UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Maja S. Obradović

NUMERIČKE APROKSIMACIJE REŠENJA NEUTRALNIH STOHASTIČKIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA SA VREMENSKI-ZAVISNIM KAŠNJENJEM

DOKTORSKA DISERTACIJA

Niš, 2019.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

Maja S. Obradović

NUMERICAL APPROXIMATIONS OF SOLUTIONS TO NEUTRAL STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TIME-DEPENDENT DELAY

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2019.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Др Марија Г. Милошевић, ванредни професор, Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет
Наслов:	Нумеричке апроксимације решења неутралних стохастичких диференцијалних једначина са временски-зависним кашњењем
Резиме:	У овој дисертацији су разматране нумеричке апроксимације решења неутралних стохастичких диференцијалних једначина са временски-зависним кашњењем и неутралних стохастичких диференцијалних једначина са временски-зависним кашњењем и прелазима Маркова. Притом су проучаване Euler-Maruyama-ина метода, backward Euler-ова метода и θ-Euler-Maruyama-ина метода. Одређени су довољни услови конвергенције у вероватноћи низова Euler-Maruyama-иних и backward Euler-ових решења ка тачном решењу неутралних стохастичких диференцијалних једначина са временски-зависним кашњењем и прелазима Маркова. Поред тога одређени су и услови под којима ова решења наслеђују од тачног решења особину скоро извесне експоненцијалне стабилности. Такође су разматрани довољни услови под којима тачно и θ-Euler-Maruyama-ино апроксимативно решење имају особину скоро извесне експоненцијалне стабилности.
Научна област:	Математика
Научна дисциплина:	Вероватноћа и статистика
Кључне речи:	Неутралне стохастичке диференцијалне једначине, процес Маркова, скоро извесна експоненцијална стабилност, конвергенција у вероватноћи, Euler-Maruyama-ина метода, backward Euler-ова метода, θ- Euler-Maruyama-ина метода
УДК:	519.62:519.216
CERIF класификација:	P 001 Математика
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Marija G. Milošević, PhD, associate professor at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš
Title:	Numerical approximations of solutions to neutral stochastic differential equations with time-dependent delay
Abstract:	In this dissertation numerical approximations of solutions to neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and Markovian switching are considered. Euler-Maruyama, backward Euler and θ- Euler-Maruyama methods are studied. Sufficient conditions for convergence in probability of the sequences of Euler-Maruyama and backward Euler solutions to the exact solution of neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and Markovian switching are determined. Moreover, conditions under which these solutions inherit from the exact solution almost sure exponential stability property. Beside that the sufficient conditions under which both the exact and θ- Euler-Maruyama approximate solutions share the almost sure exponential stability property.
Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Probability and statistics
Key Words:	Neutral stochastic differential equations, Markovian switching, Almost sure exponential stability, Convergence in probability, Euler-Maruyama method, backward Euler method, θ- Euler- Maruyama method
UDC:	519.62:519.216
CERIF Classification:	P 001 Mathematics
Creative Commons License Type:	

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	**монографска**
Тип записа, **ТЗ**:	**текстуални / графички**
Врста рада, **ВР**:	**докторска дисертација**
Аутор, **АУ**:	**Маја С. Обрадовић**
Ментор, **МН**:	**Марија Г. Милошевић**
Наслов рада, **НР**:	**НУМЕРИЧКЕ АПРОКСИМАЦИЈЕ РЕШЕЊА НЕУТРАЛНИХ СТОХАСТИЧКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА СА ВРЕМЕНСКИ-ЗАВИСНИМ КАШЊЕЊЕМ**
Језик публикације, **ЈП**:	**српски**
Језик извода, **ЈИ**:	**српски**
Земља публиковања, **ЗП**:	**Србија**
Уже географско подручје, **УГП**:	**Србија**
Година, **ГО**:	**2019.**
Издавач, **ИЗ**:	**ауторски репринт**
Место и адреса, **МА**:	**Ниш, Вишеградска 33.**
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	**175 стр., граф. прикази**
Научна област, **НО**:	**математика**
Научна дисциплина, **НД**:	**Вероватноћа и статистика**
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	**Неутралне стохастичке диференцијалне једначине, процеси Маркова, скоро извесна експоненцијална стабилност, конвергенција у вероватноћи, Euler-Maruyama-ина метода, backward Euler-ова метода, θ- Euler-Maruyama-ина метода**
УДК	**519.62:519.216**
Чува се, **ЧУ**:	**библиотека**
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	**У овој дисертацији су разматране нумеричке апроксимације решења неутралних стохастичких диференцијалних једначина са временски-зависним кашњењем и неутралних стохастичких диференцијалних једначина са временски-зависним кашњењем и прелазима Маркова. Притом су проучаване Euler-Maruyama-ина метода, backward Euler-ова метода и θ- Euler-Maruyama-ина метода. Одређени су довољни услови конвергенције у вероватноћи низова Euler-Maruyama-иних и backward Euler-ових решења ка тачном решењу неутралних стохастичких диференцијалних једначина са временски-зависним кашњењем и прелазима Маркова. Поред тога одређени су и услови под којима ова решења наслеђују од тачног решења особину скоро извесне експоненцијалне стабилности. Такође су разматрани довољни услови под којима тачно и θ- Euler-Maruyama-ино апроксимативно решење имају особину скоро извесне експоненцијалне стабилности.**
Датум прихватања теме, **ДП**:	**11.01.2018.**
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual / graphic**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Maja S. Obradović**
Mentor, **MN**:	**Marija G. Milošević**
Title, **TI**:	**NUMERICAL APPROXIMATIONS OF SOLUTIONS TO NEUTRAL STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TIME-DEPENDENT DELAY**
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2019**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**175 p. ; graphic representations**
Scientific field, **SF**:	**Mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**Probability and statistics**
Subject/Key words, **S/KW**:	**Neutral stochastic differential equations, Markov process, almost sure exponential stability, convergence in probability, Euler-Maruyama method, backward Euler method, θ- Euler- Maruyama method**
UC	**519.62:519.216**
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		**In this dissertation numerical approximations of solutions to neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and Markovian switching are considered. Euler-Maruyama, backward Euler and θ- Euler-Maruyama methods are studied. Sufficient conditions for convergence in probability of the sequences of Euler-Maruyama and backward Euler solutions to the exact solution of neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and Markovian switching are determined. Moreover, conditions under which these solutions inherit from the exact solution almost sure exponential stability property. Beside that the sufficient conditions under which both the exact and θ- Euler-Maruyama approximate solutions share the almost sure exponential stability property.**
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		**11.01.2018**.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Predgovor

U doktorskoj disertaciji *Numeričke aproksimacije rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem* proučavaju se aproksimacije rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova. Pritom se razmatraju numeričke metode aproksimacije rešenja, i to: Euler-Maruyamina metoda, backward Eulerova metoda i θ-Euler-Maruyamina metoda.

Poznato je da se pomoću stohastičkih diferencijalnih jednačina mogu modelirati mnoge pojave koje zavise od slučajnih faktora. Često opisivanje takvih pojava zahteva komplikovane modele zasnovane na neutralnim stohastičkim diferencijalnim jednačinama, zbog čega su one predmet proučavanja velikog broja autora. U mnogim situacijama iz realnog života, promene sistema su uslovljene kako trenutnim stanjem, tako i stanjima sistema u periodu koji prethodi datom trenutku i tada se stanje sistema opisuje nekom funkcijom vremena. Takvi sistemi se matematički modeliraju pomoću neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i imaju široku primenu, naročito u populacionoj dinamici, biologiji i finansijama. Međutim, u većini slučajeva, stohastičke diferencijalne jednačine se ne mogu rešiti eksplicitno, tako da je potrebno proučavati njihova aproksimativna rešenja. Posebno je važno odrediti uslove pod kojima tačno i aproksimativno rešenje imaju zajedničke osobine, kao što su stabilnost, neprekidnost i ograničenost momenata. Postoje brojni radovi na temu numeričkih aproksimacija rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem [20, 55, 56, 68, 69], neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina [54, 65, 66, 67, 91, 92] i stohastičkih diferencijalnih jednačina sa prelazima Markova [21, 42, 53, 58, 59].

Osnovni cilj ove disertacije je proširivanje rezultata na druge tipove jednačina, kao i korišćenje novih tehnika. Postoje implicitne i eksplicitne numeričke metode aproksimacije rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina, a među najvažnijim kriterijumima za njihovu primenu je da se metoda lako implementira i da aproksimativna rešenja nasleđuju svojstva tačnog rešenja. Među radovima na temu numeričkih metoda aproksimacije rešenja naročito se ističu radovi [18, 20, 42, 57, 65, 66, 67] i knjiga [59], kao i literatura na koju se knjiga poziva.

Ova disertacija jednim delom proširuje postojeće rezultate iz oblasti aproksimacija rešenja Euler-Maruyaminom metodom, backward Eulerovom metodom i θ-Euler-Maruyaminom metodom na još neke klase jednačina. Drugim delom se određuju uslovi skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti tačnog i aproksimativnog rešenja, kao i konvergencije u verovatnoći niza aproksimativnih rešenja ka tačnom rešenju, koji su uslovljeni pre svega prirodom samih jednačina.

Disertacija sadrži rezultate koji su izloženi u tri glave.

U prvoj glavi su navedeni osnovni pojmovi i rezultati teorije stohastičkih procesa i teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina, pre svega osnovne teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja različitih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina. Zatim su navedene neke numeričke metode aproksimacije rešenja običnih stohastičkih diferencijalnih jednačina i običnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa prelazima Markova.

U drugoj glavi se razmatraju egzistencija, jedinstvenost i stabilnost tačnog rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova, pri čemu je funkcija kašnjenja neograničena. Na taj način su prošireni rezultati iz rada [20], koji se odnose na određivanje dovoljnih uslova stabilnosti rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova. Pored toga, uvođenjem pretpostavke o ograničenosti funkcije kašnjenja, određeni su dovoljni uslovi skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti i stabilnosti u srednjem reda p rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova. Na taj način su prošireni rezultati iz rada [66]. Osnovna razlika između rada [66] i rezultata navedenih u disertaciji je u drugačijoj verziji uslova Khasminskiiog, koje je potrebno da zadovoljavaju koeficijenti jednačina i u opštem slučaju ti uslovi nisu uporedivi. Zatim se proučava konvergencija u verovatnoći diskretnog i neprekidnog Euler-Maruyaminog rešenja ka tačnom rešenju, kao i skoro izvesna eksponencijalna stabilnost diskretnog Euler-Maruyaminog rešenja za neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova. S obzirom na to da neutralni član zavisi od procesa Markova, način definisanja Euler-Maruyaminog rešenja se razlikuje od onog koji je predstavljen u radu [65] i uslovljen je samom prirodom jednačine koja se razmatra. Pomenuti rezultati su objavljeni u radu [73], M. Obradović, M. Milošević, *Stability of a class of neutral stochastic differential equations with unbounded delay and Markovian switching and the Euler–Maruyama method* J. Comput. Appl. Math. (2017) 244–266. Takođe, za pomenuti tip jednačina je dokazana i skoro izvesna eksponencijalna stabilnost backward Eulerove metode. Ovi rezultati su proširenje rezultata iz rada [67], u kome je dokazana skoro izvesna eksponencijalna stabilnost za klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem. Osim toga, neutralni član je hibridan, odnosno zavisi od procesa Markova i zbog toga je aproksimativno rešenje definisano na drugačiji način od onog iz rada [67]. Rezultati ovog dela disertacije su objavljeni u radu [77], M.

Obradović, *Implicit numerical methods for neutral stochastic differential equations with unbounded delay and Markovian switching*, Applied Mathematics and Computation 347 (2019) 664-687.

U trećoj glavi se razmatra θ-Euler-Maruyamina metoda za klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem. Razmatra se skoro izvesna eksponencijalna stabilnost θ-Euler-Maruyamine metode posebno za slučaj kada je $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ i za slučaj kada je $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$. U radu [74], M. Obradović, M. Milošević, *Almost sure exonential stability of θ-EulerMaruyama method for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay when $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$*, Filomat 31:18 (2017) 5629–5645, zbog prisustva vremenski-zavisnog kašnjenja u koeficijentu prenosa i u neutralnom članu, tehnika koja se koristi u dokazivanju skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti se razlikuje od onih koje su korišćene za neke druge klase neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina. Kako bi ispitivanje skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti bilo kompletno, posebno se razmatra slučaj kada je $\theta = 0$, odnosno θ-Euler-Maruyamina metoda se svodi na Euler-Maruyaminu metodu. Rezultati za slučaj kada je $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$ su objavljeni u radu [75], M. Obradović, M. Milošević, *Almost sure exonential stability of θ-EulerMaruyama method, when $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay under nonlinear growth conditions*, Calcolo 56:9 (2019), a glavna motivacija potiče iz rada [42] u kome je razmatrana eksponencijalna stabilnost θ-Euler-Maruyaminog rešenja bez uslova linearnog rasta za koeficijent prenosa i koeficijent difuzije. U radu [75], u aproksimativnoj jednačini, osim koeficijenta prenosa i neutralni član je parametrizovan pomoću θ i zbog toga su rezultati stabilnosti dati pod malo strožim uslovima u poređenju sa onim iz rada [42]. Za $\theta = 1$, θ-Euler-Maruyamina metoda se svodi na backward Eulerovu metodu. U ovoj glavi se razmatra i skoro izvesna asimptotska eksponencijalna stabilnost diskretnog θ-Euler-Maruyaminog aproksimativnog rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem za $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, pod uslovom linearnog rasta, a ti rezultati su sadržani u radu [76], M. Obradović, M. Milošević, *A note on the almost sure exponential stability of the θ-Euler-Maruyama approximation for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay when $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$*, koji je u pripremi.

Teorijski rezultati ove disertacije su ilustrovani primerima i numeričkim simulacijama.

U Zaključku su izloženi neki od otvorenih problema i mogući pravci daljih istraživanja.

*

* *

Koristim priliku da izrazim veliku zahavlnost mentoru, dr Mariji Milošević, vanrednom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu, na velikoj i nesebičnoj pomoći i podršci, koju mi je pružala tokom doktorskih studija, prilikom izrade disertacije i formiranja svih naučnih rezultata koji su ovde prikazani. Zahvaljujem i svom profesoru, dr Miljani Jovanović, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu, na korisnim savetima, interesovanju za postignute rezultate u naučnom istraživanju i podršci. Posebno se zahvaljujem svom metoru sa magistarskih studija, dr Svetlani Janković, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu (u penziji), uz čiju pomoć i podršku sam stekla značajno iskustvo u oblasti naučnog istraživanja.

