njihovim izlazima [2]. U zavisnosti od gustine verovatnoće signala na ulazima može se odrediti gustina verovatnoće signala na izlazu iz diverziti prijemnika. Pomoću gustine verovatnoće se određuje verovatnoća otkaza sistema i

srednja verovatnoća greške po bitu koji će se analizirati na prijemu sistema za različite vrednosti parametara prenosa.

U četvrtoj glavi, primenom aproksimacije za srednju verovatnoću greške po bitu (ABEP), biće procenjene standardne mere performansi za bežični komunikacioni sistem za α - κ - μ model fadinga korišćenjem linearne *spline* funkcije za $L = 2$, $L = 4$ i $L = 8$ segmenata [5]-[7]. Takođe će biti analizirana moguća poboljšanja dobijena primenom kompozitne deo po deo *spline* funkcije, dobijene kombinacijom linearne i kvadratne *spline* funkcije. Analitičko izvođenje izraza u zatvorenom obliku u nekim slučajevima nekoherentne modulacije predstavlja veoma težak zadatak ili je čak i nemoguće. Kako bi se što preciznije predvidele vrednosti za ABEP i smanjila kompleksnost proračuna potrebno je što preciznije implementirati aproksimaciju. Biće pokazano da na osnovu *spline* aproksimacijom dobijeni rezultati za ABEP ukazuju na mogućnost iskorišćavanja predstavljenih aproksimacija u različitim procesima projektovanja bežičnih komunikacionih sistema za posmatrane nehomogene i nelinearne uslove prostiranja, kao i da aproksimacije pružaju visok nivo preciznosti u širokom spektru ulaznih vrednosti.

Tematika kojom se bavi ova doktorska disertacija je u žiži proučavanja istraživača poslednjih godina. S tim u vezi, objavljen je veliki broj radova koji se bave teorijskom i numeričkom analizom bežičnih komunikacionih sistema.

Glavni podstrek za bavljenje tematikom ove doktorske disertacije je pronalaženje aproksimativnih metoda koji bi omogućili dobijanje preciznijih procena performansi bežičnih prenosnih sistema uz upotrebu jednostavnijih matematičkih modela. Primenom ovih metoda smanjili bi se hardverski zahtevi neophodni za proračun uz postizanje zadovoljavajuće tačnosti proračuna različitih tipova modulacija, vrsta detekcija kao i modela kanala, i posmatrati veze između performansi i ključnih vrednosti parametara sistema.

U petoj glavi biće izvedeni novi analitički izrazi, intervalne i kompozitne metode aproksimacije Q-funkcije. Biće analizirana tačnost aproksimacije Q-funkcije na intervalima pomoću gornjih granica, aproksimacija Q-funkcije dobijena pomoću genetskog algoritma, kao i granice za familiju specijalnih funkcija koje su korisne u teoriji bežičnih komunikacija. Ove funkcije su poznate kao Q-funkcija, erf, erfc, Marcum Q-funkcija, $Q_m(a,b)$, Nuttall Q-funkcija, $Q_{m,n}(a,b)$, nepotpuna Toronto funkcija, $T_B(m,n,r)$, Rice *Ie*-funkcija, $I_e(k,x)$ i nepotpuni Lipschitz-Hankel integrali, $Z_{m,n}(x;a)$.

U mnogim slučajevima izračunavanje integrala uključuje specijalne funkcije. Kao što je prikazano u [8]-[15], aproksimacije Q-funkcije uglavnom su razvijane da prevaziđu ne

samo teškoće, već i ograničenja koja su prouzrokovana u različitim područjima istraživanja, kao i da olakšaju analizu performansi različitih komunikacionih sistema i pruže dodatne matematičke analize ograničene nepostojanjem formule u zatvorenoj formi za Q-funkciju, kao i drugih specijalnih funkcija.

Ove funkcije predstavljaju koristan matematički alat koji se može koristiti pri analitičkim proračunima performansi savremenih bežičnih komunikacionih sistema kao što su kooperativne i *free-space* optičke komunikacije, kognitivni radio, radarski sistemi, diverziteti tehnike prijema kao i višeantenski sistemi. Problem aproksimacije Q-funkcije je od značaja za procenu uslovne veličine verovatnoće greške simbola (conditional SEP – conditional signal-to-error probability) digitalnih modulacija u prisustvu belog Gaussovog šuma kao i za ABEP u kanalima sa fadingom. Funkcija Gausove gustine verovatnoće (PDF - Probability Density Function) karakteriše signale u bežičnim prijemnicima, govorne signale, OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) modulacione signale kao i signale u bežičnim prijemnicima.

Mnoge dostupne empirijske i analitičke metode aproksimacija Q-funkcije pružaju različite kompromise između tačnosti aproksimacija Q-funkcije, kao i to da su neke od metoda pogodne za male argumente ali ne za velike i obrnuto. Uprkos tome što imaju odgovarajuću analitičku traktabilnost ne pružaju zadovoljavajuću tačnost. Takođe, često imaju vrlo kompleksnu analitičku formu koja nije pogodna za matematičke manipulacije koje uključuju Q-funkciju.

Zbog navedenih nedostataka aproksimacija Q-funkcije ovaj problem je i dalje široko rasprostranjen. Ovo je inspirisalo istraživanje koje je predstavljeno u ovoj doktorskoj disertaciji, pri čemu je cilj da predložene nove aproksimacije Q-funkcije imaju visoku tačnost kao i jednostavnu analitičku formu koja omogućava izvođenje mnogih analiza koje uključuju Q-funkciju na jednostavan način.

2. BEŽIČNI KOMUNIKACIONI SISTEMI I STANDARDNE MERE PERFORMANSI

U bežičnim telekomunikacionim sistemima osnovne smetnje koje se javljaju prilikom prenosa signala su ko-kanalne interferencije, Gausov šum, spori feding i brzi feding.

Termički Gausov šum se pojavljuje kod svih telekomunikacionih sistema može biti beo i obojen. Spektralna gustina snage obojenog Gausovog šuma je funkcija učestanosti, a Spektralna gustina snage belog Gausovog šuma je konstanta. Autokorelaciona funkcija belog Gausovog šuma je Dirakov impuls. Obojen Gausov šum je određen svojom autokorelacionom funkcijom ili spektralnom gustinom snage. U slučaju kada beli Gausov šum prođe kroz više kaskadno vezanih linearnih sistema javlja se obojen šum sa Gausovom spektralnom gustinom snage, koja na izlazu ima Gausov oblik. U ovom slučaju je autokorelaciona funkcija takođe Gausova funkcija [1],[16]. Spektralna gustina snage obojenog Gausovog šuma zavisi od prenosne funkcije linearnog sistema kroz koji je prošao beli Gausov šum, a jednaka je proizvodu kvadrata prenosne funkcije linearnog sistema i spektralne gustine snage obojenog Gausovog šuma na ulazu u linearni sistem.

U jednoj tački termički šum može se opisati Gausovom gustinom verovatnoće čija varijansa može da se odredi kao srednja kvadratna vrednost. Srednja vrednost Gausovog šuma je nula. Termički Gausov šum je ergodičan slučajni proces za koji važi da su srednje vrednosti duž ansambla jednake srednjim vrednostima duž vremena. Na osnovu uzoraka može da se odredi srednja kvadratna vrednost Gausovog šuma. Varijansa Gausovog šuma može da se dobije tako što se uzorci termičkog šuma kvadriraju, sabiraju, a zatim se tako dobijeni zbir podeli brojem uzoraka, na osnovu čega može da se formira Gausova raspodela.

Termički šum može da se opiše i u dve tačke, pomoću združene gustine verovatnoće za dve slučajne promenljive koja ima dva parametra. Jedan parametar je varijansa, a drugi je korelacioni koeficijent. Autokorelaciona funkcija je jednaka srednjoj vrednosti proizvoda dva uzorka termičkog šuma na određenom rastojanju [1],[17]-[19]. U n tačaka termički Gausov šum može biti opisan Gausovom združenom gustinom verovatnoće sa n slučajnih promenljivih. U ovom slučaju potrebno je odrediti korelacionu matricu (čiji elementi predstavljaju srednje vrednosti proizvoda dva uzorka na odgovarajućem rastojanju) kako bi se formirala ova raspodela.

Kod šumom ograničenih kanala snaga Gausovog šuma može biti značajno veća od snage interferenci, tako da se uticaj interferenci na performanse sistema može zanemariti. Uskopojasni Gausov šum dobija se na izlazu uskopojasnog filtra kada se na njegovom ulazu pojavljuje Gausov šum šireg spektra. Širina frekventnog opsega ovog šuma je desetostruko manja od njegove centralne učestanosti kod prenosnih sistema koji rade u transponovanom opsegu. Ovaj šum je osnovna smetnja koja degradira performanse sistema. Kod digitalnih telekomunikacionih sistema ukupan signal na izlazu na osnovu koga se vrši odlučivanje jednak je uskopojasnom Gausovom šumu [1],[20].

Propagacija signala u kanalima bežičnog prenosnog medijuma je vrlo složena pojava zbog činjenice da je izložena uticaju različitih tipova smetnji, od kojih su najznačajnije prostiranje signala po više putanja i efekat senke. Veliki broj komponenti signala se sabiraju u ekvivalentni uskopojasni signal koji ima ekvivalentnu anvelopu, fazu i učestanost. Dobijena ekvivalentna anvelopa je promenljiva i ova promena nivoa anvelope u vremenu predstavlja brzi fading. Signal se prostire po više putanja zbog refleksije, prelamanja, kašnjenja i rasipanja talasa. Ovako nastao fading se naziva brzi fading [21],[22]. Matematička karakterizacija ovih fenomena je često nemoguća ili je veoma kompleksne forme, stoga i analiza sistema sa ovog aspekta predstavlja kompleksan zadatak. Međutim, učinjeni su značajni napori kako bi se odredili što jednostavniji i precizniji statistički modeli za opisivanje različitih tipova propagacionih okruženja.

Tokom prenosa bežičnog signala, anvelopa i faza posmatranog signala tokom vremena fluktuiraju [2]. Varijacije faze, izazvane uticajem različitih smetnji, upotrebom različitih modulacionih formata (nekoherentni modulacioni formati), nemaju bitniji uticaj na karakteristike prijemnog signala jer se informacija o fazi signala tada ne uzima u obzir na prijemu. Postoje modulacioni formati (koherentni modulacioni formati), kod kojih je korisna

informacija smeštena u fazi signala, zbog čega varijacije faze signala prilikom prenosa mogu u velikoj meri degradirati kvalitet prijema ukoliko nisu primenjene specijalne prijemne tehnike.

Od prirode signala koji se prenosi i karakteristika kanala zavisi kakvom uticaju kanala će biti izložen prenošeni signal. Prva podela vrste fedinga je zasnovana na brzini promene impulsnog odziva kanala u odnosu na vreme trajanja simbola. Ukoliko je vreme trajanja simbola kraće od vremenskog intervala, tada se feding smatra sporim (dugotrajni feding ili efekat senke) [2]. Razni objekti između predajnika i prijemnika mogu dovesti do efekta senke. U suprotnom slučaju se radi o brzom fedingu (“višeputajni feding – feding po više deonica”) koji nastaje usled prostiranja signala po više putanja. Druga podela je na frekventno ne-selektivne (ravne) i frekvencijski selektivne feding kanale [2].

U nelinearnim sredinama feding se može opisati sa α - μ raspodelom. Ova raspodela se karakteriše preko dva parametra: α i μ . Parametar α zavisi od stepena nelinearnosti sistema. Za veće vrednosti α uticaj fedinga je manje oštar, a za manje vrednosti parametra α uticaj fedinga je oštiji. Parametar μ je povezan sa brojem klastera u propagacionoj okolini. Kada parametar μ raste, oštrina uticaja fedinga opada. Kada parametar μ opada, oštrina uticaja fedinga raste. Iz α - μ raspodele mogu biti izvedene neke druge raspodele kao specijalni slučajevi. Kada je parametar $\alpha=2$, iz α - μ raspodele se dobija Nakagami- m raspodela, a za $\mu=1$, α - μ raspodela postaje Veibulova raspodela. Kada je $\mu=1$ i $\alpha=2$, α - μ raspodela aproksimira Rejljevsku raspodelu [23]-[26]. α - μ raspodela može opisati varijaciju anvelope signala u sredinama koje su nelinearne i postoji više klastera u propagacionom kanalu i nema optičke vidljivosti između predajnika i prijemnika. Gustina verovatnoće α - μ raspodele se dobija transformacijom Nakagami- m gustine verovatnoće.

Za prikaz promene snage amplitude usled uticaja sporog fedinga koristi se Gama raspodela i log-normalna raspodela. Prema teorijskim i eksperimentalnim rezultatima log-normalna raspodela takođe opisuje uticaj sporog fedinga na performanse telekomunikacionih sistema. Međutim, i Gama raspodela tačno aproksimira log-normalnu raspodelu. U mobilnim radio-komunikacionim sistemima uticaj sporog fedinga na performasne sistema je veoma značajan. Kod ovih sistema je istovremeno prisutan spori feding i brzi feding [27]-[31].

k - μ raspodela može biti upotrebljena da opiše promenu anvelope signala u feding sredinama gde postoji više klastera, postoje dominantne komponente i sredina je linearna,

odnosno, važi centralna granična teorema. Ova raspodela ima dva parametra. Parametar k je Rajsov faktor, a parametar μ je povezan sa brojem klastera u propagacionoj okolini. Kada parametar μ opada, oštrina uticaja fedinga raste, a kada parametar μ raste, oštrina uticaja fedinga opada. Kada oštrina uticaja fedinga raste performanse sistema se pogoršavaju [32]-[35]. k - μ raspodela je generalna raspodela. Rajsova, Rejljeva i Nakagami- m raspodela mogu se dobiti iz k - μ raspodele kao specijalni slučajevi. Za $k=0$, k - μ raspodela prelazi u Nakagami- m raspodelu, a za $\mu=1$, k - μ raspodela prelazi u Rajsovu raspodelu. Za $k=0$ i $\mu=1$, k - μ raspodela aproksimira Rejljevu raspodelu [36].

η - μ raspodela može opisati varijaciju anvelope signala u linearnim sredinama, bez dominantne komponente sa više klastera i različitim snagama komponente u fazi i kvadraturi. Parametar η izražava odnos snage komponente u fazi i snage komponente u kvadraturi. Kada je $\eta=1$, η - μ raspodela prelazi u Nakagami- m raspodelu, a za $\mu=1$, η - μ raspodela aproksimira Rejljevu raspodelu [37]-[39].

2.1 Brzi feding

Brzi feding (“višeputajni feding”) ili feding sa kraćim vremenom koherencije, odnosno, kod kojeg je koherentno vreme kanala manje od trajanja jednog simbola prenošenog signala, usled čega dolazi do frekvencijske disperzije koja može uticati na izobličenje primljenog signala.

Feding po više deonica se javlja usled prostiranja signala po atmosferi, prelamanja signala po jonosferi, kao i prelamanja signala od različitih objekata na propagacionom putu. Takve komponente istog signala sa nasumičnim vremenima kašnjenja se superponiraju u rezultujući signal na konstruktivan ili destruktivan način [40]. Višeputajni feding izaziva kratkotrajne varijacije nivoa signala, zbog čega se njegov uticaj na promenu anvelope rezultirajućeg signala statistički predstavlja pomoću različitih modela [2].

2.2 Nakagami- m raspodela

Nakagami- m raspodela ima veliku primenu pri opisivanju anvelope signala u fading kanalima, karakteriše je parametar m koji određuje oštrinu fadinga. Povećavanjem parametra m , opada oštrina fadinga. Za $m=1$, Nakagami- m kanal prelazi u Rejljev kanal. Kada je $m=0$, Nakagami- m kanal prelazi u Jednostrani Gausov kanal. Kada parametar m teži beskonačnosti, Nakagami- m kanal prelazi u kanal bez fadinga [1],[41]-[43].

Normalizovana funkcija gustine raspodele verovatnoće anvelope za Nakagami- m fading ima sledeći oblik [44]:

$$p_r(r) = \frac{2}{\Gamma(m)} \frac{m^m}{\Omega^m} r^{2m-1} \exp\left\{-m \frac{r^2}{\Omega}\right\}, \quad (2.1)$$

gde je $E(r^2)=1$, vrednost parametra m nije manja od $1/2$ i definisan je kao $m=1/\text{Var}(r^2)$, a $\Gamma(x)$ je Gama funkcija definisana kao $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Ako je $m=1/2$, Nakagami- m funkcija raspodele verovatnoće se svodi na Gausovu funkciju gustine raspodele verovatnoće [45]:

$$p(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}}, \quad (2.2)$$

za $m=1$, Nakagami- m funkcija gustine raspodele verovatnoće se svodi na Raileigh-ovu funkciju gustine raspodele verovatnoće [45]:

$$p(r) = 2r e^{-r^2}. \quad (2.3)$$

U cilju uspostavljanja veze između Rice-ove i Nakagami- m funkcije gustine raspodele verovatnoće potrebno je definisati Rice-ov faktor K . Rice-ove funkcije gustine raspodele verovatnoće je [45]:

$$p(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2+A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{Ar}{\sigma^2}\right). \quad (2.4)$$

Rajsov faktor K može se definisati kao odnos reflektovane i rasejane komponente $K = \frac{A^2}{2\sigma^2}$. Pošto je $E(r^2) = A^2 + 2\sigma^2 = 1$, sledi da je $A^2 = \frac{K}{K+1}$ i $\sigma^2 = \frac{1}{2(K+1)}$. Rajsova funkcija gustine raspodele ima sledeći oblik [45]:

$$p(r) = 2(K+1)re^{-(K+1)r^2-K} I_0\left(r\sqrt{4K(K+1)}\right). \quad (2.5)$$

Za $K=0$, Rice-ova funkcije gustine raspodele verovatnoće se svodi na Raileigh-ovu funkciju gustine raspodele verovatnoće. Nakagami- m i Rice-ova funkcija gustine raspodele su povezane pomoću relacije [45]:

$$K = \frac{\sqrt{m^2-1}}{m-\sqrt{m^2-m}} = \sqrt{m-1}(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}). \quad (2.6)$$

Veibull-ova raspodela se koristi za opisivanje anvelope signala u nelinearnoj sredini kada nema dominantne komponente [1],[46],[47]. Gustina verovatnoće Veibull-ove slučajne promenljive dobija se transformacionom metodom iz Raileigh-ove slučajne promenljive. Veibull-ova slučajna promenljiva se opisuje pomoću parametra α koji je u relaciji sa nelinearnošću okoline [1],[48]. Oštrina fedinga zavisi od parametra α ($\alpha \geq 0$). Kada parametar α opada raste oštrina Veibull-ovog fedinga, a kada parametar α raste oštrina Veibull-ovog fedinga opada [1],[49]:

$$p(r) = \frac{\alpha r^{\alpha-1}}{\Omega} e^{-\frac{r^\alpha}{\Omega}}, \quad (2.7)$$

gde $\Omega = E(r^\alpha)$ označava prosečnu snagu signala.

Anvelope signala može biti opisana i sa Nakagami- q raspodelom, koja može dobro opisati varijaciju anvelope signala u linearnim sredinama gde ne postoji optička vidljivost između predajnika i prijemnika i gde su snage komponenti u fazi i kvadraturi različite. Ova raspodela može se koristiti u sredinama sa jednim klasterom [1],[50]-[53].

2.3 α - k - μ model fedinga

Rezultantno homogeno difuzno polje, od slučajno raspoređenih klastera, često se posmatra prilikom modelovanja različitih raspodela fedinga kao što su: Nakgami- m , Ricean i Raileigh. Međutim, budući da su površine često prostorno korelisane onda ih karakterišu nelinearna okruženja. Na osnovu činjenice da rezultirajuća anvelopa signala predstavlja nelinearnu kombinaciju suma modula višeputajnih komponenti, predstavljena je α - k - μ raspodela [54]. Funkcija gustine verovatnoće (PDF) data je u zavisnosti od tri parametra α , k , i μ . U [54] objašnjeno je u kakvoj su vezi ovi parametri sa nelinearnom sredinom prostiranja, broj klastera u nelinearnom okruženju kao i odnos faznih kašnjenja talasa različitih klastera pri čemu su faze rasejanih talasa unutar svakog klastera slučajno raspodeljene.

α - k - μ model feding predstavlja generalni model koji unutar sebe uključuje ostale poznate raspodele kao što su Raileigh, Rice, Nakgami- m , Weibull, k - μ , α - μ i Jednostranu Gausovu raspodelu. k - μ feding model može se dobiti iz α - k - μ feding modela kada se parametru α , iz α - k - μ raspodele, dodeli vrednost $\alpha = 2$. α - μ feding model takođe može biti dobijen iz α - k - μ raspodele kada se parametru k , iz α - k - μ raspodele, dodeli vrednost $k=0$. Dalje, Nakgami- m feding model može se dobiti kada se parametru α , iz α - μ raspodele, dodeli vrednost $\alpha = 2$. Takođe, Ricean feding model može se dobiti kada se parametru μ , iz k - μ raspodele, dodeli vrednost $\mu = 1$. Feding modeli kao što su Weibull, Raileigh i Jednostrana Gausova raspodela takođe predstavljaju specijalne slučajeve i mogu se izvesti iz izraza za Nakgami- m raspodelu [3].

α - k - μ slučajna promenljiva x ima sledeću vrednost:

$$x = r^{\frac{2}{\alpha}}, \quad x^{\alpha} = r^2, \quad y = r^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (2.8)$$

gde je slučajna promenljiva $r = \kappa$ - μ .

Kvadrirana κ - μ slučajna promenljiva r^2 može biti zapisana kao suma 2μ nezavisnih Gausovih slučajnih promenljivih sa istom varijansom:

$$x^{\alpha} = r^2 = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{2\mu}^2. \quad (2.9)$$

Prvi izvod α - k - μ slučajne promenljive ima sledeći oblik:

$$\dot{r} = \frac{2}{\alpha x^{\alpha-1}} (r_1 \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2 + \dots + r_{2\mu} \dot{r}_{2\mu}), \quad (2.10)$$

gde su $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_{2\mu}$ nezavisne Gausove slučajne promenljive. Linearna transformacija Gausove slučajne promenljive je Gausova slučajna promenljiva, stoga, prvi izvod α - k - μ slučajne promenljive prati uslovnu Gausovu raspodelu. Srednja vrednost za x je [55]:

$$\bar{\dot{x}} = \frac{2}{\alpha x^{\alpha-1}} (r_1 \dot{r}_1 + r_2 \dot{r}_2 + \dots + r_{2\mu} \dot{r}_{2\mu}) = 0, \quad (2.11)$$

gde je $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \dots = \dot{y}_{2\mu} = 0$.

Varijansa za x je [55]:

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{4}{\alpha^2 x^{2\alpha-2}} (r_1^2 \sigma_{\dot{r}_1}^2 + r_2^2 \sigma_{\dot{r}_2}^2 + \dots + r_{2\mu}^2 \sigma_{\dot{r}_{2\mu}}^2), \quad (2.12)$$

gde je:

$$\sigma_{\dot{r}_1}^2 = \sigma_{\dot{r}_2}^2 = \dots = \sigma_{\dot{r}_{2\mu}}^2 = \pi^2 f_m^2 \frac{\Omega}{(k+1)\mu}. \quad (2.13)$$

Nakon zamene (2.13) u (2.12), izraz za varijansu prvog izvoda α - k - μ slučajne promenljive postaje:

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{4\pi^2 f_m^2}{\alpha^2 x^{\alpha-2}} \frac{\Omega}{(k+1)\mu}. \quad (2.14)$$

Združena funkcija gustine verovatnoće α - k - μ slučajne promenljive i prvi izvod α - k - μ slučajne promenljive je:

$$p_{x\dot{x}}(x\dot{x}) = p_{\dot{x}}\left(\frac{\dot{x}}{x}\right) p_x(x), \quad (2.15)$$

gde $p_x(x)$ predstavlja funkciju gustine verovatnoće α - k - μ slučajne promenljive. Funkcija gustine verovatnoće α - k - μ slučajne promenljive je:

$$p_x(x) = \left| \frac{dr}{dx} \right| p_r\left(x^{\frac{\alpha}{2}}\right), \quad (2.16)$$

gde je $\frac{dr}{dx} = \frac{\alpha}{2} x^{\frac{\alpha}{2}-1}$.

Neka je primljena amplituda nosećeg signala modulirana pomoću signala izloženog uticaju fedinga, čija je amplituda r , gde r predstavlja slučajni process sa srednjom vrednošću Ω i funkcijom gustine verovatnoće (PDF), $f_R(r)$, koja zavisi od propagacionog okruženja. Posle prolaska kroz kanal sa fedingom signal je zašumljen na prijemu usled uticaja aditivnog belog Gausovog šuma (AWGN), za koji se pretpostavlja da je nezavistan od uticaja fedinga na amplitudu signala. Gausov šum se karakteriše pomoću jednostrane spektralne gustine snage N_0 (W/Hz) [2] [4]. Tada se trenutna vrednost odnosa signal-šum (SNR) po simbolu definiše kao $x = r^2 E_s/N_0$ dok se srednja vrednost SNR po simbolu definiše kao $\beta = \Omega E_s/N_0$, gde E_s predstavlja vrednost snage po simbolu [2],[4]. Kako na osnovu prethodnog važi da je $x = r^2 \beta / \Omega$, PDF za x se dobija smenom promenljivih u izraz za PDF amplitude signala izloženog uticaju fedinga [2].

$$f_X(x) = f_R\left(\sqrt{x\frac{\Omega}{\beta}}\right) |J|; \quad |J| = \frac{dr}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x\frac{\beta}{\Omega}}}. \quad (2.17)$$

Funkcija gustine verovatnoće α - k - μ slučajne promenljive r je [3],[54]:

$$f_R(R) = \frac{\alpha k^{\frac{1-\mu}{2}} (1+k)^{\frac{1+\mu}{2}} \mu R^{\frac{\alpha(1+\mu)}{2}-1}}{e^{k\mu\Omega^{\frac{\mu+1}{2}}}} e^{-\frac{\mu(k+1)R^\alpha}{\Omega}} I_{\mu-1}\left(2\mu\sqrt{k(k+1)\frac{R^\alpha}{\Omega}}\right), \quad (2.18)$$

gde $\Omega = E[R^\alpha]$ predstavlja prosečnu snagu signala, $I_n(x)$ predstavlja n -ti red modifikovane Beselove funkcije na osnovu (8.406) iz [45]. α - k - μ raspodela ima tri parametra, parametar α se odnosi na nelinearnost sredine, k je Rice-ov faktor definisan kao odnos snaga dominantne komponente i komponente rasejanja, μ predstavlja broj klastera u okruženju prostiranja [54].

Međukanalna interferencija je jedna od osnovnih smetnji koje se pojavljuju kod bežičnih telekomunikacionih sistema. Može se definisati kao slučajni talas koji radi na istoj nosećoj učestanosti kao željeni korisni signal, signali koji su na istoj učestanosti na različitim lokacijama interferiraju [57]-[59]. U nekim slučajevima međukanalna interferencija može da bude dominantna smetnja. Kada je snaga šuma znatno manja od snage međukanalne interferencije, uticaj Gausovog termičkog šuma na performanse sistema se može zanemariti. Ovakvi kanali se nazivaju interferencijom ograničeni kanali. Kada je snaga šuma znatno veća od snage međukanalne interferencije uticaj međukanalne interferencije na performanse sistema se može zanemariti. Ovi kanali se nazivaju "šumom ograničeni kanali".

Povećanjem broja ćelija povećava se kapacitet kanala a smanjuje se rastojanje između ćelija usled čega se povećava uticaj međukanalne interferencije. U ovom slučaju se traži kompromis između kapaciteta kanala i kvaliteta prenosa. Međukanalna interferencija može da se predstavi kao slučajni talas sa promenljivom anvelopom i uniformno raspoređenom fazom [60]-[62]. Kao i u slučaju korisnog signala, međukanalna interferencija može da bude istovremeno izložena uticaju brzog fedinga (na anvelopu signala) i sporog fedinga (na snagu interferencije).

U savremenim sistemima bežičnih komunikacija tendencija je sačuvati raspoloživi spektar. Čuvanje dostupnog spektra, koje je nastalo kao tendencija modernih komunikacionih bežičnih mreža, često se dobija ponovnom upotrebom dodeljene frekvencije kanala iz geografski bliskih oblasti. Međutim, rastojanje za ponovnu upotrebu kanala je ograničeno nivoom CCI, interferentnog signala sa istom nosećom frekvencijom kao i željenog informacionog signala pošto imamo dva ili više signala sa različitih lokacija koje funkcionišu na istoj nosećoj frekvenciji. Ovde je analizirano kako CCI utiče na kriterijume performansi bežičnih sistema u funkciji trenutnog i prosečnog odnosa signal-interferencija (SIR). Analiza performansi zasnovanog na SIR-u je vrlo efikasan kriterijum performansi, pošto je SIR u realnom vremenu merljiv u baznoj i mobilnoj stanici. Pošto se posmatra sistem pod uticajem interferencije uticaj belog Gausovog šuma će biti zanemaren.

Željeni informacioni signal sa α - k - μ slučajnom promenljivom može biti predstavljen kao [54]:

$$f_R(R) = \frac{\alpha \mu_d k_d^{\frac{1-\mu_d}{2}} (1+k_d)^{\frac{1+\mu_d}{2}} R^{\frac{\alpha(1+\mu_d)}{2}-1} e^{-\frac{\mu_d(k_d+1)R^\alpha}{\Omega_d}}}{e^{k_d \mu_d} \Omega_d^{\frac{\mu_d+1}{2}}} \times I_{(\mu_d-1)} \left(2\mu_d \sqrt{k_d(k_d+1)\mu_d} \frac{R^\alpha}{\Omega_d} \right), \quad (2.19)$$

gde $\Omega_d = E[R^\alpha]$ predstavlja prosečnu željenu snagu signala, $I_n(x)$ predstavlja n -ti red modifikovane Beselove funkcije na osnovu (8.406) iz [45].

Na sličan način rezultujući interferentni signal može biti predstavljen kao:

$$f_r(r) = \frac{\alpha \mu_c k_c^{\frac{1-\mu_c}{2}} (1+k_c)^{\frac{1+\mu_c}{2}} R^{\frac{\alpha(1+\mu_c)}{2}-1} e^{-\frac{\mu_c(k_c+1)r^\alpha}{\Omega_c}}}{e^{k_c \mu_c} \Omega_c^{\frac{\mu_c+1}{2}}} \times I_{(\mu_c-1)} \left(2\mu_c \sqrt{k_c(k_c+1)} \mu_c \frac{r^\alpha}{\Omega_c} \right), \quad (2.20)$$

gde $\Omega_c = E[r^\alpha]$, predstavlja prosečnu snagu CCI signala.

Neka je trenutna vrednost za SIR, λ , definisana kao $\lambda=R^2/r^2$, dok je trenutna vrednost za SIR, S , definisana kao $S=\Omega_d/\Omega_c$, zatim koristeći relaciju [63]:

$$f_\lambda(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty f_R(r\sqrt{\lambda}) f_r(r) dr, \quad (2.21)$$

nakon predstavljanja modifikovnih Beselovih funkcija iz (2.19) i (2.20), pomoću beskonačnih suma na osnovu (8.445) iz [56] integral iz (2.21) može se lako rešiti pomoću (8.310) iz [56], tako da PDF za trenutni SIR može biti predstavljen u sledećem obliku:

$$f_\lambda(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha \mu_d^{(\mu_d+2p)} \mu_c^{(\mu_c+2j)} k_d^p k_c^j S^{(\mu_c+j)}}{2e^{(\mu_d k_d + \mu_c k_c)}} \times \frac{(k_d+1)^{(\mu_d+p)} (k_c+1)^{(\mu_c+j)} \Gamma(\mu_d + \mu_c + p + j)}{\Gamma(\mu_d + p) \Gamma(\mu_c + j) p! j!} \times \frac{\lambda^{\frac{\alpha(\mu_d+p)}{2}-1}}{\left(\mu_d (k_d+1) \alpha^{\frac{\alpha}{2}} + \mu_c (k_c+1) S \right)^{\mu_d + \mu_c + p + j}}. \quad (2.22)$$

Na osnovu (2.22), koristeći dobro poznatu definiciju Beta funkcije (A.7) iz [26] i prateći matematičke transformacije iz [26], predhodni integral se lako može rešiti. Izraz u zatvorenom obliku za kumulativnu funkciju gustine raspodele CDF, za trenutni SIR može se predstaviti kao:

$$\begin{aligned}
F_\lambda(\lambda) &= \int_0^\infty f_\lambda(t) dt \\
&= \sum_{j=0}^\infty \sum_{p=0}^\infty \frac{\mu_d^p \mu_c^j k_d^p k_c^j \Gamma(\mu_d + \mu_c + p + j)}{e^{(\mu_d k_d + \mu_c k_c)}} \\
&\quad \times \frac{B(\mu_d + j, \mu_c + p, C_1(\lambda))}{\Gamma(\mu_d + p) \Gamma(\mu_c + j) p! j!}; \quad (2.23) \\
C_1(\lambda) &= \frac{\mu_d (k_d + 1) \alpha^{\frac{\alpha}{2}}}{\left(\mu_d (k_d + 1) \alpha^{\frac{\alpha}{2}} + \mu_c (k_c + 1) S \right)}
\end{aligned}$$

gde $B(a,b,z)$ predstavlja nepotpunu Beta funkciju (8.391) iz [45].

2.4 Diverziti tehnika prijema

Diverziti kombinovanje predstavlja koncept za unapređenje performansi sistema na prijemu, koji se realizuje kombinovanjem dve ili više replika informacionog signala. Glavnu ideju predstavlja korišćenje činjenice, da postoji izuzetno mala verovatnoća da će doći do javljanja dubokog uticaja smetnje na sve replike istog signala. Dobijanje višestrukih replika istog informacionog signala se može ostvariti na više načina. Između ostalog neki od njih su: kanalno kodovanje u kombinaciji sa interlivingom-*tehnika vremenskog diverzitija*; prenošenje istog uskopojasnog signala na različitim nosećim frekvencijama, sa nosiocima međusobno udaljenim za iznos koherentnog propusnog opseg datog kanala - *tehnika frekvencijskog diverzitija (diverziti puteva*, npr. frekvencijski preskoci kod GSM, multicarrier sistemi sa više nosioca, sistemi proširenog spektra...); upotrebom po dve predajne/dve prijemne antene, sa različitim polarizacijama- *tehnika polarizacionog diverzitija* [2],[35],[64],[65]. Međutim, sve ove navedene tehnike imaju neka ograničenja u praktičnoj realizaciji u poređenju sa *tehnikom prostornog diverzitija* [4].

Kod ove tehnike, upotrebom višestrukih prijemnih antena (antenskog terminala) na diverziti terminalu, dolazi do pojave nezavisnih replika informacionog signala, bez povećanja emitovane snage signala i propusnog opsega. Za dobijanje visokog stepena primenljivosti prostornog diverziti sistema, neophodno je zadovoljenje dva kriterijuma. Prvi kriterijum je da

je pojava fedinga na pojedinačnim granama niske korelisanosti. Naime, kada se diverziti sistem primenjuje na terminalima malih dimenzija sa višestrukim antenama, dolazi do pojave korelisanosti između antena. Ako je nivo korelacije isuviše veliki, onda dolazi do istovremene pojave smetnji visokog nivoa na svim antenama terminala. Zbog toga rastojanje između antena bi trebalo biti takvo da garantuje pojavu nezavisne amplitude signala. Drugi kriterijum je da srednje snage signala na pojedinim granama trebaju biti skoro jednake. Ako se između prijemnih grana javi mala korelacija, ali su signali na njima različitih srednjih snaga, onda u tom slučaju, grana sa manjom srednjom snagom primljenog signala, može postati neupotrebljiva sa aspekta kombinovanja signala, čak i ako je izložena manjem uticaju fedinga. Postoje različite metode kombinovanja i izdvajanja korisnog signala od kojih su najznačajnije: kombinovanje sa maksimalnim odnosom (MRC - Maximal Ratio Combining), kombinovanje sa istom težinom (EGC - Equal Gain Combining), selektivno kombinovanje (SC - Selection Combining) i SSC (Switch-and-Stay Combining) [2],[4].

Prilikom projektovanja bežičnih sistema, kako bi se obezbedili zahtevani nivoi kvaliteta na prijemu, defenisani na osnovu standarda QoS i GoS, potrebno je uzeti u obzir razna prenosna ograničenja, razmotriti razne varijante kombinacija primenjenih modulacija/kodovanja/diverziti prijema, pa tek onda na osnovu precizne kvantitativne evaluacije mera performansi svih mogućih kombinacija odrediti najbolju od njih.

2.5 Srednja vrednost odnosa signal-šum

Veoma značajan parameter, koji služi za određivanje i opisivanje osetljivosti prijema posmatranog komunikacionog sistema je odnos signal-šum (SNR - signal-to-noise ratio). Međutim, šum u komunikacionom kanalu najčešće ne predstavlja najznačajniju smetnju. Kada se razmatra sistem izložen uticaju fedinga, modelovanog određenim statističkim modelom, prikladniju meru za opisivanje osetljivosti prijemnika predstavlja srednja vrednost SNR, koja se dobija statističkim usrednjavanjem odnosa SNR u odnosu na PDF datog procesa [4]. Ova mera se može odrediti na osnovu:

$$\bar{x} = \int_0^{\infty} x f_x(x) dx, \quad (2.24)$$

gde $f_x(x)$ predstavlja PDF od x , trenutne vrednosti odnosa SNR opisanog procesa [1] [2]. Ukoliko je funkcija generatriše momenata (MGF) trenutne vrednosti SNR unapred poznata, srednja vrednost odnosa SNR se može odrediti pomoću [1],[2]:

$$\bar{x} = \left. \frac{\partial M_x(s)}{\partial s} \right|_{s=0}. \quad (2.25)$$

Često se koristi ovaj pristup za određivanje srednjeg SNR-a na izlazu prijelnika, kada je primenjena tehnika prijema primenom prostornog kombinovanja signala sa više nekorelisanih prijelnih grana koja se naziva kombinovanje sa maksimalnim odnosom (MRC, Maximal-Ratio Combining). Naime u takvim slučajevima odnos SNR na izlazu prijelnika predstavlja sumu odnosa SNR-a pojedinačnih kanala, x_i , odnosno:

$$x = \sum_{i=1}^N x_i, \quad (2.26)$$

gde N predstavlja broj kanala grana višeantenskog sistema čiji se signali kombinuju [1],[2]. Pošto je predpostavljeno da su kanali međusobno nekorelisani, u tom slučaju se rezultirajuća MGF određuje kao proizvod MGF-a pojedinačnih kanala, $M_{x_i}(s)$, odnosno:

$$M_x(s) = \prod_{i=1}^N M_{x_i}(s). \quad (2.27)$$

Ovo svojstvo pojednostavljuje izračunavanje srednje vrednosti SNR, diferenciranjem predhodnog izraza po promenljivoj s , umesto komplikovanog postupka određivanja združene funkcije gustine verovatnoće (JPDF) SNR-a, konvolucijom funkcija gustina verovatnoća pojedinačnih SNR-a [2].