Zahvaljujem se i članovima komisije dr Ljiljani Petrović, redovnom profesoru Ekonomskog fakulteta u Beogradu, dr Jasmini Đorđević, vanrednom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu i dr Mariji Krstić, vanrednom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, na dragocenim sugestijama i primedbama koje su doprinele poboljšanju ove disertacije.

Izrazila bih posebnu zahvalnost svojoj porodici koja me je podržavala i verovala u mene.

Sadržaj

Glava 1

Uvodni pojmovi i rezultati

U ovoj glavi su uvedeni osnovni pojmovi i rezultati teorije stohastičkih procesa koji se eksplicitno koriste u nastavku. Neki od osnovnih pojmova koji se navode u Poglavlju 1.1 su merljivost, separabilnost, neprekidnost, markovsko svojstvo. U Poglavlju 1.2 dat je poseban osvrt na Brownovo kretanje i njegove najvažnije osobine, tj. na njegov matematički model koji se naziva i Wienerov proces. Konstrukcija integrala Itôa, tj. integrala slučajne funkcije po Wienerovom procesu, kao i osobine tog integrala, navedene su u Poglavlju 1.3. Mnogi autori su se bavili egzistencijom, jedinstvenošću, stabilnošću i aproksimacijama rešenja različitih klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina. U Poglavljima 1.4, 1.5, 1.6 se navode teoreme egzistencije i jedinstvenosti rešenja običnih, neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem, neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova kao i osnovni tipovi stabilnosti trivijalnog rešenja tih jednačina. Pored toga, u Poglavljima 1.7 i 1.8 su navedeni rezultati koji se odnose na nekoliko numeričkih aproksimativnih metoda i koji su relevantni u nastavku disertacije. Na kraju glave, u Poglavlju 1.9 navedene su neke elementarne nejednakosti i integralna nejednakost Gronwall-Bellmana, koje se više puta primenjuju u dokazivanju glavnih rezultata.

1.1 Osnovni pojmovi teorije stohastičkih procesa

Pojam stohastičkih procesa je uveden početkom prošlog veka. U to vreme su se fizika i tehnika bavile proučavanjem pojava koje se menjaju sa protokom vremena, dok teorija verovatnoća još uvek nije imala razvijenu metodologiju za tretiranje takvih pojava. Otuda se javila potreba za razvojem teorije stohastičkih procesa u okviru koje bi se razmatrale slučajne promenljive koje su vremenski zavisne.

Zaslužni za razvoj ove teorije su pre svega Sluckii, Wiener, Kolmogorov, Cramer, Doob i drugi matematičari. Sluckii je u radu [80] pokušao da slučajnost poveže sa konceptom realnih funkcija, a Wiener [82] je prvi matematički opisao haotično kretanje čestica polena u tečnosti. Uvođenje pojmova uslovne verovatnoće i uslovnog matematičkog očekivanja omogućilo je Kolmogorovu [40, 41] da postavi osnove za razvoj teorije stohastičkih procesa markovskog tipa sa beskonačnim parametarskim skupom, dok je Cramer [7] zasnovao teoriju Gaussovog procesa. Značajan pomak u teoriji stohastičkih procesa predstavlja Doobova monografija [10]. Između ostalog, Doob je proučavao koncept vremena zaustavljanja, što je dovelo do razvoja teorije martingala. Doobov rad u ovoj oblasti su nastavili Meyer [60, 61, 62], Dolean-Dade [9] i Dellacherie [8]. Teorija stohastičkih procesa je doprinela razvoju mnogobrojnih matematičkih teorija koje su od velikog značaja za ekonomiju, biologiju, mehaniku, inžinjerstvo.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dati prostor verovatnoća i $T \subset R$ parametarski skup. U daljim razmatranjima, T je interval oblika $[0, \infty)$, interval oblika $[0, \overline{T}]$ ili $[t_0, \overline{T}] \subset [0, \infty)$, pri čemu je uobičajeno da se parametar $t \in T$ interpretira kao vreme.

Za dati prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, definiše se σ-algebra

$$\overline{\mathcal{F}} = \{A \subset \Omega : \exists B, C \in \mathcal{F} \quad \text{tako da je} \quad B \subset A \subset C,\, P(B) = P(C)\}.$$

Ako je $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$, tada je prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kompletan.

Definicija 1.1 *Familija $\{x(t), t \in T\}$ slučajnih merljivih funkcija $x(\omega, t) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (R^d, \mathcal{B})$ se naziva stohastički proces sa faznim prostorom $(R^d, \mathcal{B})$ i parametarskim skupom T, gde je $\mathcal{B}$ Borelova σ-algebra nad R^d.*

Na osnovu prethodne definicije se može zaključiti da se za svako fiksirano $t \in T$ dobija slučajna promenljiva, odnosno $\mathcal{F}$-merljiva funkcija $x(\omega, t) : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (R^d, \mathcal{B})$. Za svako fiksirano $\omega \in \Omega, x(\omega, t) \in R^d$ predstavlja funkciju realnog argumenta $t \in T$, koja se naziva trajektorija ili realizacija koja odgovara ishodu $\omega \in \Omega$. Ako je $T = N$, tj. ako je vremenski interval diskretan, tada se radi o stohastičkom nizu $\{x(\omega, n), n \in N\}$.

U daljem tekstu će biti korišćena oznaka $x(t)$ umesto $x(\omega, t)$.

Stohastički proces određuje familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P\{x(t_1) < x_1, \ldots, x(t_n) < x_n\},$$

gde je $x_i \in R$, $t_i \in T$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in N$.

Zahteva se da ova familija zadovoljava sledeće uslove:

(1) (svojstvo simetrije)

$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, gde je $(i_1, \ldots, i_n)$ proizvoljna permutacija brojeva $(1, \ldots, n)$, $n \in N$,

(2) (svojstvo saglasnosti)

$F_{t_1,\ldots,t_j,t_{j+1},\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_j, \infty, \ldots, \infty) = F_{t_1,\ldots,t_j}(x_1, \ldots, x_j)$, za $j < n$.

Teorema 1.1 (Teorema Kolmogorova) *Za svaku familiju konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela koja zadovoljava uslove (1) i (2) postoji prostor verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i na njemu definisan stohastički proces* $\{x(t), t \in T\}$ *kome odgovara ta familija konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela.*

Definicija 1.2 *Stohastički procesi* $\{x(t), t \in T\}$ *i* $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$*, definisani na istom prostoru verovatnoće i sa istim skupom stanja, su stohastički ekvivalentni ako je za proizvoljno* $t \in T$

$$P\{\omega \in \Omega : x(\omega, t) = \tilde{x}(\omega, t)\} = 1.$$

U tom slučaju se kaže da je proces $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$ *stohastička modifikacija (verzija) procesa* $\{x(t), t \in T\}$ *i obrnuto.*

U definiciji stohastičkog procesa nije naglašeno kakav je skup T, a problem nastaje kada treba posmatrati ponašanje nekog stohastičkog procesa na neprebrojivom skupu parametra t. Da bi se ta teškoća otklonila, uvodi se pojam separabilnosti.

Definicija 1.3 *Stohastički proces* $\{x(t), t \in T\}$ *je separabilan ako postoji prebrojiv skup* $G \subset T$ *i fiksiran događaj* $\Lambda \subset \Omega$ *verovatnoće nula, tako da se za proizvoljan zatvoren skup* $K \subset R^d$ *i proizvoljan otvoren interval* $I \subset T$*, skupovi*

$$\{\omega : x(\omega, t) \in K, t \in I\} \quad i \quad \{\omega : x(\omega, t) \in K, t \in I \cap G\}$$

razlikuju na podskupu od Λ.

Skup G se naziva separant.

Definicija 1.4 *Stohastički proces* $\{x(t), t \in T\}$ *je merljiv ako je funkcija* $x(\omega, t)$ *merljiva u odnosu na* $\mathcal{B}_{\mathcal{T}} \times \mathcal{F}$*, gde je* $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ *Borelova* σ*-algebra nad* T*, tj. za svaki Borelov skup* B*, važi* $\{(t, \omega) : x(\omega, t) \in B\} \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}} \times \mathcal{F}$.

Sledeća teorema ukazuje na značaj merljivosti procesa.

Teorema 1.2 (Fubini, [30]) *Neka je* $\{x(t), t \in T\}$ *merljiv stohastički proces dedinisan na kompletnom prostoru verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Tada:*

(i) *skoro sve trajektorije su merljive funkcije parametra* $t \in T$*;*

(ii) *ako postoji matematičko očekivanje* $Ex(t)$ *za svako* $t \in T$*, tada je* $m(t) = Ex(t)$ *merljiva funkcija parametra* $t \in T$*;*

(iii) *za svaki merljiv podskup* S *intervala* $T = [0, \infty)$*, iz* $\int_S E|x(t)|\,dt < \infty$ *sledi* $\int_S |x(t)|\,dt < \infty$ *sa verovatnoćom jedan, tj. skoro sve trajektorije su integrabilne na skupu* S *i*

$$\int_S Ex(t)\,dt = E\int_S x(t)\,dt.$$

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je stohastički neprekidan u tački $t \in T$, ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ važi

$$P\{|x(t+h) - x(t)| > \varepsilon\} \to 0, \quad h \to 0. \tag{1.1.1}$$

Stohastički proces je stohastički neprekidan na skupu $S \subseteq T$ ako (1.1.1) važi za svako $t \in S$.

Teorema 1.3 (Doob, [10]) *Za svaki stohastički neprekidan stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ postoji stohastički ekvivalentan, separabilan i merljiv stohastički proces $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$, definisan na istom prostoru verovatnoće i sa istim skupom vrednosti.*

Stohastički proces $\{\tilde{x}(t), t \in T\}$ iz prethodne teoreme se naziva separabilna i merljiva modifikacija stohastičkog procesa $\{x(t), t \in T\}$.

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je neprekidan u srednjem reda p, tj. L_p-neprekidan, u tački $t \in T$, ako je $E|x(t)|^p < \infty$, za svako $t \in T$ i

$$E|x(t+h) - x(t)|^p \to 0, \quad h \to 0. \tag{1.1.2}$$

Stohastički proces je L_p-neprekidan na skupu $S \subseteq T$ ako (1.1.2) važi za svako $t \in S$.

Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je skoro izvesno neprekidan na segmentu $[a, b] \subset T$ ako su skoro sve njegove trajektorije neprekidne na $[a, b]$, tj. ako važi

$$P\{\omega \in \Omega : x(\omega, t) \,\text{ima prekid na}\, [a, b]\} = 0.$$

Ispitivanje skoro izvesne neprekidnosti se često vrši primenom kriterijuma Kolmogorova koji je iskazan sledećom teoremom.

Teorema 1.4 (Kriterijum Kolmogorova) *Neka su p, q i k pozitivne konstante takve da za svako $T > 0$ i $0 \le t, s \le T$ važi*

$$E|x(t) - x(s)|^p \le k|t - s|^{1+q}.$$

Tada stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ ima skoro izvesno neprekidnu modifikaciju.

Definicija 1.5 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je drugog reda ($L_2 -$ proces) ako je $E|x(t)|^2 < \infty$, za svako $t \in T$.*

Definicija 1.6 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ je strogo stacionaran ako za proizvoljni izbor parametara $t_1, \ldots, t_n \in T$ i $h \in R$, za koje je $t_1 + h, \ldots, t_n + h \in T$, zajednička raspodela slučajnih promenljivih $x(t_1 + h), \ldots, x(t_n + h)$ ne zavisi od h.*

Postoji šira klasa stacionarnih procesa, a to su slabo stacionarni procesi.

Definicija 1.7 *Stohastički proces* $\{x(t), t \in T\}$ *je slabo stacionaran ako za svako* $t \in T$ *važi:*

(i) $E|x(t)|^2 < \infty$,

(ii) $Ex(t) = a = const.$,

(iii) $K(t,s) = E(x(t) - Ex(t))(x(s) - Ex(s)) = K(t-s)$, *tj. korelaciona funkcija* $K(t,s)$ *zavisi samo od razlike argumenata* t *i* s.

Definicija 1.8 *Familija* $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ *pod-*σ*-algebri* σ*-algebre* $\mathcal{F}$ *je filtracija (potok) događaja iz* Ω, *ako je* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ *za svako* $s \leq t$, $s, t \in T$.

Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je neprekidna s leva, s desna, neprekidna ako za svako $t \geq 0$ važi

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-} = \sigma\left\{\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right\}, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \sigma\left\{\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s\right\}, \quad \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_{t+},$$

respektivno.

Filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ zadovoljava uobičajene uslove ako je neprekidna s desna i $\mathcal{F}_0$ sadrži sve događaje iz $\mathcal{F}$ čija je verovatnoća nula. U nastavku će se podrazumevati da filtracija zadovoljava uobičajene uslove.

Definicija 1.9 *Stohastički proces* $\{x(t), t \in T\}$ *je adaptiran u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ *ako je, za svako* $t \in T$, *slučajna promenljiva* $x(t)$ $\mathcal{F}_t$*-merljiva.*

Definicija 1.10 *Stohastički proces* $\{x(t), t \in [t_0, \widetilde{T}]\}$ *je proces sa nezavisnim priraštajima ako su za svako* $k \in N$ *i* $t_0 < t_1 < \cdots < t_k \leq \widetilde{T}$ *slučajne promenljive* $x(t_0), x(t_1) - x(t_0), \ldots, x(t_k) - x(t_{k-1})$ *nezavisne.*

Osnovni predstavnici procesa sa nezavisnim priraštajima su Wienerov i Poissonov proces.

Ako za stohastički proces sa nezavisnim priraštajima funkcija raspodele priraštaja $x(t) - x(s)$ zavisi samo od razlike $t - s$, tada je to proces sa stacionarnim nezavisnim priraštajima.

Definicija 1.11 *Stohastički proces* $\{x(t), t \in T\}$ *je proces Markova ako za proizvoljne* $0 \leq t_1 < \ldots < t_k$ *i* $B \in \mathcal{B}^d$, *važi*

$$P\{x(t_k) \in B \mid x(t_1), \ldots, x(t_{k-1})\} = P\{x(t_k) \in B \mid x(t_{k-1})\},$$

skoro izvesno.

Interpretirajući slučajne promenljive $x(t_1), \cdots, x(t_{n-2})$ kao prošlost, $x(t_{n-1})$ kao sadašnjost i $x(t_n)$ kao budućnost, procesi Markova se mogu opisati kao procesi u kojima predviđanje budućnosti zavisi samo od sadašnjosti, a ne i od prošlosti. Procesima Markova se opisuju pojave u teoriji masovnog opsluživanja, na primer stohastička svojstva redova čekanja, ili u ekonomiji cena akcija.

Važna klasa u teoriji stohastičkih procesa, koju je strogo matematički uveo Doob, su martingali.

Definicija 1.12 *Stohastički proces* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *za koji je* $E|x(t)| < \infty$*, za svako* $t \geq 0$ *je:*

(i) martingal, ako je $E(x(t) \mid \mathcal{F}_s) = x(s)$ *s.i. za svako* $0 \leq s \leq t$*;*

(ii) submartingal, ako je $E(x(t) \mid \mathcal{F}_s) \geq x(s)$ *s.i. za svako* $0 \leq s \leq t$*;*

(iii) supermartingal, ako je $E(x(t) \mid \mathcal{F}_s) \leq x(s)$ *s.i. za svako* $0 \leq s \leq t$.

Submartingali i supermartingali zajedno, zovu se semi-martingali.

Definicija lokalnog martingala se zasniva na pojmu vremena zaustavljanja.

Definicija 1.13 *Slučajna promenljiva* $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ *je vreme zaustavljanja filtracije* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$*, ako događaj* $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\}$ *pripada* σ*-algrebri* $\mathcal{F}_t$ *za svako* $t \geq 0$.

Ako je $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ neprekidan n-dimenzionalni stohastički proces i $D \subset R^n$ otvoren skup, tada je slučajna promenljiva,

$$\tau = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : x(t) \notin D\}, & D \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{inače}, \end{cases}$$

vreme zaustavljanja u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. To je prvo vreme napuštanja skupa D.

Definicija 1.14 *Neka je* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *neprekidan progresivno merljiv proces i* τ *vreme zaustavljanja. Tada je* $\{x(\tau \wedge t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *proces zaustavljanja procesa* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

Definicija 1.15 *Neprekidan proces* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *takav da je* $x_0 = 0$ *s.i. je lokalni martingal ako postoji neopadajući niz* $\{\tau_k, k \geq 1\}$ *vremena zaustavljanja filtracije* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$*, pri čemu je* $P\{\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty\} = 1$*, tako da je* $\{x(\tau_k \wedge t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *martingal za svako* $k \geq 1$.

Sledećom teoremom date su neke nejednakosti Dooba koje se često primenjuju u teoriji stohastičkih procesa.

Teorema 1.5 (Nejednakosti Dooba) *Neka je* $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *neprekidan s desna martingal i neka je* $E|x(t)|^p < \infty$ *za svako* $t \in [0, \infty)$. *Ako je* $[a, b] \subset [0, \infty)$ *ograničen interval, tada je*

$$P\{\sup_{t\in[a,b]} |x(t)| \geq c\} \leq \frac{E|x(b)|^p}{c^p}, \quad p \geq 1,\, c > 0; \tag{1.1.3}$$

$$E \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E|x(b)|^p, \quad p > 1. \tag{1.1.4}$$

Sledeća tvrđenja su od značaja za razmatranje stabilnosti tačnog i numeričkog rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina. Pritom treba naglasiti da se neprekidna verzija ovog tvrđenja primenjuje u kontekstu tačnog rešenja, dok se u kontekstu numeričkih rešenja primenjuje odgovarajuća diskretna verzija. Neprekidna verzija se može naći u [43, 52], a diskretna verzija u [79].

Teorema 1.6 (Teorema o konvergenciji semi-martingala) *Neka su* $\{A(t), t \geq 0\}$ *i* $\{U(t), t \geq 0\}$ *dva neprekidna rastuća procesa, pri čemu je* $A(0) = U(0) = 0$ *s.i. Neka je* $\{M(t), t \geq 0\}$ *neprekidan lokalni martingal sa realnim vrednostima, gde je* $M(0) = 0$ *s.i. Neka je* ξ *nenegativna* $\mathcal{F}_0$*-merljiva slučajna promenljiva tako da je* $E\xi < \infty$. *Definiše se*

$$X(t) = \xi + A(t) - U(t) + M(t),\, t \geq 0.$$

Ako je slučajna promenljiva $X(t)$ *nenegativna, za svako* $t \geq 0$, *tada je*

$$\{\lim_{t\to\infty} A(t) < \infty\} \subset \{\lim_{t\to\infty} X(t) < \infty\} \bigcap \{\lim_{t\to\infty} U(t) < \infty\} \ s.i.$$

Specijalno, ako je $\lim_{t\to\infty} A(t) < \infty$ *s.i., tada za skoro svako* $\omega \in \Omega$ *važi*

$$\lim_{t\to\infty} X(t,\omega) < \infty,\ \lim_{t\to\infty} U(t,\omega) < \infty\,,\ -\infty < \lim_{t\to\infty} M(t,\omega) < \infty.$$

Teorema 1.7 (Diskretna verzija teoreme o konvergenciji semi-martingala) *Neka su* $\{A_i\}$ *i* $\{U_i\}$ *dva niza nenegativnih slučajnih promenljivih, pri čemu su* A_i *i* U_i $\mathcal{F}_{i-1}$*-merljive slučajne promenljive za* $i = 1, 2, ...,$ *i* $A_0 = U_0 = 0$ *s.i. Neka je* $\{M_i\}$ *lokalni martingal sa realnim vrednostima, gde je* $M_0 = 0$ *s.i. Neka je* ξ *nenegativna* $\mathcal{F}_0$*-merljiva slučajna promenljiva. Definiše se*

$$X_i = \xi + A_i - U_i + M_i.$$

Ako je $\{X_i\}$ *nenegativni semimartingal, tada* $\lim_{i\to\infty} A_i < \infty$ *s.i. implicira*

$$\lim_{i\to\infty} X_i < \infty, \quad \lim_{i\to\infty} U_i < \infty,$$

za skoro svako $\omega \in \Omega$.

Sledeća teorema je od značaja za dokazivanje egzistencije i jedinstvenosti θ-Euler-Maruyaminog rešenja u Glavi 3. Navedena je bez dokaza. Dokaz se može naći u radovima [64] i [78].

Teorema 1.8 (Brouwerova teorema o fiksnoj tački) *Neka je $K \subset R^d$ kompaktan i konveksan skup i $f : K \to K$ neprekidna funkcija. Tada postoji fiksna tačka funkcije f, tj. $x \in K$ tako da je $f(x) = x$.*

1.2 Wienerov proces

Engleski botaničar R. Brown je proučavao haotično kretanje polenovog praha u tečnosti koje nastaje kao posledica sudara polena sa molekulima tečnosti, što je i objavio 1828. godine. Po njemu je ovo kretanje dobilo naziv Brownovo kretanje. A. Einstein je 1905. godine postavio fizičko-matematički model Brownovog kretanja. Nešto ranije, 1900. godine, L. Bachelier je u svojoj desertaciji opisao statističko ponašanje cena obveznica i to se smatra začetkom stohastičkog modeliranja cena finansijskih instrumenata. Međutim, strogu matematičku teoriju Brownovog kretanja dao je N. Wiener 1923. godine. Zahvaljujući njegovim rezultatima [82, 83], Brownovo kretanje se smatra matematičkim pojmom, a ne samo fizičkom pojavom i po njemu se ovo kretanje naziva i Wienerov proces.

Najpre treba spomenuti pojam Gaussovog procesa kojim se mogu modelirati pojave koje se razmatraju u okviru tehničkih, fizičkih i ekonomskih nauka.

Definicija 1.16 *Stohastički proces $\{x(t), t \in T\}$ se naziva Gaussov proces ako proizvoljna konačna linearna kombinacija $\alpha_1 x(t_1) + \cdots + \alpha_n x(t_n)$, za $t_1, \ldots, t_n \in T$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$, ima normalnu raspodelu.*

Definicija 1.17 *Stohastički proces $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je m-dimenzionalni proces Brownovog kretanja (Wienerov proces), ako važi:*

(i) $w(0) = 0$ *s.i.;*

(ii) ima nezavisne priraštaje, tj. za proizvoljne trenutke $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, slučajne promenljive $w(t_0), w(t_1) - w(t_0), \ldots, w(t_n) - w(t_n - 1)$ su nezavisne;

(iii) $w(t) - w(s) : \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)I)$, $0 \leq s < t$, *gde je I jedinična matrica reda m.*

Za proizvoljne vrednosti $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ i $x_1, \ldots, x_n \in R$, n-dimenzionalna gustina raspodele je

$$
\begin{aligned}
g(t_1,\ldots,t_n; x_1,\ldots,x_n) &= g(t_1; x_1)\, g(t_2 - t_1; x_2 - x_1) \cdots g(t_n - t_{n-1}; x_n - x_{n-1}) \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}} e^{-\frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})}}, \quad t_0 = 0,
\end{aligned}
$$

iz čega sledi da je ovo proces sa nezavisnim stacionarnim priraštajima. Kao proces sa nezavisnim priraštajima i osobinom $w(0) = 0$ s.i., on je proces Markova, jer uslovne gustine raspodela zavise samo od razlike vremenskih trenutaka. Takođe je i Gaussov proces, što sledi iz oblika gustina raspodela.

Brownovo kretanje ima mnogo važnih osobina među kojima su sledeće:

- ◇ srednje kvadratno je neprekidan proces;
- ◇ skoro izvesno je neprekidan proces;
- ◇ skoro sve trajektorije su nediferencijabilne funkcije u svakoj tački;
- ◇ proces je Markova;
- ◇ proces Brownovog kretanja je martingal, tj. za svako $0 \leq s < t$ važi $E(w(t) \mid \mathcal{F}_s) = w(s)$ s.i.;
- ◇ ima svojstva posebno važna u primenama, a to je da simetrijom, translacijom, sažimanjem i inverzijom vremenskog argumenta, trajektorije zadržavaju svoje osobine;
- ◇ za trajektorije Brownovog kretanja važi

  $$\lim_{t\to\infty} \frac{w(t)}{t} = 0 \quad s.i.$$

  Prema tome, bez obzira na to što trajektorije Brownovog kretanja imaju tendenciju rasta kada $t \to \infty$, one skoro izvesno rastu sporije u odnosu na t;
- ◇ trajektorije imaju osobinu da je skoro izvesno

  $$\liminf_{t\to\infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = -1, \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{w(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = 1, \tag{1.2.5}$$

  što sledi iz zakona ponovljenog logaritma;
- ◇ primenom svojstva inverzije na (1.2.5) sledi da je skoro izvesno

  $$\lim_{t\to 0} \frac{|w(t)|}{\sqrt{2t \ln\ln \frac{1}{t}}} = 1,$$

  što znači da skoro svaka trajektorija na proizvoljnom intervalu $[0,\varepsilon)$, gde je $\varepsilon > 0$ proizvoljno mali broj, ima beskonačno mnogo nula koje se ,,zgušnjavaju" oko tačke $t = 0$.

Teorema 1.9 *Skoro sve trajektorije Brownovog kretanja su neograničene varijacije na svakom segmentu* $[a, b] \subset [0, \infty)$, *tj. za svaki ograničen skup* $A \in \mathcal{B}$ *i proizvoljnu podelu* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ *na segmentu* $[a, b]$ *važi*

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n} |\omega(t_k) - \omega(t_{k-1})| > A\right\} \to 1, \quad \max_{1\leq k\leq n}(t_k - t_{k-1}) \to 0.$$

Za detaljnija objašnjenja i dokaze videti na primer, [1, 11, 30, 44].

Kako su trajektorije Brownovog kretanja skoro izvesno nediferencijabilne, stohastički integral se ne može definisati kao Riemannov integral, ali ni kao Lebesgue-Stieltjesov integral, jer su skoro sve trajektorije neograničene varijacije na svakom konačnom segmentu. Međutim, ovakav integral je moguće definisati kao nestandardni stohastički integral – integral Itôa zbog martingalnih karakteristika Brownovog kretanja.

1.3 Integral Itôa

Pojam stohastičkog integrala, stohastičkog procesa, kao i stohastičke diferencijalne jednačine, razvili su nezavisno jedan od drugog ruski matematičar I. Gikhman [12, 13] i japanski matematičar K. Itô [22, 23, 24] pedesetih godina prošlog veka. Prihvaćen je pristup Itôa, tako da se po njemu stohastički integral i stohastička diferencijalna jednačina po procesu Brownovog kretanja nazivaju stohastički integral Itôa i stohastička diferencijalna jednačina Itôa. Od tada se ova teorija intenzivno razvija i danas ima veliku primenu u tehnici, prirodnim naukama, medicini i posebno u finansijama. U ovoj glavi će biti u kratkim crtama izložene osnove ove teorije.

1.3.1 Stohastički integral Itôa

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kompletan prostor verovatnoće sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ na kome su definisani $(n \times m)$-matrični stohastički proces $\varphi = \{\varphi(\omega, t), t \in [t_0, T]\}$ i m-dimenzionalno Brownovo kretanje $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

Najpre će biti definisana klasa stohastičkih procesa za koje se može definisati integral Itôa.

Definicija 1.18 *Klasa* $\mathcal{M}_2([a, b]; R^n \times R^m)$ *je prostor merljivih procesa, adaptiranih u odnosu na filtraciju* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, *tako da za svako* $\varphi \in \mathcal{M}_2([a, b]; R^n \times R^m)$ *važi*

$$\|\varphi\|^2 = \int_a^b E|\varphi(t)|^2 \, dt < \infty,$$

gde je

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |\varphi_{i,j}|^2 = trace(\varphi\varphi').$$

Prostor $\Big(\mathcal{M}_2([a,b];R^n \times R^m), \|\cdot\|\Big)$ je *Banachov prostor.*

Dva stohastička procesa $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{M}_2([a,b];R^n \times R^m)$ su *stohastički ekvivalentna* ako je

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\| = 0.$$

Da bi se definisao integral Itôa, najpre se definiše stohastički integral za stepenaste stohastičke procese, a zatim za složenije stohastičke procese metodom aproksimacije proizvoljnog procesa nizom stepenastih procesa.