2.6 Verovatnoća otkaza

Verovatnoća otkaza (OP - Outage Probability, P_{out}) je sledeća standardna mera performansi diverziti prijema u feding okruženju. Određivanje ove mere je od krucijalnog značaja prilikom dizajniranja parametara bežičnih komunikacionih sistema, u cilju zadovoljenja zahteva, koji su definisani standardima QoS (Quality of Service) i GoS (Grade of Service). Definiše se u odnosu na statistiku signala na prijemu, kao verovatnoća da vrednost SNR-a na prijemu, x , bude ispod vrednosti unapred definisanog praga prekida, x_{th} ,

alternativno nazvanog i nivo zaštite, koji zavisi od primenjene modulacione tehnike i očekivanih QoS [1],[2].

$$P_0 = P(\lambda < \lambda_{th}) = F_\lambda(\lambda_{th}). \quad (2.28)$$

Ako je unapred poznata CDF za x onda se OP može izračunati an osnovu:

$$P_{out} = \int_0^{x_{th}} f_x(t) dt = F_x(x_{th}). \quad (2.29)$$

Ukoliko je poznat izraz za MGF, na osnovu veze između MGF i PDF, jasno je da se OP takođe može odrediti primenom Laplasove transformacije odnosa $M_x(-s)/s$ za zadatu vrednost $x = x_{th}$, odnosno:

$$P_{out} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{M_x(-s)}{s} \exp(sx_{th}) ds; \quad (2.30)$$

gde se σ uzima iz oblasti konvergencije integrala u kompleksnoj s ravni [1],[2].

U sistemima u kojima je interferencija dominantna smetnja, OP se definiše kao verovatnoća da vrednost posmatranog odnosa signal-interferencija (SIR) na prijemu padne ispod određene granične vrednosti praga γ_{th} .

Na osnovu vrednosti OP se mogu odrediti i oblast pokrivanja celularnog sistema kao i minimalna distanca između dve bazne stanice za koju je moguća ponovna upotrebe frekventnog područja [59]. Minimalna distanca ponovne upotrebe frekventnog područja se takođe naziva i redukcioni faktor ko-kanalne interferencije, i nalazi svoju primenu u spektralnoj analizi sistema [66] kao i prilikom definisanja obrasca na osnovu koga će se odabirati frekventna područja za ponovno korišćenje. Oblast pokrivanja celularnog sistema predstavlja oblast u kojoj je zagarantovano da OP uzima manje vrednosti od definisane granične vrednosti praga.

2.7 Srednja verovatnoća greške po bitu

Mera performansi, koja na najbolji način opisuje prirodu ponašanja bežičnog komunikacionog sistema je srednja verovatnoća greške po simbolu (Average symbol error

probability, ASEP). Ako je broj bita koji se koristi za kodovanje pojedinačnog simbola pri njegovom prenosu jednak broju 2, onda je ova mera performansi ekvivalentna srednjoj verovatnoći greške po bitu (Average bit error probability, ABEP, average bit error rate, ABER). U suprotnom, ukoliko želimo da odredimo vrednosti ABER, potrebno je energiju po simbolu prenosa pretvoriti u odgovarajuću energiju po bitu prenosa. ASEP vrednosti se dobijaju na osnovu relacija koje definišu uslovne verovatnoće greške po simbolu (SEP), koje se posmatraju u zavisnosti od feding okruženja u kome se odvija komunikacija. Naime, ako se uslovna SEP označi sa $P_s(e|x)$, onda se usrednjavanjem po odnosu SNR, ASEP određuje na osnovu [1],[2]:

$$\bar{P}_e = \int_0^{\infty} P_s(e|x) f_x(x) dx; \quad (2.31)$$

Uslovne SEP predstavljaju funkcije trenutnih vrednosti SNR-a, a funkcionalna zavisnost je određena tipom modulacionog formata kojim se vrši prenos. Vrednosti SEP za nekoliko najpoznatijih modulacionih formata [66] su prikazane u Tabeli 2.1, Tabeli 2.2 i Tabeli 2.3, gde $erfc(x)$ predstavlja komplementarnu funkciju greške.

Tabela 2.1. Vrednosti SEP za koherentne i nekoherentne binarne signale.

| Modulacioni formati | Uslovna SEP $P_s(e x)$ |
|--|------------------------------------|
| Koherentna digitalna fazna modulacija - Coherent Phase Shift Keying (CPSK) | $0.5erfc\sqrt{x}$ |
| Koherentna detekcija zasnovana na diferencijalnoj faznoj modulaciji - Coherent detection of differentially encoded (PSK) | $erfc\sqrt{x} - 0.5erfc^2\sqrt{x}$ |
| Koherentna digitalna frekvencijska modulacija - Coherent Frequency Shift Keying (CFSK) | $0.5erfc\sqrt{x/2}$ |
| Diferencijalna digitalna fazna modulacija - Differentially Phase Shift Keying (DPSK) | $0.5 \exp(-x)$ |
| Nekoherentna digitalna frekvencijska modulacija - Noncoherent Frequency Shift Keying (NCFSK) | $0.5 \exp(-x/2)$ |

Tabela 2.2. Vrednosti SEP za kvadraturne signale.

| Modulacioni formati | Uslovna SEP $P_s(e x)$ |
|---|---|
| Kvadratura digitalna fazna modulacija - Quadrature Phase Shift Keying (QPSK) | $erfc\sqrt{x} - 0.25erfc^2\sqrt{x}$ |
| Minimalno kodovanje - Minimum Shift Keying (MSK) | $erfc\sqrt{x} - 0.25erfc^2\sqrt{x}$ |
| $\pi/4$ Diferencijalna kvaternarna digitalna fazna modulacija sa Gray-evim kodovanjem- $\pi/4$ Differential Quaternary PSK with Gray coding [67] | $\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\exp(-x(2 - \sqrt{2} \cos \theta))}{\sqrt{2} - \cos \theta} d\theta$ |

Tabela 2.3. Vrednosti SEP za signale sa više nivoa.

| Modulacioni formati | Uslovna SEP $P_s(e x)$ |
|---|--|
| Kvadratura amplituduska modulacija - Square Quadrature Amplitude Modulation (SQAM) | $2qerfc\sqrt{px} - q^2erfc^2\sqrt{px};$ $q = 1 - \frac{1}{\sqrt{M}}; p = 1.5 \log_2 \frac{M}{M-1};$ |
| Digitalna višefazna modulacija Multiple Phase Shift Keying (MPSK) | $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi-\pi/M} \exp\left(\frac{-x \sin^2(\pi/M) \log_2 M}{\sin \theta}\right) d\theta$ |
| M-arna diferencijalna digitalna fazna modulacija - M -ary Differential Phase-Shift Keying (MDPSK) [68] | $\frac{\sin(\pi/M)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\exp(-x \log_2 M [1 - \cos(\pi/M) \cos \theta])}{1 - \cos(\pi/M) \cos \theta} d\theta$ ili $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi-\pi/M} \exp\left(\frac{-x \sin^2(\pi/M) \log_2 M}{1 + \cos(\pi/M) \cos \theta}\right) d\theta$ |
| Dvodimenzionalna M-arna konstelcija - Two-dimensional M -ary constellations [69] | $\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N P_r(S_k) \int_0^{\eta_k} \exp\left(\frac{-x \alpha \sin^2(\psi_k)}{\sin^2(\theta + \psi_k)}\right) d\theta$ Gde je N broj signalnih tačkaka, a $P_r(S_k)$ je verovatnoća da se k -ta signalna tačka prenosi |

2.8 Količina fedinga

Mera performansi koja opisuje oštrinu uticaja fedinga u funkciji prvog i drugog centralnog momenta odnosa SNR-a, naziva se količina fedinga (AoF - amount of fading) [69]. Ova mera performansi se analitički lako određuje. Takođe, može poslužiti za opisivanje diverziteti kombinovanja na prijemu [70]. Upotrebom ove mere može biti pokazano da primena diverziteti kombinovanja na prijemu dovodi do smanjivanja relativne varijanse primljene anvelope, bez povećanja emitovane snage.

$$AoF = \frac{E(\lambda^2)}{E(\lambda)^2} - 1. \quad (2.32)$$

Ako je trenutna vrednost odnosa SNR na prijemu označena sa x , onda se AoF može odrediti na osnovu:

$$AoF = \frac{Var(x)}{(E(x))^2} = \frac{E(x^2) - (E(x))^2}{(E(x))^2}, \quad (2.33)$$

gde $Var(X)$ i $E(X)$ označavaju operatore matematičkog očekivanja i varijanse. MGF zasnovan pristup za određivanje AoF temelji se na MGF funkciji od x , odnosno:

$$AoF = \frac{\left. \frac{\partial^2 M_x(s)}{\partial s^2} \right|_{s=0} - \left(\left. \frac{\partial M_x(s)}{\partial s} \right|_{s=0} \right)^2}{\left(\left. \frac{\partial M_x(s)}{\partial s} \right|_{s=0} \right)^2}; \quad (2.34)$$

AoF treba razmatrati kao meru performansi na prijemu celokupnog sistema, bez obzira na to da li su primenjivane tehnike prostornog diverzitetija na prijemu.

2.9 Srednji broj osnih preseka

Najvažnija statistička karakteristika drugog reda, na osnovu koje se zasniva standardna procena performansi bežičnih telekomunikacionih sistema, jeste srednji broj osnih preseka (LCR - Level Crossing Rate) procesa $R(t)$, u oznaci $N_r(R)$.

LCR predstavlja brzinu sa kojom signal preseca nivo r sa pozitivnim (ili negativnim) izvodom u tački preseka r . Definiše se pomoću sledeće formule:

$$N_r(R) = \int_0^{\infty} \dot{R} p_{\dot{R}R}(\dot{R}, R) d\dot{R} \quad (2.35)$$

gde r predstavlja anvelopu primljenog signala [1],[2].

2.10 Srednje trajanje fedinga

Srednje trajanje fedinga (AFD - Average Fade Duration) predstavlja srednje vreme tokom koga je nivo signala fedinga ispod zadanog nivoa r .

AFD se može odrediti kao odnos verovatnoće da je nivo signala fedinga manji od zadate vrednosti nivoa r i učestanosti preseka tog istog nivoa, odnosno definiše se kao odnos kumulativne funkcije raspodele anvelope i srednjeg broja osnih preseka za isti nivo [1],[2]:

$$T_r(R) = \frac{F_R(R \leq r)}{N_r(R)} \quad (2.36)$$

3. SREDNJA VEROVATNOĆA GREŠKE PO BITU PRIMENOM *SPLINE* APROKSIMACIJE

Primenom aproksimacije za srednju verovatnoću greške po bitu (ABER), procenjene su standardne mere performansi za bežični komunikacioni sistem za kanal sa fadingom korišćenjem linearne *spline* funkcije za $L = 2$, $L = 4$ i $L = 8$ segmenata. Dalje su analizirana moguća poboljšanja dobijena primenom kompozitne deo po deo (kombinacijom linearnih i kvadratne) *spline* funkcije. Generalizovani slučaj višestrukog slabljenja koje se javlja prilikom prostiranja modelovan je pomoću α - κ - μ raspodele. Pokazano je da aproksimacija pruža visok nivo preciznosti u širokom spektru ulaznih vrednosti, tako da ovaj model može biti primenjen za predviđanje mera performansi za različite bežične usluge sa visokom preciznošću.

Jedan od najvažnijih kriterijuma performansi bežičnog prenosa na prijemu koji se odnosi na različite QoS (quality-of-service) servise jeste ABER. Međutim, analitičko izvođenje izraza u zatvorenom obliku je često veoma težak zadatak, a u nekim slučajevima nekoherentne modulacije čak i nemoguće. Naime, ABER na prijemu za nokoherentni binarni signal je dobijen pomoću uslovne verovatnoće greške preko funkcije gustine verovatnoće (PDF) anvelope bežičnog signala na prijemu, uzimajući u obzir parametre koji se odnose na vrstu modulacionog formata koji se koristi za prenos.

Da bi se smanjila kompleksnost proračuna potrebno je što preciznije implementirati aproksimaciju i predvideti vrednosti za ABER. Najveća prednost *spline* aproksimacije je njena osobina da menja posmatrane podatke u određenom opsegu u smislu aproksimacije istog opsega.

Spline funkcija se na taj način sastoji od polinomnih podintervalnih segmenata spojenih u jednu celinu uz određene uslove neprekidnosti, i uslove polinomne interpolacije. Pošto izraz za ABER zavisi od funkcije gustine raspodele (PDF) primljenog slučajnog signala, biće aproksimirana PDF funkcija primljenog signala pomoću funkcije linearnog *spline*-a sa opsegom podeljenim na $L = 2$, $L = 4$ i $L = 8$ segmenata, respektivno [5]. Biće pokazano da performanse dobijene pomoću predložene aproksimacije približno opisuju performanse na prijemu dobijene kompleksnim numeričkim izračunavanjem.

Analizirana su i moguća poboljšanja aproksimacije dobijena primenom kompozitne deo po deo (kombinacija linearnih i kvadratne) *spline* funkcije. Na osnovu dobijenih *spline* aproksimacija za ABER, proces projektovanja bežičnog komunikacionog sistema može biti obavljen za posmatrane nehomogene, nelinearne opšte uslove prostiranja. Aproksimacijom dobijeni rezultati ukazuju na mogućnost iskorišćavanja predstavljene aproksimacije u različitim procesima projektovanja bežičnih komunikacionih sistema.

3.1 Model *spline* aproksimacije

Različiti fading kanali pretpostavljaju rezultatnu homogenu oblast u kojoj dolazi do rasejanja signala od različitih objekata. Međutim, površine od kojih dolazi do rasejanja su uglavnom prostorno povezane i predstavljaju nelinearno okruženje. Imajući u vidu činjenicu da rezultujuća anvelopa signala može biti nelinearna funkcija prostiranja komponenti po više putanja, nova generalna α - κ - μ raspodela fading kanala je skorije predstavljena. Izraz za funkciju gustine verovatnoće slučajnog procesa dat je sa (2.18).

Spline funkcija se sastoji od spojenih polinomijalnih segmenata uz određene uslove neprekidnosti. Jednostavan primer je poligonalna funkcija (*spline* funkcija prvog reda), čiji su delovi linearni polinomi spojeni tako da čine kontinuitet. U teoriji *spline*-a, tačke x_0, x_1, \dots, x_L na kojima funkcija menja svoj karakter nazivaju se čvorovi [71]. Takva funkcija izgleda komplikovano kada je određena u eksplicitnom izrazu. Shodno tome, sledeća definicija se smatra linearno polinomijalnom $S(x)$ [71]:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ S_1(x), & x \in [x_1, x_2], \\ \vdots \\ S_{L-1}(x), & x \in [x_{L-1}, x_L], \end{cases} \quad (3.1)$$

gde je

$$S_i(x) = a_i(x) + b_i. \quad (3.2)$$

$S(x)$ predstavlja deo po deo linearnu *spline* funkciju. Za date čvorove x_0, x_1, \dots, x_L i koeficijente $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{L-1}, b_{L-1}$, izračunavanje $S(x)$ u određenim tačkama vrši se prvo određivanjem intervala nad kojim je potrebno izvršiti aproksimaciju, a zatim koristeći odgovarajuće linearne *spline* funkcije za određeni interval. Ako je $S(x)$ funkcija definisana jednačinom (3.1) neprekidna, ona predstavlja *spline* funkciju prvog reda. Odlikuje se sa sledeća tri svojstva [71]:

Definicija 1. Funkcija $S(x)$ se naziva *spline* funkcijom prvog reda:

1. Ako je domen $S(x)$ na intervalu $[a, b]$;
2. Ako je $S(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$;
3. Postoji podela intervala $a = x_0 < x_1 < \dots < x_L = b$ takava da je $S(x)$ linearni polinom na svakom podintervalu $[x_i, x_{i+1}]$.

Van intervala $[a, b]$, $S(x)$ se obično definiše kao ista funkcija levo od a kao što je to krajnje levi podinterval $[x_0, x_1]$ i ista funkcija na desnoj strani od b kao što je to krajnje desni podinterval $[x_{L-1}, x_L]$ [71]. Odnosno, $S(x) = S_0(x)$ kada je $x < a$ i $S(x) = S_{L-1}(x)$ kada je $x > b$. *Spline* prvog reda, takođe se naziva i poligonalna funkcija, koja se sastoji od linijskih segmenata koji su povezani tako da je data funkcija neprekidna. Tačke u kojima funkcija menja svoj oblik nazivaju se čvorovima [71].

Aproksimaciona funkcija $p(r)$ kojom se aproksimira PDF definisana pomoću (2.18) za broj segmenata L , ima sledeći oblik:

$$p(r) = \begin{cases} f(r_1) + m_1(r - r_1), & r \in [0, r_1], \\ f(r_i) + m_i(r - r_i), & r \in [r_{i-1}, r_i], \quad i = 2, \dots, L, \end{cases} \quad (3.3)$$

gde je koeficijent pravca prave m_i zadat kao:

$$m_i = \frac{f(r_i) - f(r_{i-1})}{r_i - r_{i-1}}, \quad (3.4)$$

gde je $i=1, \dots, L$.

Definicija 2. Funkcija Q naziva se *spline* funkcijom drugog reda:

1. Ako je domen Q na intervalu $[a, b]$;
2. Q i Q' su neprekidne na intervalu $[a, b]$;
3. Postoje tačke t_i (čvorovi) tako da je $a=t_0 < t_1 < \dots < t_n=b$ i Q je polinom drugog stepena na najviše dva podintervala $[t_i, t_{i+1}]$ [7].

Shodno tome, sledeća definicija je kvadratni polinom $Q(x)$ [7],[72]:

$$Q(x) = \begin{cases} Q_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ Q_1(x), & x \in [x_1, x_2], \\ \vdots \\ Q_{L-1}(x), & x \in [x_{L-1}, x_L], \end{cases} \quad (3.5)$$

gde je

$$Q_i(x) = c_{0i}x^2 + c_{1i}x + c_{2i}. \quad (3.6)$$

Kada se prenos vrši pomoću odgovarajućeg formata modulacije, ABER u posmatranom okruženju se može odrediti pomoću (2.31), sa uslovom za ABER, $P_{e|y}(e|y)$, u zavisnosti od toga koji se modulacioni format koristi. Naime, za nekoherentnu digitalnu faznu modulaciju NCFSK (Noncoherent Frequency Shift Keying) i BDPSK (Binary Differential Phase Shift Keying) $P_{e|y}(e|y) = 1/2 \exp(-gy)$, gde je $g=1/2$ i $g=1$, respektivno. Dok je za koherentne modulacione formate, odnosno CFSK (Coherent Frequency Shift Keying) i CPSK (Coherent Phase Shift Keying) $P_{e|y}(e|y) = 1/2 \operatorname{erfc}(\sqrt{g \cdot y})$, gde $\operatorname{erfc}(x)$ označava komplementarnu funkciju greške, $g=1/2$ i $g=1$, respektivno.

3.2 Aproksimacija α - κ - μ feding modela

Predstavljeni su rezultati dobijeni *spline* aproksimacijom α - κ - μ feding modela za funkciju gustine verovatnoće (PDF) za $L = 2$, $L = 4$ i $L = 8$ segmenata. *Spline* aproksimacija i

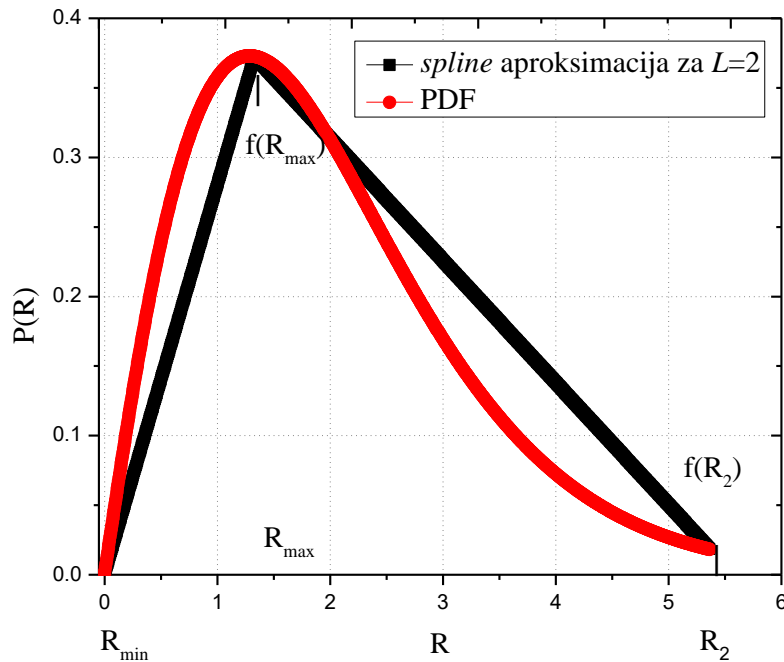
koeficijenti za $L = 2$ segmenta izračunati su prema jednačini (3.7) za posmatrani set parametara feding kanala i prikazani u Tabeli 3.1.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p(r)}{\partial r} \right|_{r=R_{\max}} &= 0; \quad R_{i+1} - R_i = \Delta, \quad i \in (0, L-1); \\ \Delta &= \frac{R_{\max} - R_{\min}}{L}; \quad L = 2; \\ f_1(r) &= \begin{cases} S_1(r) = a_1 R + b_1, & r \in [R_{\min}, R_{\max}] \\ S_2(r) = a_2 R + b_2, & r \in [R_{\max}, R_2] \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Tabela 3.1: Spline aproksimacija i koeficijenti za $L = 2$ segmenta.

| $\alpha=1, \kappa=1, \mu=2, \Omega=1$ | a_i | b_i |
|---------------------------------------|----------|---------|
| $(R_{\min}=0, R_{\max}=1.33)$ | 0.28015 | 0 |
| $(R_{\max}=1.33, R_2=5.367)$ | -0.08778 | 0.48935 |

Na Slici 3.1, predstavljena je *spline* aproksimacija za $L = 2$ segmenta iz Tabele 3.1. Sa Slike 3.1 može se videti da je vrednost relativne greške veoma velika.



Slika 3.1: Grafički prikaz spline aproksimacije za $L = 2$ segmenta.

Za sledeće vrednosti parametara feding kanala $\alpha=1, \kappa=1, \mu=2, \Omega=1$, relativna greška za ABER je izračunata prema:

$$P_{e_1} = \int_0^{\infty} p(r) \frac{1}{2} \exp(-gr) dr; \quad P_{e_2} = \int_0^{\infty} f_1(r) \frac{1}{2} \exp(-gr) dr$$

$$\left| \frac{P_{e_1} - P_{e_2}}{P_{e_1}} \right| = 0.1973 \quad (3.8)$$

Spline aproksimacija i koeficijenti za $L = 4$ segmenta izračunati su premoću (3.9) za posmatrani set parametara feding modela i prikazani u Tabeli 3.2.

$$\left. \frac{\partial p(r)}{\partial r} \right|_{r=R_{\max}} = 0; \quad R_{i+1} - R_i = \Delta, \quad i \in (0, L-1);$$

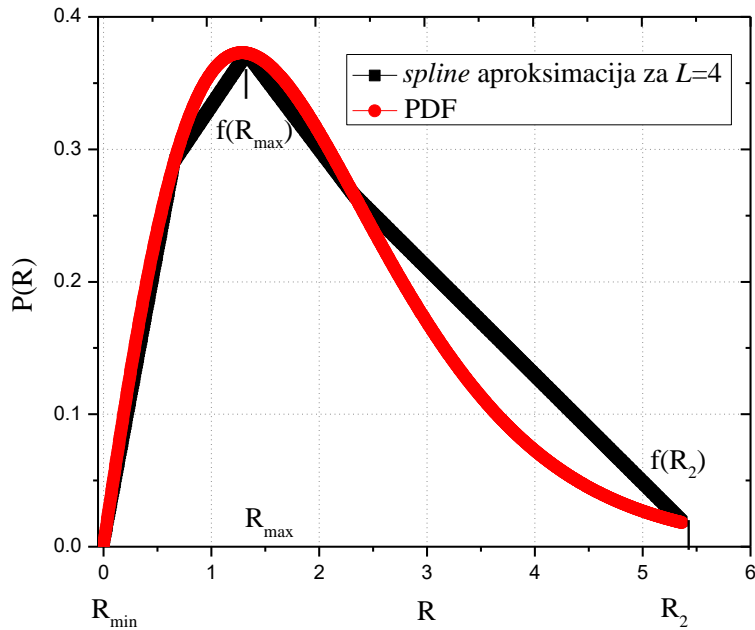
$$\Delta = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{L}; \quad L = 4; \quad (3.9)$$

$$f_1(r) = \begin{cases} S_1(r) = a_1 R + b_1, & r \in [R_{\min}, R_1] \\ S_2(r) = a_2 R + b_2, & r \in [R_1, R_{\max}] \\ S_3(r) = a_3 R + b_3, & r \in [R_{\max}, R_3] \\ S_4(r) = a_4 R + b_4, & r \in [R_3, R_4] \end{cases}$$

Tabela 3.2: *Spline* aproksimacija i koeficijenti za $L = 4$ segmenta.

| $\alpha=1, \kappa=1, \mu=2, \Omega=1$ | a_i | b_i |
|---------------------------------------|----------|---------|
| $(R_{\min}=0, R_1=0.665)$ | 0.43944 | 0 |
| $(R_1=0.665, R_2=R_{\max}=1.33)$ | 0.12085 | 0.21186 |
| $(R_2=R_{\max}=1.33, R_3=2.3275)$ | -0.10778 | 0.51595 |
| $(R_3=2.3275, R_4=5.367)$ | -0.08098 | 0.45357 |

Na Slici 3.2, predstavljena je *spline* aproksimacija za $L = 4$ segmenta iz Tabele 3.2. Sa Slike 3.2 se vidi da je vrednost relativne greške dosta manja, odnosno, da je u velikoj meri izraženo poklapanje između originalnih i aproksimiranih karakteristika.



Slika 3.2: Grafički prikaz spline aproksimacije za $L = 4$ segmenta.

Performanse bežičnog prenosa ABER mogu biti procenjene na osnovu *spline* aproksimacije za $L = 4$ segmenta za PDF izraz anvelope feding modela u slučaju kada je primenjen BDPSK format modulacije. Za iste vrednosti feding parametara relativna greška za ABER se računa pomoću:

$$P_{e_1} = \int_0^{\infty} p(r) \frac{1}{2} \exp(-gr) dr; \quad P_{e_2} = \int_0^{\infty} f_1(r) \frac{1}{2} \exp(-gr) dr \quad (3.10)$$

$$\left| \frac{P_{e_1} - P_{e_2}}{P_{e_1}} \right| = 0.0444$$

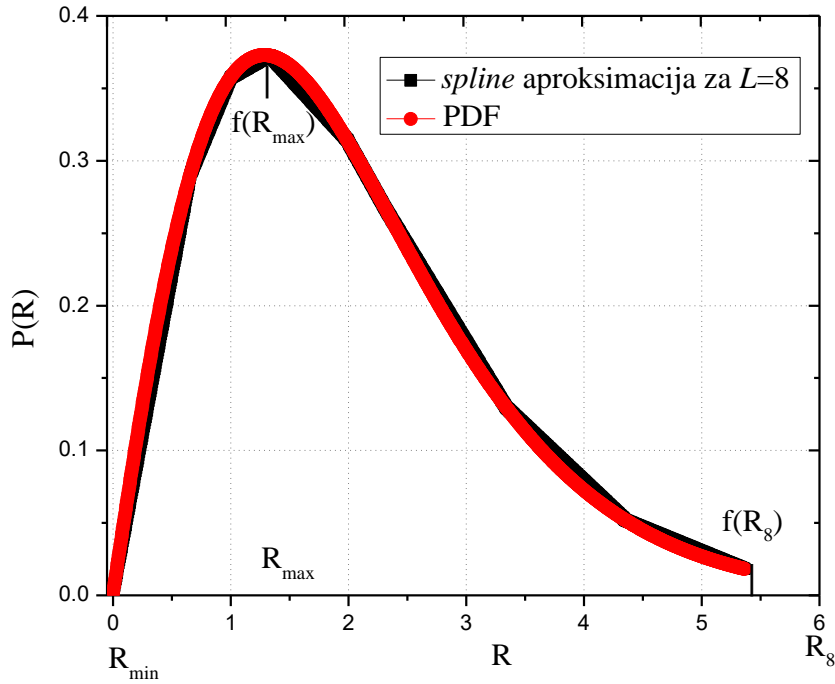
U cilju daljeg smanjenja relativne greške za ABER, *spline* aproksimacija za $L = 8$ segmenata za iste vrednosti parametara feding modela može se izračunati pomoću:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial p(r)}{\partial r} \right|_{r=R_{\max}} &= 0; R_{i+1} - R_i = \Delta, \quad i \in (0, L-1); \\
\Delta &= \frac{R_{\max} - R_{\min}}{L}; \quad L = 8; \\
f_2(r) &= \begin{cases} S_1(r) = a_1 R + b_1, & r \in [R_{\min}, R_1] \\ S_2(r) = a_2 R + b_2, & r \in [R_1, R_2] \\ S_3(r) = a_3 R + b_3, & r \in [R_2, R_3] \\ S_4(r) = a_4 R + b_4, & r \in [R_3, R_{\max}] \\ S_5(r) = a_5 R + b_5, & r \in [R_{\max}, R_5] \\ S_6(r) = a_6 R + b_6, & r \in [R_5, R_6] \\ S_7(r) = a_7 R + b_7, & r \in [R_6, R_7] \\ S_8(r) = a_8 R + b_8, & r \in [R_7, R_8] \end{cases} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Spline aproksimacija i koeficijenti za posmatrane parametre feding modela za $L = 8$ segmenata su prikazani u Tabeli 3.3, dok je grafički prikaz *spline* aproksimacije za $L = 8$ segmenata dat na Slici 3.3.

Tabela 3.3: *Spline* aproksimacija i koeficijenti za $L = 8$ segmenata.

| $\alpha=1, \kappa=1, \mu=2, \Omega=1$ | a_i | b_i |
|---------------------------------------|----------|---------|
| $(R_{\min}=0, R_1=0.665)$ | 0.43944 | 0 |
| $(R_1=0.665, R_2=0.9975)$ | 0.19544 | 0.16226 |
| $(R_2=0.9975, R_3= R_{\max} =1.33)$ | 0.04626 | 0.31107 |
| $(R_3= R_{\max} =1.33, R_4=1.995)$ | -0.08888 | 0.49132 |
| $(R_4= 1.995, R_5=2.3275)$ | -0.14559 | 0.60394 |
| $(R_5=2.3275, R_6=3.34089)$ | -0.13368 | 0.57622 |
| $(R_6=3.34089, R_7=4.35429)$ | -0.07680 | 0.38621 |
| $(R_7=4.35429, R_8=5.36768)$ | -0.03319 | 0.19629 |



Slika 3.3: Grafički prikaz *spline* aproksimacije za $L = 8$ segmenata.

Sa Slike 3.3 se vidi da je vrednost relativne greške jako mala, odnosno, da je poklapanje između originalnih i aproksimiranih karakteristika bolje u poređenju sa Slikom 3.1 i Slikom 3.2. Na sličan način relativna greška za ABER za primenjeni BDPSK format modulacije na osnovu *spline* aproksimacije za $L = 8$ segmenata se računa pomoću:

$$P_{e_1} = \int_0^{\infty} p(r) \frac{1}{2} \exp(-gr) dr; \quad P_{e_2} = \int_0^{\infty} f_2(r) \frac{1}{2} \exp(-gr) dr \quad (3.12)$$

$$\left| \frac{P_{e_1} - P_{e_2}}{P_{e_1}} \right| = 0.03867$$

Kao što je očekivano bolja tačnost aproksimacije se dobija uz primenu *spline* aproksimacije sa više segmenata za iste vrednosti parametara fading modela.

Povećanjem broja segmenata rezultati predstavljaju značajno poboljšanje performansi u odnosu na slučaj *spline* aproksimacije za $L = 2$ segmenta, sa relativnom greškom za ABER od 0.1973. Bolji rezultati su dobijeni povećavanjem broja segmenata za linearnu *spline* aproksimaciju za $L = 4$ i $L = 8$ segmenata. Za takave slučajeve relativna greška za ABER se smanjuje na 0.0444 i 0.03867, respektivno. Očigledno je da bi se daljim povećavanjem broja segmenata za linearnu *spline* aproksimaciju dobila manja relativna grešaka za ABER kao i

bolje performanse, slično kao u [5] gde je posmatrana linearna *spline* funkcija, kao i u [6], gde su dobijeni bolji rezultati za SQNR sa povećanjem broja segmenata. Međutim, pored memorijskih ograničenja, postoje i druga ograničenja koja se odnose na broj povećanja segmenata. Dakle, za ograničen broj segmenata, postoji potreba da se optimizuje izbor aproksimacije *spline* funkcije. Jedan od pristupa koji se može koristiti jeste kombinacija *spline* funkcija različitog reda kako bi se dobila jedna kompozitna deo-po-deo *spline* funkcija.

Posmatran je sledeći deo-po-deo *spline* algoritam: Prvo će posmatrana oblast biti podeljena na $L = 8$ segmenata, razmatranih za linearnu *spline* aproksimaciju, zatim će biti primenjena linearna *spline* aproksimacija u prvom segmentu, i u poslednja 3 segmenta date oblasti. Ukupno 4 segmenta će biti aproksimirana linearnom *spline* funkcijom. Zatim će pomoću kvadratne *spline* aproksimacije biti spojena 4 ne aproksimirana segmenta u jedan novi segment. Za ovaj segment primenjena je kvadratna *spline* aproksimacija prema jednačinama (3.5) i (3.6).

Za posmatrane parametre feding modela ova kompozitna deo po deo *spline* aproksimacija može biti izračunata pomoću:

$$\left. \frac{\partial p(r)}{\partial r} \right|_{r=R_{\max}} = 0; \quad R_{i+1} - R_i = \Delta, \quad i \in (0, L-1);$$

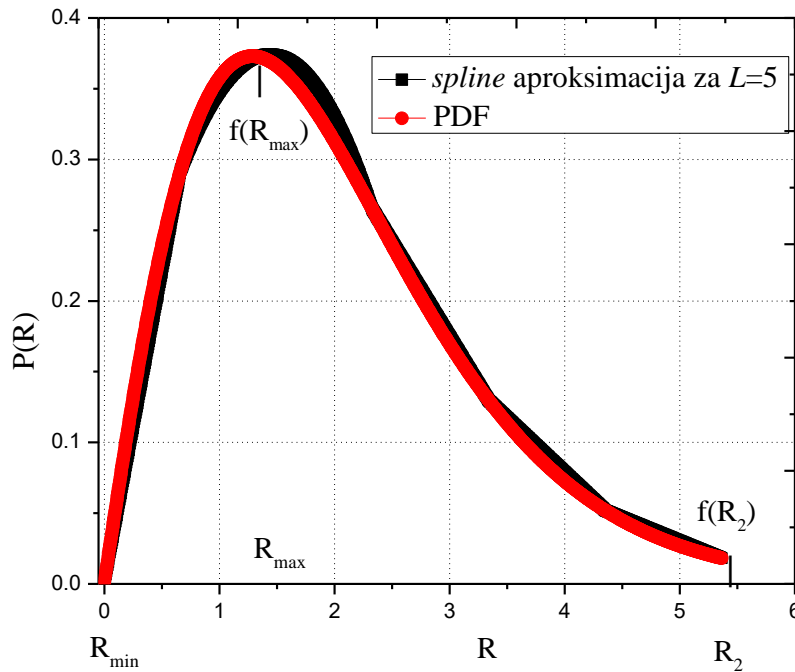
$$\Delta = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{L}; \quad L = 5; \quad . \quad (3.13)$$

$$f_2(r) = \begin{cases} S_1(r) = a_1 R + b_1, & r \in [R_{\min}, R_1] \\ Q_1(r) = c_0 r^2 + c_1 r + c_2, & r \in [R_1, R_{\max}, R_2] \\ S_2(r) = a_3 R + b_3, & r \in [R_2, R_3] \\ S_3(r) = a_4 R + b_4, & r \in [R_3, R_4] \\ S_4(r) = a_5 R + b_5, & r \in [R_4, R_5] \end{cases}$$

Spline intervali i koeficijenti za posmatrane parametre feding modela prikazani su u Tabeli 3.4, dok je grafički prikaz kompozitne deo-po-deo *spline* aproksimacije prikazan na Slici 3.4.

Tabela 3.4: Spline intervali i koeficijenti za kompozitnu deo-po-deo spline aproksimaciju.

| $\alpha=1, \kappa=1, \mu=2, \Omega=1$ | a_i | | b_i |
|--|----------|--------|---------|
| $(R_{\min}=0, R_1=0.665)$ | 0.43944 | | 0 |
| $(R_1=0.665, R_{\max}=1.33, R_2=2.3275)$ | c_0 | c_1 | c_2 |
| | -0.1375 | 0.3952 | 0.0902 |
| $(R_2=2.3275, R_3=3.34089)$ | -0.13368 | | 0.57622 |
| $(R_3=3.34089, R_4=4.35429)$ | -0.07680 | | 0.38621 |
| $(R_4=4.35429, R_5=5.36768)$ | -0.03319 | | 0.19629 |



Slika 3.4: Grafički prikaz deo po deo spline aproksimacije iz Tabele 3.4.

Sa Slike 3.4 može se videti bolje poklapanje između originalnih i aproksimiranih karakteristika nego poklapanje predstavljeno na Slici 3.1, Slici 3.2 i Slici 3.3. Nakon izračunavanja relativne greške pomoću:

$$P_{e_1} = \int_0^{\infty} p(r) \frac{1}{2} \exp(-gr) dr, \quad P_{e_2} = \int_0^{\infty} f_2(r) \frac{1}{2} \exp(-gr) dr, \quad (3.14)$$

$$\left| \frac{P_{e_1} - P_{e_2}}{P_{e_1}} \right| = 0.029248.$$

i upoređujući je sa relativnom greškom dobijenom za linearnu *spline* aproksimaciju za $L = 8$ segmenata 0.03876, jasno je da je značajan napredak postignut korišćenjem manjeg broja segmenata.

Predstavljene metode aproksimacija *spline* funkcije zavise od tražene tačnosti procene parametara komunikacionog sistema i mogu naći primenu u proceni performansi sistema koje se mogu odrediti na osnovu statističkih modela prenetih signala.

4. SPECIJALNE FUNKCIJE I NEKE APROKSIMACIJE

SPECIJALNIH FUNKCIJA

Biće izvedeni novi analitički izrazi, intervalni i kompozitni metodi kao i granice za familiju specijalnih funkcija koje su korisne u teoriji bežičnih komunikacija. Ove funkcije su poznate kao Q-funkcija, erf, erfc, Marcum Q-funkcija, $Q_m(a,b)$, Nuttall Q-funkcija, $Q_{m,n}(a,b)$, nepotpuna Toronto funkcija (ITF), $T_B(m,n,r)$, Rice I_e -funkcija, $I_e(k,x)$ i nepotpuni Lipschitz-Hankel integrali ILHIs, $Z_{e,m,n}(x;a)$. Ove funkcije mogu se smatrati korisnim matematičkim alatima koji se mogu koristiti u primenama koje se odnose na analitički proračun performansi savremenih bežičnih komunikacionih sistema kao što su kognitivni radio, kooperativne i *free-space* optičke komunikacije, radarski sistemi, diverziti tehnike prijema kao i višeantenski sistemi.

$Q_m(a,b)$ funkciju, predložio je Marcum [73], koja je postala široko poznata u digitalnim komunikacijama pri bežičnom prenosu u prisustvu fadinga [74]. Aproksimacije, nekoliko gornjih i donjih granica kao i osnovna svojstva Marcum Q-funkcije predstavljena su u [8],[75].

Biće predstavljen niz alternativnih oblika za Q-funkciju, kao i Marcum Q-funkciju. Motivacija za predstavljanje alternativnih oblika ovih funkcija dolazi zbog primene, gde je poželjno imati integralnu reprezentaciju u kojoj argument te funkcije nije niti u gornjim niti u donjim granicama, a dalje se pojavljuje u integrandu kao argument elementarna funkcija kao što je eksponencijalna ili trigonometrijska funkcija [8].

Marcum Q-funkcija može biti izražena pomoću $Q_m(a,b)$ funkcije i modifikovane Beselove funkcije prvog reda, $I_n(x)$, za specijalan slučaj kada je zbir njenih indeksa celobrojni pozitivan broj $(m + n + 1)/2 \in N$. Nepotpuna Toronto funkcija je takođe specijalna funkcija,

predložena je u [76]. Toronto funkcija, $T_B(m,n,r)$, je generalna funkcija koja uključuje Marcum Q-funkciju, $Q_m(a,b)$, kao specijalni slučaj. Može se predstaviti konačnim integralom ili u alternativnom obliku pomoću dve beskonačne sume predložene u [77]. Nepotpuna Toronto funkcija može biti korisna u bežičnim komunikacionim sistemima za proračune koji se odnose na statističku analizu, radarske sisteme, detekciju signala kao i na proračun verovatnoće greške [8].

Rice Ie-funkcija je takođe specijalna funkcija slične analitičke reprezentacije kao Marcum Q i Nuttall Q-funkcija. Prvo je predložio S.O. Rice [78], primenu nalazi prevashodno kod ugaonih modulacionih sistema, detekcije radarskih impulsa i analize veličine greške diferencijalno kodovanih sistema [79]. Obično je definisana konačnim integralom ili pomoću dve beskonačne sume [79].

$Z_{e,m,n}(x;a)$ integrali čine klasu nepotpunih cilindričnih funkcija koje se susreću u analitičkim rešavanjima različitih problema u elektromagnetnoj teoriji [80].

U bežičnim komunikacionim sistemima, Lipschitz-Hankel integrali ILHIs se koriste za proračun verovatnoće greške u kanalima sa fadingom kao i za analizu veličine greške u MIMO sistemima koji koriste adaptivnu modulaciju i metodu kombinovanja sa maksimalnim odnosom (MRC) [81].

Ipak, uprkos nesumnjivom značaju Q-funkcije, $Q_m(a,b)$, $Q_{m,n}(a,b)$, $T_B(m,n,r)$, $Ie(k,x)$ funkcije i $Z_{e,m,n}(x;a)$ integrala, nisu svi dostupni u tabelarnom obliku niti su uključene kao ugrađene funkcije u široko korišćenim matematičkim softverskim paketima. Kao posledica ovoga, njihovo korišćenje postaje prilično težak zadatak prvenstveno za algebarski ali i za numerički proračun. Cilj je izvesti što jednostavnije matematičke metode koje se sastoje od brojnih analitičkih izraza i granica za navedene specijalne funkcije. Predloženi rezultati imaju svestranu algebarsku primenu i mogu biti korisni u inženjerstvu, uključujući bežične komunikacije za proračun standardnih mera performansi sistema kao što su srednja vrednost odnosa signal-šum, verovatnoća otkaza kao i srednja verovatnoća greške po bitu.

Gausova slučajna promenljiva ima dve mane. Prvu, sa računskog stanovišta, zahteva skraćivanje gornje beskonačne granice kada se koristi numerički integralni proračun ili algoritamska tehnika. Drugo, prisustvo argumenta funkcije kao donje granice integrala predstavlja analitičke poteškoće kada ovaj argument zavisi od drugih slučajnih parametara koji na kraju zahtevaju statistički proračun njihove raspodele verovatnoće. Takav je slučaj,

pri procenjivanju performansi digitalnih komunikacionih sistema u kanalima sa belim aditivnim Gausovim šumom (AWGN) [8]. U takvim slučajevima bilo bi poželjno imati oblik Q-funkcije, takav da argument funkcije ne zavisi od gornje niti donje granice integrala, a dalje se pojavljuje u integrandu kao argument elementarna funkcija. Naravno, još poželjnija bi bila forma gde su argumenti nezavisne konačne granice i integrand takođe, održava svoju Gausovu prirodu.

Iako postojanje ovakve forme datira još iz 1972. Godine, koju je predložio Nuttall [82], njena popularnost i skorašnja obimna primena prvenstveno potiču od njenog ponovnog uvođenja od strane Craig-a [83] koji je predstavio u svom radu za procenu srednje verovatnoće greške za dvodimenzionalni AWGN kanal. Konkretno, Craig-ova formula Q-funkcije ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2 \theta}\right) d\theta, \\ Q(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sin^2 \theta}\right) d\theta. \end{aligned} \quad (4.1)$$

4.1 Marcum Q-funkcija

Marcum Q-funkcija prvog reda, $Q(\alpha, \beta)$, definisana je kao komplement CDF funkcije koja odgovara normalizovanoj ne centralnoj Chi kvadratnoj slučajnoj promenljivoj. Važno je napomenuti da se komplement prvog reda Marcum Q-funkcije može posmatrati kao poseban slučaj nepotpune Toronto funkcije [84],[85], koja pronalazi svoju primenu u literaturi za radarske sisteme, definiše se kao:

$$T_B(m, n, r) = 2r^{n-m+1} e^{-r^2} \int_0^B t^{m-n} e^{-t^2} I_n(2rt) dt. \quad (4.2)$$

ili kao jedinstven slučaj:

$$T_{\frac{\beta}{\sqrt{2}}}\left(1, 0, \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) = 1 - Q_1(\alpha, \beta). \quad (4.3)$$

Kada parametar $\beta \rightarrow \infty$, Marcum Q-funkcija $Q_1(\alpha, \beta)$ se svodi na Gausovu Q-funkciju. Koristeći asimptotsku formu (za velike argumente) modifikovane Beselove funkcije prvog reda, sledi [8],[85]:

$$\begin{aligned}
 Q_1(\alpha, \beta) &\cong \int_{\beta}^{\infty} x e^{\left(-\frac{x^2+a^2}{2}\right)} \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{2\pi\alpha x}} dx \cong \\
 &\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\beta}^{\infty} e^{\left[-\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]} dx \cong \\
 &\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} Q(\beta - \alpha).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Koristeći parcijanu integraciju, Marcum Q-funkcija prvog reda može biti zapisana u sledećem obliku [85]:

$$Q_1(\alpha, \beta) = e^{\left(-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k I_k(\alpha\beta). \tag{4.5}$$

Marcum Q-funkcija ima iste dve mane kao i Gausova Q-funkcija. Sa stanovišta primene, bilo bi poželjno imati integralni oblik Marcum Q-funkcije sa konačnim granicama, i integrandom koji poseduje Gausovu prirodu. Istorijски gledano, takav alternativni oblik dao je Stein 1965. godine [85],[86]. Međutim, popularnije i dostupnije publikacije koje prikazuju skoriju primenu predstavljene su u [85],[87]. Gde je pokazano da Marcum Q-funkcija prvog reda ima poželjnije predstavljanje kao [85]:

$$\begin{aligned}
 Q_1(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \sin \theta}{1 + 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \sin \theta + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} \right] \\
 &\times e^{\left[-\frac{\beta^2}{2} \left(1 + 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \sin \theta + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right)\right]} d\theta, \quad \beta > \alpha \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

ili

$$\begin{aligned}
 Q_1(\alpha, \beta) &= 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \sin \theta}{1 + 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \sin \theta + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} \right] \\
 &\times e^{\left[-\frac{\alpha^2}{2} \left(1 + 2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \sin \theta + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right)\right]} d\theta, \quad \alpha > \beta \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Rezultati u (4.6) i (4.7) mogu se predstaviti u obliku sa manjim intervalom integracije. Konkretno, pomoću simetrijskih svojstava trigonometrijskih funkcija u intervalima $(-\pi, 0)$ i $(0, \pi)$ dobija se alternativni izraz [85]:

$$Q_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1 \pm \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cos \theta}{1 \pm 2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cos \theta + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} \right] \times e^{\left[-\frac{\beta^2}{2} \left(1 \pm 2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \cos \theta + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \right) \right]} d\theta, \quad \beta > \alpha \geq 0. \quad (4.8)$$

i

$$Q_1(\alpha, \beta) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \pm \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \cos \theta}{1 \pm 2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \cos \theta + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} \right] \times e^{\left[-\frac{\alpha^2}{2} \left(1 \pm 2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \cos \theta + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \right) \right]} d\theta, \quad \alpha > \beta \geq 0. \quad (4.9)$$

Jednostavniji oblik funkcije prvog reda može se predstaviti u obliku sume dva eksponencijalna integranda, od kojih svaka još uvek ima vezu sa α ili β [85].

$$Q_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ e^{\left[-\frac{\beta^2}{2} \left(1 + 2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \sin \theta + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \right) \right]} \right\} + e^{\left[-\frac{\beta^2}{2} \left(1 - 2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \right) \left(1 + 2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \sin \theta + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \right)^{-1} \right]} d\theta, \quad \beta \geq \alpha \geq 0. \quad (4.10)$$

i

$$Q_1(\alpha, \beta) = 1 + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ e^{\left[-\frac{\alpha^2}{2} \left(1 + 2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \sin \theta + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \right) \right]} \right\} - e^{\left[-\frac{\alpha^2}{2} \left(1 - 2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \right) \left(1 + 2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \sin \theta + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \right)^{-1} \right]} d\theta, \quad \alpha \geq \beta \geq 0. \quad (4.11)$$

ili ekvivalentno sa jednačinama (4.8) i (4.9) samo u redukovanoj formi:

$$Q_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ e^{\left[-\frac{\beta^2}{2} \left(1 \pm 2 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \cos \theta + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right) \right]} \right\} + e^{\left[-\frac{\beta^2}{2} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right) \left(1 \pm 2 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \cos \theta + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^2 \right)^{-1} \right]} d\theta, \quad \beta \geq \alpha \geq 0. \quad (4.12)$$

i

$$Q_1(\alpha, \beta) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ e^{\left[-\frac{\alpha^2}{2} \left(1 \pm 2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \cos \theta + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right) \right]} \right\} - e^{\left[-\frac{\alpha^2}{2} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right) \left(1 \pm 2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \cos \theta + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right)^{-1} \right]} d\theta, \quad \alpha \geq \beta \geq 0. \quad (4.13)$$

Generalizovana Marcum Q-funkcija (m -tog reda), je definisana kao komplement CDF funkcije koja odgovara normalizovanoj necentralnoj chi-square slučajnoj promenljivoj sa $m+1$ stepenom slobode. Interesantno je napomenuti da se komplement opšte Marcum Q-funkcije može posmatrati kao poseban slučaj nepotpune Toronto funkcije. Analogno sa (4.3):

$$T_{\frac{\beta}{\sqrt{2}}} \left(2m-1, m-1, \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right) = 1 - Q_m(\alpha, \beta). \quad (4.14)$$

Pored toga, kada $\beta \rightarrow \infty$, $Q_m(\alpha, \beta)$ može biti svedena na generalizovanu Gausovu Q-funkciju na isti način kao što je to učinjeno sa Marcum Q-funkcijom prvog reda.

Za specijalan slučaj kada je $\alpha = \beta$, Marcum Q-funkcija ima sledeći oblik:

$$Q_m(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2} + e^{-\alpha^2} \left[\frac{I_0(\alpha^2)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} I_k(\alpha^2) \right] \quad (4.15)$$

Za razliku od Marcum Q-funkcije prvog reda, dodatno pojednostavljenje kao u (4.8) i (4.9) nije moguće za Marcum Q-funkciju m -tog reda.

4.2 Nuttall Q-funkcija

Nuttall Q-funkcija [88] je generalizacija Marcum Q-funkcije. S obzirom na to da Nuttall Q-funkcija nije razmatrana kao tabelarna funkcija, poželjno je izraziti je u obliku koji dozvoljava rešenje u smislu Marcum Q-funkcije prvog reda koja je tabelirana ili ekvivalentno

u smislu generalizovane Marcum Q-funkcije. Mogućnost da se to uradi za $m+n$ predložena je u [88]. Međutim, eksplicitno rešenje nije prikazano. Eksplicitno rešenje za Nuttall Q-funkciju u zavisnosti od Marcum Q-funkcije prvog reda i modifikovanih Beselovih funkcija prvog reda [85],[89], ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
Q_{n+2k+1,n}(\alpha, \beta) &= 2^k k! \alpha^n L_k^{(n)}\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) \\
&\times \left[Q(\alpha, \beta) + e^{\left(-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i I_i(\alpha\beta) \right], \\
&+ e^{\left(-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)} \beta^n \left[2^k k! \sum_{i=1}^k \left(L_k^{(n)}\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) - L_{i-1}^{(n)}\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) \right) \right] \\
&\times \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) I_{n+i}(\alpha\beta) + \sum_{i=1}^k P_{k,i}(\beta^2) (\alpha\beta)^i \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) I_{n+i-1}(\alpha\beta)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
Q(x, y; \rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{y}{x}} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1-\rho \sin 2\theta} \\
&\times \exp\left\{-\frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{1-\rho^2}\right) \frac{1-\rho \sin 2\theta}{\sin^2 \theta}\right\} d\theta, \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tan^{-1} \frac{y}{x}} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1-\rho \sin 2\theta} \\
&\times \exp\left\{-\frac{y^2}{2} \left(\frac{1}{1-\rho^2}\right) \frac{1-\rho \sin 2\theta}{\sin^2 \theta}\right\} d\theta,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

U [89] predstavljen je još jedan alternativni oblik za $Q(x, y; \rho)$:

$$\begin{aligned}
Q(x, y; \rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}x/y}{1-\rho x/y}\right)} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sin^2 \theta}\right) d\theta \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}y/x}{1-\rho y/x}\right)} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sin^2 \theta}\right) d\theta, \quad x \geq 0, y \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Za $\rho \neq 0$ i $y = x$, $Q(x, x; \rho)$ dobija sledeći oblik:

$$Q(x, x; \rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\rho}}{1-\rho}\right)} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sin^2 \theta}\right) d\theta. \tag{4.19}$$

Takođe za $\rho = 0$ dobija se izraz za $Q^2(x)$ [81]:

$$Q^2(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sin^2\theta}\right) d\theta, \quad (4.20)$$

dok se za $\rho = 1$ dobija izraz za Q -funkciju.

4.3 Gausova Q-funkcija

Gausova slučajna promenljiva je opisana u zavisnosti od dva parametra $m \in R$ i $\sigma > 0$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.21)$$

Obično se koristi skraćeni oblik $N(m, \sigma^2)$, kako bi se predstavio PDF za Gausovu slučajnu promenljivu $X \sim N(m, \sigma^2)$, za koju važi $E[X] = m$ i $VAR[X] = \sigma^2$. Gausova slučajna promenljiva, za parametre $m=0$ i $\sigma=1$, naziva se standardna normalna slučajna promenljiva. Funkcija koja je usko povezana sa Gausovom slučajnom promenljivom jeste Q -funkcija definisana kao [85]:

$$Q(x) = P[N(0,1) > x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (4.22)$$

CDF funkcija Gausove slučajne promenljive data je u sledećem obliku:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{2}} \right], \quad (4.23)$$

gde erf funkcija, predstavlja funkciju greške definisanu kao:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (4.24)$$

Komplementarna funkcija greške, $\operatorname{erfc}(z)$, data je kao:

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (4.25)$$

U zavisnosti od *erfc* funkcije, Q-funkcija se može izraziti u sledećem obliku [85]:

$$Q(z) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right), \quad (4.26)$$

ili zavisno od funkcije greške:

$$Q(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right), \quad (4.27)$$

U mnogim slučajevima izračunavanje integrala uključuje ili Gausovu Q-funkciju, ili direktno povezane funkcije: funkciju greške, $\operatorname{erf}(x)$, i/ili komplementarnu funkciju greške $\operatorname{erfc}(x)$, Marcum Q-funkciju, $Q_m(a,b)$, Nuttall Q-funkciju, $Q_{m,n}(a,b)$, nepotpunu Toronto funkciju ITF, $T_B(m,n,r)$, Rice *Ie*-funkciju, $I_e(k,x)$ i nepotpune Lipschitz-Hankel integrale ILHIs, $Z_{e,m,n}(x;a)$.

Gausova Q-funkcija je specijalna funkcija, definisana kao integral koji nema analitičko rešenje, tako da se ne može izraziti kao konačan zbir osnovnih funkcija. Zbog ove osobine Q-funkcije sprovodi se analiza performansi komunikacionih sistema, tako da se javlja potreba za dobijanjem precizne aproksimacije u zatvorenom obliku. U dosadašnjoj literaturi predložene su različite aproksimacije [10]-[12],[90]-[99].

Kao što je prikazano u [9],[100]-[109], aproksimacije Q-funkcije ne samo što olakšavaju analizu performansi različitih komunikacionih sistema, već pružaju i dodatne matematičke analize ograničene nepostojanjem formule u zatvorenoj formi za Q-funkciju. Funkcija Gausove gustine verovatnoće (PDF) karakteriše govorne signale, signale u bežičnim prijemnicima, OFDM modulacione signale [85],[110], tako da odgovarajuće rešenje problema aproksimacije Q-funkcije posmatrano u ovom poglavlju jeste važno u mnogim područjima primene. Na primer, kao što je prikazano u [11],[12],[91],[98], problem aproksimacije Q-funkcije je od značaja za procenu verovatnoće greške simbola SEP digitalnih modulacija u prisustvu belog Gausovog šuma i prosečnog SEP-a u kanalima sa fadingom. Kao što je prikazano u [9], ovaj problem se javlja i u domenu dinamičkog pristupa spektru u kognitivnim radio mrežama. Štaviše, ovaj problem je prisutan i u polju kvantizacije Gausovog izvora [109]. Konkretno, sa ciljem da se dobiju izrazi u zatvorenoj formi koji omogućavaju jednostavnu analizu performansi kvantizera projektovanih za Gausov izvor, neki kompleksni oblici aproksimacije Q-funkcije nedavno su primenjeni u [110],[111]. Takođe, u velikom broju radova istaknuto je da se određene poteškoće javljaju zbog

nepostojanja rešenja zatvorenog oblika za inverznu Q-funkciju, na primer u [112],[113]. Kao što je navedeno u [109],[114], sa odgovarajućom aproksimacijom Q-funkcije ovaj problem se u nekim slučajevima može prevazići.

U literaturi su prisutne različite empirijske i analitičke metode aproksimacija, na primer u [100], pružajući različite kompromise između tačnosti aproksimacije Q-funkcije i njene analitičke traktabilnosti. Konkretno, mnoge dostupne aproksimacije Q-funkcije imaju vrlo kompleksne analitičke forme, koje nisu dovoljno pogodne za matematičke manipulacije koje uključuju Q-funkciju [104]. Takođe, kao što je prikazano u [109], neke od dostupnih aproksimacija Q-funkcije, uprkos tome što imaju odgovarajuću analitičku traktabilnost, i dalje pružaju nedovoljnu tačnost. Na kraju, neke od metoda su pogodne za male argumente a ne za velike argumente i obrnuto. Zbog ovih nedostataka postojećih aproksimacija Q-funkcije ovaj problem je i dalje prisutan i široko rasprostranjen pri čemu je cilj da predložene nove aproksimacije Q-funkcije imaju visoku tačnost kao i jednostavnu analitičku formu, koja omogućava izvođenje mnogih analiza koje uključuju Q-funkciju na jednostavan način.

4.4 Poboljšani metod za procenu srednje verovatnoće greške po simbolu (ASEP) zasnovan na intervalnoj aproksimaciji $erfc$ funkcije (Q-funkcije)

Pomoću intervalne aproksimacije $erfc(x)$ funkcije (Q-funkcije), predstavljena je jednostavna i veoma tačna aproksimaciju za procenu srednje verovatnoće greške po simbolu (ASEP) u kanalima sa fadingom. Prvo, izvršeno je poređenje sa drugim poznatim aproksimacijama Q-funkcije u zatvorenom obliku i pokazano da je poboljšanje tačnosti postignuto korišćenjem predložene intervalne aproksimacije u čitavom opsegu ulaznih vrednosti. Dalje, pokazano je da se korišćenjem predložene aproksimacije vrednosti srednje verovatnoće greške (ASEP) za neke primenjene modulacione formate mogu efikasno i precizno proceniti kada se posmatra prenos u kanalima sa fadingom. Takođe je pokazano da su korišćenjem predložene aproksimacije dobijene tačnije vrednosti za srednju verovatnoću greške po bitu nego korišćenjem drugih poznatih aproksimacija Q-funkcije u zatvorenom obliku.

Nedavni razvoj različitih usluga bežičnih komunikacionih sistema uslovio je postojanje konstantne potrebe za matematičkom karakterizacijom složenih fenomena

bežičnog prenosa [115]. U cilju određivanja ponašanja digitalnih komunikacionih sistema, postoje različiti tipovi kodovanja, modulacioni formati, vrste detekcija kao i modeli kanala, potrebno je proceniti standardne mere performansi posmatranog bežičnog komunikacionog sistema i posmatrati kako ove mere performansi utiču na ključne sistemske parametre vrednosti. U literaturi su već poznati različiti modeli fadinga, ali je pokazano u [44] da Nakagami- m model fadinga pruža najbolje mogućnosti za prikupljene podatke u zatvorenim i otvorenim bežičnim sredinama. Jedan od alata kojim se procenjuju performanse servisa, koje na najbolji način opisuju prirodu ponašanja bežičnog komunikacionog sistema, jeste analiza veličine verovatnoće greške na prijemu [115]. Da bi se analitički procenila veličina verovatnoće greške za primenjeni format modulacije neophodno je izvršiti što precizniju implementaciju aproksimacije specijalnih funkcija $erfc(x)$, $erf(x)$, Marcum Q, u što širem opsegu.

U dosadašnjoj literaturi predložene su različite aproksimacije Q-funkcije [10]-[12],[90],[91],[100],[101],[108]. Neke od njih su suviše složene da bi se koristile za proračun performansi bežičnih komunikacionih sistema.

Predložena intervalna aproksimacija Gausove Q-funkcije dobijena je kombinacijom osobina *Mill's ratio* aproksimacije Q-funkcije [101] zajedno sa svojstvima aproksimacije za Gausovu Q-funkciju koju pruža *Karagiannidis* u radu [11]. Motivacija za takav pristup je mogućnost primene dobrih osobina odgovarajućih aproksimativnih funkcija za male ulazne argumente u skladu sa primenom dobrih aproksimativnih svojstava odgovarajućih funkcija za velike ulazne argumente.

Prikazano je poređenje sa drugim poznatim aproksimacijama Q-funkcije u zatvorenom obliku, i pokazano je da je poboljšanje tačnosti postignuto u čitavom opsegu vrednosti. Takođe, pokazano je da se korišćenjem predložene aproksimacije vrednosti za ASEP za različite modulacione tehnike mogu efikasno i precizno proceniti kada se posmatra prenos preko Nakagami- m fading modela.

Gausova Q-funkcija se može definisati pomoću komplementarne funkcije greške kao:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad (4.28)$$

U [11], predložena je $Q_{\text{Karagiannidis}}(x)$ i $\operatorname{erfc}_{\text{Karagiannidis}}(x)$ aproksimacija Gausove Q-funkcije u sledećem obliku:

$$Q_{a-Karagiannidis}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\left(1 - e^{-1.98 \frac{x}{\sqrt{2}}}\right)}{1.135x} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (4.29)$$

$$erfc_{Karagiannidis}(x) \approx \frac{(1 - e^{-Ax})e^{-x^2}}{B\sqrt{\pi x}}.$$

sa parametrima A i B , odabranim kako bi se smanjio integral apsolutne greške u željenom opsegu, $[0, R]$.

$$\{A, B\} = \arg \min_{\{A, B\}} \frac{1}{R} \int_0^R |f(x, A, B) - erfc(x)| dx, \quad (4.30)$$

gde $|x|$ označava apsolutnu grešku. Optimalne vrednosti, $A = 1.98$ i $B = 1.135$, za $R = 20$, nalaze se numerički, minimizacijom integrala apsolutne greške.

U [91], predložena je $Q_{Jang}(x)$, jednostavna gornja granica Gausove Q -funkcije i $erfc_{Jang}(x)$ funkcije kao:

$$Q_{Jang}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\left(1 - e^{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}x}\right)}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (4.31)$$

$$erfc_{Jang}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(1 - e^{-\sqrt{\pi}x})}{x} e^{-x^2}.$$

U [10] granice za $Q_{Chiani}(x)$ i $erfc_{Chiani}(x)$ funkciju date se u obliku sume eksponencijalnih funkcija koje teže tačnoj vrednosti:

$$Q_{a-Chiani}(x) = \frac{1}{12} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{4} e^{-\frac{2x^2}{3}}, \quad (4.32)$$

$$erfc(x) = \frac{1}{6} e^{-x^2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{4}{3}x^2}.$$

Analitičke gornje granice, aproksimacije i donje granice za $Q_{Borjesson-2}(x)$ i $erfc_{Borjesson-2}(x)$ funkciju su predstavljene i analizirane u [90], kao:

$$Q_{a-Borjesson-2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (4.33)$$

$$erfc(x) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2x^2 + 1}} e^{-x^2}.$$

U [101] prikazane su dve *Mills ratio* aproksimacije sa jednostavnim izrazima, jedna donja granica i jedna gornja granica. Dalje, razmatrana je aproksimacija inverzne Q-funkcije i predstavljeni su neki korisni modeli sa jednostavnim izrazima.

Prateći isti pristup dat u [101], aproksimacija Gausove Q-funkcije može se predstaviti u obliku:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x^2+1)}{x(x^2+2)} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (4.34)$$

koja će biti donja granica aproksimacije Q-funkcije za ulazne vrednosti $x > \sqrt{2}$, dok $erfc(x)$ funkcija može biti predstavljena u obliku:

$$erfc(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(2x^2+1)}{x(2x^2+2)} e^{-x^2}, \quad (4.35)$$

koja će biti donja granična aproksimacije $erfc(x)$ funkcije za ulazne vrednosti $x > 2$.

Sada se može definisati nova intervalna aproksimacija Q(x) funkcije i $erfc(x)$ funkcije kao:

$$Q(x) = \begin{cases} Q_1(x) & 0 \leq x \leq \sqrt{2}, \\ Q_2(x) & x > \sqrt{2}, \end{cases}$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} f_{erfc1} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right), \quad (4.36)$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{2} f_{erfc2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

i

$$f_{erfc}(x) = \begin{cases} f_{erfc1}(x) & 0 \leq x \leq 2, \\ f_{erfc2}(x) & x > 2, \end{cases}$$

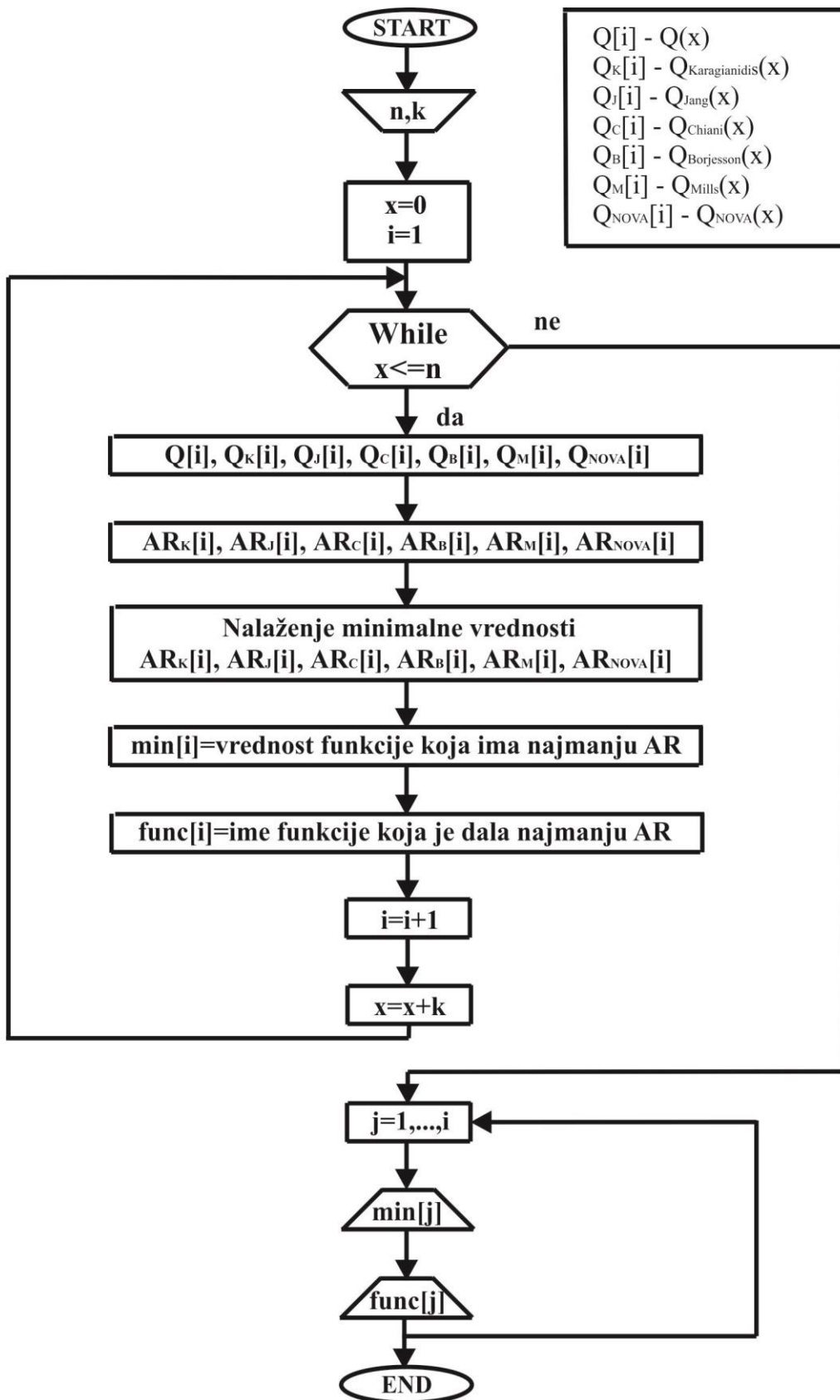
$$f_{erfc1}(x) = \frac{(1 - e^{-Ax}) e^{-x^2}}{B\sqrt{\pi}x}, \quad (4.37)$$

$$f_{erfc2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(2x^2+1)}{x(2x^2+2)} e^{-x^2},$$

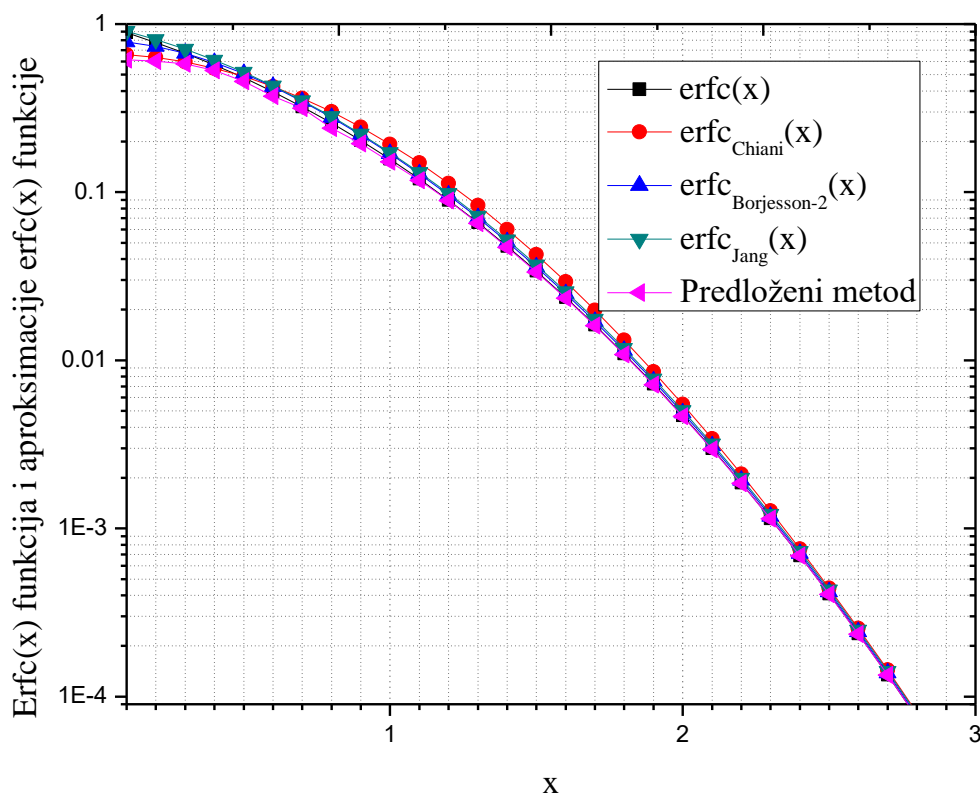
sa vrednostima za $A = 1.98$ i $B = 1.135$ uzetim iz [11]. Ideja za konstruisanje ove intervalne aproksimacije Q-funkcije potiče iz [101] i uzimajući u obzir činjenicu da se vrednosti aproksimacije iz [11] počinju razlikovati od vrednosti $erfc(x)$ funkcije za veće vrednosti argumenta x , ($x > 2$). Predložena je intervalna aproksimacija tako što su iskorišćene dobre osobine $f_{erfc1}(x)$ za male vrednosti ulaznih argumenata i sa druge strane su iskorišćene dobre osobine aproksimacije $f_{erfc2}(x)$ za velike vrednosti ulaznih argumenata.

Na Slici 4.1 dat je izgled blok dijagrama algoritma kojim se određuju najbolje vrednosti aproksimacija Q-funkcije poređenjem više metoda aproksimacija na određenom intervalu. n predstavlja granicu opsega, k predstavlja korak u opsegu za računanje aproksimacija Q-funkcije, i je redni broj koraka a x predstavlja vrednost za koju se računa Q-funkcija i ona se kreće od nule i uvećava se za korak k sve do granice opsega n . Algoritam se odvija u sledećim koracima:

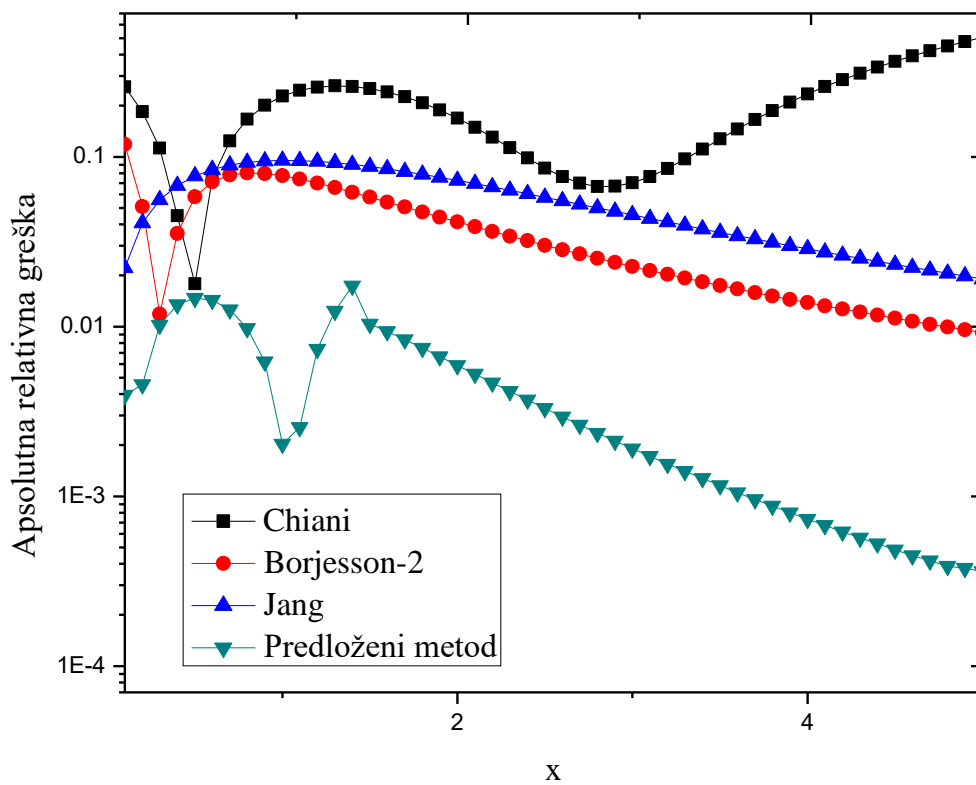
1. Unose se parametri n i k .
2. Postavljaju se početne vrednosti za x i i ($x=0$; $i=1$).
3. Sve dok je $x \leq n$ izvršavaju se sledeći koraci. U suprotnom ide se na korak 8.
4. Za svaku vrednost x , odnosno za svaki i -ti korak, računa se prvo tačna vrednost Q-funkcije $Q[i]$, a zatim i njene aproksimirane vrednosti korišćenjem metoda $Q_k[i]$, $Q_J[i]$, $Q_C[i]$, $Q_B[i]$, $Q_M[i]$, $Q_{NOVA}[i]$.
5. Vršiti se računanje apsolutne relativne greške za svaki primenjeni metod aproksimacije Q-funkcije.
6. Zatim se vrši poređenje apsolutnih relativnih grešaka i izdvaja funkcija koja daje najmanju vrednost (ime funkcije i minimalna vrednost).
7. Vraća se na korak 3.
8. Za svaki i -ti korak štampa se minimalna vrednost aproksimacija Q-funkcije u tom koraku kao i sama funkcija koja je dala minimalnu vrednost.



Slika 4.1: Blok dijagram algoritma za određivanje najboljih vrednosti aproksimacija erf-funkcije (Q-funkcije) za predloženi intervalni metod



Slika 4.2: Poređenje aproksimacija $erfc(x)$ funkcija.



Slika 4.3: Apsolutne relativne greške aproksimacija $erfc(x)$ funkcija.

Predložene aproksimacije specijalnih funkcija mogu pronaći svoje primene u različitim slučajevima kada je neophodno numeričko izračunavanje ovih funkcija, ovde je data samo jedna moguća primena.

Na Slici 4.2, Tabeli 4.1 i Tabeli 4.2 prikazano je poređenje $erfc(x)$ funkcija i njenih aproksimacija. Kao što se može videti, korišćenjem nove predložene intervalne aproksimacije $erfc(x)$ funkcije date sa (4.36) i (4.37), očigledno je dobijeno poboljšanje tačnosti na čitavom opsegu.

Na Slici 4.3 prikazana je apsolutna relativna greška izračunata za novu predloženu intervalnu $erfc(x)$ aproksimaciju u poređenju sa drugim aproksimacijama. Kao što se može videti sa Slike 4.3, aproksimacija data sa (4.36) i (4.37) ima minimalnu apsolutnu relativnu grešku i tačnija je od drugih aproksimacija u čitavom opsegu ulaznih argumenata.