Definicija 1.19 *Stohastički proces $\varphi \in \mathcal{M}_2([a,b];R^n \times R^m)$ je stohastički stepenasti proces, ako postoji particija $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ tako da važi*

$$\varphi(\omega,t) = \varphi(\omega,t_\nu) \quad s.i., \quad t_\nu \le t < t_{\nu+1}, \quad \nu = 0,\ldots,k-1.$$

Definicija 1.20 *Stohastički integral Itôa stepenastog procesa $\varphi \in \mathcal{M}_2([a,b];R^n \times R^m)$ u odnosu na Brownovo kretanje w je slučajna promenljiva*

$$I(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)\, dw(t) := \sum_{\nu=0}^{k-1} \varphi(t_\nu)[w(t_{\nu+1}) - w(t_\nu)].$$

Definisanje stohastičkog integrala Itôa za klasu $\mathcal{M}_2([a,b];R^n \times R^m)$ zasniva se na narednoj teoremi.

Teorema 1.10 *Neka je $\{w(t), \mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje i neka je $\varphi \in \mathcal{M}_2([a,b];R^n \times R^m)$. Tada:*

(i) Postoji niz stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in N\}$ za koje važi

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b E|\varphi(t) - \varphi_n(t)|^2\, dt = 0.$$

(ii) Niz slučajnih promenljivih $\{I(\varphi_n), n \in N\}$, gde je $I(\varphi_n) := \int_a^b \varphi_n(t)\, dw(t)$, konvergira u srednje kvadratnom smislu kada $n \to \infty$.

(iii) Za dva niza stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in N\}$ i $\{\varphi'_n, n \in N\}$ iz $\mathcal{M}_2([a,b];R^n \times R^m)$ za koje je

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\| = \lim_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi'_n\| = 0,$$

važi

$$s.k.\lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) = s.k.\lim_{n\to\infty} I(\varphi'_n).$$

Prethodna teorema predstavlja motivaciju za uvođenje definicije stohastičkog integrala Itôa za stohastičke procese iz prostora $\mathcal{M}_2([a,b];R^n \times R^m)$.

Definicija 1.21 *Stohastički integral Itôa procesa* $\varphi \in \mathcal{M}_2([a,b];R^n \times R^m)$ *u odnosu na* w *je slučajna promenljiva*

$$I(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)\,dw(t) := s.k.\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,dw(t).$$

Prema tome, $I(\varphi)$ je *granična vrednost u srednje kvadratnom smislu niza slučajnih promenljivih* $\{I(\varphi_n), n \in N\}$. Ova granična vrednost ne zavisi od izbora niza stepenastih procesa $\{\varphi_n, n \in N\}$.

Najvažnije osobine stohastičkog integrala Itôa date su sledećom teoremom.

Teorema 1.11 *Neka su* $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_2([a,b], R^n \times R^m)$ *i* $\alpha, \beta \in R$ *proizvoljni brojevi. Tada za stohastički integral Itôa važi:*

(1) $\int_a^b \varphi(t)\,dw(t)$ *je* $\mathcal{F}_b$*-merljiva slučajna promenljiva;*

(2) $\int_a^b \varphi(t)\,dw(t) = \int_a^c \varphi(t)\,dw(t) + \int_c^b \varphi(t)\,dw(t)$, $a < c < b$ *(aditivnost);*

(3) $\int_a^b (\alpha\varphi(t) + \beta\psi(t))\,dw(t) = \alpha\int_a^b \varphi(t)\,dw(t) + \beta\int_a^b \psi(t)\,dw(t)$ *(linearnost);*

(4) $E\int_a^b \varphi(t)\,dw(t) = 0$*;*

(5) $E\left|\int_a^b \varphi(t)\,dw(t)\right|^2 = E\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt$ *(stohastička integralna izometrija).*

Stohastički integral Itôa se može definisati pod slabijim uslovima od prethodno navedenih. Neka je $\mathcal{L}_2([a,b], R^n \times R^m)$ klasa stohastičkih procesa merljivih i adaptiranih u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, za koje važi da je

$$P\left\{\int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt < \infty\right\} = 1.$$

Očigledno da je $\mathcal{L}_2([a,b], R^n \times R^m)$ šira klasa nego $\mathcal{M}_2([a,b], R^n \times R^m)$.

Može se dokazati da za svako $\varphi \in \mathcal{L}_2([a,b], R^n \times R^m)$ postoji niz $\{\varphi_n(t), n \in N\}$ iz klase $\mathcal{M}_2([a,b], R^n \times R^m)$, pri čemu je

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \int_a^b |\varphi(t)|^2\,dt \leq n, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

tako da se integral Itôa procesa φ može definisati kao

$$I(\varphi) := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\, dw(t) \quad \text{u verovatnoći.}$$

Za ovako definisan integral važe osobine $(1)-(4)$ Teoreme 1.11, ali u opštem slučaju ne važi osobina (5).

1.3.2 Neodređeni stohastički integral Itôa

Neka je $I_{\{s<t\}}$, $a \leq s < t < b$ indikator skupa $[a, t]$. Proizvod indikatorske funkcije i procesa $\varphi \in \mathcal{M}_2([a, b], R^n \times R^m)$ je proces iz $\mathcal{M}_2([a, b], R^n \times R^m)$, što daje mogućnost definisanja neodređenog stohastičkog integrala Itôa stohastičkih procesa iz klase $\mathcal{M}_2([a, b], R^n \times R^m)$.

Definicija 1.22 *Neodređeni stohastički integral Itôa stohastičkog procesa φ iz klase $\mathcal{M}_2([a, b], R^n \times R^m)$ je m-dimenzionalni stohastički proces $x = \{x(t), t \in [a, b]\}$, gde je*

$$x(t) := \int_a^b I_{\{s<t\}}\varphi(s)\, dw(s) = \int_a^t \varphi(s)\, dw(s), \quad t \in [a, b].$$

Proces $\{x(t), t \in [a, b]\}$ je adaptiran u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ i za njega važe osobine (2)-(5) Teoreme 1.11. Takođe, veoma bitne osobine neodređenog stohastičkog integrala Itôa su martingalnost, skoro izvesna neprekidnost, kao i osobina lokalnog martingala.

Teorema 1.12 *Ako je $\varphi \in \mathcal{M}_2([a, b], R^n \times R^m)$, tada je proces $\{x(t), t \in [a, b]\}$ martingal.*

Teorema 1.13 *Ako je $\varphi \in \mathcal{M}_2([a, b], R^n \times R^m)$, tada je proces $\{x(t), t \in [a, b]\}$ skoro izvesno neprekidan.*

Teorema 1.14 *Ako je τ vreme zaustavljanja u odnosu na familiju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, tada je za $\varphi \in \mathcal{M}_2([a, b], R^n \times R^m)$, stohastički proces*

$$x(t \wedge \tau) = \int_a^{t\wedge\tau} \varphi(s)dw(s),\ t \in [a, b]$$

martingal u odnosu na $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ i $Ex(t \wedge \tau) = 0$.

Neodređeni integral Itôa se takođe može definisati i za stohastičke procese $\varphi \in \mathcal{L}_2([a, b], R^n \times R^m)$, analogno Definiciji 1.22. Tada je proces $\{x(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ merljiv i s.i. neprekidan, dok u opštem slučaju, nije martingal. Međutim, jeste lokalni martingal, tj. $\{x(t \wedge \tau_n), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ je martingal, pri čemu je $\{\tau_n, n \in N\}$ niz vremena zaustavljanja definisanih sa

$$\tau_n = \inf_{a \leq t \leq b} \left\{ \int_a^t |\varphi(s)|^2 ds \geq n \right\}.$$

Sledećom teoremom data je nejednakost koja se često primenjuje u ocenjivanju stohastičkog integrala Itôa. Dokaz se može naći na primer, u [44, 52, 50].

Teorema 1.15 (Burkholder-Davis-Gandy, [6]) *Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ m-dimenzionalni proces Brownovog kretanja i $\varphi \in \mathcal{L}_2(R^+; R^n \times R^m)$. Tada za svako $p > 0$ postoje univerzalne konstante $\tilde{c}_p$ i c_p, koje zavise samo od p, tako da za svako $t \geq 0$ važi*

$$\tilde{c}_p E \left| \int_0^t |\varphi(u)|^2 du \right|^{p/2} \leq E \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s \varphi(u) dw(u) \right|^p \leq c_p E \left| \int_0^t |\varphi(u)|^2 du \right|^{p/2}, \quad (1.3.6)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} &\tilde{c}_p = (p/2)^2,\ c_p = (32/p)^{p/2},\ 0 < p < 2; \\ &\tilde{c}_p = 1,\ c_p = 4,\ p = 2; \\ &\tilde{c}_p = (2p)^{-p/2},\ c_p = [p^{p+1}/2(p-1)^{p-1}]^{p/2},\ p > 2. \end{aligned}$$

Iz nejednakosti (1.3.6), za $p = 2$, dobija se Doobova nejednakost, odnosno

$$E \sup_{t \in [a,b]} \left| \int_a^t \varphi(s)\, dw(s) \right|^2 \leq 4 \int_a^b E|\varphi(t)|^2\, dt. \quad (1.3.7)$$

1.3.3 Formula Itôa

Formula Itôa za stohastičko diferenciranje ima veliki značaj, ne samo za efektivno rešavanje stohastičkog integrala Itôa, već i za rešavanje nekih stohastičkih diferencijalnih jednačina. Da bi se ova formula predstavila za klasu d-dimenzionalnih slučajnih procesa, neophodno je najpre uvesti pojam stohastičkog diferencijala takvih procesa. Ovu formulu je prvi uveo K. Itô u radovima [25, 26], a uopštio je Meyer [63].

Definicija 1.23 *Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje definisano na kompletnom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Neka su $f \in \mathcal{L}_1(R_+, R^d)$ i $g \in \mathcal{L}_2(R_+, R^d \times R^m)$ merljivi procesi adaptirani u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, pri čemu je za svako $T \geq 0$,*

$$\int_0^T |f(t)|\, dt < \infty \quad s.i., \qquad \int_0^T |g(t)|^2\, dt < \infty \quad s.i.$$

Neprekidan i adaptiran d-dimenzionalni stohastički proces $\{x(t), t \geq 0\}$*, pri čemu je* $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_d(t))^T$*, definisan sa*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(u)\, du + \int_0^t g(u)\, dw(u), \quad t \geq 0 \tag{1.3.8}$$

je proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom

$$dx(t) = f(t)\, dt + g(t)\, dw(t), \quad t \geq 0.$$

Oba integrala u izrazu (1.3.8), prvi koji je Lebesgueov i drugi koji je stohastički integral Itôa, merljivi su, $\mathcal{F}_t$-adaptirani i s.i. neprekidni, tako da je i proces Itôa merljiv, adaptiran u odnosu na istu filtraciju i skoro izvesno neprekidan.

Neka je funkcija $V(x,t)$ definisana na $(R^d; R_+)$ i dva puta diferencijabilna po x i jednom po t i neka je

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_d} \right),$$

$$V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{d \times d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Za efektivno rešavanje integrala Itôa, često je neophodno primeniti formulu Itôa za stohastičko diferenciranje složene funkcije.

Teorema 1.16 (Formula Itôa) *Neka je* $\{x(t), t \geq 0\}$ *d-dimenzionalni proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom* $dx(t) = f(t)\, dt + g(t)\, dw(t)$*,* $t \geq 0$*, gde je* $f \in \mathcal{L}_1(R_+, R^d)$ *i* $g \in \mathcal{L}_2(R_+, R^d \times R^m)$*. Tada je* $\{V(x(t), t), t \geq 0\}$ *proces Itôa sa stohastičkim diferencijalom*

$$\begin{aligned} dV(x(t), t) = & \left[V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t) f(t) + \frac{1}{2} trace(g^T(t) V_{xx}(x(t), t) g(t)) \right] dt \\ & + V_x(x(t), t) g(t) dw(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Specijalno, u jednodimenzionalnom slučaju, tj. kada je $d = m = 1$, važi

$$\begin{aligned} dV(x(t), t) = & \left[V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t) f(t) + \frac{1}{2} V_{xx}(x(t), t) |g(t)|^2 \right] dt \\ & + V_x(x(t), t) g(t) dw(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

1.4 Stohastičke diferencijalne jednačine

Stohastička diferencijalna jednačina nepoznatog d-dimenzionalnog stohastičkog procesa $\{x(t), t \in [t_0, T]\}$ je jednačina oblika

$$dx(t) = f(x(t), t)\, dt + g(x(t), t)\, dw(t), \quad t \in [t_0, T], \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.4.9}$$

pri čemu je $w = \{w(t), t \geq 0\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje, početni uslov x_0 je d-dimenzionalna slučajna promenljiva koja je stohastički nezavisna u odnosu na Brownovo kretanje i funkcije $f : R^d \times [t_0, T] \to R^d$ i $g : R^d \times [t_0, T] \to R^d \times R^m$ su neslučajne Borel-merljive funkcije na svojim domenima.

Jednačina (1.4.9) se može predstaviti i u ekvivalentnom, integralnom obliku

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), s)\, dw(s), \; x(t_0) = x_0, \; t \in [t_0, T]. \tag{1.4.10}$$

U nastavku će se podrazumevati da je $\mathcal{F}_t = \sigma\{x_0, \omega(s), 0 \leq s \leq t\}$.

Definicija 1.24 *Merljiv stohastički proces $\{x(t), t \in [t_0, T]\}$ je strogo rešenje jednačine (1.4.9) ako zadovoljava sledeće uslove:*

(i) $x(t)$ je $\mathcal{F}_t$-merljivo za svako $t \in [t_0, T]$;

(ii) $\int_{t_0}^{T} |f(x(t), t)|\, ds < \infty$ s.i., $\int_{t_0}^{T} |g(x(t), t)|^2\, ds < \infty$ s.i.;

(iii) $x(t_0) = x_0$ s.i.;

(iv) jednačina (1.4.10) je zadovoljena s.i. za svako $t \in [t_0, T]$.

Definicija 1.25 *Jednačina (1.4.9) ima jedinstveno strogo rešenje ako za svaka dva stroga rešenja $x(t)$ i $\tilde{x}(t)$ važi*

$$P\{x(t) = \tilde{x}(t), t \in [t_0, T]\} = 1.$$

Sledeća teorema daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.4.9).