Tabela 4.1: Poređenje $erfc(x)$ funkcije i njenih aproksimacija za $x < 2$.

| x | Erfc(x) | Chiani [10, (14)] | Börjesson-2 [90, (9)] | f_{erfc}(x) (4.37) |
|-----|----------------|------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|
| 0.1 | 0.887537 | 0.658386 | 0.394983 | 0.884027 |
| 0.3 | 0.671373 | 0.595782 | 0.365303 | 0.678248 |
| 0.5 | 0.479500 | 0.488066 | 0.314897 | 0.486562 |
| 0.7 | 0.322199 | 0.362259 | 0.255808 | 0.326246 |
| 0.9 | 0.203092 | 0.243941 | 0.197780 | 0.204350 |
| 1 | 0.157299 | 0.193112 | 0.171099 | 0.157618 |
| 1.1 | 0.119795 | 0.149311 | 0.146543 | 0.11949 |
| 1.2 | 0.089686 | 0.112791 | 0.124315 | 0.0890243 |
| 1.3 | 0.0659921 | 0.0832775 | 0.104485 | 0.0651766 |
| 1.4 | 0.0477149 | 0.0601213 | 0.0870273 | 0.0468855 |
| 1.5 | 0.0338949 | 0.0424601 | 0.0358588 | 0.0331362 |
| 1.6 | 0.0236516 | 0.0293497 | 0.0249328 | 0.023006 |
| 1.7 | 0.0162095 | 0.0198672 | 0.01703 | 0.0156895 |
| 1.8 | 0.0109095 | 0.0131773 | 0.0114255 | 0.0105091 |
| 1.9 | 0.0072096 | 0.0085690 | 0.0075284 | 0.007 |
| 2 | 0.0046777 | 0.0054666 | 0.0048713 | 0.0044654 |

Tabela 4.2: Poređenje $\operatorname{erfc}(x)$ funkcije i njenih aproksimacija za $x > 2$.

| x | Erfc(x) | Chiani [10, (14)] | Börjesson-2 [90, (9)] |
|-----|--------------------------------|--------------------------|---|
| 2.5 | 0.000406952 | 0.000441927 | 0.00650985 |
| 3 | 0.0000220905 | 0.0000236404 | 0.00140147 |
| 3.5 | 7.43098e-7 | 8.37837e-7 | 0.000239744 |
| 4 | 1.54173e-8 | 1.90275e-8 | 0.00003246 |
| 4.5 | 1.96616e-10 | 2.68478e-10 | 3.46736e-6 |
| 5 | 1.53746e-12 | 2.31633e-12 | 2.9157e-7 |
| 10 | 2.08849e-45 | 6.20013e-45 | 7.65641e-24 |
| x | Karagiannidis [11, (6)] | Jang [91, (2)] | $f_{\operatorname{erfc}}(x)$ (4.37) |
| 2.5 | 0.00038112 | 0.000430472 | 0.000405612 |
| 3 | 0.0000203945 | 0.000023095 | 0.0000220484 |
| 3.5 | 6.78936e-7 | 7.69787e-7 | 7.42239e-7 |
| 4 | 1.39798e-8 | 1.58596e-8 | 1.54059e-8 |
| 4.5 | 1.77294e-10 | 2.01187e-10 | 1.96521e-10 |
| 5 | 1.38062e-12 | 1.56686e-12 | 1.53695e-12 |
| 10 | 1.84919e-45 | 2.09883e-45 | 2.08844e-45 |

Primena nove intervalne aproksimacije se može proširiti za slučaj procene vrednosti za srednju verovatnoću greške po simbolu (ASEP) za primenjeni format modulacije u prisustvu Nakagami- m fadinga. Kao što je pomenuto, potrebno je proceniti srednju verovatnoću greške za SEP pomoću funkcije gustine raspodele (PDF) amplitude feding modela za primenjeni format modulacije. Za BPSK (binary phase shift keying) primenjeni format modulacije, možemo napisati izraz za ASEP u sledećoj formi:

$$P_b = \int_0^{\infty} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}x\right) f_x(x) dx, \quad (4.38)$$

gde je $f_x(x)$ funkcija gustine raspodele (PDF) amplitude Nakagami- m feding kanala. E_b i N_0 označavaju prosečnu energiju po bitu i jednosmernu spektralnu gustinu šuma, respektivno.

Nakagami- m raspodela slučajne promenljive je data funkcijom gustine raspodele pomoću (2.1).

Nakon zamene izraza za aproksimaciju $erfc(x)$ funkcije, (4.36) i (4.37) zajedno sa (2.1) u (4.38), i uzimajući u obzir (4.28) koja daje vezu između $erfc(x)$ i Gausove Q-funkcije, mogu se efikasnije proceniti vrednosti za ASEP u prisustvu Nakagami- m fading modela. Poređenje vrednosti za ASEP, u Nakagami- m fading kanalu za različite vrednosti parametra m , dobijene aproksimacijama Q-funkcije i predloženim intervalnim metodom date su u Tabeli 4.3, Tabeli 4.4 i Tabeli 4.5.

Na Slici 4.4 prikazana je srednja verovatnoća greške po simbolu za BPSK, u prisustvu Nakagami- m fading kanala. Iz Tabele 4.3, Tabele 4.4, Tabele 4.5 i sa Slike 4.4, može se videti da se vrednosti za srednju verovatnoću greške za BPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala, mogu efikasnije i preciznije izračunati pomoću predloženog metoda za sve razmatrane vrednosti parametra m .

Tabela 4.3: Poređenje vrednosti za ASEP, u prisustvu Nakagami- m fading kanala za parametar $m = 2$, dobijene aproksimacijama Q-funkcije.

| E_b/N₀ [dB] | Exact (m=2) | Karagiannidis [11, (6)] | Jang [91, (19)] | Q(x) (4.36) |
|---|------------------------|------------------------------------|----------------------------|------------------------|
| 0 | 1.151e-1 | 1.161e-1 | 1.247e-1 | 1.24399e-1 |
| 10 | 5.528e-3 | 5.500e-3 | 6.015e-3 | 5.61883e-3 |
| 20 | 7.257e-5 | 7.192e-5 | 7.890e-5 | 7.33666e-5 |
| 30 | 7.475e-7 | 7.405e-7 | 8.127e-7 | 7.55394e-7 |
| 40 | 7.497e-9 | 7.427e-9 | 8.151e-9 | 7.57624e-9 |

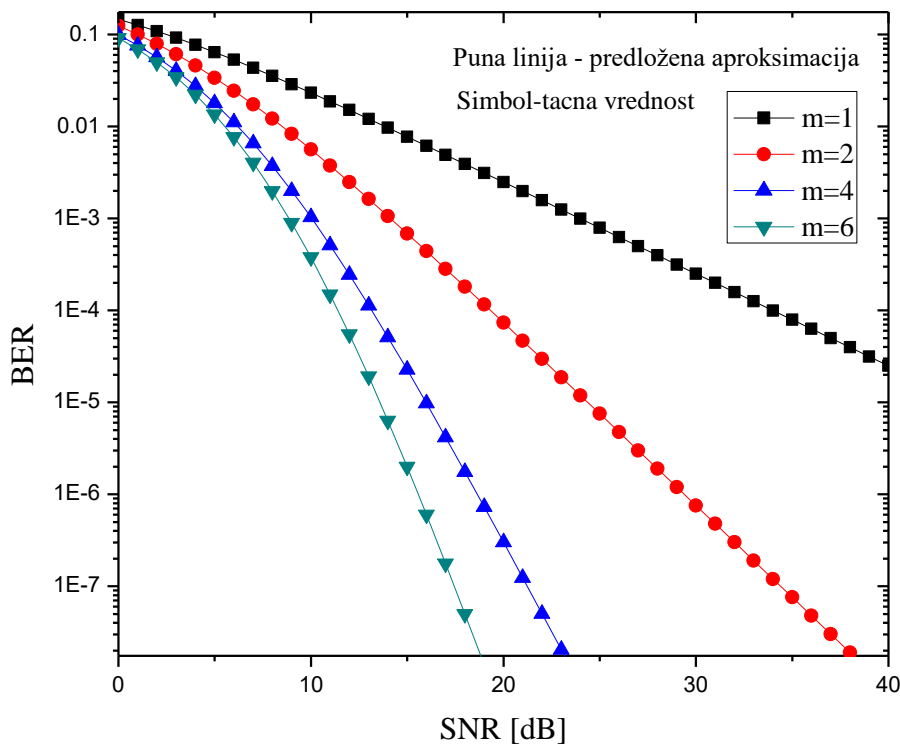
Tabela 4.4: Poređenje vrednosti za ASEP, u prisustvu Nakagami- m fading kanala za parametar $m = 4$, dobijene aproksimacijama Q-funkcija.

| E_b/N₀ [dB] | Exact (m=4) | Karagiannidis [11, (6)] | Jang [91, (19)] | Q(x) (4.36) |
|---|------------------------|------------------------------------|----------------------------|------------------------|
| 0 | 9.751e-2 | 9.820e-2 | 1.063e-1 | 9.91509e-2 |
| 10 | 1.039e-3 | 1.000e-3 | 1.126e-3 | 1.03022e-3 |
| 20 | 3.039e-7 | 2.933e-7 | 3.276e-7 | 3.01684e-7 |
| 30 | 3.450e-11 | 3.325e-11 | 3.716e-11 | 3.42542e-11 |
| 40 | 3.495e-15 | 3.368e-15 | 3.764e-15 | 3.47006e-15 |

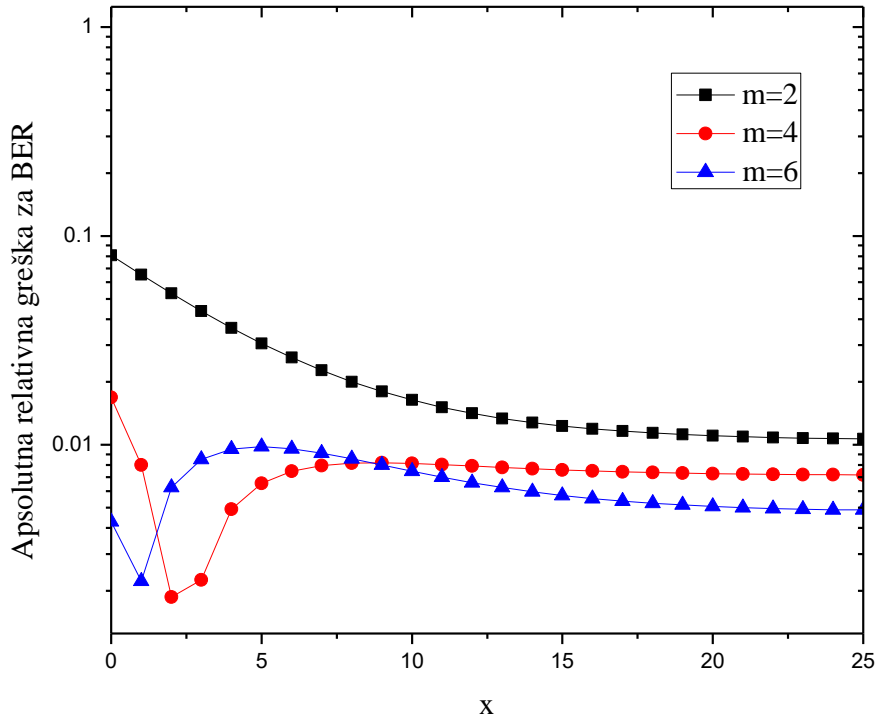
Tabela 4.5: Poređenje vrednosti za ASEP, u prisustvu Nakagami- m fading kanala za parametar $m = 6$, dobijene aproksimacijama Q -funkcija.

| E_b/N₀ [dB] | Exact (m=6) | Karagiannidis [11, (6)] | Jang [91, (19)] | Q(x) (4.36) |
|---|------------------------|------------------------------------|----------------------------|------------------------|
| 0 | 9.136e-2 | 9.190e-2 | 9.97e-2 | 9.17499e-2 |
| 10 | 3.814e-4 | 3.674e-4 | 4.109e-4 | 3.78554e-4 |
| 20 | 3.803e-9 | 3.603e-9 | 4.053e-9 | 3.78401e-9 |
| 30 | 5.090e-15 | 4.812e-15 | 5.417e-15 | 5.06557e-15 |
| 40 | 5.242e-21 | 4.957e-21 | 5.581e-21 | 5.21992e-21 |

Kako bi bilo uočljivo odlično poklapanje vrednosti za srednju verovatnoću greške za BPSK format modulacije, na Slici 4.5 prikazane su vrednosti za apsolutnu relativnu grešku predložene aproksimacije za srednju verovatnoću greške za BPSK format modulacije, za različite vrednosti parametra m .



Slika 4.4: ASEP za BPSK u prisustvu Nakagami- m fading kanala.



Slika 4.5: Apsolutna relativna greška predložene intervane aproksimacije ASEP za BPSK u prisustvu Nakagami- m feding kanala za različite vrednosti parametra m .

Primena predložene aproksimacije može biti proširena na srednju verovatnoću greške za koherentnu detekciju DE-QPSK (Differentially Encoded-Quadrature Phase Shift Keying), u prisustvu Nakagami- m modela fedinga. U [99], pokazano je da se srednja verovatnoća greške za DE-QPSK može dobiti pomoću:

$$P_b = \int_0^{\infty} \bar{P}_b \cdot f_{\gamma}(\gamma) d\gamma, \quad (4.39)$$

gde je $f_{\gamma}(\gamma)$ Nakagami- m gustina raspodele odnosa signal-šum po simbolu (SNR), predstavljen pomoću:

$$f_{\gamma}(\gamma) = \frac{m^m}{\Gamma(m) \bar{\gamma}^m} \gamma^{m-1} \exp\left\{-m \frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\right\}, \quad (4.40)$$

i

$$\bar{P}_b = 4Q(\sqrt{\gamma}) - 8Q^2(\sqrt{\gamma}) + 8Q^3(\sqrt{\gamma}) - 4Q^4(\sqrt{\gamma}), \quad (4.41)$$

gde $\bar{\gamma}$ predstavlja odnosa signal-šum po simbolu (SNR).

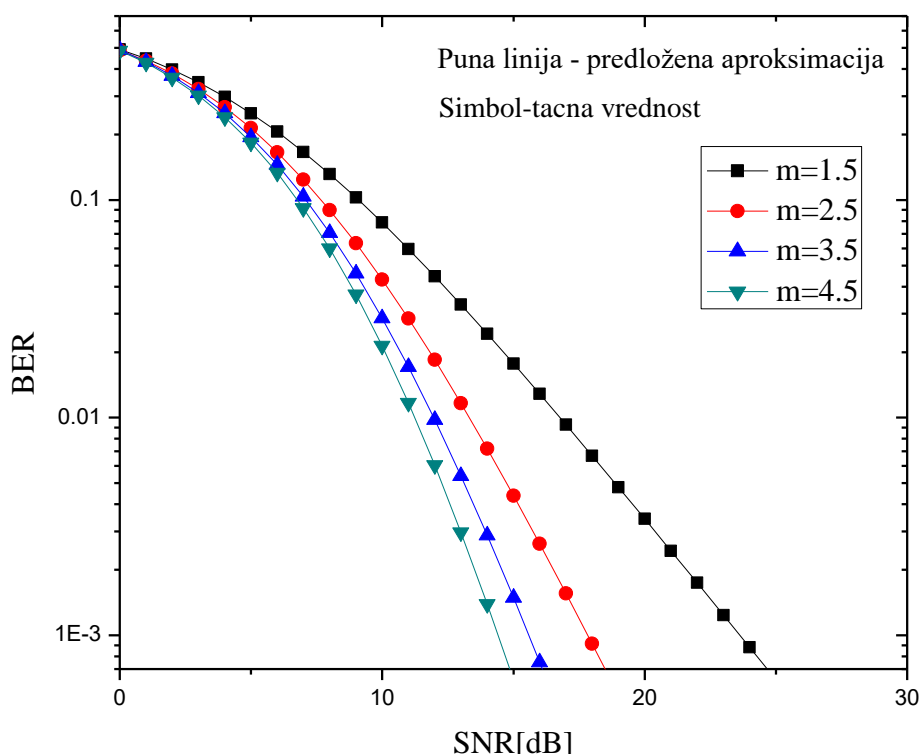
U Tabeli 4.6 i Tabeli 4.7, upoređene su tačne vrednosti za srednju verovatnoću greške po simbolu za DE-QPSK format modulacije, izračunate numerički korišćenjem (4.39), (4.40) i (4.41), sa aproksimiranim vrednostima dobijenim korišćenjem (4.36) i (4.37) i sa odgovarajućim aproksimacijama Q-funkcije i $erfc(x)$.

Tabela 4.6: Poređenje tačnih i aproksimiranih vrednosti za ASEP, za DE-QPSK format modulacije za parametar $m = 2.5$.

| $\bar{\gamma}$ | Exact | Chiani [10, (14)] | Börjesson-2 [90, (9)] | Q(x) (4.36) |
|----------------|------------|----------------------|--------------------------|----------------|
| 0 | 0.481372 | 0.506094 | 0.49996 | 0.486887 |
| 5 | 0.213309 | 0.243585 | 0.235053 | 0.213773 |
| 10 | 4.32554e-2 | 5.1224e-2 | 4.570e-2 | 4.30664e-2 |
| 15 | 4.40965e-3 | 5.2567e-3 | 4.6674e-3 | 4.38354e-3 |
| 20 | 3.0977e-4 | 3.6944e-4 | 3.2642e-4 | 3.07836e-4 |
| 25 | 1.87726e-5 | 2.2386e-5 | 2.1374e-5 | 1.86539e-5 |
| 30 | 1.08146e-6 | 1.2895e-6 | 1.1389e-6 | 1.07459e-6 |

Tabela 4.7: Poređenje tačnih i aproksimiranih vrednosti za ASEP, za DE-QPSK format modulacije za parametar $m = 3.5$.

| $\bar{\gamma}$ | Exact | Chiani [10, (14)] | Börjesson-2 [90, (9)] | Q(x) (4.36) |
|----------------|------------|----------------------|--------------------------|----------------|
| 0 | 0.476344 | 0.504489 | 0.496393 | 0.489018 |
| 5 | 0.194979 | 0.226913 | 0.226411 | 0.194744 |
| 10 | 2.88924e-2 | 3.47995e-2 | 3.0531e-2 | 2.8675e-2 |
| 15 | 1.50192e-3 | 1.8022e-3 | 1.44383e-3 | 1.4903e-3 |
| 20 | 4.0809e-5 | 4.8692e-5 | 4.2000e-5 | 4.0503e-5 |
| 25 | 8.39755e-7 | 9.99544e-7 | 9.96981e-7 | 8.3356e-7 |
| 30 | 1.56597e-8 | 1.85711e-8 | 1.63778e-8 | 1.5524e-8 |

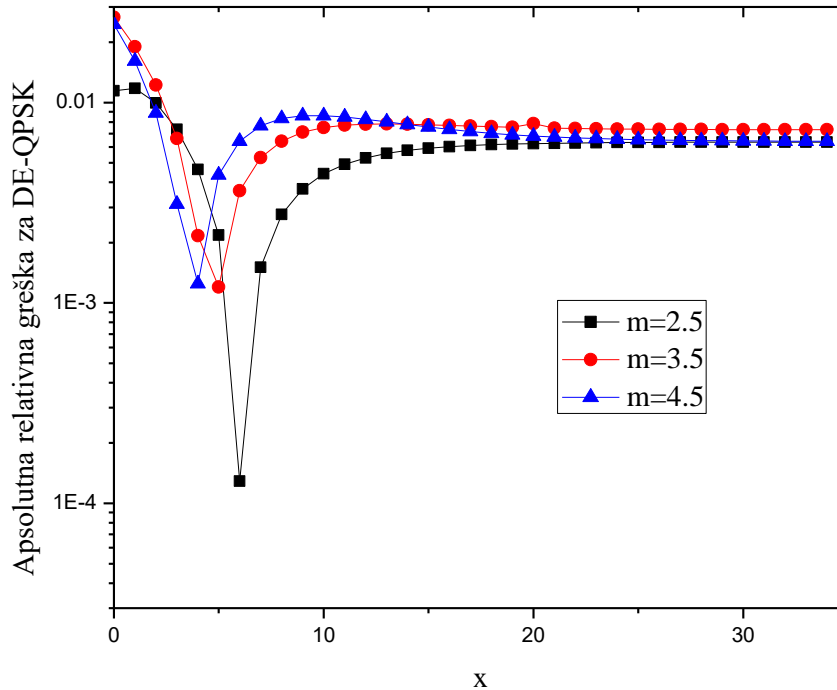


Slika 4.6: ASEP za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala, za različite vrednosti parametra m .

Na Slici 4.6 prikazana je srednja vrednost verovatnoće greške (ASEP) za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fadinga kanala. Iz Tabele 4.6 i Tabele 4.7 kao i sa Slike 4.6, može se videti da vrednosti za ASEP za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala, takođe, mogu biti efikasno i precizno procenjene predloženim intervalnim metodom za sve razmatrane vrednosti parametra m . Takođe se može videti da su vrednosti za ABER, dobijene pomoću predložene aproksimacije (4.36) i (4.37), tačnije od onih dobijenih korišćenjem drugih poznatih aproksimacija Q-funkcije u čitavom opsegu ulaznih vrednosti.

Kako bi bilo uočljivije odlično poklapanje između aproksimiranih i tačnih vrednosti za ASEP za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala, na Slici 4.7 predstavljene su vrednosti za apsolutnu relativnu grešku predložene aproksimacije ASEP za DE-QPSK format modulacije za različite vrednosti parametra m . Važno je istaći da su niže vrednosti apsolutne relativne greške dobijene za veće vrednosti parametra m , što je opštiji slučaj u praksi, i svakako razlog više za korišćenje predložene intervalne aproksimacije Q-

funkcije u procesu projektovanja bežičnih komunikacionih sistema za očekivanu tačniju procenu QoS.



Slika 4.7: Apsolutna relativna greška predložene intervalne aproksimacije ASEP za DEQPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fedinga za različite vrednosti parametra m .

4.5 Poboljšana kompozitna aproksimacija Q-funkcije i njena primena za procenu ASEP u kanalu sa fedingom

U ovom poglavlju, baziranom na *Mils ratio* aproksimaciji Q-funkcije, predstavljen je novi poboljšani kopozitni metod aproksimacije Q-funkcije. Na osnovu ove poboljšane aproksimacije, predstavljen je izraz za procenu srednje verovatnoće greške (ASEP) za digitalni format modulacije u Nakagami- m feding kanalu. Prvo, izvršeno je upoređivanje sa drugim poznatim aproksimacijama Q-funkcije u zatvorenom obliku i pokazano je da je u posmatranom opsegu vrednosti postignuto poboljšanje tačnosti. Pokazano je da se korišćenjem predložene aproksimacije vrednosti srednje verovatnoće greške (ASEP) za neke primenjene formate modulacije mogu efikasno i precizno proceniti pri prenosu u Nakagami- m feding kanalu. Takođe, biće pokazano da se korišćenjem predložene aproksimacije

dobijaju tačnije vrednosti za procenu srednje verovatnoće greške (ASEP), nego korišćenjem drugih poznatih aproksimacija Q-funkcije.

Predložena je aproksimacija Gausove Q-funkcije, dobijena na osnovu osobina *Mills ratio* aproksimacije Q-funkcije [105], uzimajući u obzir kompozitna svojstva minimizacije MSE (Mean-square error). Poređenjem sa drugim aproksimacijama Q-funkcije, pokazalo se da je korišćenjem predložene aproksimacije postignuto poboljšanje tačnosti u posmatranom opsegu vrednosti. Takođe, pokazano je da se korišćenjem predložene aproksimacije vrednosti za procenu srednje verovatnoće greške (ASEP) za BPSK i DE-QPSK primenjene formate modulacija, mogu efikasnije i preciznije proceniti pri prenosu u Nakagami-*m* fading kanalu.

U [90], *Borjesson* i *Sundberg* su predložili aproksimaciju Gausove Q-funkcije u sledećem obliku:

$$Q_{a-Borjesson-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1-a)x + a\sqrt{x^2 + b}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (4.42)$$

gde su a i b skalarni parametri, koji se mogu odrediti pomoću postupka numeričke optimizacije kako bi se minimizovao integral apsolutne greške dat kao:

$$\begin{aligned} MSE_{\min} &= \frac{1}{N} \int_0^N \left(Q(x) - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} [(1-a)x + a\sqrt{x^2 + b}]} \right) dx \approx \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Q(x_i) - Q_{(a,b)}(x_i))^2, \end{aligned} \quad (4.43)$$

gde je N opseg vrednosti argumenata koji se posmatra.

Naime, rešavanjem (4.43) je ekvivalentno za pronalaženje vrednosti za a i b korišćenjem MSE_{\min} (Mean Square Error) minimizacije kako bi se dobila najbolja tačnost za aproksimaciju Q-funkcije za posmatrani opseg x .

Kao što je prikazano u [90], kombinacija vrednosti parametara $a = 0.339$ i $b = 5.510$, označena kao $Q_{a-Borjesson-1}(x)$, daje najbolju aproksimaciju Q-funkcije za $x > 0$, i to:

$$Q_{a-Borjesson-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{0.661x + 0.339\sqrt{x^2 + 5.51}}. \quad (4.44)$$

Druga široko korišćena aproksimacija za $x \in [0, \infty)$ za parametre $a = 1$ i $b = 1$ data je sa (4.33).

Međutim, pokazano je u [90], da sve aproksimacije koje su razvili *Borjesson* i *Sundberg* često nisu pogodne za algebarske manipulacije vezane za analizu performansi komunikacionih sistema.

U [11], predložena je aproksimaciju komplementarne funkcije greške kao (4.29). Uzimajući istu formu iz [11], jednostavna gornja granica Gausove Q-funkcije nedavno je predložena kao (4.31).

Isukapalli izraz za aproksimaciju Q-funkcije može se izraziti kao [92]:

$$Q_{a-Isukapalli}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sum_{n=1}^{n_a} \frac{(-1)^{n+1} (A)^n}{B(\sqrt{2})^n n!} x^{n-1} \right) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (4.45)$$

gde su A i B odabrane vrednosti parametara prema [91]; n_a je broj iteracija zavisno od željene tačnosti.

Chiani aproksimacija Gausove Q-funkcije data je sa (4.32). *Shi* aproksimacija Gausove Q-funkcije može se izraziti kao [12]:

$$Q_{a-Shi}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^N \omega_n e^{-\sqrt{2}\zeta_n x} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (4.46)$$

gde su ζ_n and ω_n n -ti koreni N -reda *Hermite*-ovog polinoma. Kao što je predstavljeno u [12], ova aproksimacija je dovoljno tačna za $N=2$, koristeći samo dve Gausove tačke.

Aproksimacija Q-funkcije u zavisnosti od dve eksponencijalne funkcije predstavljena je u [94] kao:

$$Q_{a-Loskot}(x) = 0.208e^{-0.971x^2} + 0.147e^{-0.525x^2}. \quad (4.47)$$

U [95], dobijen je veoma jednostavan rezultat za aproksimaciju Gausove Q-funkcije sa samo dve eksponencijalne funkcije. Optimalne vrednosti parametara za a i b date su u [95] kao 1.394 i 8/13:

$$Q_{a-Sofotasios}(x) = 0.49e^{-\frac{8}{13}x} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (4.48)$$

Još jedan sličan rezultat je nedavno predložen u [96], takođe baziran na empirijskom pristupu, predložen kao:

$$Q_{a-Benitez}(x) = e^{ax^2+bx+c}, \quad (4.49)$$

gde su a, b i $c \in R$ parametri dobijeni numeričkom metodom. Optimalne vrednosti parametara (a, b, c) su date u [93, Tabela 1], za $x \in [0, 20]$.

U [97], predložena aproksimacija Q-funkcije data je u sledećem obliku:

$$Q_{a-Dao}(x) = e^{ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g}, \quad (4.50)$$

gde je $a=-0.0000009$, $b=0.0000104$, $c=0.000686$, $d=0.015205$, $e=-0.363992$, $f=-0.762741$ i $g=-0.694072$.

Polinomna aproksimacija Q-funkcije [98] data je kao:

$$Q_{a-Chen}(x) = 1 - \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{m+p} \binom{n}{p}}{m!(n-m)!} \left(\frac{n}{12}\right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{n}{2} - m\right)^{n-p} \times x^p U \left[x - \sqrt{\frac{12}{n}} \left(\frac{n}{2} - m\right) \right], \quad (4.51)$$

gde je $|x| < \sqrt{3n}$ i $U(x)$ unit step funkcija definisana kao $U(x)=1$ ako je $x>0$, $U(x)=1/2$ ako je $x=0$ i $U(x)=0$ ako je $x<0$.

Nova kompozitna aproksimacija Q-funkcije minimalne kompleksnosti od dva intervala sa granicom između intervala x_1 ima sledeći oblik:

$$Q_{a-MSE_{\min}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(1-a_1)x + a_1 \sqrt{x^2 + b_1}}, & x \in [0, x_1] \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(1-a_2)x + a_2 \sqrt{x^2 + b_2}}, & x \geq x_1 \end{cases}, \quad (4.52)$$

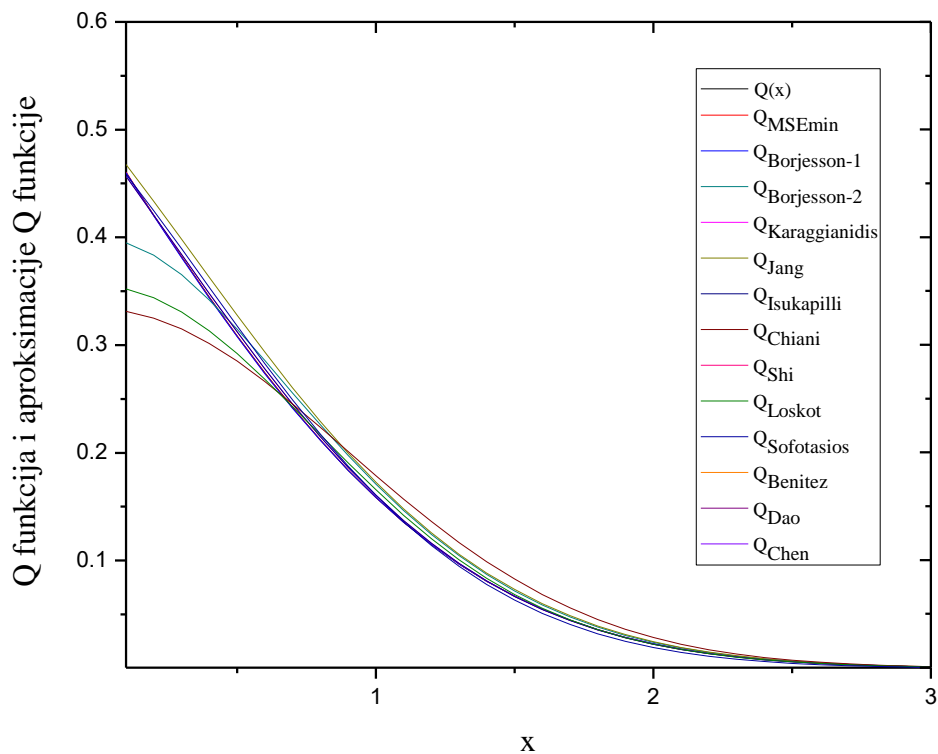
Do ideje za konstrukciju ovakve kompozitne funkcije došlo se posmatrajući svojstvo da tačnost pri aproksimiranju Q-funkcije zavisi od vrednosti numerički dobijenih parametara, što dalje zavisi od opsega argumenta x . Počevši od *Mils ratio* aproksimacije i uzimajući u obzir MSE minimizaciju, vrednosti za posmatrani interval x , korišćenjem MSE minimizacije za posmatrane opsege $x \in [0, x_1]$ i $x \in [x_1, \infty]$, dobijene odgovarajuće vrednosti za parametre $x_1, a_1, a_2, b_1, i b_2$ za $x_1=1$, su $a_1=0.3442$, $b_1=5.339$, $a_2=0.31152$ i $b_2=6.2076$.

$$Q_{a-MSE_{\min}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{0.6558x + 0.3442\sqrt{x^2 + 5.339}}, & x \in [0,1] \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{0.6885x + 0.3115\sqrt{x^2 + 6.2076}}, & x \geq 1 \end{cases}, \quad (4.53)$$

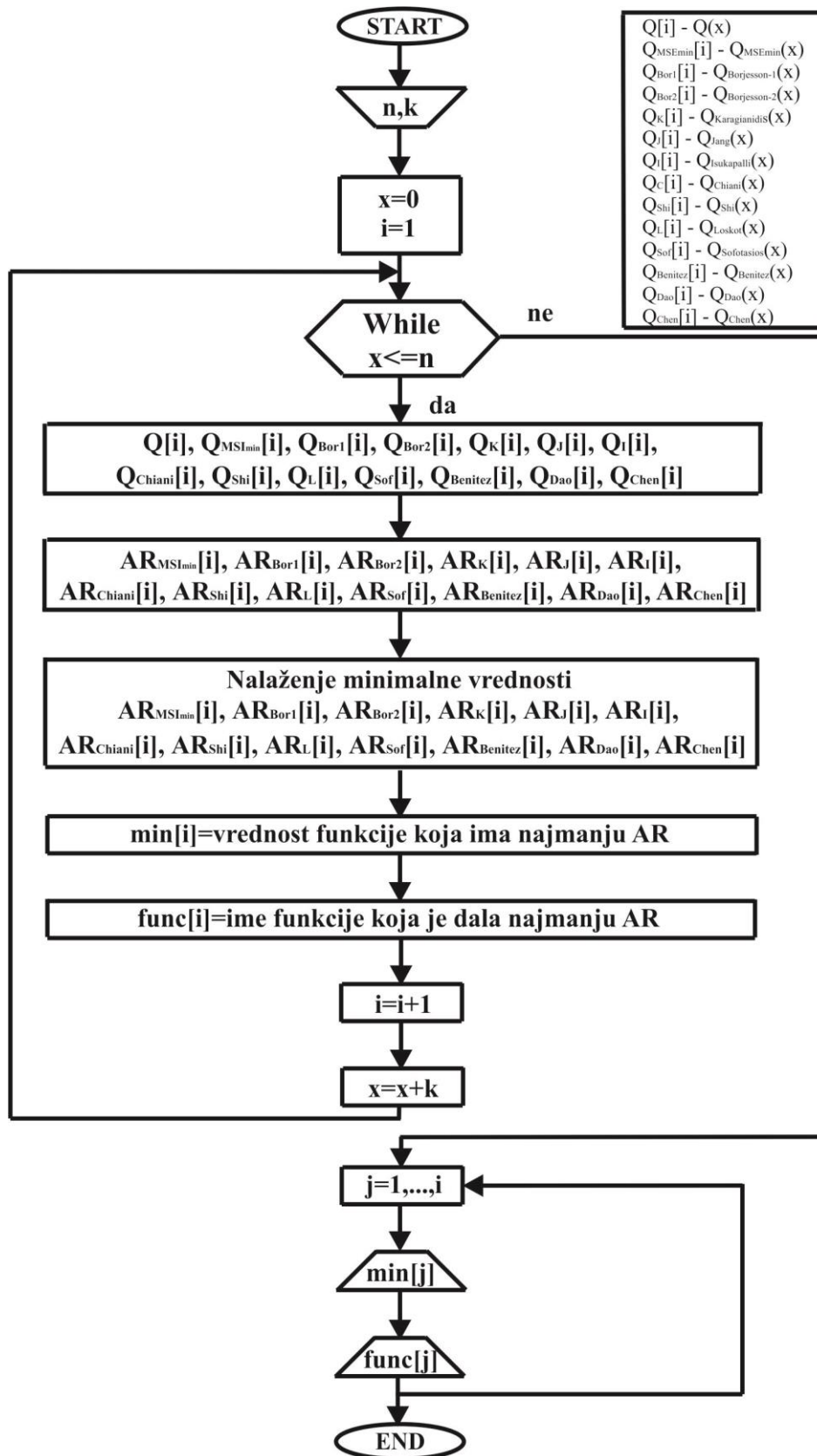
U Tabeli 4.8 i na Slici 4.8 prikazana su poređenja Q-funkcije i njenih aproksimacija. Kao što se može videti, poboljšanje tačnosti postignuto je u čitavom opsegu vrednosti, korišćenjem predložene nove kompozitne aproksimacije Q-funkcije (4.53).

Algoritam sa Slike 4.9 ima isti tok i iste korake kao algoritam sa Slike 4.1, jedino se u koraku 4 menjaju funkcije koje se upoređuju. S tim u vezi, korak 4 se definiše na sledeći način:

4. Za svaku vrednost x , odnosno za svaki i -ti korak, računa se prvo tačna vrednost Q-funkcije $Q[i]$, a zatim i njene aproksimirane vrednosti korišćenjem metoda: $Q_{MSE_{\min}}[i]$, $Q_{Bor1}[i]$, $Q_{Bor2}[i]$, $Q_K[i]$, $Q_J[i]$, $Q_I[i]$, $Q_{Chiani}[i]$, $Q_{Shi}[i]$, $Q_L[i]$, $Q_{Sof}[i]$, $Q_{Benitez}[i]$, $Q_{Dao}[i]$, $Q_{Chen}[i]$.



Slika 4.8: Poređenje $Q(x)$ funkcije i njenih aproksimacija.



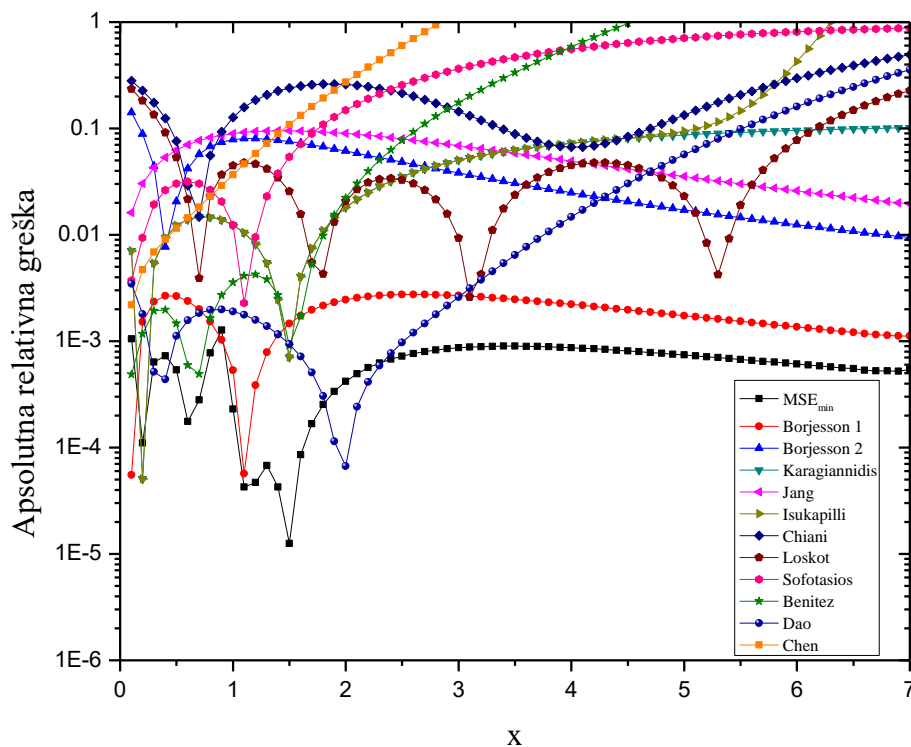
Slika 4.9: Blok dijagram algoritma za određivanje najboljih vrednosti aproksimacija Q -funkcije za predloženi kompozitni metod

Tabela 4.8: Poređenje aproksimacija $Q(x)$ funkcija.

| Function | x=0.1 | x=0.3 | x=0.5 | x=0.7 | x=1 |
|-----------------------|------------|------------|------------|------------|---------|
| $Q(x)$ | 0.46017 | 0.38209 | 0.30854 | 0.24196 | 0.15866 |
| $Q_{MSEmin}(x)$ | 0.46065 | 0.38184 | 0.30837 | 0.24203 | 0.15869 |
| $Q_{Borjesson-1}(x)$ | 0.46020 | 0.38118 | 0.30772 | 0.24148 | 0.15857 |
| $Q_{Borjesson-2}(x)$ | 0.39498 | 0.36530 | 0.31490 | 0.25581 | 0.17110 |
| $Q_{Karagiannid.}(x)$ | 0.45693 | 0.38415 | 0.31232 | 0.24552 | 0.16062 |
| $Q_{Jang}(x)$ | 0.46759 | 0.39842 | 0.32786 | 0.26056 | 0.17287 |
| $Q_{Isukapilli}(x)$ | 0.45693 | 0.38416 | 0.31241 | 0.24595 | 0.16247 |
| $Q_{Chiani}(x)$ | 0.33126 | 0.31511 | 0.28516 | 0.24556 | 0.17890 |
| $Q_{Shi}(x)$ | 0.46017 | 0.38206 | 0.30838 | 0.24154 | 0.15767 |
| $Q_{Loskot}(x)$ | 0.35222 | 0.33081 | 0.29209 | 0.24291 | 0.16573 |
| $Q_{Sofotasios}(x)$ | 0.45846 | 0.38947 | 0.31789 | 0.24929 | 0.16062 |
| $Q_{Benitez}(x)$ | 0.45995 | 0.38282 | 0.30899 | 0.24185 | 0.15809 |
| $Q_{Dao}(x)$ | 0.46002 | 0.38210 | 0.30858 | 0.24200 | 0.15866 |
| $Q_{Chen}(x)$ | 0.46139 | 0.38551 | 0.31352 | 0.24764 | 0.16381 |
| Function | x=5 | x=10 | x=15 | x=20 | MSE |
| $Q(x)$ | 2.8665e-07 | 7.6199e-24 | 3.6710e-51 | 2.7536e-89 | - |
| $Q_{MSEmin}(x)$ | 2.8686e-07 | 7.6220e-24 | 3.6714e-51 | 2.7538e-89 | 3.64e-8 |
| $Q_{Borjesson-1}(x)$ | 2.8715e-07 | 7.6243e-24 | 3.6719e-51 | 2.7540e-89 | 1.26e-7 |
| $Q_{Borjesson-2}(x)$ | 2.9157e-07 | 7.6564e-24 | 3.6790e-51 | 2.7570e-89 | 5.5e-4 |
| $Q_{Karagiannid.}(x)$ | 2.6174e-07 | 6.7794e-24 | 3.2486e-51 | 2.4321e-89 | 5.06e-6 |
| $Q_{Jang}(x)$ | 2.9678e-07 | 7.6946e-24 | 3.6871e-51 | 2.7605e-89 | 1.38e-4 |
| $Q_{Isukapilli}(x)$ | 2.0881e-05 | 2.2070e-20 | 8.8628e-47 | 2.9462e-84 | 6.63e-6 |
| $Q_{Chiani}(x)$ | 3.2500e-07 | 1.6073e-23 | 1.1553e-50 | 1.1532e-88 | 2.45e-3 |
| $Q_{Shi}(x)$ | 1.6129e-07 | 9.9883e-25 | 8.5944e-53 | 1.0270e-91 | 1.31e-7 |
| $Q_{Loskot}(x)$ | 2.9323e-07 | 2.3273e-24 | 7.3499e-53 | 9.2358e-93 | 1.62e-3 |
| $Q_{Sofotasios}(x)$ | 8.4183e-08 | 2.0086e-25 | 6.6557e-54 | 3.0629e-93 | 2.25e-5 |
| $Q_{Benitez}(x)$ | 7.3647e-07 | 4.9426e-21 | 1.5065e-43 | 2.0853e-74 | 1.24e-7 |
| $Q_{Dao}(x)$ | 2.8672e-07 | 9.0226e-24 | 2.0201e-46 | 5.4641e-36 | 2.02e-7 |
| $Q_{Chen}(x)$ | 1.8652e-14 | 5.6843e-14 | 1.3642e-12 | 3.1832e-12 | 1.07e-5 |

Na Slici 4.10 prikazana je apsolutna relativna greška izračunata za predloženu aproksimaciju Q-funkcije u poređenju sa drugim aproksimacijama. Kao što se može videti sa Slike 4.10, aproksimacija data sa (4.53) ima minimalnu apsolutnu relativnu grešku i tačnija je u skoro čitavom opsegu ulaznih argumenata.

Kompozitna aproksimacija Q-funkcije biće primenjena za slučaj procene vrednosti za ABER, za primenjeni format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala. Potrebano je proceniti srednju verovatnoću greške za SEP pomoću funkcije gustine raspodele (PDF) amplitude fading kanala za primenjeni format modulacije. Izraz za (BPSK) primenjeni format modulacije, dat sa (4.38), dok je izraz za Nakagami- m raspodelu dat sa (2.1).



Slika 4.10: Apsolutna relativna greška za novu kompozitnu aproksimaciju $Q(x)$ funkcije u poređenju sa drugim aproksimacijama.

Poređenje vrednosti za ABER, u Nakagami- m fading kanalu za različite vrednosti parametra m , dobijene aproksimacijama Q-funkcije i predloženim kompozitnim metodom date su u Tabeli 4.9, Tabeli 4.10 i Tabeli 4.11, odakle se može videti da se vrednosti za ABER za BPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala, mogu efikasnije i preciznije izračunati pomoću predloženog kompozitnog metoda za sve razmatrane vrednosti parametra m .

Tabela 4.9: Poređenje vrednosti za ABER za BPSK format modulacije, u prisustvu Nakagami-m feding kanala za parametar $m = 1$, dobijene aproksimacijama Q-funkcije i predloženim kompozitnim metodom.

| Eb/N0 [dB] | Exact (m=1) | QMSEmin(x) | QBorjesson-1(x) | QBorjesson-2(x) | QKaragiannid.(x) | QJang(x) |
|-----------------------------|------------------------------|-------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|-----------------|
| 0 | 0.142408 | 0.144278 | 0.146278 | 0.151174 | 0.147677 | 0.156943 |
| 10 | 0.022968 | 0.023250 | 0.023258 | 0.024315 | 0.023378 | 0.025077 |
| 20 | 0.002452 | 0.002479 | 0.002480 | 0.002596 | 0.002491 | 0.002675 |
| 30 | 0.000246 | 0.000248 | 0.000249 | 0.000261 | 0.000250 | 0.000269 |
| 40 | 0.000024 | 0.000024 | 0.000025 | 0.000026 | 0.000025 | 0.000027 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=1) | QChiani(x) | QLoskot(x) | QSofotasios(x) | QBenitez(x) | QDao(x) |
| 0 | 0.142408 | 0.148810 | 0.144508 | 0.147549 | 0.147786 | 0.146586 |
| 10 | 0.022968 | 0.025017 | 0.024356 | 0.024457 | 0.023660 | 0.023520 |
| 20 | 0.002452 | 0.002686 | 0.002488 | 0.002490 | 0.002528 | 0.002511 |
| 30 | 0.000246 | 0.000270 | 0.000249 | 0.000249 | 0.000254 | 0.000251 |
| 40 | 0.000024 | 0.000027 | 0.000025 | 0.000025 | 0.000025 | 0.000025 |

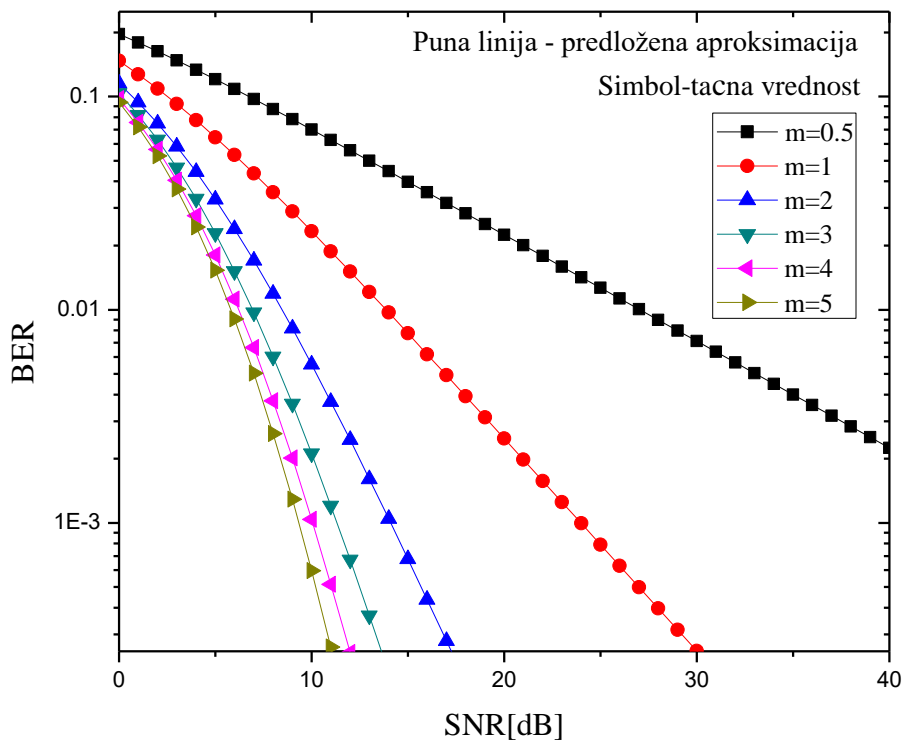
Tabela 4.10: Poređenje vrednosti za ABER za BPSK format modulacije, u prisustvu Nakagami-m feding kanala za parametar $m = 3$, dobijene aproksimacijama Q-funkcije i predloženim kompozitnim metodom.

| Eb/N0 [dB] | Exact (m=3) | QMSEmin(x) | QBorjesson-1(x) | QBorjesson-2(x) | QKaragiannid.(x) | QJang(x) |
|-----------------------------|------------------------------|-------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|-----------------|
| 0 | 0.103516 | 0.103520 | 0.103503 | 0.110873 | 0.104322 | 0.112656 |
| 10 | 0.002113 | 0.002115 | 0.002117 | 0.002245 | 0.002080 | 0.002298 |
| 20 | 3.90367e-6 | 3.91008e-6 | 3.91192e-6 | 4.12808e-6 | 3.81387e-6 | 4.23139e-6 |
| 30 | 4.18571e-9 | 4.19118e-9 | 4.19464e-9 | 4.42387e-9 | 4.08581e-9 | 4.53524e-9 |
| 40 | 4.21543e-12 | 4.22102e-12 | 4.22444e-12 | 4.45503e-12 | 4.11446e-12 | 4.56725e-12 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=3) | QChiani(x) | QLoskot(x) | QSofotasios(x) | QBenitez(x) | QDao(x) |
| 0 | 0.103516 | 0.118110 | 0.106275 | 0.102555 | 0.104899 | 0.105899 |
| 10 | 0.002113 | 0.002573 | 0.002116 | 0.001811 | 0.002250 | 0.002360 |
| 20 | 3.90367e-6 | 4.72284e-6 | 3.88305e-6 | 3.1672e-6 | 4.28345e-6 | 4.29543e-6 |
| 30 | 4.18571e-9 | 5.05839e-9 | 4.1626e-9 | 3.37263e-9 | 4.61274e-9 | 4.65371e-9 |
| 40 | 4.21543e-12 | 5.09371e-12 | 4.19207e-12 | 3.39417e-12 | 4.64758e-12 | 4.66823e-12 |

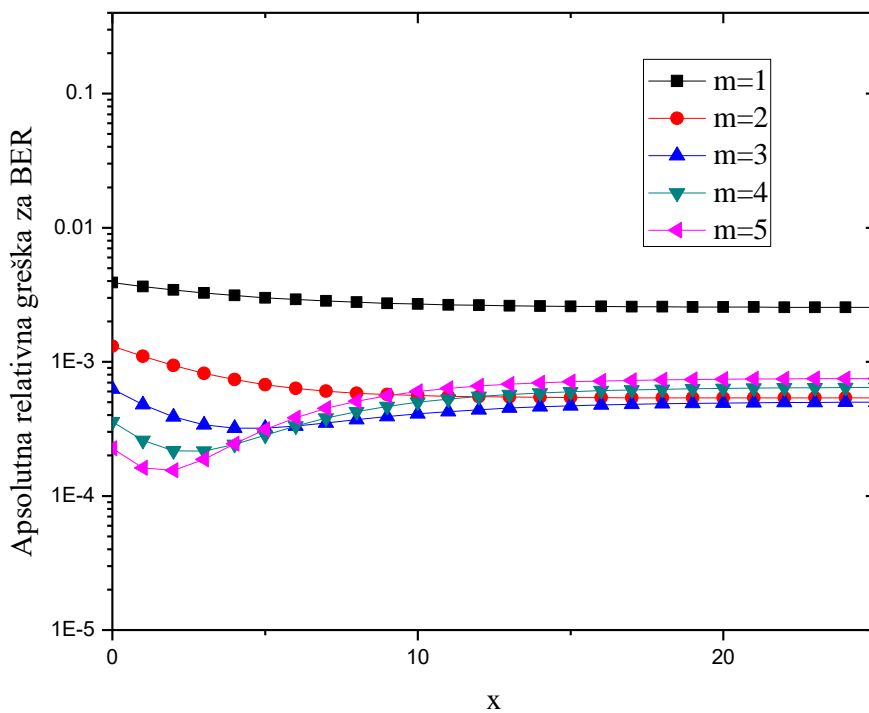
Tabela 4.11: Poređenje vrednosti za ABER za BPSK format modulacije, u prisustvu Nakagami- m feding kanala za parametar $m = 5$, dobijene aproksimacijama Q -funkcije i predloženim kompozitnim metodom.

| Eb/N0 [dB] | Exact (m=5) | Q_{MSEmin}(x) | Q_{Borjesson-1}(x) | Q_{Borjesson-2}(x) | Q_{Karagiannid.}(x) | Q_{Jang}(x) |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|----------------------------|
| 0 | 0.093834 | 0.093855 | 0.093866 | 0.100938 | 0.094425 | 0.102422 |
| 10 | 0.000596 | 0.000597 | 0.000598 | 0.000627 | 0.000578 | 0.000644 |
| 20 | 3.0745e-8 | 3.08091e-8 | 3.08228e-8 | 3.20554e-8 | 2.93711e-8 | 3.29477e-8 |
| 30 | 3.75831e-13 | 3.76112e-13 | 3.76779e-13 | 3.91435e-13 | 3.58409e-13 | 4.02294e-13 |
| 40 | 3.83642e-18 | 3.84105e-18 | 3.84609e-18 | 3.99527e-18 | 3.65792e-18 | 4.10605e-18 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=5) | Q_{Chiani}(x) | Q_{Loskot}(x) | Q_{Sofotasios}(x) | Q_{Benitez}(x) | Q_{Dao}(x) |
| 0 | 0.093834 | 0.110160 | 0.096992 | 0.092118 | 0.095194 | 0.095252 |
| 10 | 0.000596 | 0.000720 | 0.000588 | 0.000454 | 0.000670 | 0.000730 |
| 20 | 3.0745e-8 | 3.58269e-8 | 3.05959e-8 | 2.04894e-8 | 3.80836e-8 | 3.80920e-8 |
| 30 | 3.75831e-13 | 4.3596e-13 | 3.74715e-13 | 2.45729e-13 | 4.73361e-13 | 4.73442e-13 |
| 40 | 3.83642e-18 | 4.44814e-18 | 3.82579e-18 | 2.50336e-18 | 4.84058e-18 | 4.84211e-18 |

Na Slici 4.11 prikazane su vrednosti za ABER za BPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m feding kanala. Kako bi bilo uočljivo odlično poklapanje aproksimiranih vrednosti ABER za BPSK format modulacije sa tačnim vrednostima, na Slici 4.12 prikazane su vrednosti za apsolutnu relativnu grešku predložene aproksimacije za različite vrednosti parametra m u Nakagami- m feding kanalu. Iz Tabele 4.9, Tabele 4.10 i Tabele 4.11, može se videti da se vrednosti ABER za BPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m feding kanala mogu efikasnije i preciznije izračunati pomoću predloženog metoda za sve razmatrane vrednosti parametra m . Takođe se može videti da se pomoću predložene aproksimacije (4.53) dobijaju tačnije vrednosti za ABER nego korišćenjem drugih poznatih aproksimacija Q -funkcija u čitavom opsegu vrednosti.



Slika 4.11: Tačne i aproksimirane vrednosti ABER za BPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m feding kanala za različite vrednosti parametra m .



Slika 4.12: Apsolutna relativna greška ABER za BPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m feding kanala za različite vrednosti parametra m .

Primena kompozitnog metoda aproksimacije Q-funkcije može biti proširena i za proračun srednje verovatnoće greške za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m feding modela. Izraz za srednju verovatnoću greške za DE-QPSK dat je sa (4.39).

U Tabeli 4.12, Tabeli 4.13 i Tabeli 4.14, upoređene su tačne vrednosti za ABER za DE-QPSK format modulacije, izračunate numerički koristeći (4.39), (4.40) i (4.41), sa aproksimiranim vrednostima dobijenim korišćenjem (4.53) i sa aproksimacijama Q-funkcije dostupnim u literaturi.

Na Slici 4.13 prikazane su vrednosti za ABER za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m feding kanala. Sa Slike 4.13, kao i iz Tabele 4.12, Tabele 4.13 i Tabele 4.14, može se videti da se vrednosti ABER za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m feding kanala mogu efikasnije i preciznije izračunati predloženim kompozitnim metodom za sve razmatrane vrednosti parametra m . Takođe se može videti da se korišćenjem predložene aproksimacije (4.53) dobijaju tačnije vrednosti za ABER nego korišćenjem drugih poznatih aproksimacija Q-funkcije u čitavom opsegu vrednosti.

Tabela 4.12: Poređenje vrednosti za ABER za DE-QPSK format modulacije, u prisustvu Nakagami- m feding kanala za parametar $m = 1.5$, dobijene aproksimacijama Q-funkcije i predloženim kompozitnim metodom.

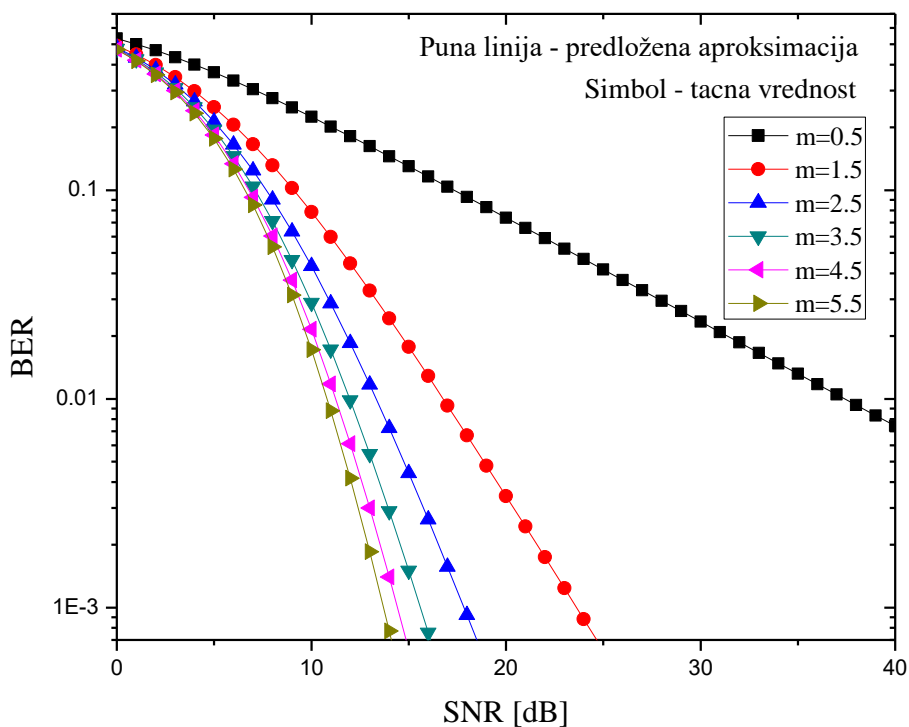
| E_b/N₀ [dB] | Exact (m=1.5) | Q_{MSEmin}(x) | Q_{Borjesson-1}(x) | Q_{Borjesson-2}(x) | Q_{Karagiannid}(x) | Q_{Jang}(x) |
|---|--------------------------|------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| 0 | 0.492238 | 0.484221 | 0.480784 | 0.507835 | 0.482738 | 0.513773 |
| 10 | 0.078714 | 0.080722 | 0.042670 | 0.082708 | 0.042746 | 0.083963 |
| 20 | 0.003425 | 0.003541 | 0.001539 | 0.003603 | 0.001541 | 0.003663 |
| 30 | 0.000112 | 0.000116 | 0.000049 | 0.000118 | 0.000049 | 0.000120 |
| 40 | 3.56392e-6 | 3.60442e-6 | 1.56247e-6 | 3.7489e-6 | 1.56421e-6 | 3.81269e-6 |
| E_b/N₀ [dB] | Exact (m=1.5) | Q_{Chiani}(x) | Q_{Loskot}(x) | Q_{Sofotasios}(x) | Q_{Benitez}(x) | Q_{Dao}(x) |
| 0 | 0.492238 | 0.510151 | 0.473365 | 0.481831 | 0.483173 | 0.481183 |
| 10 | 0.078714 | 0.089506 | 0.042596 | 0.041853 | 0.043204 | 0.035303 |
| 20 | 0.003425 | 0.003946 | 0.001538 | 0.001503 | 0.001561 | 0.001315 |
| 30 | 0.000112 | 0.000129 | 0.000049 | 0.000048 | 0.000050 | 0.000042 |
| 40 | 3.56392e-6 | 4.11117e-6 | 1.56137e-6 | 1.52508e-6 | 1.58474e-6 | 1.57362e-6 |

Tabela 4.13: Poređenje vrednosti za ABER za DE-QPSK format modulacije, u prisustvu Nakagami-m feding kanala za parametar $m = 3.5$, dobijene aproksimacijama Q-funkcije i predloženim kompozitnim metodom.

| Eb/N0 [dB] | Exact (m=3.5) | QMSEmin(x) | QBorjesson-1(x) | QBorjesson-2(x) | QKaragiannid.(x) | QJang(x) |
|-----------------------------|--------------------------------|-------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|-----------------|
| 0 | 0.476344 | 0.468580 | 0.466032 | 0.496393 | 0.468719 | 0.500893 |
| 10 | 0.028892 | 0.029544 | 0.030221 | 0.030531 | 0.004507 | 0.031193 |
| 20 | 0.000040 | 0.000041 | 0.000042 | 0.000042 | 2.33625e-6 | 0.000043 |
| 30 | 1.56599e-8 | 1.62547e-8 | 1.63476e-8 | 1.63778e-8 | 7.77863e-10 | 1.68005e-8 |
| 40 | 5.05201e-12 | 5.16321e-12 | 5.27873e-12 | 5.28221e-12 | 2.47259e-13 | 5.41871e-12 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=3.5) | QChiani(x) | QLoskot(x) | QSofotasios(x) | QBenitez(x) | QDao(x) |
| 0 | 0.476344 | 0.504489 | 0.466151 | 0.46768 | 0.468977 | 0.469987 |
| 10 | 0.028892 | 0.034799 | 0.004563 | 0.004194 | 0.004686 | 0.004756 |
| 20 | 0.000040 | 0.000048 | 2.36639e-6 | 2.13471e-6 | 2.45841e-6 | 2.56642e-6 |
| 30 | 1.56599e-8 | 1.85711e-8 | 7.87953e-10 | 7.09328e-10 | 8.19665e-10 | 8.28774e-10 |
| 40 | 5.05201e-12 | 5.98816e-12 | 2.50467e-13 | 2.25427e-13 | 2.60582e-13 | 2.71693e-13 |

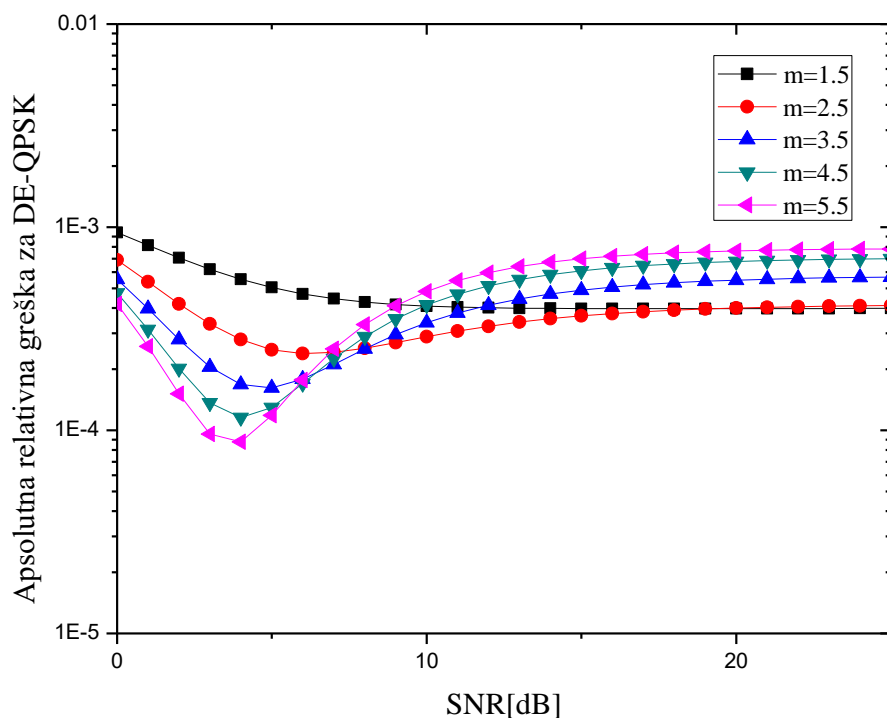
Tabela 4.14: Poređenje vrednosti za ABER za DE-QPSK format modulacije, u prisustvu Nakagami-m feding kanala za parametar $m = 5.5$, dobijene aproksimacijama Q-funkcije i predloženim kompozitnim metodom.

| Eb/N0 [dB] | Exact (m=5.5) | QMSEmin(x) | QBorjesson-1(x) | QBorjesson-2(x) | QKaragiannid.(x) | QJang(x) |
|-----------------------------|--------------------------------|-------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|-----------------|
| 0 | 0.471561 | 0.466579 | 0.462849 | 0.493027 | 0.465871 | 0.497101 |
| 10 | 0.017215 | 0.018021 | 0.000769 | 0.018140 | 0.000756 | 0.018601 |
| 20 | 1.46089e-6 | 1.48627e-6 | 6.55646e-9 | 1.49687e-6 | 6.40398e-9 | 1.53838e-6 |
| 30 | 7.4449e-12 | 7.49213e-12 | 2.30225e-14 | 7.50733e-12 | 2.24716e-14 | 7.71435e-12 |
| 40 | 2.47551e-17 | 2.48586e-17 | 7.35741e-20 | 2.49093e-17 | 7.18087e-20 | 2.55956e-17 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=5.5) | QChiani(x) | QLoskot(x) | QSofotasios(x) | QBenitez(x) | QDao(x) |
| 0 | 0.471561 | 0.503153 | 0.466340 | 0.464879 | 0.465961 | 0.463872 |
| 10 | 0.017215 | 0.020893 | 0.000766 | 0.000663 | 0.000816 | 0.000857 |
| 20 | 1.46089e-6 | 1.66141e-6 | 6.50533e-9 | 5.40058e-9 | 7.11674e-9 | 7.11897e-9 |
| 30 | 7.4449e-12 | 8.27293e-12 | 2.28353e-14 | 1.88659e-14 | 2.50604e-14 | 2.50703e-14 |
| 40 | 2.47551e-17 | 2.74293e-17 | 7.29737e-20 | 6.02594e-20 | 8.01101e-20 | 8.01256e-20 |



Slika 4.13: Tačne i aproksimirane vrednosti ABER za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala za različite vrednosti parametra m .

Na Slici 4.14 prikazane su vrednosti apsolutne relativne greške za ASEP kada se primenjuje predloženi metod i kada se ASEP računa na standardni način za DE-QPSK format modulacije, za različite vrednosti parametra m , kako bi se ukazao na odlično poklapanje aproksimiranih i tačnih vrednosti ASEP za DE-QPSK format modulacije.



Slika 4.14: Apsolutna relativna greška predložene aproksimacije ASEP za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m modela fedinga za različite vrednosti parametra m .

4.6 Aproksimacija Q-funkcije na intervalima pomoću gornjih granica

Analiziran je novi pristup zasnovan na intervalnoj aproksimaciji Q-funkcije. Prikazani pristup je generalnog tipa jer se može primeniti na svakom posmatranom intervalu. Pristup je zasnovan na analitičkom metodu koji je adaptivan i za svaki dati argument možemo dobiti gornju i donju granicu za aproksimaciju. Korišćenjem predloženog metoda izabrana su dva opsega od svih teoretski mogućih opsega i na taj način je dobijena prosta tesna gornja granica za aproksimaciju Q-funkcije. Dobijeni rezultati pokazuju da je predložena aproksimacija Q-funkcije veoma tačna i preciznija od mnogobrojnih dobro poznatih aproksimacija. Na osnovu predložene aproksimacije Q-funkcije, srednja verovatnoća greške po bitu može se proceniti kada se posmatra prenos u Nakagami- m fading kanalu za primenjeni (BPSK) formatom modulacije. Takođe, ova aproksimacija se može koristiti u mnogim teoretskim komunikacionim problemima baziranim na izračunavanju Q-funkcije. Dodatno poboljšanje tačnosti može se dobiti formiranjem kompozitnog modela aproksimacije Q-funkcije

uvođenjem još jednog intervala za najviše ulazne argumente radi postizanja veće tačnosti aproksimacije Q-funkcije.

Osnovni cilj je pojednostaviti primenu aproksimacije koja je predložena u [102], i pojednostaviti aproksimaciju predloženu u [102], gde je Q-funkcija aproksimirana sa četiri aproksimacije koje su zavisne od argumenata, pri čemu bi od četiri aproksimacije za svaki argument trebalo odrediti koji je najbolji. Polazna osnova je odrediti koja je od dve predložene gornje granice najbolja za sve ulazne argumente, dalje uprošćavanje bi bilo odrediti da li postoji jedna gornja granica do koje možemo reći da je do te granice najbolja jedna aproksimacija a od te granice druga. U [105] su razmatrane aproksimacione klase, međutim, najbolje granice su definisane u [102]. Dalje istraživanje bi bilo uporediti predložene aproksimacije sa postojećim gornjim granicama. Dodatno poboljšanje tačnosti se može dobiti formiranjem kompozitnog modela aproksimacije uvođenjem još jednog intervala za najviše ulazne argumente.

Koristeći odnos između $erfc$ funkcije i Q-funkcije, aproksimacija dobijena skraćivanjem beskonačnih sumi za $erfc$ funkciju predstavljena je u [100]:

$$erfc(x) = \frac{\exp\{-x^2\}}{\sqrt{\pi x}} \left[1 + \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(2x^2)^n} + R_N(x) \right] \quad (4.54)$$

gde $R_N(x)$ predstavlja izraz za relativnu grešku $|R_N(x)| \leq 1 \cdot 3 \cdots (2N-1) / (2x^2)^N$.

Aproksimacija Q-funkcije iz [100], zavisi od N i ima veoma kompleksnu analitičku formu. Ako se $erfc(x)$ računa za velike argumente x , ovo skraćivanje ograničava tačnost, ali je ne ograničava za male argumente x . Asimptotska aproksimacija $erfc(x)$ funkcije se široko koristi za izračunavanje funkcije greške za velike argumente x .

U [91] *Jang* je predložio jednostavnu gornju granicu Gaussove Q-funkcije u obliku (4.31), dok je *Chiani* u [10] predstavio aproksimaciju Q-funkcije u obliku suma eksponencijalnih funkcija kao (4.32).

Kako je prikazano u [91], granice za Q-funkciju mogu imati složenu matematičku formu. U [103] nedavno je predložena gornja granica za Q-funkciju, koja je veoma tačna za male argumente, a sa nešto nižim tačnostima za veće vrednosti argumenata u obliku:

$$Q_{Abreu}(x) = \frac{1}{50} \exp\{-x^2\} + \frac{1}{2(x+1)} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad (4.55)$$

U potrazi za jednostavnijom aproksimacijom sa visokom tačnošću, kao polazna tačka za analizu može se iskoristiti aproksimacija Q-funkcije (4.44) iz [90]. Biće predstavljene još dve funkcije kako bi bila određena jedna od predloženih gornjih granica koja je najbolja za sve ulazne argumente, a za određivanje vrednosti argumenta od dva intervala gde je svaki aproksimiran sa jednom od predloženih gornjih granica [102]:

$$Q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{2x + \sqrt{(\pi-2)^2 x^2 + 2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad (4.56)$$

i

$$Q_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{3x + \sqrt{x^2 + 8}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}. \quad (4.57)$$

Lema 1: x_1 će biti izabrano kako bi se dobila $\min(V_1, V_2)$, tesna gornja granica aproksimacije Q-funkcije, i na taj način formirala dva intervala $(0, x_1)$ i (x_1, ∞) za aproksimaciju Q-funkcije, $Q^{\text{com-1}}(x)$, na sledeći način:

$$Q^{\text{com-1}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{2x + \sqrt{(\pi-2)^2 x^2 + 2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, & 0 \leq x < x_1, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{3x + \sqrt{x^2 + 8}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, & x \geq x_1. \end{cases} \quad (4.58)$$

Dokaz 1: Koristeći (Teoremu 10) iz [102], može se odrediti x_1 kako bi se dobio $\min(Q_1, Q_2)$ u posmatranim opsezima $(0, x_1)$ i (x_1, ∞) koristeći:

$$Q_1(x) \leq Q_2(x) \Rightarrow \frac{\pi}{2x + \sqrt{(\pi-2)^2 x^2 + 2\pi}} \leq \frac{4}{3x + \sqrt{x^2 + 8}}, \quad (4.59)$$

nakon transformacije (4.59) sledi:

$$0.75x + \sqrt{\frac{x^2}{16} + \frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{1.303}{\pi^2} x^2 + \frac{2}{\pi}} + \frac{2}{\pi} x, \quad (4.60)$$

i

$$0.11338x + \sqrt{\frac{x^2}{16} + \frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{1.303}{\pi^2}x^2 + \frac{2}{\pi}}, \quad (4.61)$$

Sada, nakon kvadriranja obe strane nejednakosti (4.61), budući da su obe pozitivne, nakon transformacije, sledi da je $x_1=1.3509$.

Nešto kompleksnija aproksimacija će biti predstavljena korišćenjem tri intervala. Izbor gornje granice biće određen na sličan način koristeći druge gornje granice osim onih koje su predložene.

Lema 2: x_1 i x_2 će biti izabrani kako bi se dobila tesna gornja granica kompozitne aproksimacije Q-funkcije i na taj način formirati tri intervala $(0, t_1)$, (t_1, t_2) i (t_2, ∞) za aproksimaciju Q-funkcije, $Q^{\text{com-2}}(x)$, na sledeći način:

$$Q^{\text{com-2}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{2x + \sqrt{(\pi-2)^2 x^2 + 2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, & 0 < x < t_1, \\ \frac{1}{50} \exp\{-x^2\} + \frac{1}{2(x+1)} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, & t_1 \leq x < t_2, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{3x + \sqrt{x^2 + 8}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, & x \geq t_2. \end{cases} \quad (4.62)$$

Rešavanjem jednačina (4.63) i (4.64), numerički se mogu dobiti vrednosti za t_1 i t_2 :

$$\frac{1}{50} \exp\{-x^2\} + \frac{1}{2(x+1)} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{2x + \sqrt{(\pi-2)^2 x^2 + 2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad (4.63)$$

i

$$\frac{1}{50} \exp\{-x^2\} + \frac{1}{2(x+1)} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{3x + \sqrt{x^2 + 8}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad (4.64)$$

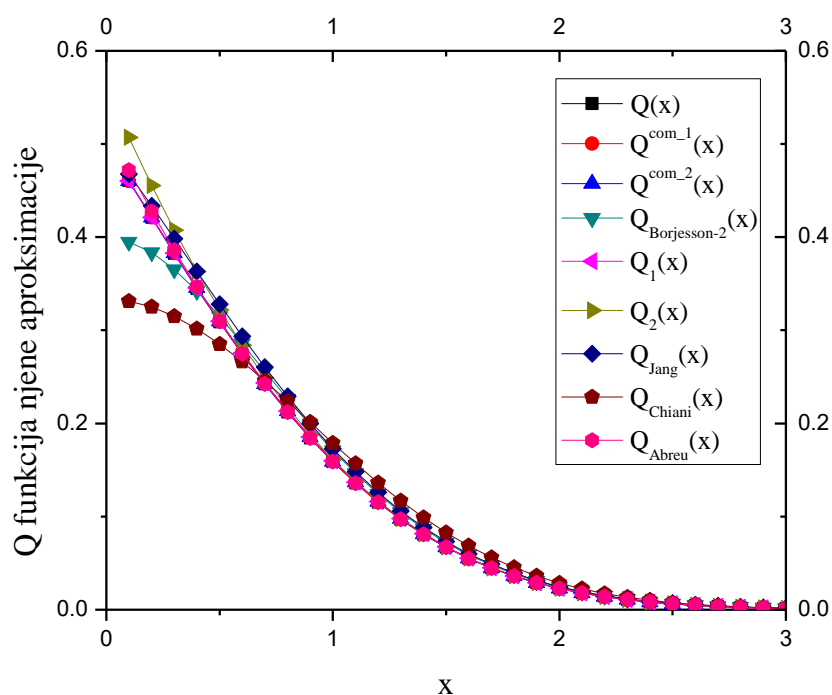
odakle sledi da su: $t_1=0.4$ i $t_2=1.7$.

U [105] razmatrane su odgovarajuće klase, ali bolje granice nisu pronađene.

Prvi predloženi metod za aproksimaciju Q-funkcije, $Q^{\text{com-1}}(x)$, je jednostavniji, ali ako je potrebna veća tačnost potrebno je odabrati $Q^{\text{com-2}}(x)$ metod za aproksimaciju Q-funkcije.

U Tabeli 4.15 i Slici 4.15 prikazano je poređenje Q-funkcije i aproksimacija Q-funkcije. Kao što se vidi sa Slike 4.15, korišćenjem predložene nove aproksimacije Q-

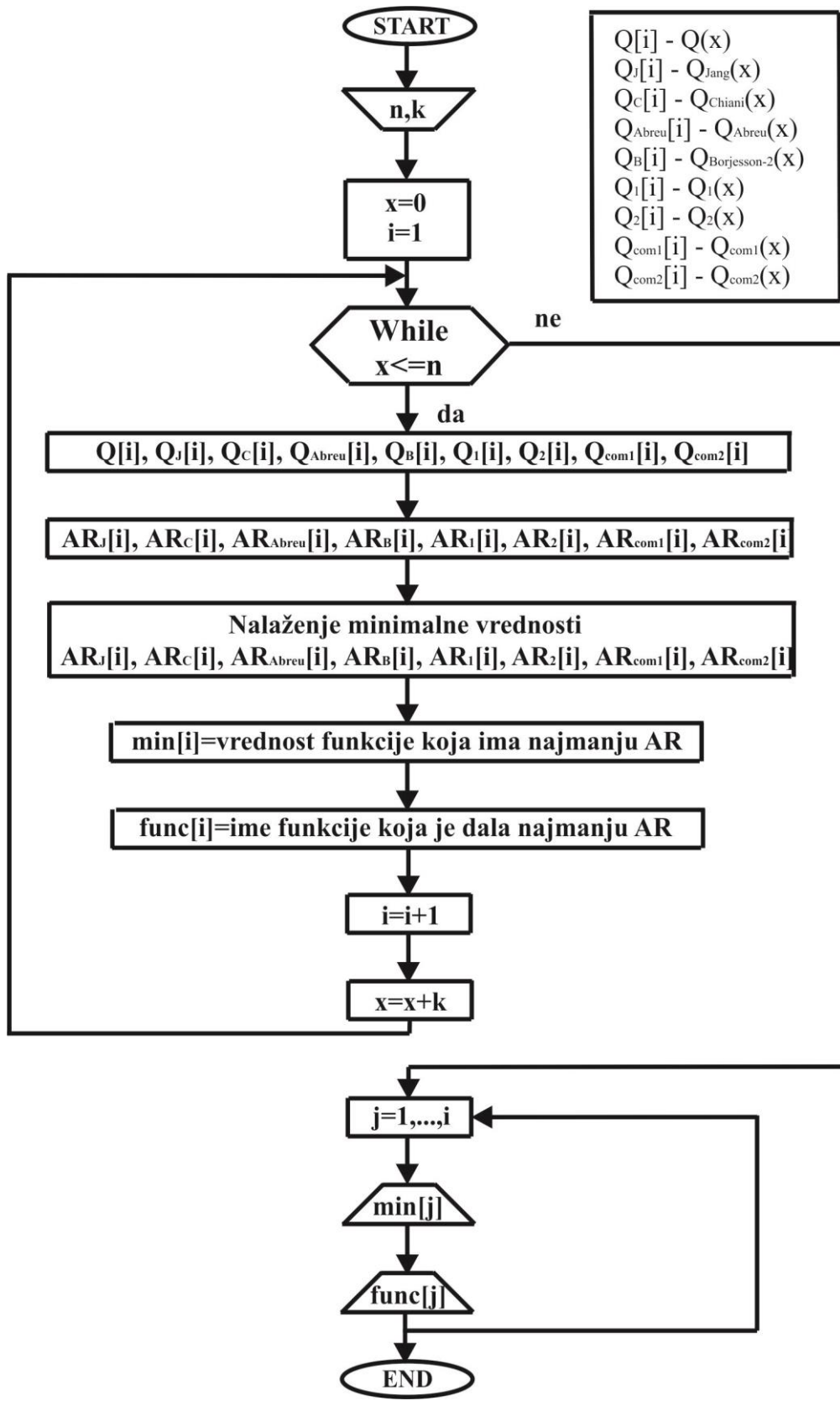
funkcije na intervalima pomoću gornje granice, poboljšanje tačnosti je postignuto u čitavom opsegu vrednosti, koja je data u Lemi 1 za $x_1 = 1.3509$.