Teorema 1.17 *Neka je $w = \{w(t), \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje i x_0 slučajna promenljiva nezavisna od w za koju važi da je $E|x_0|^2 < \infty$. Neka su $f : R^d \times [t_0, T] \to R^d$, $g : R^d \times [t_0, T] \to R^d \times R^m$ Borel-merljive funkcije za koje važi:*

(i) (Lipschitzov uslov) Postoji konstanta $L > 0$ tako da je, za svako (x, t), $(y, t) \in R^d \times [t_0, T]$,

$$|f(x, t) - f(y, t)| + |g(x, t) - g(y, t)| \leq L|x - y|. \tag{1.4.11}$$

(ii) (uslov linearnog rasta) Postoji konstanta $L > 0$ tako da je, za svako $(x,t) \in R^d \times [t_0, T]$,

$$|f(x,t)|^2 + |g(x,t)|^2 \leq L(1 + |x|^2). \tag{1.4.12}$$

Tada postoji jedinstveno, skoro izvesno neprekidno strogo rešenje jednačine (1.4.9) sa osobinom $E \sup_{t \in [t_0,T]} |x(t)|^2 < \infty$.

Dokaz se može naći na primer, u [1, 11, 28, 30, 44, 84].

Prethodna teorema važi i kada se Lipschitzov uslov zameni *lokalnim Lipschitzovim uslovom*: Za svako $n \geq 0$, postoji konstanta L_n tako da za svako $(x,t), (y,t) \in R^d \times [t_0, T]$ za koje je $|x| \vee |y| \leq n$, važi da je

$$|f(x,t) - f(y,t)| + |g(x,t) - g(y,t)| \leq L_n |x - y|. \tag{1.4.13}$$

Razmatra se stohastička diferencijalna jednačina na intervalu $[t_0, \infty)$, tj.

$$dx(t) = f(x(t), t)\, dt + g(x(t), t)\, dw(t), \; x(t_0) = x_0, \; t \in [t_0, \infty). \tag{1.4.14}$$

Ako važe pretpostavke Teoreme 1.17 za funkcije f i g na svakom konačnom podintervalu $[t_0, T] \subset [t_0, \infty)$, tada jednačina (1.4.14) ima jedinstveno rešenje na celom intervalu $[t_0, \infty)$. Takvo rešenje se naziva *globalno rešenje.*

Brojni autori su se bavili problemom određivanja različitih klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina koje imaju jedinstveno rešenje. Takvi rezultati predstavljaju proširenja ili uopštenja Teoreme 1.17. Jedan od mogućih pravaca uopštenja se ogleda u uvođenju uslova za koeficijente jednačine koji su slabiji od uslova linearnog rasta. To, je između ostalog, problem koji se razmatra i u ovoj disertaciji. Sledećom teoremom iskazana je egzistencija i jedinstvenost rešenja, a pritom je uslov linearnog rasta zamenjen uslovom monotonosti.

Teorema 1.18 (X. Mao, [52]) *Neka je $E|x_0|^2 < \infty$ i neka važi lokalni Lipschitzov uslov (1.4.13), pri čemu je uslov linearnog rasta (1.4.12) zamenjen uslovom monotonosti, tj. postoji konstanta $K > 0$ tako da za svako $(x,t) \in R^d \times [t_0, T]$ važi da je*

$$x^T f(x,t) + \frac{1}{2}|g(x,t)|^2 \leq K(1 + |x|^2). \tag{1.4.15}$$

Tada postoji jedinstveno, skoro izvesno neprekidno strogo rešenje jednačine (1.4.9) sa osobinom $E \sup_{t \in [t_0,T]} |x(t)|^2 < \infty$.

1.5 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine

Prirodno uopštenje stohastičkih diferencijalnih jednačina koje imaju osobinu zavisnosti od prošlosti, predstavljaju neutralne stohastičke diferencijalne jednačine (NSDJ). U njima se pored nepoznatog procesa x, pod diferencijalom javlja i argument sa kašnjenjem. Mnoga poznata tvrđenja koja se odnose na funkcionalne stohastičke diferencijalne jednačine i stohastičke diferencijalne jednačine sa kašnjenjem, uspešno su proširena na klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina, što potvrđuju i radovi [32, 45, 52, 51]. U ovom poglavlju će biti navedeni osnovni pojmovi koji se odnose na neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i za neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova.

1.5.1 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem

U mnogim situacijama, promene sistema koji se razmatra su uslovljene kako trenutnim stanjem, tako i stanjima sistema u periodu koji prethodi datom trenutku. Često je priroda zavisnosti od prošlosti nekog sistema takva da se opisuje nekom funkcijom vremena. Takvi sistemi se matematički modeliraju stohastičkim diferencijalnim jednačinama sa vremenski-zavisnim kašnjenjem. Prirodno uopštenje stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem su one u kojima se pod diferencijalom javlja argument sa kašnjenjem, odnosno neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem.

Neka je $\tau > 0$ i $C([-\tau, 0]; R^d)$ klasa neprekidnih funkcija sa vrednostima u R^d. Dalje, neka je $C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R^d)$ klasa funkcija iz $C([-\tau, 0]; R^d)$ za koje važi da su ograničene i $\mathcal{F}_0$-merljive. U nastavku, od značaja je i funkcija kašnjenja $\delta : R_+ \to [0, \tau]$, koja je Borel-merljiva, pri čemu je $R_+ = [0, \infty)$.

Predmet razmatranja je sledeća neutralna stohastička diferencijalna jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem

$$
\begin{aligned}
&d[x(t) - u(x(t-\delta(t)), t)] \\
&\qquad = f(x(t), x(t-\delta(t)), t)dt + g(x(t), x(t-\delta(t)), t)dw(t),\ t \geq 0,
\end{aligned} \tag{1.5.16}
$$

sa početnim uslovom

$$
x_0 = \varphi = \{\varphi(t) : t \in [-\tau, 0]\} \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R^d), \tag{1.5.17}
$$

pri čemu su

$$
f : R^d \times R^d \times R_+ \to R^d,\ g : R^d \times R^d \times R_+ \to R^{d\times m},\ u : R^d \times R_+ \to R^d
$$

Borel-merljive funkcije i $x(t)$ je d-dimenzionalni proces.

Definicija 1.26 *Za d-dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \geq -\tau\}$ se kaže da je rešenje jednačine (1.5.16) ako je s.i. neprekidan, $\mathcal{F}_t$-adaptiran, pri čemu važe uslovi $\int_0^\infty |f(x(t), x(t-\delta(t)), t)|dt < \infty$ s.i., $\int_0^\infty |g(x(t), x(t-\delta(t)), t)|^2 dt < \infty$ s.i, $x_0 = \varphi$ s.i, i za svako $t \geq 0$ integralni oblik jednačine (1.5.16) važi s.i.*

Sledeća teorema daje dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.5.16).

Teorema 1.19 (X. Mao, [52]) *Ako je ispunjen globalni Lipschitzov uslov, tj. ako postoji pozitivna konstanta K tako da, za svako $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R^d$ i svako $t \geq 0$, važi*

$$|f(x_1,y_1,t)-f(x_2,y_2,t)|^2 \vee |g(x_1,y_1,t)-g(x_2,y_2,t)|^2 \leq K(|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2) \tag{1.5.18}$$

ako važi uslov linearnog rasta, tj. postoji pozitivna konstanta $\bar{K}$ tako da, za svako $x, y \in R^d$ i svako $t \geq 0$, važi

$$|f(x,y,t)|^2 \vee |g(x,y,t)|^2 \leq \bar{K}(1+|x|^2+|y|^2) \tag{1.5.19}$$

i ako postoji konstanta $\beta \in (0,1)$ tako da, za svako $x, y \in R^d$ i svako $t \geq 0$, važi

$$|u(x,t)-u(y,t)| \leq \beta|x-y|, \tag{1.5.20}$$

tada postoji jedinstveno, s.i. neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (1.5.16).

Uobičajeno je da se, uz navedene uslove, uvede pretpostavka $u(0,t) = 0$, za svako $t \geq 0$, što je od značaja za dokazivanje ograničenosti momenata rešenja. Pored toga, ako je $E\|\varphi\|^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je $E\sup_{-\tau \leq t \leq T}|x(t)|^p < \infty$ (videti na primer, [52]).

U Glavi 3 se razmatra egzistencija i jedinstvenost rešenja neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem, ali sa slabijim uslovima od uslova linearnog rasta. Na taj način je uopštena prethodna teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja.

Neka je $C(R^d \times [-\tau,\infty); R_+)$ familija svih neprekidnih funkcija na $R^d \times [-\tau,\infty)$ sa vrednostima u skupu R_+. Oznaka $C^{2,1}(R^d \times R_+; R_+)$ se odnosi na familiju svih neprekidnih nenegativnih funkcija $V(x,t)$ na $R^d \times R_+$ sa vrednostima u skupu R_+, koje su dva puta neprekidno diferencijabilne po x i jednom po t.

Za funkciju $V \in C^{2,1}(R^d \times R_+; R_+)$ se definiše operator $LV : R^d \times R^d \times R_+ \to R$, na sledeći način

$$\begin{aligned} LV(x,y,t) &= V_t(x-u(y,t),t) + V_x(x-u(y,t),t)f(x,y,t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\text{trace}[g^T(x,y,t)V_{xx}(x-u(y,t),t)g(x,y,t)], \end{aligned} \tag{1.5.21}$$

pri čemu je

$$V_t(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}, \quad V_x(x,t) = \left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_d}\right),$$
$$V_{xx}(x,t) = \left(\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{d\times d}.$$

Od značaja za dalji rad je i formula Itôa za neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem.

Teorema 1.20 (X. Mao, [52]) *Neka je $V \in C^{2,1}(R^d \times R_+ \times S; R_+)$. Tada za svako $t \geq 0$ važi da je*

$$\begin{aligned} &V(x(t) - u(x(t-\delta(t),t),t) \\ &= V(x(0) - u(x(-\delta(0)),0),0) + \int_0^t LV(x(s), x(s-\delta(s)), s)dt \\ &+ \int_0^t V_x(x(s) - u(x(s-\delta(s)),s),s)g(x(s), x(s-\delta(s)),s)d\omega(s). \end{aligned} \quad (1.5.22)$$

1.5.2 Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova

Uočeno je da se neki sistemi menjaju u skladu sa različitim zakonima u toku nekog perioda i da u slučajnim momentima prelaze iz jednog režima u drugi. To je osnovna motivacija za proučavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina sa prelazima Markova. U radovima [53, 57, 88, 89] su razmatrane obične stohastičke diferencijalne jednačine, kao i stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova.

Pored ranije uvedenih oznaka, biće uvedeni još neki pojmovi i teoreme. U knjizi [59], čiji su autori X. Mao i C. Yuan, kao i u literaturi na koju se ona poziva, može se naći više detalja o narednim pojmovima i rezultatima.

Neka je $\{r(t), t \geq 0\}$, neprekidan s desna proces Markova, definisan nad datim prostorom verovatnoća, sa konačnim skupom stanja $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ i generatorom $\Gamma = (\gamma_{ij})_{N\times N}$ definisanim sa

$$P\{r(t+\Delta) = j | r(t) = i\} = \begin{cases} \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ij}\Delta + o(\Delta), & i = j, \end{cases}$$

pri čemu je $\Delta > 0$. U prethodnom izrazu, $\gamma_{ij} \geq 0$ je intenzitet prelaza procesa Markova iz stanja i u stanje j kada je $i \neq j$, dok je $\gamma_{ii} = -\sum_{i\neq j} \gamma_{ij}$.

Pretpostavlja se da je proces Markova nezavisan u odnosu na Brownovo kretanje. Proces Markova $\{r(t), t \geq 0\}$ se može predstaviti pomoću stohastičkog integrala u odnosu na Poissonovu slučajnu meru, odnosno

$$dr(t) = \int_R \tilde{h}(r(t-), l)\nu(dt, dl), \quad t \geq 0,$$

sa početnom vrednošću $r(0) = i_0 \in S$. Pritom je $\nu(dt, dl)$ Poissonova slučajna mera na $dt \times \mu(dl)$, gde je μ Lebesgueova mera na R. Funkcija $\tilde{h} : S \times R \to R$ se definiše sa

$$\tilde{h}(i, y) = \begin{cases} j - i, & y \in \Delta_{ij}, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{1.5.23}$$

pri čemu su $\triangle_{ij}$ uzastopni intervali definisani na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&\Delta_{12} = [0, \gamma_{12}), \\
&\Delta_{13} = [\gamma_{12}, \gamma_{12} + \gamma_{13}), \\
&\vdots \\
&\Delta_{1N} = \Big[\sum_{j=2}^{N-1} \gamma_{1j}, \sum_{j=2}^{N} \gamma_{1j}\Big), \\
&\Delta_{21} = \Big[\sum_{j=2}^{N} \gamma_{1j}, \sum_{j=2}^{N} \gamma_{1j} + \gamma_{21}\Big), \\
&\Delta_{23} = \Big[\sum_{j=2}^{N} \gamma_{1j} + \gamma_{21}, \sum_{j=2}^{N} \gamma_{1j} + \gamma_{21} + \gamma_{23}\Big), \\
&\vdots \\
&\Delta_{2N} = \Big[\sum_{j=2}^{N} \gamma_{1j} + \sum_{j=1, j\neq 2}^{N-1} \gamma_{1j}, \sum_{j=2}^{N} \gamma_{1j} + \sum_{j=1, j\neq 2}^{N-1} \gamma_{2j}\Big).
\end{aligned}$$

U nastavku će biti reči o neutralnoj stohastičkoj diferencijalnoj jednačini sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova oblika

$$\begin{aligned}
&d[x(t) - u(x(t - \delta(t)), t, r(t))] \\
&\quad = f(x(t), x(t - \delta(t)), r(t), t)dt + g(x(t), x(t - \delta(t)), r(t), t)dw(t), \; t \geq 0,
\end{aligned} \tag{1.5.24}$$

sa početnim uslovima

$$x_0 = \varphi = \{\varphi(\theta) : \theta \in [-\tau, 0]\} \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R^d), \tag{1.5.25}$$

$$r(0) = i_0 \in S. \tag{1.5.26}$$

Pritom su

$$f : R^d \times R^d \times R_+ \times S \to R^d,\ \ g : R^d \times R^d \times R_+ \times S \to R^{d\times m},\ \ u : R^d \times R_+ \times S \to R^d$$

Borel-merljive funkcije i $\{x(t), t \geq -\tau\}$ je d-dimenzionalni stohastički proces koji predstavlja stanje sistema čija je evolucija opisana jednačinom (1.5.24).