Slika 4.15: Poređenje aproksimacija $Q(x)$ funkcije sa novim kompozitnim metodama aproksimacije $Q(x)$ funkcije na intervalima pomoću gornjih granica.

Algoritam sa Slike 4.16 ima isti tok i iste korake kao algoritam sa Slike 4.1, jedino se u koraku 4 menjaju funkcije koje se upoređuju. S tim u vezi, korak 4 se definiše na sledeći način:

4. Za svaku vrednost x , odnosno za svaki i -ti korak, računa se prvo tačna vrednost Q -funkcije $Q[i]$, a zatim i njene aproksimirane vrednosti korišćenjem metoda: $Q[i]$, $Q_1[i]$, $Q_2[i]$, $Q^{\text{com}_1}[i]$, $Q^{\text{com}_2}[i]$, $Q_{\text{Abreu}}[i]$, $Q_{\text{B}}[i]$, $Q_{\text{C}}[i]$, $Q_{\text{Jang}}[i]$, $Q_{\text{Chiani}}[i]$.

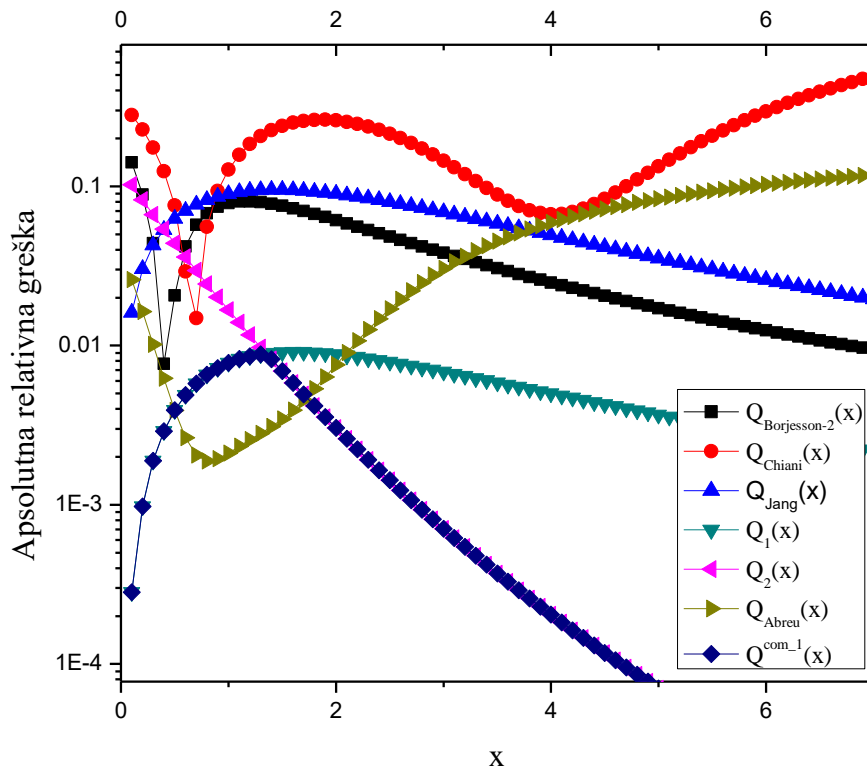


Slika 4.16: Blok dijagram algoritma za određivanje najboljih vrednosti aproksimacija Q -funkcije na intervalima pomoću gornjih granica

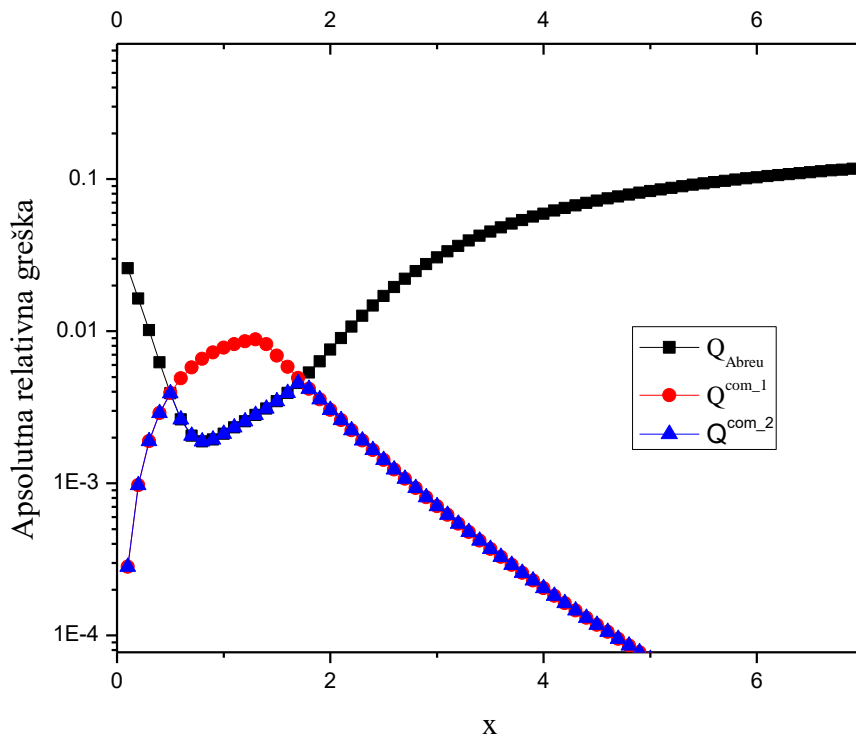
Na Slici 4.17 prikazana je apsolutna relativna greška za predloženu tesnu gornju granicu kompozitne aproksimacije Q -funkcije u odnosu na druge poznate aproksimacije. Kao što je vidljivo sa Slike 4.17, kompozitna aproksimacija data u Lemi 1 za $x_1 = 1.3509$ ima minimalnu apsolutnu relativnu grešku i preciznija je od drugih poznatih aproksimacija u gotovo čitavom opsegu ulaznih vrednosti.

Tabela 4.15: Poređenje aproksimacija $Q(x)$ funkcije sa novim kompozitnim metodama aproksimacije $Q(x)$ funkcije na intervalima pomoću gornjih granica.

| Function | x=0.1 | x=0.3 | x=0.5 | x=0.7 | x=1 |
|-----------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------------|
| Q(x) | 0.46017 | 0.38209 | 0.30854 | 0.24196 | 0.15866 |
| QBorjesson-2(x) | 0.39498 | 0.36530 | 0.31490 | 0.25581 | 0.17110 |
| Q₁(x) | 0.46030 | 0.38281 | 0.30975 | 0.24336 | 0.15989 |
| Q₂(x) | 0.50725 | 0.40743 | 0.3221 | 0.24912 | 0.16131 |
| QJang(x) | 0.46759 | 0.39842 | 0.32786 | 0.26056 | 0.17287 |
| QChiani(x) | 0.33126 | 0.31511 | 0.28516 | 0.24556 | 0.17890 |
| QAbreu(x) | 0.4721 | 0.38597 | 0.30974 | 0.24246 | 0.15899 |
| Q^{com_1}(x) | 0.46030 | 0.38281 | 0.30975 | 0.24336 | 0.15989 |
| Q^{com_2}(x) | 0.46029 | 0.38279 | 0.30973 | 0.24246 | 0.15899 |
| Function | x=5 | x=10 | x=15 | x=20 | |
| Q(x) | 2.8665e-07 | 7.6199e-24 | 3.6710e-51 | 2.7536e-89 | |
| QBorjesson-2(x) | 2.9157e-07 | 7.6564e-24 | 3.6790e-51 | 2.7570e-89 | |
| Q₁(x) | 2.8771e-07 | 7.6286e-24 | 3.673e-51 | 2.755e-89 | |
| Q₂(x) | 2.8667e-07 | 7.6199e-24 | 3.671e-51 | 2.7536e-89 | |
| QJang(x) | 2.9678e-07 | 7.6946e-24 | 3.6871e-51 | 2.7605e-89 | |
| QChiani(x) | 3.2500e-07 | 1.6073e-23 | 1.1553e-50 | 1.1532e-88 | |
| QAbreu(x) | 3.1055e-07 | 8.767e-24 | 4.3323e-51 | 3.2949e-89 | |
| Q^{com_1}(x) | 2.8771e-07 | 7.6286e-24 | 3.673e-51 | 2.7550e-89 | |
| Q^{com_2}(x) | 2.8667e-07 | 7.6199e-24 | 3.671e-51 | 2.7536e-89 | |



Slika 4.17: Apsolutna relativna greška za novu kompozitnu aproksimaciju Q funkcije, Q^{com_1} , u poređenju sa drugim poznatim aproksimacijama.



Slika 4.18: Apsolutna relativna greška za novu kompozitnu aproksimaciju Q funkcije, Q^{com_2} , u poređenju sa drugim poznatim aproksimacijama.

Na Slici 4.18 predstavljena je apsolutna relativna greška za novu kompozitnu aproksimaciju Q-funkcije u poređenju sa drugim poznatim aproksimacijama. Kao što se vidi sa Slike 4.18, korišćenjem kompozitnog metoda Q^{com_1} dobijena je bolja aproksimacija (niže vrednosti apsolutne relativne greške) u širokom opsegu argumenata funkcije u odnosu na druge aproksimacije Q-funkcije. Međutim, postoji segment u kojem se dobija bolja aproksimacija korišćenjem kompozitnog metoda Q^{com_2} . Dodatno poboljšanje tačnosti u čitavom opsegu ulaznih argumenata može se dobiti formiranjem kompozitnog metoda aproksimacije na intervalima pomoću gornjih granica datog u Lemi 2.

Mogu se efikasno proceniti vrednosti za ASEP u prisustvu Nakagami- m fading kanala zamenom izraza za novu kompozitnu aproksimaciju Q-funkcije, (4.58) i (4.62), sa (2.1) u (4.38). U Tabeli 4.16, Tabeli 4.17 i Tabeli 4.18, predstavljene su vrednosti za ASEP u prisustvu Nakagami- m fading modela za različite vrednosti parametra m , dobijene aproksimacijama Q-funkcije.

Tabela 4.16: Poređenje vrednosti za ASEP u prisustvu Nakagami- m fading kanala za parametar $m=2$, dobijene aproksimacijama Q funkcije i predloženim intervalnim metodama.

| Eb/N0 [dB] | Exact (m=2) | $Q^{\text{com}_2}(\mathbf{x})$ | $Q^{\text{com}_1}(\mathbf{x})$ | $Q_{\text{Borjesson-2}}(\mathbf{x})$ | $Q_{\text{Jang}}(\mathbf{x})$ |
|-------------------|--------------------|---|--|--|---|
| -10 | 3.3893e-1 | 3.398e-1 | 3.399e-1 | 3.3308e-1 | 3.563e-1 |
| 0 | 1.151e-1 | 1.154e-1 | 1.158e-1 | 1.223e-1 | 1.247e-1 |
| 10 | 5.528e-3 | 5.543e-3 | 5.558e-3 | 5.891e-3 | 6.015e-3 |
| 20 | 7.256e-5 | 7.276e-5 | 7.292e-5 | 7.721e-5 | 7.890e-5 |
| 30 | 7.475e-7 | 7.495e-7 | 7.512e-7 | 7.952e-7 | 8.127e-7 |
| 40 | 7.497e-9 | 7.517e-9 | 7.534e-9 | 7.976e-9 | 8.151e-9 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=2) | $Q_{\text{Chiani}}(\mathbf{x})$ | $Q_{\text{Abreu}}(\mathbf{x})$ | $Q_1(\mathbf{x})$ | $Q_2(\mathbf{x})$ |
| -10 | 3.3893e-1 | 2.953e-1 | 3.416e-1 | 3.399e-1 | 3.582e-1 |
| 0 | 1.151e-1 | 1.270e-1 | 1.154e-1 | 1.159e-1 | 1.175e-1 |
| 10 | 5.528e-3 | 6.568e-3 | 5.563e-3 | 5.573e-3 | 5.585e-3 |
| 20 | 7.256e-5 | 8.663e-5 | 7.312e-5 | 7.315e-5 | 7.321e-5 |
| 30 | 7.475e-7 | 8.928e-7 | 7.534e-7 | 7.536e-7 | 7.541e-7 |
| 40 | 7.497e-9 | 8.955e-9 | 7.557e-9 | 7.559e-9 | 7.563e-9 |

Tabela 4.17: Poređenje vrednosti za ASEP u prisustvu Nakagami- m fading kanala za parametar $m=4$, dobijene aproksimacijama Q funkcije i predloženim intervalnim metodama.

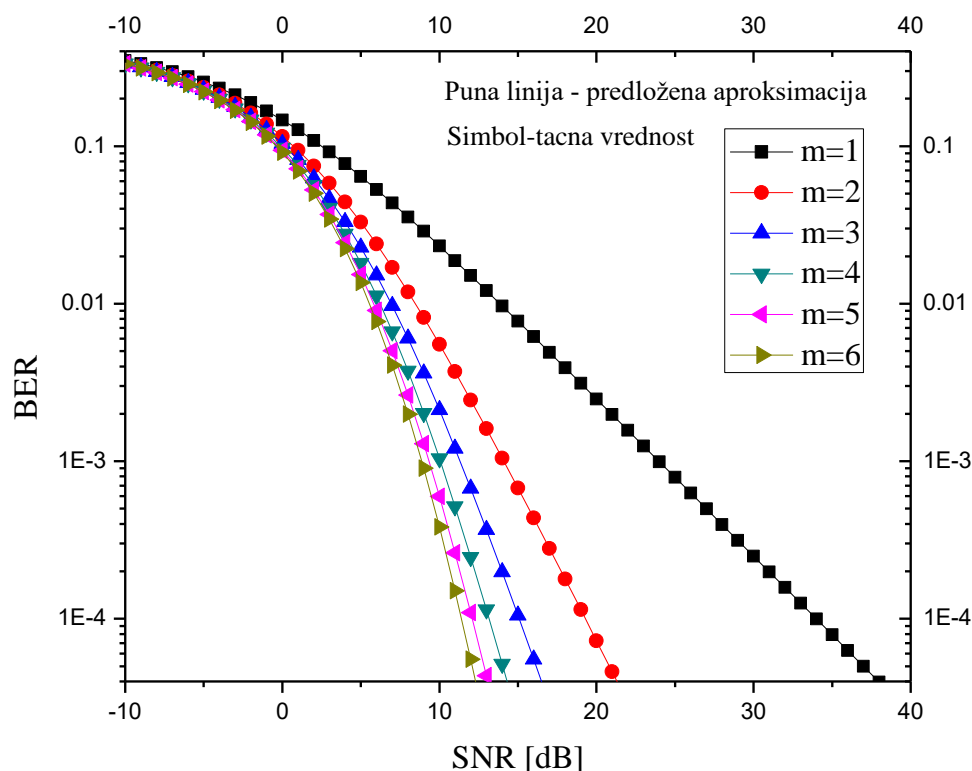
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=4) | $Q^{\text{com}_2}(\mathbf{x})$ | $Q^{\text{com}_1}(\mathbf{x})$ | $Q_{\text{Borjesson-2}}(\mathbf{x})$ | $Q_{\text{Jang}}(\mathbf{x})$ |
|-------------------|--------------------|---|--|--|---|
| -10 | 3.332e-1 | 3.343e-1 | 3.344e-1 | 3.314e-1 | 3.514e-1 |
| 0 | 0.975e-1 | 0.977e-1 | 0.982e-1 | 1.047e-1 | 1.063e-1 |
| 10 | 1.038e-3 | 1.041e-3 | 1.042e-3 | 1.097e-3 | 1.126e-3 |
| 20 | 3.038e-7 | 3.044e-7 | 3.045e-7 | 3.189e-7 | 3.276e-7 |
| 30 | 3.450e-11 | 3.455e-11 | 3.457e-11 | 3.617e-11 | 3.716e-11 |
| 40 | 3.494e-15 | 3.500e-15 | 3.502e-15 | 3.664e-15 | 3.764e-15 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=4) | $Q_{\text{Chiani}}(\mathbf{x})$ | $Q_{\text{Abreu}}(\mathbf{x})$ | $Q_1(\mathbf{x})$ | $Q_2(\mathbf{x})$ |
| -10 | 3.332e-1 | 2.947e-1 | 3.354e-1 | 3.343e-1 | 3.509e-1 |
| 0 | 0.975e-1 | 1.132e-1 | 0.978e-1 | 0.983e-1 | 0.988e-1 |
| 10 | 1.038e-3 | 1.264e-3 | 1.052e-3 | 1.047e-3 | 1.042e-3 |
| 20 | 3.038e-7 | 3.622e-7 | 3.102e-7 | 3.062e-7 | 3.045e-7 |
| 30 | 3.450e-11 | 4.100e-11 | 3.526e-11 | 3.476e-11 | 3.457e-11 |
| 40 | 3.494e-15 | 4.152e-15 | 3.572e-15 | 3.521e-15 | 3.502e-15 |

Tabela 4.18: Poređenje vrednosti za ASEP u prisustvu Nakagami- m fading kanala za parametar $m=6$, dobijene aproksimacijama Q funkcije i predloženim intervalnim metodama.

| Eb/N0 [dB] | Exact (m=6) | $Q^{\text{com}_2}(\mathbf{x})$ | $Q^{\text{com}_1}(\mathbf{x})$ | $Q_{\text{Borjesson-2}}(\mathbf{x})$ | $Q_{\text{Jang}}(\mathbf{x})$ |
|-------------------|--------------------|---|--|--|---|
| -10 | 3.313e-1 | 3.325e-1 | 3.326e-1 | 3.307e-1 | 3.497e-1 |
| 0 | 0.913e-1 | 0.916e-1 | 0.920e-1 | 0.983e-1 | 0.997e-1 |
| 10 | 3.814e-4 | 3.820e-4 | 3.821e-4 | 3.996e-4 | 4.109e-4 |
| 20 | 3.803e-9 | 3.806e-9 | 3.807e-9 | 3.945e-9 | 4.053e-9 |
| 30 | 5.089e-15 | 5.093e-15 | 5.094e-15 | 5.273e-15 | 5.417e-15 |
| 40 | 5.244e-21 | 5.248e-21 | 5.249e-21 | 5.433e-21 | 5.581e-21 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=6) | $Q_{\text{Chiani}}(\mathbf{x})$ | $Q_{\text{Abreu}}(\mathbf{x})$ | $Q_1(\mathbf{x})$ | $Q_2(\mathbf{x})$ |
| -10 | 3.313e-1 | 2.945e-1 | 3.333e-1 | 3.325e-1 | 3.484e-1 |
| 0 | 0.913e-1 | 1.080e-1 | 0.916e-1 | 0.921e-1 | 0.924e-1 |
| 10 | 3.814e-4 | 4.551e-4 | 3.894e-4 | 3.843e-4 | 3.821e-4 |
| 20 | 3.803e-9 | 4.334e-9 | 3.940e-9 | 3.828e-9 | 3.807e-9 |
| 30 | 5.089e-15 | 5.771e-15 | 5.285e-15 | 5.122e-15 | 5.094e-15 |
| 40 | 5.244e-21 | 5.944e-21 | 5.447e-21 | 5.278e-21 | 5.249e-21 |

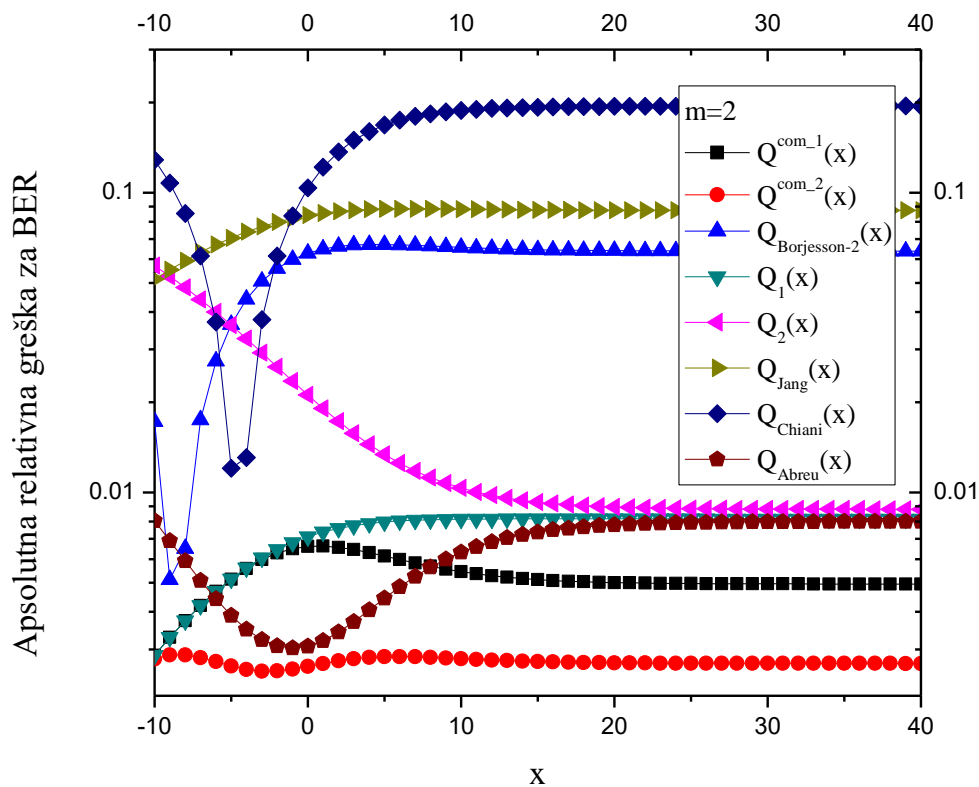
Iz Tabele 4.16, Tabele 4.17 i Tabele 4.18 može se videti da vrednosti ASEP za BPSK u prisustvu Nakagami- m fading kanala mogu biti efikasno i tačno izračunate korišćenjem predloženog kompozitnog metoda aproksimacije Q-funkcije, Q^{com_1} , za sve razmatrane vrednosti parametra m u širokom opsegu posmatranih ulaznih vrednosti. Takođe se može videti da se korišćenjem Q^{com_2} predloženog kompozitnog metoda aproksimacije Q-funkcije na intervalima pomoću gornjih granica, dodatno poboljšavaju vrednosti za ABER u čitavom opsegu posmatranih ulaznih vrednosti.

Na Slici 4.19 prikazane su vrednosti za ABER za BPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala. Kako bi bilo uočljivije odlično poklapanje aproksimiranih vrednosti ABER za BPSK format modulacije sa tačnim vrednostima, na Slici 4.19 prikazane su vrednosti za apsolutnu relativnu grešku predložene aproksimacije za različite vrednosti parametra m u Nakagami- m fading kanalu. Može se videti da se pomoću predložene nove aproksimacije Q-funkcije na intervalima pomoću gornje granice $Q^{\text{com}_2}(x)$, dobijaju tačnije vrednosti za ABER nego korišćenjem drugih poznatih aproksimacija Q-funkcije u čitavom opsegu vrednosti.



Slika 4.19: Poređenje vrednosti za ASEP za BPSK u prisustvu Nakagami- m fading kanala, dobijene aproksimacijama Q funkcija i predloženom intervalnom metodom Q^{com_2} .

Kako bi se prikazalo odlično poklapanje vrednosti ASEP za BPSK format modulacije dobijene pomoću predloženih kompozitnih metoda Q^{com_2} i Q^{com_1} sa tačnim vrednostima, na Slici 4.20 predstavljene su vrednosti za apsolutnu relativnu grešku ASEP za BPSK predložene aproksimacije za različite vrednosti Nakagami- m fading kanala. Kao što se može videti korišćenjem metoda Q^{com_2} i Q^{com_1} , dobijene su aproksimacije Q-funkcije visoke tačnosti (niske vrednosti apsolutne relativne greške) u širokom opsegu ulaznih argumenata, u poređenju sa drugim poznatim aproksimacijama za izračunavanje vrednosti ASEP.



Slika 4.20: Apsolutna relativna greška tačnih i aproksimiranih vrednosti Q^{com_2} , ASEP za BPSK format modulacije.

Predložene nove aproksimacije mogu se primeniti i za (DE-QPSK) format modulacije u prisustvi Nakagami- m fading kanala.

Tabela 4.19: Poređenje vrednosti ASEP za DE-QPSK u prisustvu Nakagami- m fading kanala za $m=2.5$, dobijene aproksimacijama Q funkcije i predloženim intervalnim metodama

| Eb/N0 [dB] | Exact (m=2.5) | $Q^{com_2}(x)$ | $Q^{com_1}(x)$ | $Q_{Borjesson-2}(x)$ | $Q_{Jang}(x)$ |
|-------------------|----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|--|---------------------------------|
| -10 | 7.1833e-1 | 7.1872e-1 | 7.188e-1 | 7.0980e-1 | 7.2608e-1 |
| 0 | 4.8137e-1 | 4.8220e-1 | 4.8344e-1 | 4.9996e-1 | 5.0492e-1 |
| 10 | 0.4325e-1 | 0.4338e-1 | 0.4344e-1 | 0.4570e-1 | 0.4655e-1 |
| 20 | 3.0977e-4 | 3.1053e-4 | 3.1074e-4 | 3.2642e-4 | 3.3358e-4 |
| 30 | 1.0814e-6 | 1.0838e-6 | 1.0845e-6 | 1.1389e-6 | 1.1642e-6 |
| 40 | 3.4546e-9 | 3.4621e-9 | 3.4642e-9 | 3.6378e-9 | 3.7190e-9 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=2.5) | $Q_{Chiani}(x)$ | $Q_{Abreu}(x)$ | $Q_1(x)$ | $Q_2(x)$ |
| -10 | 7.1833e-1 | 6.7508e-1 | 7.2013e-1 | 7.1873e-1 | 7.2865e-1 |
| 0 | 4.8137e-1 | 5.0609e-1 | 4.8222e-1 | 4.8340e-1 | 4.8760e-1 |
| 10 | 0.4325e-1 | 0.5122e-1 | 0.4352e-1 | 0.4357e-1 | 0.4350e-1 |
| 20 | 3.0977e-4 | 3.6930e-4 | 3.1288e-4 | 3.1196e-4 | 3.1095e-4 |
| 30 | 1.0814e-6 | 1.2888e-6 | 1.0928e-6 | 1.0889e-6 | 1.0851e-6 |
| 40 | 3.4546e-9 | 4.1169e-9 | 3.4911e-9 | 3.4783e-9 | 3.4664e-9 |

Tabela 4.20: Poređenje vrednosti ASEP za DE-QPSK u prisustvu Nakagami- m fading kanala za $m=3.5$, dobijene aproksimacijama Q funkcije i predloženim intervalnim metodama

| Eb/N0 [dB] | Exact (m=3.5) | $Q^{com_2}(x)$ | $Q^{com_1}(x)$ | $Q_{Borjesson-2}(x)$ | $Q_{Jang}(x)$ |
|-------------------|----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|--|---------------------------------|
| -10 | 7.1831e-1 | 7.1870e-1 | 7.1880e-1 | 7.0995e-1 | 7.2617e-1 |
| 0 | 4.7634e-1 | 4.7716e-1 | 4.7854e-1 | 4.9639e-1 | 5.0089e-1 |
| 10 | 0.2889e-1 | 0.2898e-1 | 2.9003e-2 | 0.3053e-1 | 0.3119e-1 |
| 20 | 4.0809e-5 | 4.0824e-5 | 4.0833e-5 | 4.2775e-5 | 4.3866e-5 |
| 30 | 1.5659e-8 | 1.5645e-8 | 1.5648e-8 | 1.6377e-8 | 1.6800e-8 |
| 40 | 5.052e-12 | 5.049e-12 | 5.047e-12 | 5.282e-12 | 5.418e-12 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=3.5) | $Q_{Chiani}(x)$ | $Q_{Abreu}(x)$ | $Q_1(x)$ | $Q_2(x)$ |
| -10 | 7.1831e-1 | 6.7514e-1 | 7.2012e-1 | 7.1871e-1 | 7.2893e-1 |
| 0 | 4.7634e-1 | 5.0448e-1 | 4.7717e-1 | 4.7848e-1 | 4.8237e-1 |
| 10 | 0.2889e-1 | 0.3479e-1 | 0.2913e-1 | 0.2911e-1 | 0.2901e-1 |
| 20 | 4.0809e-5 | 4.8609e-5 | 4.1412e-5 | 4.1042e-5 | 4.0838e-5 |
| 30 | 1.5659e-8 | 1.8571e-8 | 1.5894e-8 | 1.5728e-8 | 1.5649e-8 |
| 40 | 5.052e-12 | 5.988e-12 | 5.1275e-12 | 5.073e-12 | 5.048e-12 |

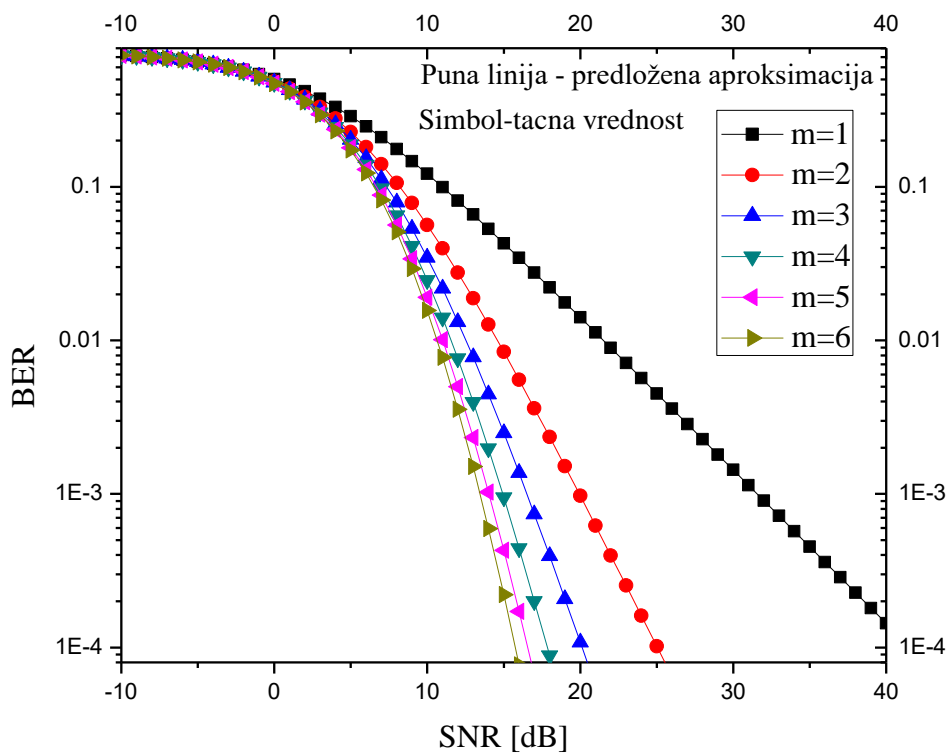
Tabela 4.21: Poređenje vrednosti ASEP za DE-QPSK u prisustvu Nakagami- m fading kanala za $m=4.5$, dobijene aproksimacijama Q funkcije i predloženim intervalnim metodama

| Eb/N0 [dB] | Exact (m=4.5) | $Q^{\text{com}_2}(\mathbf{x})$ | $Q^{\text{com}_1}(\mathbf{x})$ | $Q_{\text{Borjesson-2}}(\mathbf{x})$ | $Q_{\text{Jang}}(\mathbf{x})$ |
|-------------------|----------------------|---|--|--|---|
| -10 | 7.1829e-1 | 7.1869e-1 | 7.188e-1 | 7.1004e-1 | 7.2622e-1 |
| 0 | 4.7344e-1 | 4.7420e-1 | 4.7572e-1 | 4.9435e-1 | 4.9859e-1 |
| 10 | 0.2154e-1 | 0.2160e-1 | 7.1100e-2 | 0.2273e-1 | 7.4592e-1 |
| 20 | 6.9898e-6 | 6.9988e-6 | 7.1100e-6 | 7.2615e-6 | 7.4592e-6 |
| 30 | 3.043e-10 | 3.017e-10 | 3.0150e-10 | 3.1415e-10 | 3.2273e-10 |
| 40 | 9.949e-15 | 9.854e-15 | 9.8507e-15 | 1.0262e-14 | 1.0543e-14 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=4.5) | $Q_{\text{Chiani}}(\mathbf{x})$ | $Q_{\text{Abreu}}(\mathbf{x})$ | $Q_1(\mathbf{x})$ | $Q_2(\mathbf{x})$ |
| -10 | 7.1829e-1 | 6.7517e-1 | 7.2011e-1 | 7.1870e-1 | 7.2908e-1 |
| 0 | 4.7344e-1 | 5.0365e-1 | 4.7424e-1 | 4.7564e-1 | 4.7934e-1 |
| 10 | 0.2154e-1 | 0.2610e-1 | 0.2176e-1 | 0.2171e-1 | 0.2161e-1 |
| 20 | 6.9898e-6 | 8.1755e-6 | 7.1104e-6 | 6.9990e-6 | 6.9595e-6 |
| 30 | 3.043e-10 | 3.5191e-10 | 3.0876e-10 | 3.015e-10 | 3.015e-10 |
| 40 | 9.949e-15 | 1.1490e-14 | 1.0090e-14 | 9.851e-15 | 9.850e-15 |

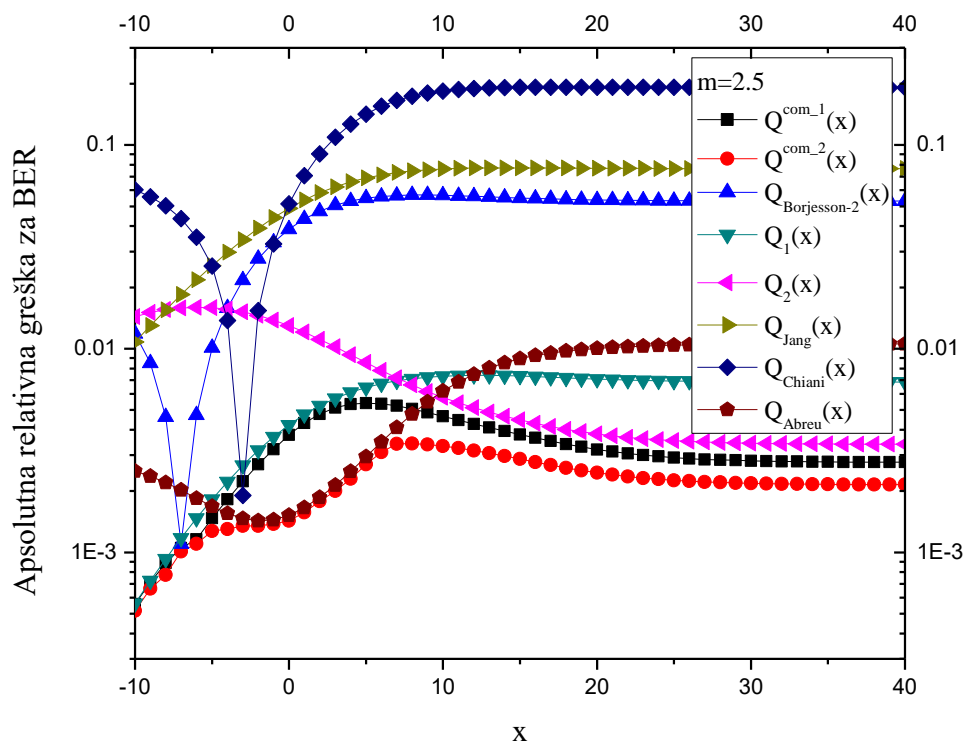
Poređenje tačnih vrednosti ASEP za DE-QPSK format modulacije, prikazano je u Tabeli 4.19, Tabeli 4.20 i Tabeli 4.21. Vrednosti za ASEP upoređene su računanjem numerički pomoću (4.39) i aproksimiranim pomoću (4.58) i (4.62) uz poređenje sa drugim poznatim aproksimacijama Q -funkcije.

Na Slici 4.18 prikazane su vrednosti za ASEP za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala.

Iz Tabele 4.19, Tabele 4.20 i Tabele 4.21, kao i sa Slike 4.21, može se videti da vrednosti ASEP za DE-QPSK primenjeni format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala za različite vrednosti parametra m mogu biti efikasno i precizno procenjene predloženim kompozitnim metodama na intervalima pomoću gornjih granica, Q^{com_2} i Q^{com_1} . Korišćenjem predloženih aproksimacija (4.58) i (4.62), mere performansi za ABER su tačnije izračunate nego korišćenjem drugih poznatih aproksimacija Q -funkcije u zatvorenom obliku u čitavom opsegu ulaznih vrednosti.



Slika 4.21: ASEP za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami-m fading kanala.



Slika 4.22: Apsolutna relativna greška tačnih i aproksimiranih vrednosti ASEP za DE-QPSK format modulacije.

Na Slici 4.22 prikazane su vrednosti za apsolutnu relativnu grešku predložene aproksimacije ASEP za DE-QPSK primenjeni format modulacije za različite vrednosti Nakagami- m fading kanala, kako bi se ukazao na odlično poklapanje aproksimiranih vrednosti ASEP za DE-QPSK primenjeni format modulacije sa tačnim. Prikazani rezultati pružaju još jedno opravdanje za korišćenje predloženih kompozitnih aproksimacija Q-funkcije na intervalima pomoću gornjih granica, Q^{com_2} i Q^{com_1} , za dizajniranje bežičnih komunikacionih sistema.

4.7 Aproksimacija Q-funkcije dobijena pomoću genetskog algoritma

Predstavljena je nova kompozitna aproksimacija Gaussove Q-funkcije, koja predstavlja važno sredstvo u oblasti teorije komunikacija. Genetski algoritam je korišćen kako bi se pronašli optimalni koeficijenti za predloženu kompozitnu aproksimaciju. Tačnost nove kompozitne aproksimacije ispitana je i upoređena sa aproksimacijama Q-funkcije dostupnim u literaturi. Pokazano je da predstavljena kompozitna aproksimacija pruža bolju tačnost u poređenju sa drugim aproksimacijama, uz neznatno povećanje matematičke složenosti [116].

Genetski algoritmi (GA) su najraniji, najpoznatiji i najšire korišćeni evolucionarni algoritmi. GA su simulacije prirodne selekcije koje mogu rešiti probleme optimizacije. Iako sadrže mnogo šire klase sistema osim optimizacije funkcija, GA često služe kao efikasni alati za optimizaciju zasnovani na principima genetike i prirodne selekcije [116].

Osnovne operacije genetskog algoritma su selekcija, ukrštanje i mutacija. Hromozom (*Chromosome*) je vektor promenljivih optimizacije, odnosno, predstavlja potencijalno rešenje problema. Populacija (*Population*) predstavlja skup svih hromozoma. Generacija (*Generation*) predstavlja skup hromozoma u određenoj iteraciji genetskog algoritma.

Aproksimacije Q-funkcije, koje imaju relativno jednostavne forme i relativno visoke tačnosti za određeni opseg vrednosti argumenata, uglavnom su predstavljene kako bi bile upoređivane sa novom predloženom aproksimacijom Q-funkcije.

Borjesson i Sundberg (1979.) su prvi koji su predložili veoma tačnu aproksimaciju Gaussove Q-funkcije. U tom smislu, date su neke tesne granice i veoma dobra aproksimacija Q-funkcije predstavljena je u [90], označena kao $Q_{a-Borjesson-1}(x)$ (4.42). Aproksimacija u jednačini (4.42) smatra se manje korisnom u algebarskim proračunima. Obzirom na srodne radove za aproksimaciju Gausove Q-funkcije, predstavljen je alternativni izraz kao zbir eksponencijalnih funkcija (4.32) koji je prilično jednostavan ali manje tačan, označen kao $Q_{a-Chiani}(x)$ [10].

Sa $Q_{a-Karagianidis}(x)$ (4.29), označena je aproksimacija Q-funkcije data u [11] koja se pokazala kao veoma precizna za male argumente. Poređenjem aproksimacija Q-funkcija $Q_{a-Chiani}(x)$ i $Q_{a-Karagianidis}(x)$ zaključeno je u [11] da $Q_{a-Karagianidis}(x)$ ima malo složeniju formu, ali pruža tačniju aproksimaciju za širok spektar argumenata, posebno u regionu vrednosti malih argumenata. Modifikovana verzija aproksimacije Q-funkcije inspirisana aproksimacijom datom u [11] predložena je u [92] označena sa (4.31).

Aproksimacija Q-funkcije u zavisnosti od tri eksponencijalne funkcije predstavljena je u [94] kao:

$$Q_{a-Loskot}(x) = 0.168e^{-0.876x^2} + 0.144e^{-0.525x^2} + 0.002e^{-0.603x^2}. \quad (4.65)$$

U [108] razmatrana je aproksimacija Q-funkcije koja predstavlja kombinaciju $Q_{a-Borjesson-1}(x)$ i $Q_{a-Loskot}(x)$ kako bi se poboljšala tačnost aproksimacije Q-funkcije po cenu povećanja složenosti:

$$Q_{a-Develi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{0.9702 \cdot e^{-\frac{x^2}{2.0055}}}{\left(0.3987\sqrt{x^2 + 3.6677} + (1 - 0.3987)x\right)} \cdot \left(0.0013e^{-2.369x^2} + 0.0054e^{-1.0436x^2}\right) \quad x \geq 0 \quad (4.66)$$

U [8], predstavljen je veoma jednostavna aproksimacija Gausove Q-funkcije pomoću dve eksponencijalne funkcije, sa sasvim zadovoljavajućom tačnošću, označena kao $Q_{a-Sofotasios}(x)$ (4.48).

Eksponencijalna funkcija drugog reda predstavljena u [96], označena kao $Q_{a-Benitez}(x)$ (4.49), sa minimalnom sumom kvadratne greške (min-SSE), ima velike aproksimativne greške osim za slučaj $x \in [0, 2]$. Prema tome, ova aproksimacija je manje prikladna za upotrebu pri izračunavanju performansi komunikacionih sistema pod uticajem fedinga.

U potrazi za što jednostavnijom aproksimacijom sa visokom tačnošću, kao polazna tačka za analizu može se iskoristiti aproksimacija Q-funkcije predložena u [117]. Aproksimacija Q-funkcije n -tog reda može se predstaviti kao [117]:

$$Q_m(x) = e^{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}, \quad (4.67)$$

gde n predstavlja red aproksimacije a $\Omega = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_0]$ nepoznate parametre koji će biti izračunati pomoću genetskog algoritma (GA). Jednačina (4.67) može se predstaviti u zatvorenom obliku kao [117]:

$$Q_m(x) = f(x, a_n, a_{n-1}, \dots, a_0), \quad (4.68)$$

gde $f(x)$ predstavlja nelinearnu zavisnost između $\{x, a_n, a_{n-1}, \dots, a_0\}$ i $Q_m(x)$. Za određenu vrednost n vrednosti za Ω se računaju korišćenjem MSE_{\min} minimizacije kako bi se dobila najbolja tačnost za aproksimaciju Q-funkcije za posmatrani opseg x .

$$J(x; \Omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (Q(x_k) - Q_m(x_k))^2, \quad (4.69)$$

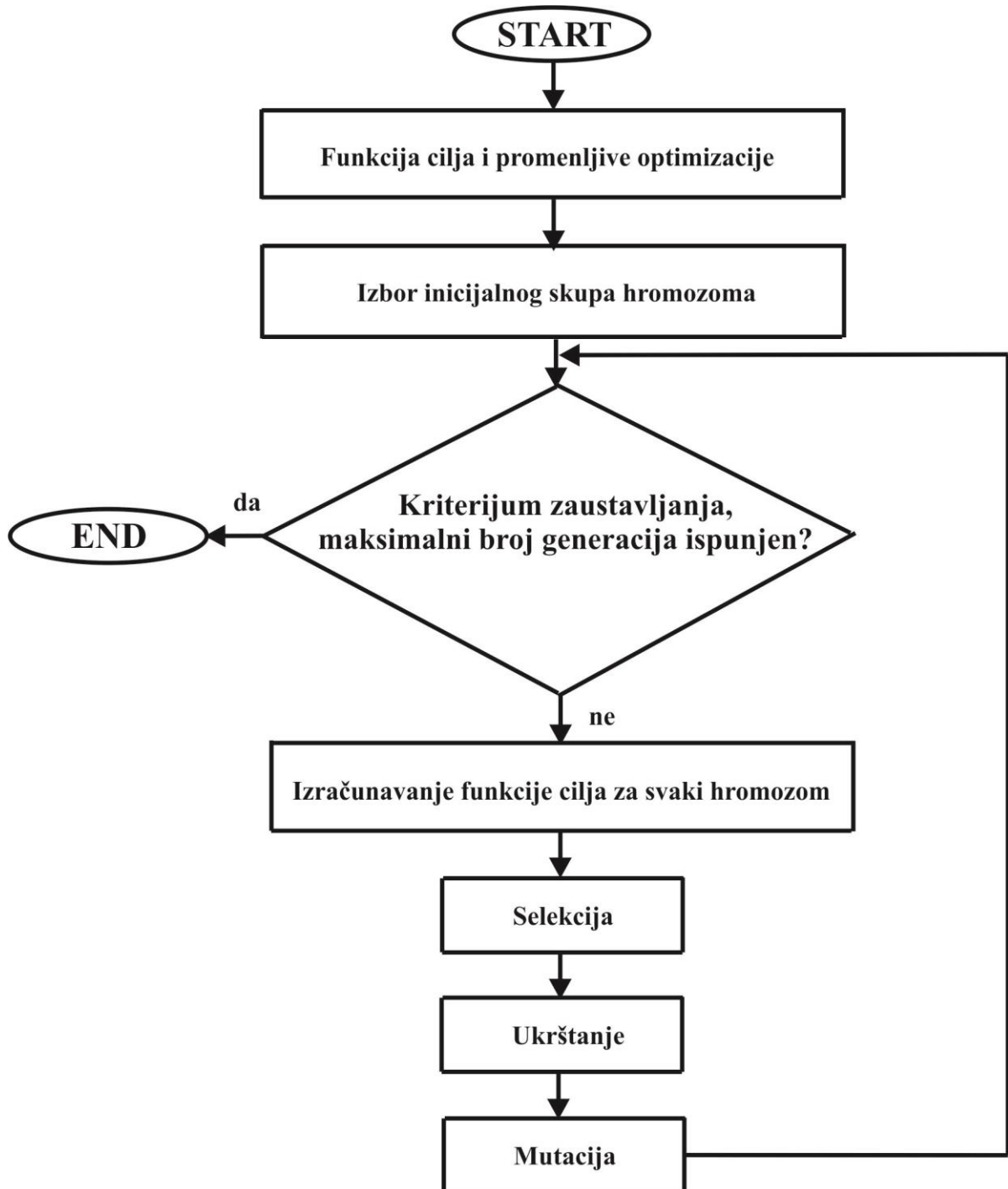
gde k označava k -ti uzorak, N predstavlja broj uzoraka. $Q(x_k)$ predstavlja tačne vrednosti Q-funkcije, dok $Q_m(x_k)$ predstavlja vrednosti izračunate pomoću predložene aproksimacije. (4.69) se može predstaviti kao:

$$J(x; \Omega) = \frac{1}{N} \int_0^N (Q(x) - e^{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (Q(x_k) - Q_{(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)}(x_k))^2. \quad (4.70)$$

GA je 1975. godine prvi predložio Holland, kao robusne stohastičke postupke pretraživanja zasnovane na principima prirodne selekcije i preživljavanja najsnažnijih, kao i da su se pokazali efikasnim u različitim problemima optimizacije [116]. Obzirom da se pretraga koju GA realizuje vrši sa više tačaka, optimalno rešenje na složenom prostoru može se brzo naći. Dijagram toka jednostavnog GA prikazan je na Slici 4.23. Ovaj algoritam se može opisati sledećim koracima:

1. Definisane funkcije cilja, promenljivih optimizacije kao i veličine populacije,
2. Izbor inicijalnog skupa hromozoma,
3. Izračunavanje funkcije cilja za svakii hromozom,
4. Selekcija,
5. Ukrštanje,

-
6. Mutacija,
 7. Provera kriterijuma zaustavljanja: ako je kriterijum zadovoljen optimizacija se završava, u suprotnom vratiti se na korak 3.



Slika 4.23: Blok dijagram algoritma za određivanje najboljih vrednosti aproksimacija Q -funkcije dobijenih pomoću GA.

Prvi korak primene GA na određivanje optimalnog rešenja je predstavljanje nezavisnog parametra kao binarni niz konačne dužine koji se naziva hromozom. U GA, proces optimizacije počinje sa grupom hromozoma, koja sačinjava inicijalnu populaciju, koja se razvija tokom procesa optimizacije kako bi se odredila globalna rešenja. Selekcija (reprodukcija), ukrštanje i mutacija, predstavljaju glavne genetske operatore, koji se primenjuju na populaciju kako bi potražili globalno optimalno rešenje. Selekcija je prva genetska operacija u GA optimizaciji u kojoj se vrši izbor hromozoma koji će učestvovati u procesu ukrštanja. Na osnovu sposobnosti hromozoma unutar populacije, selekcionni operator određuje hromozome u populaciji koji imaju najveće šanse za preživljavanje, odnosno najbolje vrednosti funkcije cilja, na osnovu čega se hromozomi sortiraju prema vrednostima funkcije cilja. Sposobnost hromozoma odnosi se na to koliko dobro ovaj hromozom rešava problem koji se razmatra.

Kao rezultat toga, određeni broj rešenja koja imaju bolje vrednosti mogu se preneti na sledeću generaciju. Cilj ukrštanja je razmena roditeljskih hromozoma kako bi se proizvelo jedan ili više potomaka sa karakteristikama roditelja izabranih u procesu selekcije. Efekat roditeljskih hromozoma na novi hromozom zavisi od verovatnoće ukrštanja. Hromozomi koji imaju najveće šanse za preživljavanje ukrštaju se sa drugim hromozomima sa velikim šansama za preživljavanje i na taj način proizvode novu generaciju hromozoma. Ovaj proces se nastavlja sve dok GA ne pronađe prihvatljivo rešenje problema optimizacije.

Mutacija je proces nasumične izmene hromozoma roditelja sa verovatnoćom koja zavisi od zadatog stepena mutacije. Generalno, pošto su stope mutacije male u prirodnim populacijama, verovatnoća primene mutacija u optimizacionim problemima je takođe vrlo mala. Proces selekcije, ukrštanja i mutacije prolazi određeni broj generacija ili dok rešenje ne dostigne neki unapred definisani pokazatelj uspeha. Odnosno, GA prekida optimizaciju kada se zadovolji kriterijum zaustavljanja.

Veličina populacije N je postavljena na 50, verovatnoća ukrštanja na 0.9 i verovatnoća mutacije na 0.05, dok je maksimalni broj generacija podešen na 100. Zbog stohastičke prirode GA, rešenja se razlikuju u svakoj iteraciji. Iz tog razloga, GA je pokrenut deset puta i izabran je najtačniji rezultat.

Sada se može definisati nova aproksimacija Q-funkcije, dobijena primenom GA, kao:

$$Q_{GA}(x) = \begin{cases} Q_1(x) & 0 \leq x \leq x_1, \\ Q_2(x) & x > x_1, \end{cases}$$

$$Q_1(x) = e^{a_0x^2 + a_1x + a_2}, \quad (4.71)$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(1-b_1)x + b_1\sqrt{x^2 + c_1}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

Vrednosti za posmatrani interval x , korišćenjem GA za posmatrane opsege $x \in [0, x_1]$ i $x \in [x_1, \infty]$, dobijene su odgovarajuće vrednosti za parametre x_1 , a_0 , a_1 , a_2 , b_1 , i c_1 . Za $x_1=0.7$, vrednosti su $a_0=-0.35054$, $a_1=-0.78995$, $a_2=-0.69354$, i $b_1=0.32026$ i $c_1=5.97353$.

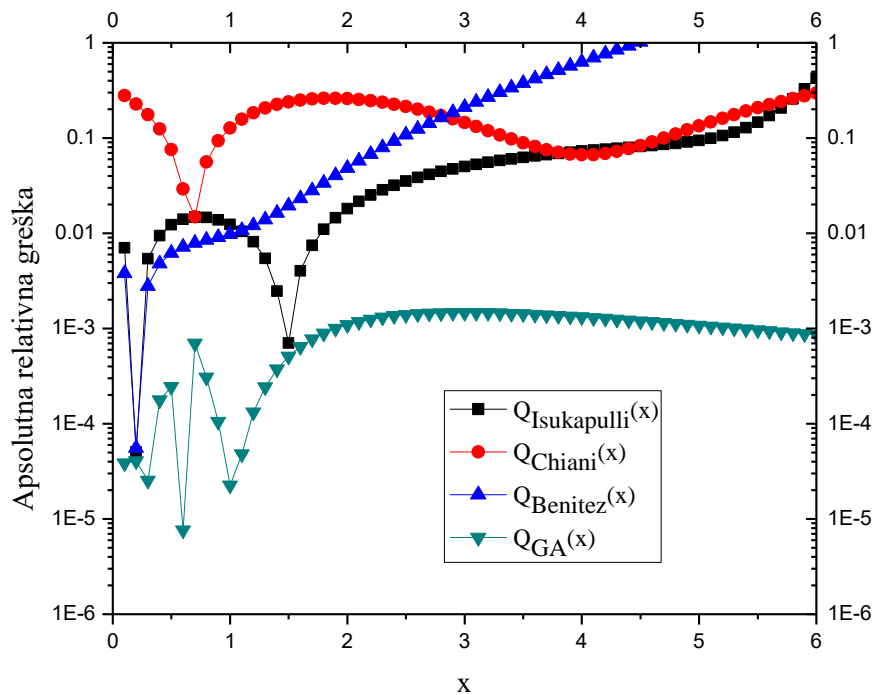
$$Q_{GA}(x) = \begin{cases} Q_1(x) & 0 \leq x \leq 0.7, \\ Q_2(x) & x > 0.7, \end{cases}$$

$$Q_1(x) = e^{-0.35054x^2 - 0.78995x - 0.69354}, \quad (4.72)$$

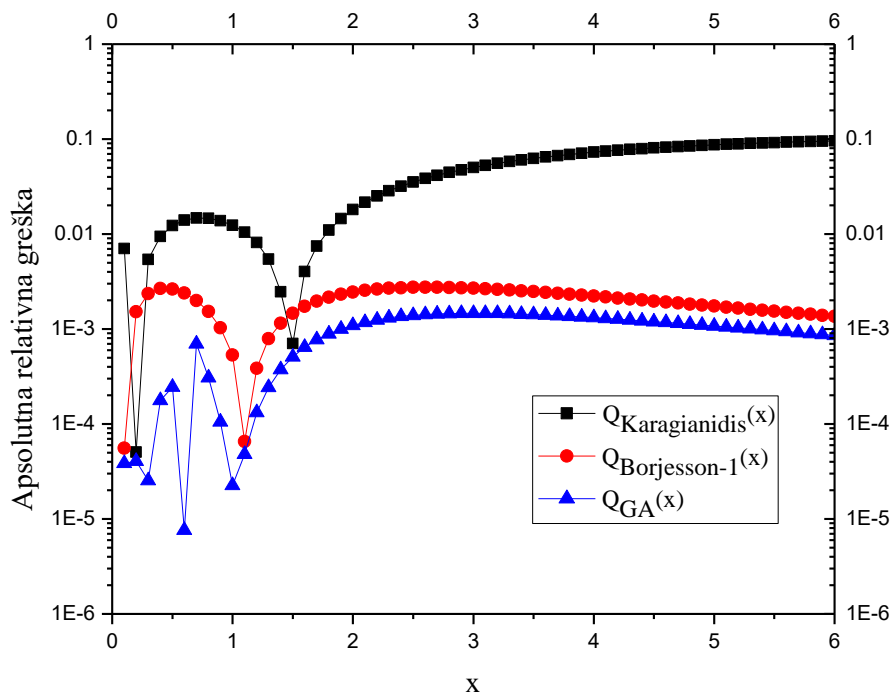
$$Q_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{0.67974x + 0.32026\sqrt{x^2 + 5.97353}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

U Tabeli 4.22 prikazana su poređenja Q-funkcije i njenih aproksimacija. Može se videti da je poboljšanje tačnosti postignuto u čitavom opsegu vrednosti korišćenjem nove predložene aproksimacije (4.72) dobijene pomoću GA.

Nakon procene optimizacionih parametara ispitano je kako predložena aproksimacija dobijena pomoću GA predstavlja Gausovu Q-funkciju. Na Slici 4.24, predložena aproksimacija upoređena je sa aproksimacijama koje su predložili *Isukapalli*, *Chen* i *Benitez*, u smislu apsolutne relativne greške kao funkcije argumenta x . Kao što se može videti sa Slike 4.24, sve predhodno predložene aproksimacije imaju nisku tačnost u odnosu na predloženu aproksimaciju. Predložena aproksimacija pruža veliko poboljšanje tačnosti u poređenju sa predloženim aproksimacijama *Isukapalli* i *Chen*, na čitavom opsegu, a naročito za male vrednosti argumenta x . Na Slici 4.25, Slici 4.26 i Slici 4.27 se može videti da predloženi metod ima najniže vrednosti apsolutne relativne greške, odnosno, dobijeno je poboljšanje tačnosti na čitavom opsegu.



Slika 4.24: Poređenje vrednosti apsolutnih relativnih grešaka Isukapalli, Chiani, Benitez aproksimacija sa predloženim kompozitnim metodom aproksimacije.

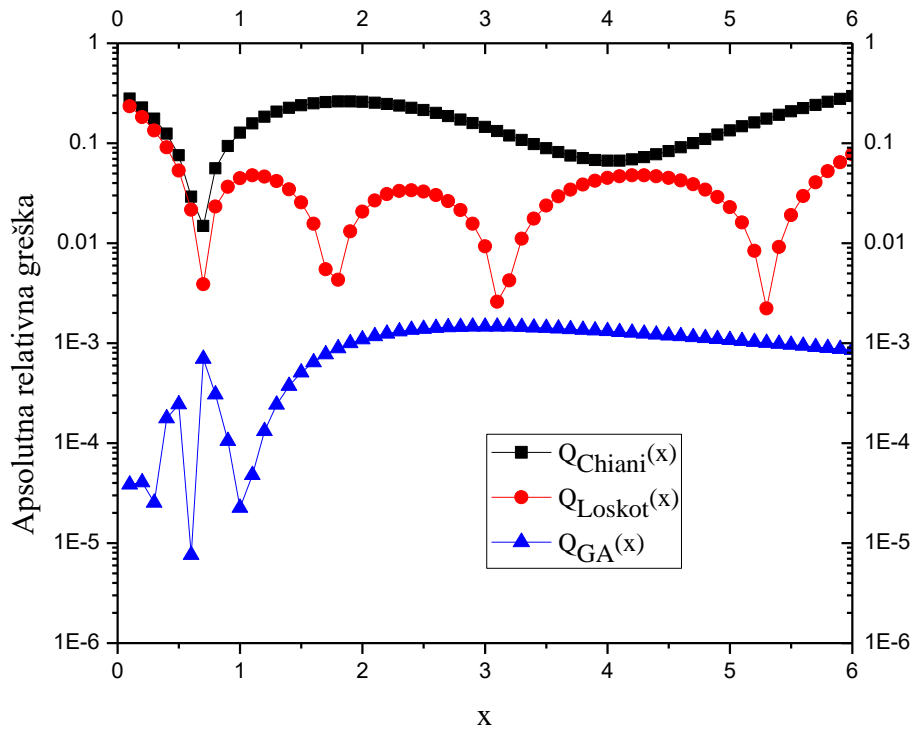


Slika 4.25: Poređenje vrednosti apsolutnih relativnih grešaka Karagianidis, Borjesson aproksimacija sa predloženim kompozitnim metodom aproksimacije.

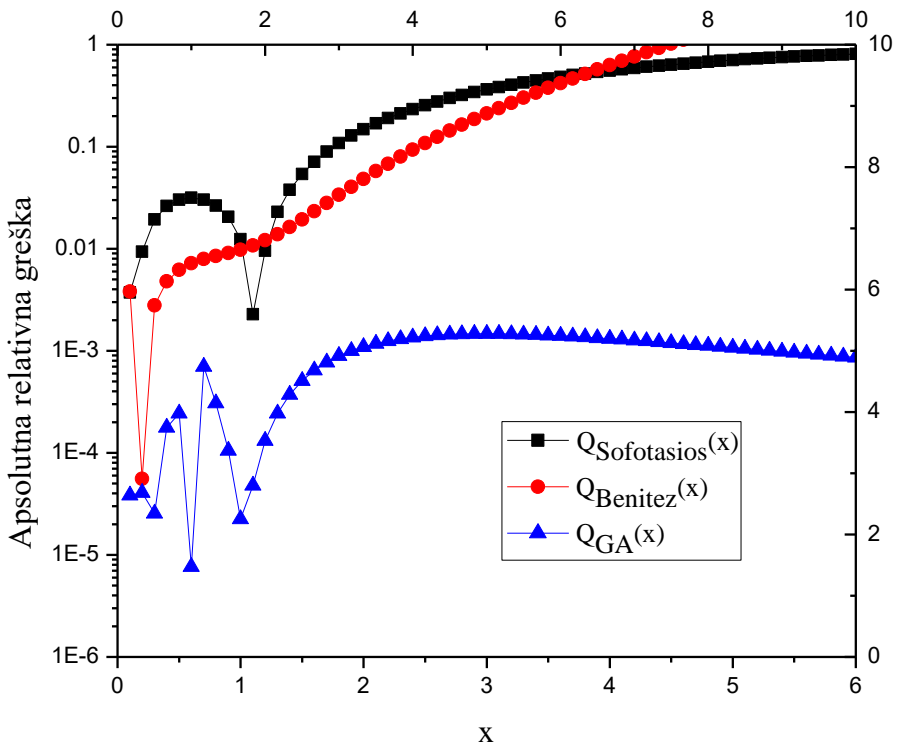
Tabela 4.22: Poređenje aproksimacija $Q(x)$ funkcija.

| Function | x=0.1 | x=0.3 | x=0.5 | x=0.7 | x=1 |
|-----------------------|------------|------------|------------|------------|---------|
| $Q(x)$ | 0.46017 | 0.38209 | 0.30854 | 0.24196 | 0.15866 |
| $Q_{GA}(x)$ | 0.46019 | 0.38209 | 0.30846 | 0.24202 | 0.15869 |
| $Q_{Borjesson-1}(x)$ | 0.46020 | 0.38118 | 0.30772 | 0.24148 | 0.15857 |
| $Q_{Karagiannid.}(x)$ | 0.45693 | 0.38415 | 0.31232 | 0.24552 | 0.16062 |
| $Q_{Isukapilli}(x)$ | 0.45693 | 0.38416 | 0.31241 | 0.24595 | 0.16247 |
| $Q_{Chiani}(x)$ | 0.33126 | 0.31511 | 0.28516 | 0.24556 | 0.17890 |
| $Q_{Loskot}(x)$ | 0.35222 | 0.33081 | 0.29209 | 0.24291 | 0.16573 |
| $Q_{Sofotasios}(x)$ | 0.45846 | 0.38947 | 0.31789 | 0.24929 | 0.16062 |
| $Q_{Benitez}(x)$ | 0.45995 | 0.38282 | 0.30899 | 0.24185 | 0.15809 |
| Function | x=5 | x=10 | x=15 | x=20 | |
| $Q(x)$ | 2.8665e-07 | 7.6199e-24 | 3.6710e-51 | 2.7536e-89 | |
| $Q_{GA}(x)$ | 2.8685e-07 | 7.6210e-24 | 3.6714e-51 | 2.7538e-89 | |
| $Q_{Borjesson-1}(x)$ | 2.8715e-07 | 7.6243e-24 | 3.6719e-51 | 2.7540e-89 | |
| $Q_{Karagiannid.}(x)$ | 2.6174e-07 | 6.7794e-24 | 3.2486e-51 | 2.4321e-89 | |
| $Q_{Isukapilli}(x)$ | 2.0881e-05 | 2.2070e-20 | 8.8628e-47 | 2.9462e-84 | |
| $Q_{Chiani}(x)$ | 3.2500e-07 | 1.6073e-23 | 1.1553e-50 | 1.1532e-88 | |
| $Q_{Loskot}(x)$ | 2.9323e-07 | 2.3273e-24 | 7.3499e-53 | 9.2358e-93 | |
| $Q_{Sofotasios}(x)$ | 8.4183e-08 | 2.0086e-25 | 6.6557e-54 | 3.0629e-93 | |
| $Q_{Benitez}(x)$ | 7.3647e-07 | 4.9426e-21 | 1.5065e-43 | 2.0853e-74 | |

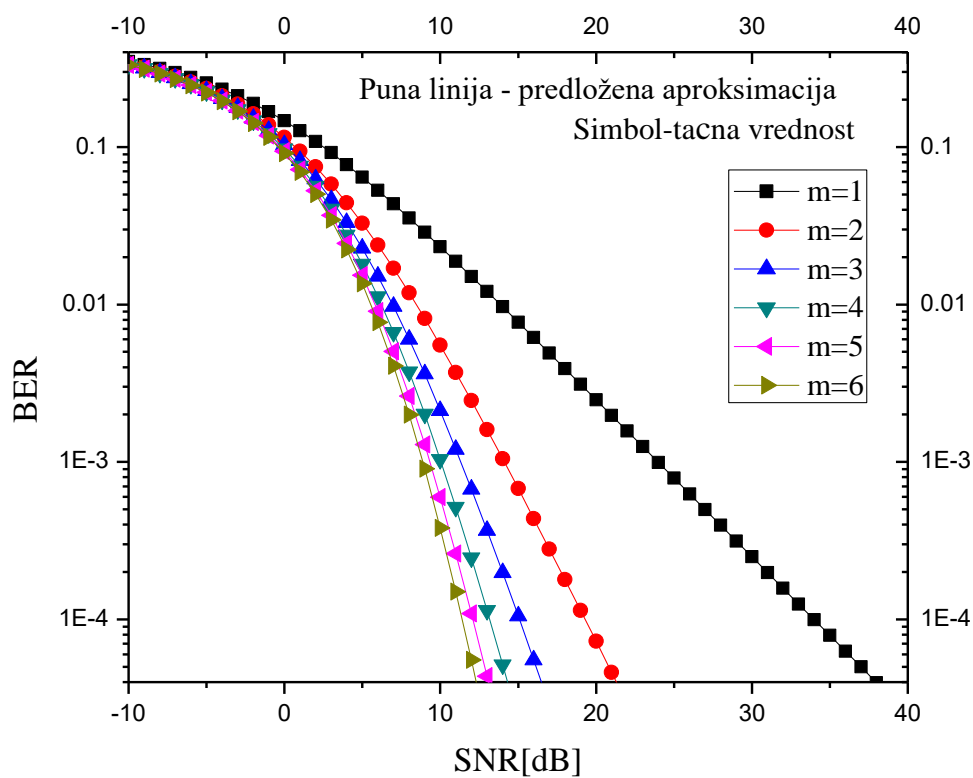
Na Slici 4.28 prikazane su vrednosti za ABER za BPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala. Kako bi bilo uočljivije odlično poklapanje aproksimiranih vrednosti ABER za BPSK format modulacije sa tačnim vrednostima. Na Slici 4.29 prikazane su vrednosti za apsolutnu relativnu grešku predložene aproksimacije dobijene pomoću GA za različite vrednosti parametra m u Nakagami- m fading kanalu.



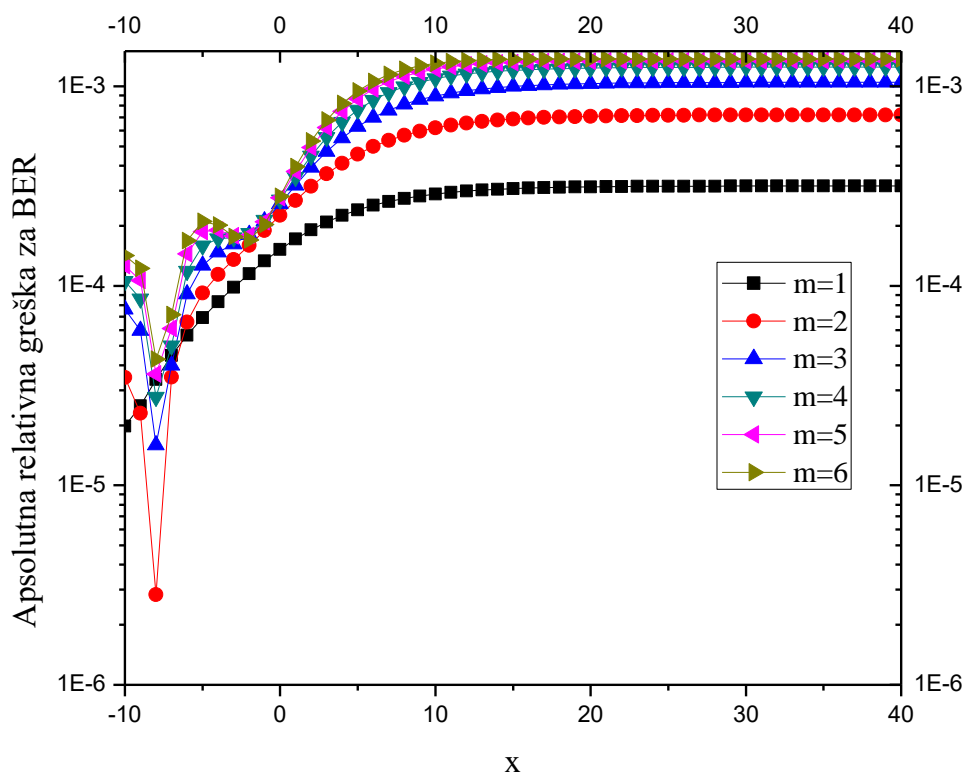
Slika 4.26: Poređenje vrednosti apsolutnih relativnih grešaka Chiani, Loskot aproksimacija sa predloženim kompozitnim metodom aproksimacije.



Slika 4.27: Poređenje vrednosti apsolutnih relativnih grešaka Sofotasio, Benitez aproksimacija sa predloženim kompozitnim metodom aproksimacije.



Slika 4.28: Tačne i aproksimirane vrednosti ABER za BPSK



Slika 4.29: Apsolutna relativna greška ABER za BPSK

Tabela 4.23: Poređenje vrednosti za ABER za BPSK za $m=2$

| Eb/N0 [dB] | Exact (m=2) | Q_{GA}(x) | Q_{Borjesson-1}(x) | Q_{Karagiannidis}(x) | Q_{Isukapali}(x) |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| -10 | 0.338934 | 0.338923 | 0.338155 | 0.341645 | 0.341645 |
| 0 | 0.1151 | 0.115126 | 0.115037 | 0.116103 | 0.116103 |
| 10 | 0.005528 | 0.005531 | 0.005534 | 0.005499 | 0.005499 |
| 20 | 0.00007256 | 0.00007261 | 0.00007265 | 0.00007191 | 0.00007191 |
| 30 | 7.47507e-7 | 7.48043e-7 | 7.48487e-7 | 7.40499e-7 | 7.40498e-7 |
| 40 | 7.4975e-9 | 7.50289e-9 | 7.50735e-9 | 7.42689e-9 | 7.42688e-9 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=2) | Q_{Chiani}(x) | Q_{Loskot}(x) | Q_{Sofotasios}(x) | Q_{Benitez}(x) |
| -10 | 0.338934 | 0.295312 | 0.305511 | 0.346719 | 0.34033 |
| 0 | 0.1151 | 0.127037 | 0.11675 | 0.11489 | 0.116498 |
| 10 | 0.005528 | 0.006568 | 0.005576 | 0.005075 | 0.005740 |
| 20 | 0.000072 | 0.00008663 | 0.00007297 | 0.00006501 | 0.00007618 |
| 30 | 7.47507e-7 | 8.9282e-7 | 7.51464e-7 | 6.67846e-7 | 7.8587e-7 |
| 40 | 7.4975e-9 | 8.95531e-9 | 7.53695e-9 | 6.69653e-9 | 7.88343e-9 |

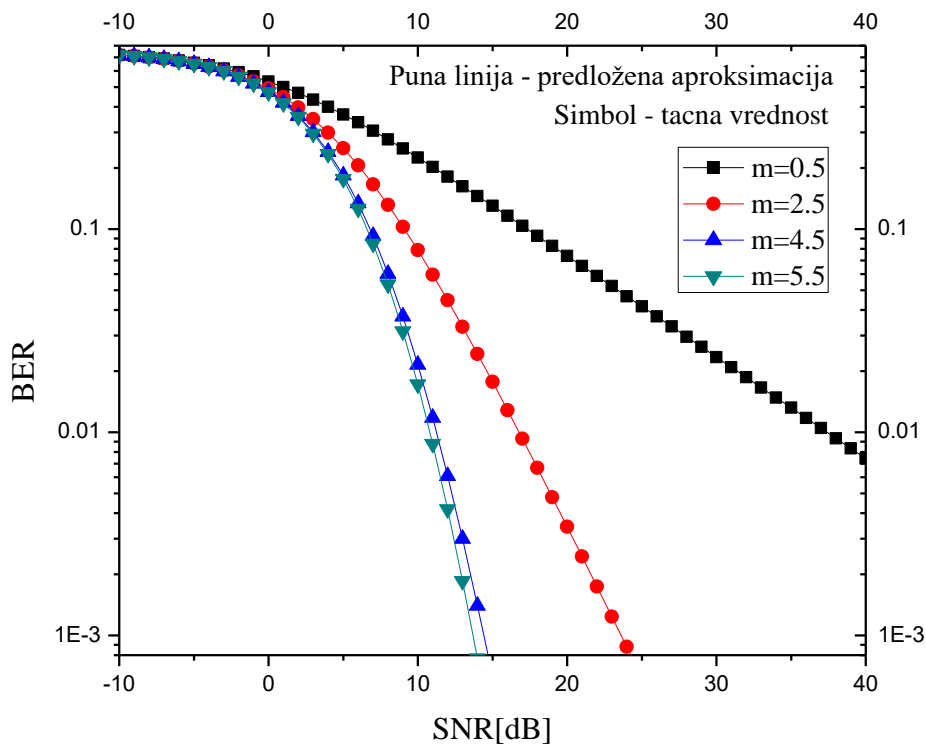
Tabela 4.24: Poređenje vrednosti za ABER za BPSK za $m=3$

| Eb/N0 [dB] | Exact (m=3) | Q_{GA}(x) | Q_{Borjesson-1}(x) | Q_{Karagiannidis}(x) | Q_{Isukapali}(x) |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| -10 | 0.335206 | 0.33518 | 0.334389 | 0.338202 | 0.338202 |
| 0 | 0.103516 | 0.103512 | 0.103503 | 0.104322 | 0.104322 |
| 10 | 0.002113 | 0.002115 | 0.002117 | 0.002080 | 0.002080 |
| 20 | 3.90367e-6 | 3.9077e-6 | 3.91192e-6 | 3.81387e-6 | 3.81385e-6 |
| 30 | 4.18571e-9 | 4.19009e-9 | 4.19464e-9 | 4.08581e-9 | 4.08577e-9 |
| 40 | 4.21543e-12 | 4.21985e-12 | 4.22444e-12 | 4.11446e-12 | 4.11442e-12 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=3) | Q_{Chiani}(x) | Q_{Loskot}(x) | Q_{Sofotasios}(x) | Q_{Benitez}(x) |
| -10 | 0.335206 | 0.29495 | 0.304908 | 0.343503 | 0.336743 |
| 0 | 0.103516 | 0.11811 | 0.106275 | 0.102555 | 0.104899 |
| 10 | 0.002113 | 0.002573 | 0.002111 | 0.001811 | 0.002250 |
| 20 | 3.90367e-6 | 4.72284e-6 | 3.88305e-6 | 3.1672e-6 | 4.28345e-6 |
| 30 | 4.18571e-9 | 5.05839e-9 | 4.1626e-9 | 3.37263e-9 | 4.61274e-9 |
| 40 | 4.21543e-12 | 5.09371e-12 | 4.19207e-12 | 3.39417e-12 | 4.64758e-12 |

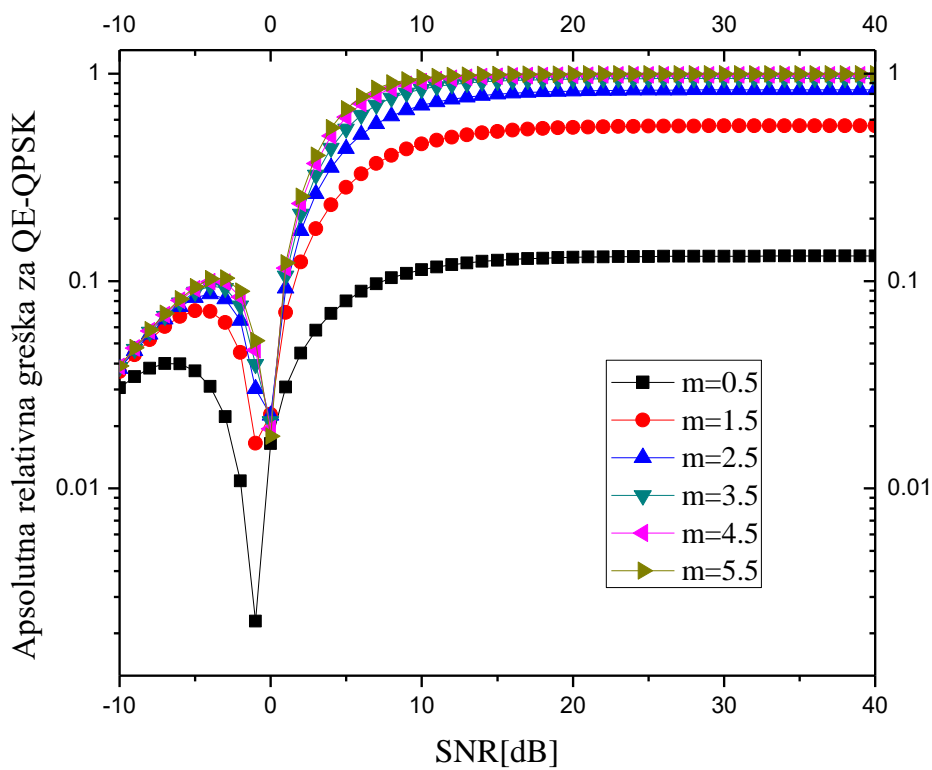
Tabela 4.25: Poređenje vrednosti za ABER za BPSK za $m=4$

| Eb/N0 [dB] | Exact (m=4) | Q_{GA}(x) | Q_{Borjesson-1}(x) | Q_{Karagiannidis}(x) | Q_{Isukapali}(x) |
|-----------------------|------------------------|------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| -10 | 0.333291 | 0.333255 | 0.332455 | 0.336431 | 0.336431 |
| 0 | 0.0975078 | 0.0975341 | 0.0975223 | 0.0981855 | 0.0981855 |
| 10 | 0.001038 | 0.001039 | 0.001041 | 0.001013 | 0.001013 |
| 20 | 3.03898e-7 | 3.04273e-7 | 3.04639e-7 | 2.93278e-7 | 2.93269e-7 |
| 30 | 3.45006e-11 | 3.45436e-11 | 3.45851e-11 | 3.32506e-11 | 3.32491e-11 |
| 40 | 3.49496e-15 | 3.49933e-15 | 3.50353e-15 | 3.36788e-15 | 3.36772e-11 |
| Eb/N0 [dB] | Exact (m=4) | Q_{Chiani}(x) | Q_{Loskot}(x) | Q_{Sofotasios}(x) | Q_{Benitez}(x) |
| -10 | 0.333291 | 0.294765 | 0.304598 | 0.341848 | 0.334898 |
| 0 | 0.0975078 | 0.113235 | 0.100576 | 0.0960923 | 0.0988775 |
| 10 | 0.001038 | 0.001264 | 0.001028 | 0.000835 | 0.001135 |
| 20 | 3.03898e-7 | 3.62277e-7 | 3.011e-7 | 2.23157e-7 | 3.5268e-7 |
| 30 | 3.45006e-11 | 4.10042e-11 | 3.42057e-11 | 2.50227e-11 | 4.04132e-11 |
| 40 | 3.49496e-15 | 4.1525e-15 | 3.46535e-15 | 2.5316e-15 | 4.09794e-15 |

Primena kompozitnog metoda aproksimacije Q-funkcije može biti proširena i za proračun srednje verovatnoće greške za DE-QPSK. Na Slici 4.30 prikazane su vrednosti za ABER za DE-QPSK format modulacije u prisustvu Nakagami- m fading kanala. Na Slici 4.31 prikazane su vrednosti apsolutne relativne greške predložene aproksimacije ASEP za DE-QPSK.