Definicija 1.27 *Za d-dimenzionalan stohastički proces $\{x(t), t \geq -\tau\}$ se kaže da je rešenje jednačine (1.5.24) ako je s.i. neprekidan, $\mathcal{F}_t$-adaptiran, pri čemu važe uslovi $\int_0^\infty |f(x(t), x(t-\delta(t)), t, r(t))|dt < \infty$ s.i., $\int_0^\infty |g(x(t), x(t-\delta(t)), t, r(t))|^2 dt < \infty$ s.i, $x_0 = \varphi$ s.i, i za svako $t \geq 0$ integralni oblik jednačine (1.5.24) važi s.i.*

U nastavku je navedena teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine (1.5.24).

Teorema 1.21 (X. Mao, C. Yuan, [59]) *Ako je ispunjen globalni Lipschitzov uslov, tj. ako postoji pozitivna konstanta K tako da, za svako $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R^d$, $i \in S$ i svako $t \geq 0$, važi*

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_1, t, i) - f(x_2, y_2, t, i)|^2 \vee |g(x_1, y_1, t, i) - g(x_2, y_2, t, i)|^2 \\ \leq K(|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2), \end{aligned} \tag{1.5.27}$$

ako važi uslov linearnog rasta, tj. postoji pozitivna konstanta $\bar{K}$ tako da, za svako $x, y \in R^d$, $i \in S$ i svako $t \geq 0$, važi

$$|f(x, y, t, i)|^2 \vee |g(x, y, t, i)|^2 \leq \bar{K}(1 + |x|^2 + |y|^2) \tag{1.5.28}$$

i ako postoji konstanta $\beta \in (0,1)$ tako da, za svako $x, y \in R^d$, $i \in S$ i svako $t \geq 0$, važi

$$|u(x, t, i) - u(y, t, i)| \leq \beta |x - y|, \tag{1.5.29}$$

tada postoji jedinstveno, s.i. neprekidno rešenje $x(t)$ jednačine (1.5.24).

Uobičajeno je da se, uz navedene uslove, uvede pretpostavka $u(0, t, i) = 0$, za svako $t \geq 0$ i $i \in S$, što je od značaja za dokazivanje ograničenosti momenata rešenja. Pored toga, ako je $E\|\varphi\|^p < \infty$ za $p \geq 2$, tada je $E \sup_{-\tau \leq t \leq T} |x(t)|^p < \infty$.

Nadalje, u Glavi 2, razmatraće se egzistencija i jedinstvenost rešenja neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova, pod pretpostavkom da važe slabiji uslovi od uslova linearnog rasta, tj. uopšteni uslovi Khasminskiiog. Na taj način je uopštena prethodna teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja. Treba još naglasiti da će se u Glavi 2 najpre razmatrati slučaj sa neograničenom funkcijom kašnjenja δ, a zatim i sa ograničenom.

Neka je $C(R^d \times [-\tau, \infty); R_+)$ familija svih neprekidnih funkcija na $R^d \times [-\tau, \infty)$ sa vrednostima u skupu R_+. Oznaka $C^{2,1}(R^d \times R_+ \times S; R_+)$ se odnosi na familiju svih neprekidnih nenegativnih funkcija $V(x,t,i)$ na $R^d \times R_+ \times S$ sa vrednostima u skupu R_+, koje su za svako $i \in S$ dva puta neprekidno diferencijabilne po x i jednom po t.

Za funkciju $V \in C^{2,1}(R^d \times R_+ \times S; R_+)$ se definiše operator $LV : R^d \times R^d \times R_+ \times S \to R$, na sledeći način

$$\begin{aligned} LV(x,y,t,i) &= V_t(x-u(y,t,i),t,i) + V_x(x-u(y,t,i),t,i)f(x,y,t,i) \\ &+\frac{1}{2}\mathrm{trace}[g^T(x,y,t,i)V_{xx}(x-u(y,t,i),t,i)g(x,y,t,i)] \\ &+\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}V(x-u(y,t,i),t,j), \end{aligned} \tag{1.5.30}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} &V_t(x,t,i) = \frac{\partial V(x,t,i)}{\partial t}, \quad V_x(x,t,i) = \left(\frac{\partial V(x,t,i)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial V(x,t,i)}{\partial x_d}\right), \\ &V_{xx}(x,t,i) = \left(\frac{\partial^2 V(x,t,i)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{d\times d}. \end{aligned}$$

Od značaja za dalji rad je i formula Itôa za neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova.

Teorema 1.22 (X. Mao, C. Yuan, [59]) *Neka je $V \in C^{2,1}(R^d \times R_+ \times S; R_+)$. Tada za svako $t \geq 0$ važi da je*

$$\begin{aligned} &V(x(t)-u(x(t-\delta(t),t,r(t)),t,r(t)) \\ &\quad= V(x(0)-u(x(-\delta(0)),0,r(0)),0,r(0)) + \int_0^t LV(x(s),x(s-\delta(s)),s,r(s))dt \\ &\quad+\int_0^t V_x(x(s)-u(x(s-\delta(s)),s,r(s)),s,r(s))g(x(s),x(s-\delta(s)),s,r(s))d\omega(s) \\ &\quad+\int_0^t\int_R\Big(V(x(s)-u(x(s-\delta(s)),s,r(s)),s,r(s)+\tilde{h}(r(s),l)) \\ &\qquad -V(x(s)-u(x(s-\delta(s)),s,r(s)),s,r(s))\Big)\mu(ds,dl) \end{aligned} \tag{1.5.31}$$

pri čemu je funkcija $\tilde{h}(r(s),l))$ definisana sa (1.5.23), dok je $\mu(ds,dl) = \nu(ds,dl) - m(ds)ds$ martingalna mera, tj. kompenzovana Poissonova slučajna mera.

1.6 Osnovni tipovi stabilnosti rešenja stohastičke diferencijalne jednačine

Jedna od bitnih karakteristika diferencijalnih jednačina je stabilnost. U osnovi stabilnosti rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina je ispitivanje stanja sistema u odnosu na male promene početnog uslova ili nekih drugih parametara sistema. Stohastička stabilnost je jedna od veoma istraživanih oblasti stohastičke analize i mnogi matematičari su doprineli njenom razvoju, na primer Arnold [1, 2], Khasminskii [16, 35, 36], Friedman [11], Mao [49, 50], Kolmanovskii [37, 40, 41] i drugi. S obzirom na to da mnoge stohastičke diferencijalne jednačine nisu eksplicitno rešive, neophodno je primeniti numeričke metode, a od značaja je i stabilnost numeričkih rešenja. U tom smislu, jedan od ciljeva ove disertacije je određivanje uslova pod kojima tačno i numeričko rešenje imaju osobinu stabilnosti. U ovom poglavlju biće navedene neke osnovne definicije teorije stabilnosti rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Definicija 1.28 *Rešenje $\{x(t), t \geq 0\}$ stohastičke diferencijalne jednačine je stohastički stabilno ili stabilno u verovatnoći ako za svako $\varepsilon \in (0,1)$ i $r > 0$, postoji $\delta = \delta(\varepsilon, r, t_0) > 0$ tako da, za $|x_0| < \delta$, važi*

$$P\{|x(t; t_0, x_0)| < r,\, t \geq t_0\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Definicija 1.29 *Rešenje $\{x(t), t \geq 0\}$ stohastičke diferencijalne jednačine je stohastički asimptotski stabilno ako za svako $\varepsilon \in (0,1)$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tako da, za $|x_0| < \delta$, važi*

$$P\{\lim_{t\to\infty} x(t; t_0, x_0) = 0,\, t \geq t_0\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Definicija 1.30 *Rešenje $\{x(t), t \geq 0\}$ stohastičke diferencijalne jednačine je eksponencijalno stabilno u srednjem reda p ako za svako $x_0 \in R^d$, $E|x_0|^p < \infty$ važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E(|x(t; t_0, x_0)|^p) \leq 0.$$

Definicija 1.31 *Rešenje $\{x(t), t \geq 0\}$ stohastičke diferencijalne jednačine je skoro izvesno eksponencijalno stabilno ako za svako $x_0 \in R^d$ važi*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |x(t; t_0, x_0)| < 0 \quad s.i.$$

U disertaciji, od navedenih tipova stabilnosti, se razmatraju dva tipa. Naime, u Glavi 2 se razmatraju eksponencijalna stabilnost u srednjem reda p i skoro izvesna eksponencijalna stabilnost rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova. Takođe se razmatra i skoro izvesna eksponencijalna stabilnost odgovarajućih numeričkih rešenja. U Glavi 3 se ispituje skoro izvesna eksponencijalna stabilnost rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem.

1.7 Neke numeričke metode aproksimacije rešenja običnih stohastičkih diferencijalnih jednačina

Sve veći broj realnih problema u svim oblastima života danas se rešava matematičkim modelima, koji se sastoje od skupa jednačina kojima se opisuju sve važnije pojave ili procesi značajni za postavljeni problem. U slučaju jednostavnijih modela, rešenje se može odrediti analitički. Međutim, modeli su najčešće složeni i tada se za određivanje aproksimativnih rešenja primenjuju numeričke metode. Postoji više metoda aproksimacije rešenja različitih tipova stohastičkih diferencijalnih jednačina, kao i kriterijuma za njihovo upoređivanje. Među najvažnijima je da se metoda lako implementira i da aproksimativna rešenja nasleđuju osobine tačnog rešenja.

U ovoj disertaciji najpre se razmatra pod kojim uslovima postoji jedinstveno rešenje za klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova i za klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem. Zatim se numeričkim metodama određuju aproksimativna rešenja datih jednačina i razmatra pod kojim uslovima aproksimativno i tačno rešenje imaju iste osobine, kao što je stabilnost, koja se takođe razmatra u ovoj disertaciji.

Postoje eksplicitne i implicitne numeričke metode. U ovom poglavlju, od eksplicitnih biće navedena Euler-Maruyamina metoda, a od implicitnih backward Eulerova metoda i θ-Euler-Maruyamina metoda.

1.7.1 Euler-Maruyamina metoda

Euler-Maruyamina metoda je eksplicitna metoda za numeričko rešavanje kako običnih, tako i stohastičkih diferencijalnih jednačina. Ova metoda daje eksplicitna aproksimativna rešenja, a pritom se za dokazivanje srednje kvadratne konvergencije odgovarajućih aproksimativnih rešenja najčešće zahtevaju standardni uslovi egzistencije i jedinstvenosti rešenja, tj. Lipschitzov uslov, uslov linearnog rasta i L^2-ograničenost početnog uslova.

Neka je

$$dx(t) = f(x(t))\, dt + g(x(t))\, dw(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1.7.32}$$

gde je $t \in [0, T]$, stohastička diferencijalna jednačina. Pri tome je $x(t) \in R^d$ za svako t, $f : R^d \to R^d$ i $g : R^d \to R^{d\times m}$, dok je $w(t)$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje. Takođe, pretpostavlja se da su svi momenti početnog uslova reda p, $p > 0$ konačni.

Rešenje $\{x(t), t \in [0, T]\}$ jednačine (1.7.32) se aproksimira na proizvoljnoj particiji intervala $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Za izabranu veličinu koraka $\Delta \in (0, 1)$, pri čemu je $t_k = k\Delta$, za $k \in 0, 1, 2, \ldots, n-1$, Euler-Maruyamina metoda se zasniva na izračunavanju diskretnih aproksimativnih rešenja $Y_k \approx x(t_k)$, tako da je $Y_0 = x_0$, formiranjem niza

$$Y_{k+1} = Y_k + f(Y_k)\,\Delta + g(Y_k)\,\Delta w_k, \tag{1.7.33}$$

gde je $\Delta w_k = w(t_{k+1}) - w(t_k)$.

Zatim se definiše neprekidno aproksimativno rešenje $\bar{Y}(t)$,

$$\bar{Y}(t) = Y_k + (t - t_k)f(Y_k) + g(Y_k)\,(w(t) - w(t_k)),\ t \in [t_k, t_{k+1}). \tag{1.7.34}$$

Često se koristi i ekvivalentan oblik

$$\bar{Y}(t) = Y_0 + \int_0^t f(Y(s))ds + \int_0^t g(Y(s))\,dw(s), \tag{1.7.35}$$

pri čemu je $Y(t) = Y_k$, za $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Kako je $\bar{Y}(t_k) = Y(t_k) = Y_k$, zaključuje se da se diskretno aproksimativno rešenje i neprekidno aproksimativno rešenje poklapaju u tačkama particije vremenskog intervala $[0, T]$.

Mnogi od postojećih rezultata o konvergenciji niza numeričkih rešenja ka tačnom rešenju zahtevaju da funkcije f i g zadovoljavaju Lipschitzov uslov, što se može naći na primer, u [34, 52]. U radu [17], Higham, Mao i Stuart su dokazali strogu srednje kvadratnu konvergenciju neprekidnog Euler-Maruyaminog rešenja ka tačnom rešenju pod manje restriktivnim uslovima, tj. za funkcije f i g se zahteva da zadovoljavaju samo lokalni Lipschitzov uslov (1.4.13) i da tačno i numeričko rešenje imaju ograničene momente reda p, $p > 2$. Pod navedenim uslovima važi da je

$$\lim_{\Delta t \to 0} E\Big[\sup_{0\le t\le T} |\bar{Y}(t) - x(t)|^2\Big] = 0.$$

U istom radu je takođe dokazano da je moguće izostaviti uslov da tačno i numeričko rešenje imaju ograničene momente reda p, $p > 2$, s obzirom na to da je teško utvrditi da li je taj uslov ispunjen. Zbog toga se uvodi jednostrani Lipschitzov uslov, tj. postoji konstanta $\mu > 0$, tako da je svako $a, b \in R^d$

$$\langle a - b, f(a) - f(b)\rangle \le \mu|a - b|^2, \tag{1.7.36}$$

koji uz lokalni Lipschitzov uslov (1.4.13) implicira ograničenost momenata reda p, $p > 2$ tačnog rešenja.

Mao i Rassias su u svom radu [56] dokazali egzistenciju i jedinstvenost rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa konstantnim kašnjenjem oblika

$$dx(t) = f(x(t), x(t-\tau), t)\, dt + g(x(t), x(t-\tau), t)\, dw(t), \quad t \geq 0, \tag{1.7.37}$$

sa početnim uslovom $\{x(\theta) : -\tau \leq \theta \leq 0\} = \xi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R^d)$. Autori su pretpostavili da za funkcije f i g važi lokalni Lipschitzov uslov (1.4.13). Pored toga, uslov linearnog rasta (1.4.12) je zamenjen opštijim uslovima, koji su poznati kao uopšteni uslovi Khasminskiiog.

$\mathcal{A}_1$: Postoje dve funkcije $V \in C^{2,1}(R^d \times [-\tau, \infty); R_+)$ i $U \in C(R^d \times [-\tau, \infty); R_+)$ i nenegativne konstante λ_1, λ_2, tako da je

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(\inf_{t\geq 0} V(x,t) \right) = \infty,$$

i za svako $(x, y, t) \in R^d \times R^d \times R_+$ važi

$$LV(x, y, t) \leq \lambda_1 [1 + V(x,t) + V(y, t-\tau) + U(y, t-\tau)] - \lambda_2 U(x,t).$$

U radu [55], Mao je predstavio Euler-Maruyaminu metodu za jednačine oblika (1.7.37) pod prethodno navedenim uslovima, odnosno pod pretpostavkom da za f i g važi lokalni Lipschitzov uslov i pretpostavke $\mathcal{A}_1$. Takodje je dokazao konvergenciju u verovatnoći Euler-Maruyaminih aproksimativnih rešenja ka tačnom rešenju.

1.7.2 Backward Eulerova metoda

Backward Eulerova metoda je implicitna metoda za numeričko rešavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina. Često se u literaturi pojavljuje kao semi-implicitna Eulerova metoda, (videti, na primer [34]). Backward Eulerova metoda je implicitna po argumentu koeficijenta prenosa.

Preciznije, neka se rešenje $\{x(t), t \in [0,T]\}$ jednačine (1.7.32) aproksimira na proizvoljnoj particiji intervala $[0,T]$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Za izabranu veličinu koraka $\Delta \in (0,1)$, pri čemu je $t_k = k\Delta$, za $k \in 0, 1, 2, \ldots, n-1$, ova metoda se zasniva na rešavanju sledeće jednačine

$$Y_{k+1} = Y_k + f(Y_{k+1})\, \Delta + g(Y_k)\, \Delta w_k, \tag{1.7.38}$$

gde je $Y_0 = x_0$ i $\Delta w_k = w(t_{k+1}) - w(t_k)$.

U radu [17], backward Eulerova metoda se primenjuje na jednačinu (1.7.32), pod uslovima da funkcija $f \in C^1$ zadovoljava jednostrani Lipschitzov uslov (1.7.36), da je $|f(a) - f(b)|^2 \leq D(1 + |a|^q + |b|^q)|a-b|^2$, $D \in R^+, q \in Z^+$, kao i da za funkciju $g \in C^1$ važi uslov $|g(a) - g(b)|^2 \leq c|a-b|^2$, $c > 0$. Dokazano je da postoji neprekidno aproksimativno rešenje $\bar{Y}(t)$ tako da je $\bar{Y}(t_k) = Y_k$, odnosno diskretno aproksimativno rešenje i neprekidno aproksimativno rešenje se poklapaju u tačkama particije vremenskog intervala. Takođe je dokazana konvergencija u L^2-smislu niza aproksimativnih rešenja ka tačnom rešenju jednačine (1.7.32). Pritom, važi da je

$$E\Big[\sup_{0\leq t\leq T}|\bar{Y}(t)-x(t)|^2\Big]=O(\Delta).$$

1.7.3 θ-Euler-Maruyamina metoda

θ-Euler-Maruyamina metoda je takođe implicitna metoda za numeričko rešavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina i predstavlja uopštenje prethodno navedenih metoda. Parametar $\theta\in[0,1]$ se često naziva merom implicitnosti numeričke metode. Specijalno, ako je $\theta=0$, dobija se Euler-Maruyamina metoda, dok se za $\theta=1$, dobija backward Eulerova metoda.

Rešenje $\{x(t),t\geq 0\}$ jednačine (1.7.32) se aproksimira na proizvoljnoj particiji intervala $[0,\infty)$. Za izabranu veličinu koraka $\Delta\in(0,1)$, pri čemu je $t_k=k\Delta$, za $k\in 0,1,2,\ldots$, ova metoda se zasniva na rešavanju sledeće jednačine

$$Y_{k+1}=Y_k+\theta f(Y_{k+1})\,\Delta+(1-\theta)f(Y_k)\,\Delta+g(Y_k)\,\Delta w_k, \tag{1.7.39}$$

gde je $Y_0=x_0$ i $\Delta w_k=w(t_{k+1})-w(t_k)$. U cilju uvođenja numeričke šeme (1.7.39), definiše se funkcija $F:R^d\to R^d$ na sledeći način

$$F(x)=x-\theta f(x)\Delta t.$$

Pod pretpostavkom da važi jednostrani Lipschitzov uslov (1.7.36), postoji inverzna funkcija F^{-1} i rešenje Y_{k+1} se može predstaviti na sledeći način

$$Y_{k+1}=F^{-1}(Y_k+(1-\theta)f(Y_k)\Delta t+g(Y_k)\Delta w_k),$$

pri čemu je slučajna promenljiva Y_k F_k-merljiva.

U radu [57] je dokazana ograničenost momenata drugog reda rešenja jednačine (1.7.39) koja odgovara jednačini (1.7.32). Rezultati dobijeni u tom radu važe pod pretpostavkom da funkcije f i g zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov, kao i uslov monotonosti, odnosno postoje konstante α i β tako da je, za svako $x\in R^d$,

$$\langle x,f(x)\rangle+\frac{1}{2}|g(x)|^2\leq\alpha+\beta|x|^2.$$

Pored toga, zahteva se da važi jednostrani Lipschitzov uslov (1.7.36) i da postoji par konstanata $h\geq 1$ i $C(h)>0$ tako da je, za svako $x\in R^d$

$$|f(x)|\vee|g(x)|\leq C(h)(1+|x|^h).$$

Dakle, pod navedenim uslovima, θ-Euler-Maruyamina metoda (1.7.39) ima osobinu da za svako $T > 0$ postoji konstanta $C(T) > 0$ tako da je

$$\sup_{\Delta t \leq \Delta t^*} \sup_{0 \leq k \leq T} E|Y_k|^2 < C(T).$$

Takođe, pod navedenim uslovima je dokazana i stroga konvergencija θ-Euler-Maruyaminih rešenja (1.7.39) ka tačnom rešenju jednačine (1.7.32) za $\theta \geq \frac{1}{2}$.

U Glavi 3 su predstavljeni rezultati koji se odnose na skoro izvesnu eksponencijalnu stabilnost diskretnog θ-Euler-Maruyaminog rešenja za neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem, pri čemu se zahteva uslov linearnog rasta za $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$, dok se za $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$ taj uslov ne zahteva, već se primenjuje jedna verzija uopštenih uslova Khasminskiiog.

Napomena 1.1 *U odeljcima 1.7.1-1.7.3 su razmatrane Euler-Maruyamina metoda, backward Eulerova metoda i θ-Euler-Maruyamina metoda za obične stohastičke diferencijalne jednačine. Međutim, ove metode se mogu primeniti i na složenije tipove stohastičkih diferencijalnih jednačina, što se može naći, na primer, u radovima [42, 65, 66, 67], kao i u literaturi na koju se oni pozivaju.*

1.8 Neke numeričke metode aproksimacije rešenja običnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa prelazima Markova

U ovom poglavlju se razmatraju Euler-Maruyamina metoda, backward Eulerova metoda i θ-Euler-Maruyamina metoda za obične stohastičke diferencijalne jednačine sa prelazima Markova. Da bi se definisanle ove numeričke metode za stohastičke diferencijalne jednačine sa prelazima Markova, potrebno je definisati diskretan proces Markova.

Za izabranu veličinu koraka $\Delta \in (0,1)$ i $k \geq 0$, neka je $r_k^\Delta = r(k\Delta)$. Tada je $\{r_k^\Delta, k = 0, 1, 2, ...\}$ diskretan proces Markova sa konačnim skupom stanja $S = \{1, 2, ..., N\}$ i matricom verovatnoća prelaza iz jednog stanja u drugo

$$P(\Delta) = (P_{ij}(\Delta))_{N \times N} = e^{\Delta \Gamma}.$$

Neka je $r_0^\Delta = r_0$. Generiše se slučajan broj ξ_1 sa uniformnom raspodelom na intervalu $[0,1]$. Ako je $\xi_1 = 1$ tada je $r_1^\Delta = r_1 = N$. U suprotnom, jedinstveni prirodan broj $r_1 \in S$ se određuje na osnovu relacije

$$\sum_{j=1}^{r_1 - 1} P_{r_0,j}(\Delta) \leq \xi_1 < \sum_{j=1}^{r_1} P_{r_0,j}(\Delta),$$

pri čemu je $\sum_{j=1}^{0} P_{r_0,j}(\Delta) = 0$.

Zatim se nezavisno generiše novi slučajan broj ξ_2 sa uniformnom raspodelom na intervalu $[0,1]$. Ako je $\xi_2 = 1$ tada je $r_2^\Delta = r_2 = N$. U suprotnom, jedinstveni prirodan broj $r_2 \in S$ se određuje na osnovu relacije

$$\sum_{j=1}^{r_2-1} P_{r_1,j}(\Delta) \leq \xi_2 < \sum_{j=1}^{r_2} P_{r_1,j}(\Delta)$$

i tada je $r_2^\Delta = r_2$. Ponavljajući ovaj postupak generiše se trajektorija niza $\{r_k^\Delta, k = 0,1,2,...\}$. Ovaj postupak se može sprovesti nezavisno proizvoljan broj puta da bi se dobio veći broj trajektorija.

Sledećim primerom je grafički prikazan proces Markova.

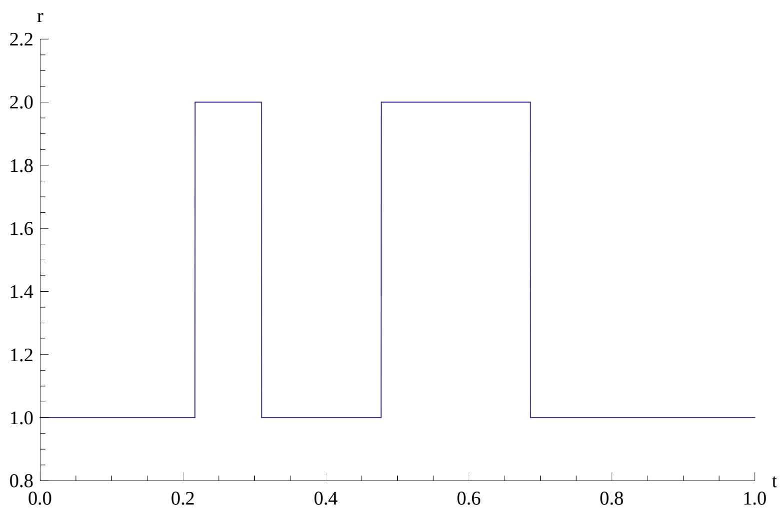
Primer 1.1 *Neka je* $S = \{1,2\}$ *skup stanja i*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

generator sa početnim uslovom $r_0 = 1$ *za* $\Delta = 0.0002$*. Tada je matrica verovatnoća prelaza iz jednog stanja u drugo*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Trajektorija procesa Markova je prikazana na Slici 1.1.



Slika 1.1: Trajektorija procesa Markova za $\Delta = 0.0002$

1.8.1 Euler-Maruyamina metoda

Neka je

$$dx(t) = f(x(t), r(t))\, dt + g(x(t), r(t))\, dw(t), \quad t \in [0, T], \tag{1.8.40}$$

stohastička diferencijalna jednačina sa prelazima Markova, sa početnim uslovima $x(0) = x_0$, $r(0) = r_0 \in S$. Pritom su $f : R^d \times S \to R^d$ i $g : R^d \times S \to R^{d\times m}$ Borel-merljive funkcije, pri čemu je $x(t) \in R^d$ i $r(t) \in S$, dok je $w(t)$ m-dimenzionalno Brownovo kretanje.

Nakon što je definisan diskretan proces Markova $\{r_k^\Delta, k = 0, 1, 2, ...\}$, moguće je definisati Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje koje odgovara jednačini (1.8.40).

Rešenje $\{x(t), t \in [0, T]\}$ jednačine (1.8.40) se aproksimira na proizvoljnoj particiji intervala $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Bira se veličina koraka $\Delta \in (0, 1)$, pri čemu je $t_k = k\Delta$, za $k \in 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Euler-Maruyamina metoda se zasniva na izračunavanju diskretnih aproksimativnih rešenja $X_k \approx x(t_k)$, tako da je $X_0 = x_0$ i $r_0^\Delta = r_0$, formiranjem niza

$$X_{k+1} = X_k + f(X_k, r_k^\Delta)\, \Delta + g(X_k, r_k^\Delta)\, \Delta w_k, \tag{1.8.41}$$

gde je $\Delta w_k = w(t_{k+1}) - w(t_k)$.

Neka je $\bar{X}(t) = X_k$ i $\bar{r}(t) = r_k^\Delta$ za $t \in [t_k, t_{k+1})$. Tada se definiše neprekidno Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(\bar{X}(t), \bar{r}(t)) ds + \int_0^t g(\bar{X}(t), \bar{r}(t))\, dw(s). \tag{1.8.42}$$

Kako je $X(t_k) = \bar{X}(t_k) = X_k$, zaključuje se da se diskretno aproksimativno rešenje i neprekidno aproksimativno rešenje poklapaju u tačkama particije vremenskog intervala $[0, T]$.

U knjizi [59], autori X. Mao i C. Yuan su predstavili neke rezultate o konvergenciji numeričkih rešenja ka tačnom rešenju. Dokazana je stroga srednje-kvadratna konvergencija Euler-Maruyaminih aproksimativnih rešenja ka tačnom rešenju.

Najpre je dokazano da ako važi uslov linearnog rasta, tj. ako postoji pozitivna konstanta K tako da, za svako $(x, i) \in R^n \times S$ važi

$$|f(x, i)|^2 \vee |g(x, i)|^2 \leq K(1 + |x|^2), \tag{1.8.43}$$

tada su momenti reda p, $p > 2$ tačnog i numeričkog rešenja jednačine (1.8.40) ograničeni pozitivnom konstantom koja ne zavisi od Δ. Ovaj rezultat se može naći u [59] (Lema 4.1).

Zatim je dokazano da važi globalni Lipschitzov uslov, tj. da postoji pozitivna konstanta L tako da, za svako $x, y \in R^n$ i $i \in S$,

$$|f(x, i) - f(y, i)| \vee |g(x, i) - g(y, i)| \leq L|x - y|, \tag{1.8.44}$$

implicira uslov linearnog rasta (1.8.43).

Pod pretpostavkom da važi (1.8.44), sledi da je

$$E\Big[\sup_{0\le t\le T}|\bar{Y}(t)-x(t)|^2\Big]\le C\Delta+o(\Delta),$$

gde je C pozitivna konstanta koja ne zavisi od Δ, odnosno, dokazana je stroga konvergencija Euler-Maruyaminog aproksimativnog rešenja ka tačnom rešenju pod pretpostavkom da važi globalni Lipschitzov uslov.

U mnogim slučajevima funkcije f i g zadovoljavaju samo lokalni Lipschitzov uslov, tj. za svaki prirodan broj R postoji konstanta $K_R>0$ takva da, za svako $x,y\in R^d$ za koje je $|x|\vee|y|\le R$ i za svako $i\in S$, važi

$$|f(x,i)-f(y,i)|\vee|g(x,i)-g(y,i)|\le K_R|x-y|. \tag{1.8.45}$$

U istoj knjizi dokazana je stroga konvergencija Euler-Maruyaminog aproksimativnog rešenja, pod pretpostavkom da važi lokalni Lipschitzov uslov (1.8.45) i uslov linearnog rasta (1.8.43). Pod tim uslovima Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje konvergira ka tačnom rešenju tako da važi

$$\lim_{\Delta t\to 0}E\Big[\sup_{0\le t\le T}|\bar{Y}(t)-x(t)|^2\Big]=0.$$

Sledećom teoremom predstavljena je konvergencija u verovatnoći Euler-Maruyaminih aproksimativnih rešenja ka tačnom rešenju, a da pritom važi samo lokalni Lipschitzov uslov, ali ne i uslov linearnog rasta ili uslov ograničenih momenata.

Teorema 1.23 (X. Mao, C. Yuan, [59]) *Neka je ispunjen lokalni Lipschitzov uslov (1.8.45). Pretpostavlja se da postoji funkcija $V\in C^2(R^d\times S;R_+)$, tako da:*

(i) za svako $i\in S$

$$\lim_{|x|\to\infty}V(x,i)=\infty; \tag{1.8.46}$$

(ii) za svako $(x,i)\in R^d\times S$ važi

$$LV(x,i)\le h[1+V(x,i)], \tag{1.8.47}$$

gde je

$$LV(x,i)=V_x(x,i)f(x,i)+\frac{1}{2}trace[g^T(x,i)V_{xx}g(x,i)]+\sum_{j=1}^{N}\gamma_{ij}V(x,j); \tag{1.8.48}$$

(iii) za svaki prirodan broj R postoji konstanta $G_R>0$ takva da, za svako $x,y\in R^d$ za koje je $|x|\vee|y|\le R$ i za svako $i\in S$, važi

$$|V(x,i)-V(y,i)|\vee|V_x(x,i)-V_x(y,i)|\vee|V_{xx}(x,i)-V_{xx}(y,i)|\le G_R|x-y|. \tag{1.8.49}$$

Tada je

$$\lim_{\Delta\to 0}\Big(\sup_{0\le t\le T}|\bar{Y}(t)-x(t)|^2\Big)=0\quad \textit{u verovatnoći.} \tag{1.8.50}$$

Navedeni rezultati predstavljaju motivaciju za nastanak rezultata koji će biti predstavljeni u Glavi 2. Oni se odnose na klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova. Pod pretpostavkom da važi jedna verzija uopštenih uslova Khasminskiiog, razmatra se egzistencija, jedinstvenost i stabilnost tačnog rešenja. Predstavljeno je aproksimativno rešenje koje je određeno u skladu sa metodom Euler-Maruyame. Dokazana je konvergencija u verovatnoći niza Euler-Maruyaminih aproksimativnih rešenja ka tačnom rešenju na svakom konačnom intervalu. Pored toga, uz uslov linearnog rasta za koeficijent prenosa, dokazana je skoro izvesna eksponencijalna stabilnost Euler-Maruyaminog rešenja.

1.8.2 Backward Eulerova metoda

Backward Eulerova metoda za numeričko rešavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina sa prelazima Markova je implicitna metoda. Na osnovu postojećih rezultata se može zaključiti da aproksimativna rešenja generisana implicitnim numeričkim metodama u većoj meri nasleđuju svojstva tačnog rešenja nego rešenja generisana primenom eksplicitnih metoda.

Preciznije, neka se rešenje $\{x(t), t \in [0,T]\}$ jednačine (1.8.40) aproksimira na proizvoljnoj particiji intervala $[0,T]$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Za izabranu veličinu koraka $\Delta \in (0,1)$, pri čemu je $t_k = k\Delta$, za $k \in 0, 1, 2, \ldots, n-1$, ova metoda se zasniva na rešavanju sledeće jednačine

$$Y_{k+1} = Y_k + f(Y_{k+1}, r_k^{\Delta})\,\Delta + g(Y_k, r_k^{\Delta})\,\Delta w_k, \tag{1.8.51}$$

gde je $Y_0 = x_0$, $r_0^{\Delta} = r_0$ i $\Delta w_k = w(t_{k+1}) - w(t_k)$.

U knjizi [59], backward Eulerova metoda se primenjuje na jednačinu (1.8.40), pod pretpostavkom da važi globalni Lipschitzov uslov (1.8.44). Pored toga, pretpostavlja se da funkcija f zadovoljava uslov polinomijalnog rasta, tj. da za svako $(x,i) \in R^n \times S$ važi da je

$$|f(x,i)| \le D(1 + |x|^q),\ D \in R^+, q \in Z^+.$$

Tada se dokazuje da postoji neprekidno aproksimativno rešenje $Y(t)$ tako da je $Y(k\Delta) = Y_k$, za koje važi

$$\lim_{\Delta \to 0} E\Big[\sup_{0 \le t \le T} |Y(t) - x(t)|^2\Big] = 0.$$

U Glavi 2 se razmatra backward Eulerova metoda za neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova. Dokazuje se konvergencija u verovatnoći niza backward Eulerovih rešenja ka tačnom rešenju jednačine, kao i skoro izvesna asimptotska eksponencijalna stabilnost backward Eulerovog rešenja. Pritom se zahteva da koeficijent prenosa f zadovoljava jednostrani Lipschitzov uslov.

1.8.3 θ-Euler-Maruyamina metoda

θ-Euler-Maruyamina metoda je takođe implicitna metoda za numeričko rešavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina sa prelazima Markova, pri čemu je $\theta \in [0, 1]$.

Rešenje $\{x(t), t \geq 0\}$ jednačine (1.8.40) se aproksimira na proizvoljnoj particiji intervala $[0, \infty)$. Za izabranu veličinu koraka $\Delta \in (0, 1)$, pri čemu je $t_k = k\Delta$, za $k \in 0, 1, 2, \ldots$, ova metoda se zasniva na rešavanju sledeće jednačine

$$Y_{k+1} = Y_k + \theta f(Y_{k+1}, r_k^{\Delta})\,\Delta + (1-\theta) f(Y_k, r_k^{\Delta})\,\Delta + g(Y_k, r_k^{\Delta})\,\Delta w_k, \tag{1.8.52}$$

gde je $Y_0 = x_0$, $r_0^{\Delta} = r_0$ i $\Delta w_k = w(t_{k+1}) - w(t_k)$.

Neka je $Y_1(t) = Y_k$, $Y_2(t) = Y_{k+1}$ i $\bar{r}(t) = r_k^{\Delta}$ za $t \in [t_k, t_{k+1})$. Tada se definiše neprekidno θ-Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje

$$\begin{aligned} Y(t) = x_0 + &\int_0^t [(1-\theta) f(Y_1(s), \bar{r}(s)) + \theta f(Y_2(s), \bar{r}(s))] ds \\ &+ \int_0^t g(f(Y_1(s), \bar{r}(s)))\, dw(s). \end{aligned} \tag{1.8.53}$$

U knjizi [59] je dokazana ograničenost momenata drugog reda rešenja jednačine (1.8.52) koja odgovara jednačini (1.8.40), pod pretpostavkom da funkcije f i g zadovoljavaju uslov linearnog rasta (1.8.43), gde je $K = L \vee \max\{|f(0, i)| \vee |g(0, i)| : i \in S\}$, pri čemu je L konstanta iz uslova (1.8.44). Dakle, pod navedenim uslovima, θ-Euler-Maruyamina metoda (1.8.52) ima osobinu da za $\Delta < \min\{1, 1/(6K)\}$ postoji konstanta $C > 0$, koja ne zavisi od Δ, tako da važi

$$\sup_{0 \leq k\Delta \leq T} E|Y_k|^2 < C.$$

Takođe, dokazana je stroga konvergencija θ-Euler-Maruyaminog aproksimativnog rešenja ka tačnom rešenju, tj. ako važi globalni Lipschitzov uslov (1.8.44), tada je

$$E\Big[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y(t) - x(t)|^2\Big] \leq C\Delta + o(\Delta),$$

gde je C pozitivna konstanta koja ne zavisi od Δ.

1.9 Elementarne i integralne nejednakosti

U ovom poglavlju biće navedene neke elementarne nejednakosti, koje se mogu naći u [70], i koje se primenjuju prilikom dokazivanja glavnih rezultata.

Elementarne nejednakosti koje će se koristiti su:

$$(a+b)^p \leq (1+\varepsilon)^{p-1}(a^p + \varepsilon^{1-p}b^p), \quad \forall a, b \geq 0, p > 1, \varepsilon > 0, \tag{1.9.54}$$

$$(a+b)^2 \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \frac{b^2}{1-\varepsilon}, \ \ a, b > 0, \ \varepsilon \in (0,1), \tag{1.9.55}$$

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p, \quad \forall a, b \geq 0, 0 < p \leq 1, \tag{1.9.56}$$

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b, \ a, b \geq 0, \ 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{1.9.57}$$

Za potrebe daljeg razmatranja biće navedena Gronwall-Bellmanova nejednakost u obliku teoreme. Dokaz se može naći u [52].

Teorema 1.24 *Neka je $T > 0$ i $c \geq 0$. Neka je $u(t)$ Borelova ograničena nenegativna funkcija definisana na intervalu $[0, T]$ i neka je $v(t)$ nenegativna integrabilna funkcija na intervalu $[0, T]$. Ako je*

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)\, ds, \quad t \in [0, T],$$

tada je

$$u(t) \leq ce^{\int_0^t v(s)\, ds}, \quad t \in [0, T].$$

Glava 2

Neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova

Predmet razmatranja u ovoj glavi je klasa neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova. Glavna motivacija potiče iz rada [20], čiji su autori L. Hu, X. Mao i Y. Shen, gde su određeni dovoljni uslovi stabilnosti rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova. Navedeni rezultati se odnose na klasu jednačina čiji koeficijenti zadovoljavaju jednu verziju uopštenih uslova Khasminskiiog. Rezultati sadržani u Poglavljima 2.1-2.3 su objavljeni u radu [73]. U Poglavlju 2.1 su navedeni osnovni pojmovi i rezultati. U Poglavlju 2.2 se razmatraju egzistencija, jedinstvenost i stabilnost rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova, pri čemu je funkcija kašnjenja neograničena. Uvođenjem pretpostavke o ograničenosti funkcije kašnjenja, određeni su dovoljni uslovi skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti i stabilnosti u srednjem reda p rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova. Na taj način su prošireni rezultati iz rada [66], M. Milošević, pri čemu se rezultati u tom radu dobijeni pod pretpostavkom da važi drugačija verzija uslova Khasminskiiog. U Poglavlju 2.3 je predstavljeno aproksimativno rešenje neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa neograničenim vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova koje je određeno u skladu sa metodom Euler-Maruyame. Dokazana je konvergencija u verovatnoći niza Euler-Maruyaminih aproksimativnih rešenja ka tačnom rešenju na svakom konačnom intervalu. Pored toga, uz uslov linearnog rasta za koeficijenat prenosa, dokazana je skoro izvesna eksponencijalna stabilnost

Euler-Maruyaminog rešenja. Rezultati predstavljeni u Poglavljima 2.4 i 2.5 su objavljeni u radu [77]. U Poglavlju 2.4 su razmatrane implicitne numeričke metode za klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa neograničenim vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova, pod određenim uslovima nelinearnog rasta. Dokazana je konvergencija u verovatnoći niza backward Eulerovih aproksimativnih rešenja ka tačnom rešenju na svakom konačnom intervalu, kao i konvergencija u verovatnoći neprekidnog i diskretnog forward-backward Eulerovog rešenja ka tačnom rešenju. Glavna motivacija potiče iz rada [67] u kome je autor M. Milošević predstavlila rezultate koji se odnose na backward Eulerovu metodu za neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem. U Poglavlju 2.5 je dokazana skoro izvesna asimptotska eksponencijalna stabilnost backward Eulerovog rešenja bez uslova linearnog rasta za koeficijent prenosa. Kako bi backward Eulerova metoda bila dobro definisana, zahteva se da koeficijent prenosa zadovoljava jednostrani Lipschitzov uslov. Neutralni član je hibridan, odnosno zavisi od procesa Markova i zbog toga je backward Eulerovo aproksimativno rešenje definisano na drugačiji način u odnosu na ono u radu [67].

2.1 Uvodni pojmovi i rezultati

Sve slučajne promenljive i stohastički procesi koji se razmatraju, definisani su na kompletnom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ koja zadovoljava uobičajene uslove (tj. rastuća je, neprekidna s desna i $\mathcal{F}_0$ sadrži sve događaje verovatnoće nula). Neka je $w = \{w(t), t \geq 0\}$ m-dimenzionalno Braunovo kretanje i neka je $