Slika 4.30: Tačne i aproksimirane vrednosti ABER za DE-QPSK



Slika 4.31: Apsolutna relativna greška predložene aproksimacije ASEP za DE-QPSK

5. ZAKLJUČAK

U ovoj doktorskoj disertaciji razmatrane su matematičke metode i predložene su realizacije algoritama za procenu i određivanje najznačajnijih kriterijuma performansi koji definišu meru kvaliteta signala na prijemu, i koji su neophodni za dizajniranje bežičnog komunikacionog sistema.

Pokazano je da se vrlo dobra estimacija, ponašanja mera performansi za bežični komunikacioni sistem za α - κ - μ model fading, može ostvariti na osnovu korišćenja linearne *spline* aproksimacije za $L = 2$, $L = 4$ i $L = 8$ segmenata. Primenjeni tip *spline* aproksimacije zavisi od tražene tačnosti procene parametara. Mogućnost korišćenja predstavljene metode u različitim primenama komunikacionih sistema postiže se estimacijom performansi sistema koje se mogu odrediti na osnovu statistike modela prenetih signala. Takođe, dobijena su poboljšanja korišćenjem kompozitne deo-po-deo *spline* aproksimacije, dobijene kombinacijom linearne i kvadratne *spline* funkcije. Pokazano je da predložene metode *spline* aproksimacije pružaju visok nivo preciznosti u širokom spektru ulaznih vrednosti, kao i da dobijeni rezultati za ABEP, ukazuju na mogućnost korišćenja predloženih metoda *spline* aproksimacije u različitim procesima projektovanja bežičnih komunikacionih sistema sa različitim neželjenim efektima i smetnjama.

U disertaciji su predloženi algoritmi za realizaciju novih intervalnih i kompozitnih metoda aproksimacije Q-funkcije, koje se odlikuju relativno niskom analitičkom kompleksnošću a pružaju relativno visoku tačnost u poređenju sa predhodno predloženim aproksimacijama Q-funkcije sa sličnim analitičkim oblicima kompleksnosti. Izvršena je analiza tačnosti aproksimacije Q-funkcije na intervalima pomoću gornjih granica kao i aproksimacije Q-funkcije dobijene pomoću genetskog algoritma. Jednostavno su određeni parametri novih metoda aproksimacije Q-funkcije. Pažljivo je ispitana tačnost predloženih algoritama za realizaciju aproksimacija u čitavom opsegu ulaznih vrednosti i predložene su nove intervalne i kompozitne metode kao rešenja posmatranog problema. Predložena rešenja

imaju poboljšanje u pogledu tačnosti. Predviđeno je da jednostavnost predloženih metoda aproksimacije Q-funkcije omogućavaju njihovu primenu u širokom spektru teorijskih studija. Takođe, istaknuto je da relativno visoka tačnost metoda aproksimacija, koja se posmatra za sve vrednosti argumenata, dodatno proširuje svoju oblast upotrebljivosti na primene koje zahtevaju visoko procenjenu tačnost.

Analizirana je nova intervalna poboljšana aproksimacija Q-funkcije, dobijena korišćenjem dobrih osobina pojedinih aproksimacija za male vrednosti argumenata i za velike vrednosti argumenata, što je pokazano upoređivanjem sa drugim dostupnim aproksimacijama. Poboljšanje tačnosti je postignuto u gotovo čitavom opsegu argumenata vrednosti funkcije. Poređenje vrednosti za ASEP u prisustvu Nakagami- m modela fedinga za različite vrednosti parametra m , dobijene korišćenjem predstavljenog poboljšanog intervalnog metoda u poređenju sa vrednostima dobijenim pomoću drugih poznatih aproksimacija Q-funkcije su predstavljene za slučajeve primenjenih BPSK i DE-QPSK modulacionih formata. Opravdanost primene predloženog algoritma zasnovanog na metodu intervalne aproksimacije je dokazana prikazivanjem vrednosti za ASEP, koje su veće tačnosti od vrednosti dobijenih pomoću drugih poznatih aproksimacija Q-funkcije u čitavom opsegu posmatranih vrednosti parametara sistema. Doprinos ovog metoda aproksimacije je takođe činjenica, da postoji mogućnost korišćenja ove metode u mnogim problemima teorije telekomunikacija.

Razmatran je i algoritam za konstrukciju kompozitne aproksimacije Q-funkcije, zasnovan na *Mils ratio* aproksimaciji, na osnovu kojeg je postignuto poboljšanje tačnosti aproksimacije, samim tim i vrednosti za ASEP, kao i relativne greške za ASEP kada se primenjuje predloženi metod i kada se ASEP računa na standardni način za slučajeve prenosa BPSK i DE-QPSK modulacionih formata i kanalu izloženom uticaju Nakagami- m fedinga, na čitavom opsegu argumenata vrednosti funkcije.

Analiziran je novi pristup generalnog tipa, zasnovan na analitičkom intervalnom metodu aproksimacije Q-funkcije koji je adaptivan, u kome sa za svaki dati argument može dobiti donja i gornja granica za aproksimaciju. Korišćenjem predloženog metoda izabrana su dva opsega, od svih mogućih opsega dobijena je prosta tesna gornja granica za aproksimaciju Q-funkcije, na osnovu koje je dobijena veoma tačna i preciznija aproksimacija od mnogobrojnih dobro poznatih aproksimacija. Dodatno poboljšanje tačnosti dobijeno je formiranjem intervalnog metoda aproksimacije Q-funkcije uvođenjem još jednog intervala za najviše ulazne argumente. Poređenjem sa drugim poznatim analitičkim aproksimacijama su

predstavljena nova intervalna poboljšanja metode aproksimacije Q-funkcije za dva i tri intervala, kao i vrednosti za ASEP za primenjene BPSK i DE-QPSK modulacione formate.

Razmatrana je kompozitna aproksimacija Q-funkcije dobijena korišćenjem genetskog algoritma u cilju pronalaženja optimalnih koeficijenata za predloženu kompozitnu aproksimaciju. Dobijeni rezultati su provereni poređenjem sa drugim postojećim rezultatima u literaturi. Numeričkim izračunavanjem pokazalo se da uvedena eksponencijalna aproksimacija drugog reda prevazilazi najbolje predhodno predstavljene aproksimacije, naročito u regionu sa niskim argumentima, dok druga predložena aproksimacija daje odlične rezultate za visoke vrednosti argumenata. Tačnost eksponencijane aproksimacije drugog reda može biti poboljšana po cenu povećanja matematičke složenosti.

Korisno je napomenuti da su glavne poteškoće u primeni genetskog algoritma za ovaj problem kako odabrati parametre genetskog algoritma, zato što različiti skupovi parametara utiču na ukupno vreme izvršavanja kao i na brzinu konvergencije. Budući napori će biti usmereni prema razvoju novog modela aproksimacije, koji eliminiše loše performanse eksponencijalnih aproksimacija u oblastima visokih vrednosti ulaznih argumenata.

Predloženi modeli su omogućili dobijanje preciznijih procena performansi bežičnih prenosnih sistema uz upotrebu jednostavnijih matematičkih modela. Takođe, smanjili su hardverske zahteve za proračun uz postizanje zadovoljavajuće tačnosti proračuna različitih tipova modulacija, modela kanala kao i vrsta detekcija.

6. LITERATURA

- [1] M. K. Simon and M. S. Alouini, *Digital Communications Over Fading Channels*, John Wiley & Sons Publishing group, 2nd ed., New York, USA, ISBN 978-047-17-1523-8, 2005.
- [2] S. Petar and P. Stefan, *Analysis of Wireless Transmission Improvement in Specific Propagation Enviroments*, Faculty of technical Science, Kosovska Mitrovica, 2014.
- [3] A. V. Marković, Z. H. Perić, D. B. Đošić, M. M. Smilić, and B. S. Jakšić, “LEVEL CROSSING RATE OF MACRODIVERSITY SYSTEM OVER COMPOSITE GAMMA SHADOWED ALPHA-KAPPA-MU MULTIPATH FADING CHANNEL”, *FACTA Univ. Ser. Autom. Control Robot.*, vol. 14, no. 2, pp. 99–109, 2015.
- [4] R. Koekoek, *Generalizations of the Classical Laguerre Polynomials and some q -Analogues*, ISBN 90-9003765-9, 1990.
- [5] A. Marković, Z. Perić, S. Panić, and P. Spalević, “Linear spline functions based analysis of wireless channels transmission subjected to multipath fading,” in *In: Proc. 12th International Conference on Applied Electromagnetics-IIEC 2015*, ISBN 978-86-6125-144-3, pp. 93–94, 2015.
- [6] J. Nikolić, Z. Perić, and L. Velimirović, “Simple Solution for Designing the Piecewise Linear Scalar Companding Quantizer for Gaussian Source”, *Radioengineering*, vol. 22, no. 1, pp. 194–199, 2013.
- [7] L. Velimirović, Z. Perić, M. Stanković, and J. Nikolić, “Optimization of Quantizer’s Segment Threshold Using Spline Approximations for Optimal Compressor Function,” *Appl. Math.*, vol. 3, no. 10A, pp. 1430–1434, 2012.
- [8] P. C. Sofotasios, T. A. Tsiftsis, Y. A. Brychkov, S. Freear, M. Valkama, and G. K. Karagiannidis, “Analytic Expressions and Bounds for Special Functions and Applications in Communication Theory”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 60, no. 12, pp. 7798–7823, 2014.

-
- [9] M. Lopez-Benitez and F. Casadevall, "Versatile, accurate, and analytically tractable approximation for the Gaussian Q-function," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 59, no. 4, pp. 917–922, 2011.
- [10] M. Chiani, D. Dardari, and M. K. Simon, "New exponential bounds and approximations for the computation of error probability in fading channels," *IEEE Trans. Wirel. Commun.*, vol. 2, no. 4, pp. 840–845, 2003.
- [11] G. K. Karagiannidis and A. S. Lioumpas, "An improved approximation for the gaussian q-function," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 11, no. 8, pp. 644–646, 2007.
- [12] Q. Shi and Y. Karasawa, "An accurate and efficient approximation to the Gaussian Q-function and its applications in performance analysis in Nakagami-m fading," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 15, no. 5, pp. 479–481, 2011.
- [13] A. V. Markovic, Z. H. Peric, S. R. Panic, P. C. Spalevic, and B. P. Princevic, "An Improved Method for ASEP Evaluation over Fading Channels Based on Q Function Approximation," *IETE Journal of Research*, accepted, DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/03772063.2017.1369910>.
- [14] A. Markovic, Z. Peric, S. Panic, P. Spalevic, and Z. Todorovic, "Improved Composite Q-Function Approximation and its Application in ASEP of Digital Modulations over Fading Channels," *Elektronika ir Elektrotehnika*, vol. 23, no. 7, pp. 83–88, 2017.
- [15] J. Nikolić, Z. Perić, and A. Marković, "Proposal of Simple and Accurate Two-Parametric Approximation for the Q-Function," *Mathematical Problem in Engineering*, Volume 2017, Article ID 8140487, 10 pages, accepted, DOI: <https://doi.org/10.1155/2017/8140487>.
- [16] S. Mukherjee and D. Avidor, "Effect of microdiversity and correlated macrodiversity on outages in a cellular system", *IEEE Transactions on Wireless Technology*, vol. 2, no. 1, pp. 50–58, 2003.
- [17] W. C. Y. Lee, *Mobile Communications Design Fundamentals*, John Wiley & Sons, 2nd ed., New York, USA, ISBN 978-0-470-93226-1, 2010.
- [18] F. Babich and G. Lombardi, "Statistical analysis and characterization of the indoor propagation channel," *IEEE Transaction Communications*, ISSN 0090-6778, vol. 48, no. 3, pp. 455–464, 2000.
- [19] L. Bernadó *et al.*, "Multi-dimensional K-factor analysis for V2V radio channels in open sub-urban street crossings," *Proceedings of 21st IEEE International Symposium on Personal Indoor and Mobile Radio Communications*, ISBN: 978-1-4244-8015-9,
-

-
- Istanbul, Turkey, pp. 58–63, 2010.
- [20] P. M. Shankar, “Macrodiversity and microdiversity in correlated shadowed fading channels,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, ISSN: 0018-9545, vol. 58, no. 2, pp. 727–732, 2009.
- [21] M. O. Hasna and M.-S. Alouini, “End-to-end performance of transmission systems with relays over Rayleigh-fading channels,” *IEEE Transactions on Wireless Communications*, ISSN: 1536-1276, vol. 2, no. 6, pp. 1126–1131, 2003.
- [22] H. A. Suraweera, R. H. Y. Louie, Y. Li, G. K. Karagiannidis, and B. Vucetic, “Two hop amplify-and-forward transmission in mixed Rayleigh and Rician fading channels,” *IEEE Communication Letters*, ISSN: 0163-6804, vol. 13, no. 4, pp. 227–229, 2009.
- [23] C. W. Helstrom, *Probability and Stochastic Processes for Engineers*, Mac Millan Publishing Hous, 2nd ed., New York, ISBN: 0-02-353571-7, 1991.
- [24] P. Stavroulakis, *Interference analysis and reduction for wireless systems*, Artech House Publishers, London, ISBN 1-58053-316-7, 2003.
- [25] M. O. Hasna and M. S. Alouini, “A performance study of dual-hop transmissions with fixed gain relays,” *IEEE Transactions on Wireless Communications*, ISSN: 1536-1276, vol. 3, no. 6, pp. 1963–1968, 2004.
- [26] S. Choi, M. S. Alouini, K. Qaraqe, and H.C. Yang, “Finger assignment schemes for rake receivers with multiple-way soft handover,” *IEEE Transactions on Wireless Communications*, ISSN: 1536-1276, vol. 7, no. 2, pp. 495–499, 2008.
- [27] S. Ikki, M. H. Ahmed, “Performance analysis of dual-hop relaying communications over generalized gamma fading channels,” *Proceedings of IEEE Global Communications Conference - Globecom 2007*, Washington, DC, USA, ISBN 978-1-4673-0920-2, pp. 3888–3893, 2007.
- [28] P. C. Sofotasios and S. Freear, “The κ - μ Extreme/Gamma Distribution: A Physical Composite Fading Model,” *Proceedings of IEEE Wireless Communications and Networking Conference - WCNC ' 11*, Cancun, Mexico, ISBN: 978-1-61284-255-4, pp. 1398–1401, 2011.
- [29] M. Bandjur, N. Sekulovic, M. Stefanovic, A. Golubovic, P. Spalevic, and D. Milic, “Second-Order Statistics of System with Microdiversity and Macrodiversity Reception in Gamma-Shadowed Rician Fading Channels”, *ETRI Journal*, ISSN: 1225-6463, vol. 35, no. 4, pp. 722–725, 2013.
- [30] M. Stefanović, B. Mirić, P. Spalević, and S. Panić, “Second Order Statistic Analysis of
-

-
- Selection Macro-Diversity Combining over Gamma Shadowed Rayleigh Fading Channels,” *Appl. Math. Inform. and Mech.*, vol. 1, pp. 1–9, 2009.
- [31] B. Nikolic, M. Stefanovic, S. Panic, J. Anastasov, and B. Milosevic, “Selection combining system over correlated Generalized-K (KG) fading channels in the presence of cochannel interference,” *ETRI Journal*, ISSN: 1225-6463, vol. 33, no. 3, pp. 320–325, 2011.
- [32] M. D. Yacoub, “The κ - μ distribution and the η - μ distribution,” *IEEE Antennas Propagation Magazine*, ISSN: 1045-924, vol. 49, no. 1, pp. 68–81, 2007.
- [33] E. Mekić, M. Stefanović, P. Spalević, N. Sekulović, and A. Stanković, “Statistical analysis of ratio of random variables and its application in performance analysis of multihop wireless transmissions,” *Mathematical Problems in Engineering*, ISSN 1563-5147, Article ID 841092, 2012.
- [34] M. I. Delibasic et. al, “Impact of Random K factor on Ricean Fading Wireless System Performance,” *Proceedings of 16th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference*, ISBN: 978-146-73-0783-3, pp. 233–236, 2012.
- [35] L. J. Greenstein, S. S. Ghassemzadeh, V. Erceg, and D. G. Michelson, “Ricean K - Factors in Narrow-Band Fixed Wireless Channels: Theory, Experiments, and Statistical Models,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, ISSN: 0018-9545, vol. 58, no. 8, pp. 4000–4012, 2009.
- [36] M. D. Yacoub, “The κ - μ distribution and the η - μ distribution,” *IEEE Antennas Propagation Magazine*, ISSN: 1045-924, vol. 49, pp. 68–81, 2007.
- [37] N. Y. Ermolova and O. Tirkkonen, “Multivariate η - μ fading distribution with constant correlation model,” *Electronic Letters*, ISSN: 0013-5194, vol. 16, no. 4, pp. 454–457, 1980.
- [38] P. C. Sofotasios and S. Freear, “The η - μ /gamma composite fading model,” *IEEE International Conference in Wireless Information Technology and Systems – ICWITS 2010*, Honolulu, HI, USA, ISBN: 978-9954-9083-0-3, Vol. 2, pp. 872-877, 2010.
- [39] D. Benevides and M. D. Yacoub, “The η - μ Joint Phase-Envelope Distribution,” *Wireless Communications and Networking Conference*, pp. 1908–1910, 2007.
- [40] P. Spalević, M. Stefanović, S. R. Panić, S. Minić, and L. Spalević, “Amplify-and-Forward Relay Transmission System over Mixed Rayleigh and Hoyt Fading Channels,” *Electronics and Electrical Engineering*, ISSN: 1392-1215, vol. 120, no. 4, pp. 21–25, 2012.
-

-
- [41] D. M. Stefanović, S. R. Panić, and P. Č. Spalević, "Second-order statistics of SC macrodiversity system operating over Gamma shadowed Nakagami-m fading channels," *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, ISSN: 1434-8411, vol. 65, no. 5, pp. 413–418, 2011.
- [42] J. Reig, "Multivariate Nakagami- distribution with constant correlation model," *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, ISSN: 1434-8411, vol. 63, no. 1, pp. 46–51, 2009.
- [43] G. K. Karagiannidis, D. A. Zogas, and S. A. Kotsopoulos, "On the multivariate Nakagami-m distribution with exponential correlation," *IEEE Transactions on Communications*, ISSN 0090-6778, vol. 51, no. 8, pp. 1240–1244, 2003.
- [44] L. Rubio, J. Reig, and N. Cardona, "Evaluation of Nakagami fading behaviour based on measurements in urban scenarios," *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, vol. 61, no. 2, pp. 135–138, 2007.
- [45] M. Č. Stefanović, *Performanse digitalnih telekomunikacionih sistema*, *Elektronski fakultet u Nišu*, I ed., Niš, 2000.
- [46] P. S. Bithas, P. T. Mathiopoulos, and G. K. Karagiannidis, "Switched diversity receivers over correlated weibull fading channels," *Proceedings of the International Workshop on Satellite and Space Communications*, ISBN: 978-142-44-0118-5, pp. 143–147, 2006.
- [47] T. Tan and N. Bealieu, "Infinite series representation of the bivariate Rayleigh and Nakagami-m distributions," *IEEE Transactions on Communications*, ISSN: 0090-6778, vol. 45, pp. 1159–1161, 1997.
- [48] K. S. Butterworth, K. W. Sowerby, and A. G. Williamson, "Base station placement for inbuilding mobile communication systems to yield high capacity and efficiency," *IEEE Transactions on Communications*, ISSN: 0090-6778, vol. 48, no. 4, pp. 658–669, 2000.
- [49] B. Jaksić, H. Stefanović, D. Milić, L. Spalević, Z. Trajčevski, and M. Perić, "Relative measurement error analysis in the Weibull fading parameter estimation," *Tech. Technol. Educ. Manag. - TTEM Journal*, ISBN: 1840-1503, vol. 7, no. 4, pp. 1462–1467, 2012.
- [50] N. Youssef, W. El Bahri, M. Patzold, S. El Asmi, "On the Crossing Statistics of Phase Processes and Random FM Noise in Nakagami-q mobile fading channels," *IEEE Transaction Communications*, ISSN: 0090-6778, vol. 4, no. 1, pp. 24–29, 2005.
-

-
- [51] C. D. Iskander and P. T. Mathiopoulos, "Analytical level crossing rates and average fade durations for diversity techniques in Nakagami fading channels," *IEEE Transactions on Communications*, ISSN: 0090-6778, vol. 50, no. 8, pp. 1301–1309, 2002.
- [52] A. D. Cvetkovic, M. C. Stefanovic, N. M. Sekulovic, E. S. Mekic, and D. Manic, "Dual-hop system analysis in Nakagami-m environment," *Electronics and Electrical Engineering*, ISSN: 1392-1215, vol. 7, no. 2, pp. 47–50, 2011.
- [53] C. Stefanovic, B. Jaksic, P. Spalevic, S. Panic, and Z. Trajceviski, "Performance analysis of selection combining over correlated nakagami-m fading channels with constant correlation model for desired signal and cochannel interference," *Radioengineering*, ISSN 1805-9600 (Online), vol. 22, no. 4, pp. 1176–1181, 2013.
- [54] G. Fraidenraich and M. D. Yacoub, "The α - η - μ and α - k - μ fading distributions," *Proceedings of IEEE Ninth International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications*, ISBN: 978-078-03-9779-8, Manaus - Amazon, Brazil, pp. 16–20, 2006.
- [55] M. Bandjur, D. Radenković, V. Milenković, S. Suljević, and D. Djošić, "Second order statistics of SC receiver over k - μ multipath fading channel," *SERBIAN JOURNAL OF ELECTRICAL ENGINEERING*, vol. 11, no. 3, pp. 391–401, 2014.
- [56] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 6th ed. New York, 2000.
- [57] A. Abdi, W. C. Lau, M. S. Alouini, and M. Kaveh, "A new simple model for land mobile satellite channels: first - and second-order statistics," *IEEE Transaction Communications*, ISSN: 0090-6778, vol. 2, no. 3, pp. 519–528, 2003.
- [58] G. Fraidenraich, M. D. Yacoub, and J. C. S. Santos Filho, "Second-order statistics of maximal-ratio and equal-gain combining in Hoyt fading," *IEEE Communications Letters*, ISSN: 0163-6804, vol. 9, no. 1, pp. 19–21, 2005.
- [59] G. G. Messier and J. A. Hartwell, "An empirical model for nonstationary Ricean fading," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, ISSN: 0018-9545, vol. 58, no. 1, pp. 14–20, 2009.
- [60] S. R. Panić, P. Spalević, B. Jakšić, B. Radovanović, I. Petrović, and S. Jovković, "Analiza bežičnog prenosa u Rajsovom feding kanalu u prisustvu višestrukih ko-kanalnih interferencija," *XI međunarodni naučno-stručni simpozijum INFOTEH 2012*, Jahorina, Bosna i Hercegovina, vol. 11, pp. 245–248, 2012.
-

-
- [61] I. Petrovic, M. Stefanovic, P. Spalevic, S. R. Panic, and D. Stefanovic, "Outage analysis of selection diversity over Rayleigh fading channels with multiple co-channel interferers," *Telecommunication Systems*, ISSN 1018-4864, vol. 52, no. 1, pp. 39–50, 2013.
- [62] A. Brandao, L. Lopez, and C. M. Leron, "Cochannel Interference Estimation for M-ary PSK Modulated Signals," *Wireless Personnel Communication*, ISSN: 0929-6212, pp. 23–32, 1994.
- [63] I. Trigui, A. Laourine, S. Affes, and A. Stéphane, "Performance analysis of mobile radio systems over composite fading/shadowing channels with co-located interference," *IEEE Trans. Wirel. Commun.*, ISSN: 1536-1276, vol. 8, no. 7, pp. 3448–3453, 2009.
- [64] D. G. Brennan, "Linear Diversity Combining Techniques," *Proceedings of the IEEE*, ISSN: 0018-9219, vol. 91, no. 2, pp. 331–356, 2003.
- [65] E. A. Neasmith and N. C. Beaulieu, "New results on selection diversity," *IEEE Transaction Communications*, ISSN: 0090-6778, vol. 46, no. 5, pp. 695–704, 1998.
- [66] Y. Okumura, E. Ohmori, T. Kawano, and K. Fukuda, "Field strength and its variability in VHF and UHF land mobile radio services," *Review of the Electrical Communication Laboratory*, vol. 16, no. 9-10, pp. 825-873, 1968.
- [67] C. Tellambura and V. K. Bhargava, "Unified error analysis of DQPSK in fading channels," *Electronic Letters*, ISSN: 0013-5194, vol. 30, no. 25, pp. 2110–2111, 1994.
- [68] R. F. Pawula, "A new formula for MDPSK symbol error probability," *IEEE Communications Letters*, ISSN: 0163-6804, vol. 2, pp. 271–272, 1998.
- [69] X. Dong, N. C. Beaulieu, and P. H. Wittke, "Two dimensional signal constellations for fading channels," *IEEE Globecom, Communication Theory Mini-Conference, Sydney, Australia*, ISBN: 978-078-03-4984-1, pp. 22–27, 1998.
- [70] S. O. Rice, "Statistical properties of a sine wave plus random noise," *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, no. 1, pp. 109–157, 1948.
- [71] W. Cheney and D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, Thomson Higher Education, Sixt ed., Belmont, 2008.
- [72] Z. Perić, L. Velimirović, M. Stanković, and A. Jovanović, "A COMPREHENSIVE ANALYSIS OF THE SCALAR COMPANDOR MODEL DESIGNED USING SPLINE FUNCTIONS," *Revue Roumaine des Sciences Techniques – Serie Électrotechnique et Énergetique*, vol. 60, no. 3, pp. 283–291, 2015.
-

-
- [73] J. I. Marcum, *A statistical theory of target detection by pulsed radar: Mathematical appendix*, RAND Corp., Santa Monica, Research memorandum, CA, 1948.
- [74] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw - Hill, 3rd ed., New York, 1995.
- [75] Á. Baricz, "Tight bounds for the generalized Marcum Q -function," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 360, no. 5, pp. 265–277, 2009.
- [76] A. H. Heatley, "An Extension of the Table of the Toronto Function," *Math. Comput.*, vol. 19, no. 89, pp. 118–123, 1965.
- [77] H. Sagon, "Numerical calculation of the incomplete Toronto function," *Proceedings of the IEEE*, vol. 54, no. 8, pp. 1095–1095, 1966.
- [78] R. F. Pawula, "Relations between Rice Ie-function and Marcum Q-function with applications to error rate calculations", *Electronics Letters*, ISSN: 0013-5194, vol. 31, no. 20, pp. 1717–1719, 1995.
- [79] R. Pawula, S. Rice, and J. Roberts, "Distribution of the Phase Angle Between Two Vectors Perturbed by Gaussian Noise," *IEEE Transactions on Communications*, ISSN: 0090-6778, vol. 30, no. 8, pp. 1828–1841, 1982.
- [80] S. L. Dvorak, "Applications for incomplete Lipschitz-Hankel integrals in electromagnetics," *IEEE Antennas Propagation Magazine*, ISSN: 1045-9243, vol. 36, no. 6, pp. 26–32, 1994.
- [81] D. Morales-Jimenez, J. F. Paris, and A. Lozano, "Outage Probability Analysis for MRC in $\eta - \mu$ Fading Channels with Co-Channel Interference," *IEEE Communications Letters*, ISSN: 1089-7798, vol. 16, no. 5, pp. 674–677, 2012.
- [82] A. H. Nuttall, *Some integrals involving the Q-function*, New London Laboratory, Naval Underwater Systems Center, New London, 1972.
- [83] C. Tellambura and A. Annamalai, "Derivation of Craig's formula for Gaussian probability function," *Electronics Letters*, ISSN: 0013-5194, vol. 35, no. 17, pp. 1424–1425, 1999.
- [84] J. I. Marcum and P. Swerling, "STUDIES OF TARGET DETECTION BY PULSED RADAR," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. IT-6, 1960.
- [85] M. K. Simon, *Probability Distributions Involving Gaussian Random Variables*. Pasadena, California, USA, 2002.
- [86] M. Schwartz, W. R. Bennett, and S. Stein, *The Q Function and Related Integrals*, Wiley-IEEE Press, 1 ed., 1996.
- [87] M. K. Simon, "A new twist on the Marcum Q-function and its application," *IEEE*
-

-
- Communications Letters*, ISSN: 1089-7798, vol. 2, no. 2, pp. 39–41, 1998.
- [88] M. K. Simon, “The Nuttall Q function - its relation to the Marcum Q function and its application in digital communication performance evaluation”, *IEEE Transactions on Communications*, ISSN: 0090-6778, vol. 50, no. 11, pp. 1712-1715, 2002.
- [89] M. K. Simon, “A simpler form of the Craig representation for the two-dimensional joint Gaussian Q-function,” *IEEE Communications Letters*, ISSN: 1089-7798, vol. 6, no. 2, pp. 49–51, 2002.
- [90] P. O. Borjesson and C. E. Sundberg, “Simple approximations of the error function $Q(x)$ for communications applications,” *IEEE Transaction on Communications*, ISSN: 0090-6778, vol. 27, no. 3, pp. 639–643, 1979.
- [91] W. M. Jang, “A simple upper bound of the Gaussian Q-function with closed-form error bound,” *IEEE Communications Letters*, vol. 15, no. 2, pp. 1274–1274, 2011.
- [92] Y. Isukapalli and B. D. Rao, “An analytically tractable approximation for the Gaussian Q-function,” *IEEE Communications Letters*, ISSN: 1089-7798, vol. 12, no. 9, pp. 669–671, 2008.
- [93] Z.-H. Yang and Y.-M. Chu, “On approximating Mills ratio,” *Journal of Inequalities and Applications*, 2015.
- [94] P. Loskot and N. C. Beaulieu, “Prony and polynomial approximations for evaluation of the average probability of error over slow-fading channels,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 58, no. 3, pp. 1269–1280, 2009.
- [95] P. C. Sofotasios and S. Freear, “Novel expressions for the Marcum and one dimensional Q-functions,” *Wireless Communications Systems (ISWCS)*, pp. 736–740, 2010.
- [96] L. M. Benitez and F. Casadevall, “Versatile, accurate, and analytically tractable approximation for the Gaussian Q-function,” *IEEE Transactions on Communications*, ISSN: 0090-6778, vol. 59, no. 4, pp. 917–922, 2011.
- [97] P. D. Ngoc, U. N. Quang, H. N. Xuan, and R. McKay, “Evolving approximations for the Gaussian Q-function by genetic programming with semantic based crossover,” *Evolutionary Computation*, pp. 1–6, 2012.
- [98] Y. Chen and N. C. Beaulieu, “A simple polynomial approximation to the Gaussian Q-function and its application,” *EEE Communications Letters*, ISSN: 1089-7798, vol. 13, no. 2, pp. 124–126, 2009.
- [99] M. K. Simon, “Single integral representations of certain integer powers of the
-

-
- Gaussian Q-function and their application,” *IEEE Communications Letters*, ISSN: 1089-7798, vol. 6, no. 12, pp. 532–534, 2002.
- [100] C. Tellambura and A. Annamalai, “Efficient computation of $\text{erfc}(x)$ for large arguments,” *IEEE Transactions on Communications*, ISSN: 0090-6778, vol. 48, no. 4, pp. 529–532, 2000.
- [101] P. Fan, “New inequalities of Mill’s ratio and its application to the inverse Q-function approximation,” *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 10, no. 1, pp. 1–11, 2013.
- [102] A. Gasull and F. Utzet, “Approximating Mills ratio,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 420, no. 2, pp. 1832–1853, 2014.
- [103] G. Abreu, “Very simple tight bounds on the Q-function,” *IEEE Transactions on Communications*, ISSN: 0090-6778, vol. 60, no. 9, pp. 2415–2420, 2012.
- [104] V. N. Q. Bao, L. P. Tuyen, and H. H. Tue, “A Survey on approximations of one-dimensional Gaussian Q-function,” *REV Journal on Electronics Communications*, vol. 5, no. 1–2, 2015.
- [105] Z. H. Jang and Y. M. Chu, “On approximating Mills ratio,” *Journal of Inequalities and Applications*, 2015.
- [106] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Courier Corporation, 1964.
- [107] M. K. Simon, *Probability distributions involving Gaussian random variables: A handbook for engineers and scientists*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [108] I. Develi, “A new approximation based on the differential evolution algorithm for the Gaussian Q-function,” *International Journal Innovative Computing Information and Control*, ISSN: 1349-4198, vol. 8, no. 10B, pp. 7095–7102, 2012.
- [109] J. Nikolić, Z. Perić, and A. Jovanović, “Novel Approximations for the Q-Function with Application in SQNR Calculation,” *Digital Signal Processing*, vol. 65, pp. 71–80, 2017.
- [110] Z. Perić and J. Nikolić, “Asymptotic analysis of switched uniform polar quantization for memoryless Gaussian source,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, no. 1, pp. 75–78, 2013.
- [111] S. Na, “Asymptotic formulas for variance-mismatched fixed-rate scalar quantization of a Gaussian source,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 5, pp. 2437–2441, 2011.
-

-
- [112] J. Nikolić, Z. Perić, and A. Jovanović, “Two forward adaptive dual-mode companding scalar quantizers for Gaussian source,” *Signal Processing*, vol. 120, pp. 129–140, 2016.
- [113] D. Lu, “Certain approximations to achieve sharp lower and upper bounds for the Mill’s ratio of the inverse Gaussian distribution,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 444, no. 1, pp. 737–744, 2016.
- [114] Z. Perić and J. Nikolić, “Design of asymptotically optimal unrestricted polar quantizer for Gaussian source,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, no. 10, pp. 980–983, 2013.
- [115] S. Panić, M. Stefanović, J. Anastasov, and P. Spalević, *Fading and Interference Mitigation in Wireless Communications*, CRC Press, 1st ed., Florida, USA, 2013.
- [116] D. Simon, *Evolutionary Optimization Algorithms*. John Wiley & Sons, New Jersey, 2013.
- [117] I. Develi and A. Akdagli, “High-order exponential approximations for the Gaussian Q-function obtained by genetic algorithm,” *International Journal of Electronics*, vol. 100, no. 4, pp. 553–562, 2013.

BIOGRAFIJA

Aleksandar Marković je rođen 03.08.1987. godine u Novom Pazaru. Osnovnu školu završio je u Lešku i Gimnaziju u Leposaviću sa odličnim uspehom. Godine 2006. upisao je Fakultet tehničkih nauka u Kosovskoj Mitrovici, gde je diplomirao 2009. godine na osnovnim studijama sa prosečnom ocenom u toku studija 9.25 i ocenom 10 (deset) na diplomskom radu. Master studije završava 2011. godine na istom fakultetu sa prosečnom ocenom 9.89 i odbranjenim master radom sa ocenom 10 (deset).

Školske 2011/12. godine upisao je prvu godinu doktorskih studija na Elektronskom fakultetu u Nišu, studijski program elektrotehnika i računarstvo, smer telekomunikacije, na teret budžeta. Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom sa prosečnom ocenom 10,00.

Na Prirodno-matematičkom fakultetu na odseku za Informatiku u Kosovskoj Mitrovici, zasniva radni odnos, prvo kao saradnik u nastavi a nakon toga kao asistent za užu naučnu oblast Računarstvo. Izvodi vežbe na predmetima: Algoritmi i struktura podataka, Baze podataka, Programski jezici i programiranje, Obrazovni softver, Alati i tehnologije za elektronsko učenje.

Autor i koautor je 20 naučnih radova objavljenih u međunarodnim i domaćim časopisima, kao i u Zbornicima međunarodnih i domaćih naučnih konferencija.

IZJAVE AUTORA



IZJAVA O AUTORSTVU

Izjavljujem da je doktorska disertacija, pod naslovom
Razvoj metoda i algoritama za procenu performansi komunikacionih sistema
primenom aproksimacija specijalnih funkcija_____

- rezultat sopstvenog istraživanja
- da predložena disertacija, niti u celini, niti u delovima, nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome, prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova,
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršio/la autorska prava, niti zloupotrebio/la intelektualnu svojinu drugih lica.

U Nišu, _____

Autor disertacije

_____ *Aleksandar Marković*

Potpis doktoranda:



IZJAVA O ISTOVETNOSTI ŠTAMPANE I ELEKTRONSKE VERZIJE DOKTORSKE DISERTACIJE

Ime i prezime autora: Aleksandar Marković

Srudijski program: Elektrotehnika i računarstvo

Naslov rada: Razvoj metoda i algoritama za procenu performansi komunikacionih sistema primenom aproksimacija specijalnih funkcija

Mentor: dr Zoran Perić, redovni profesor

Izjavljujem da je štampana verzija moje doktorske disertacije istovetna elektronskoj verziji, koju sam predao/la za unošenje u **Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu**.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci, koji su u vezi sa dobijanjem akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada, i to u katalogu Biblioteke, Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Nišu, kao i u publikacijama Univerziteta u Nišu.

U Nišu, _____

Autor disertacije

Aleksandar Marković

Potpis doktoranda:



IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Nikola Tesla” da, u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu, unese moju doktorsku disertaciju, pod naslovom: *Razvoj metoda i algoritama za procenu performansi komunikacionih sistema primenom aproksimacija specijalnih funkcija*

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim priložima predao/la sam u elektronskom formatu, pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju, unetu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu, mogu koristiti svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio/la.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima

U Nišu, _____

Autor disertacije

Aleksandar Marković

Potpis doktoranda:
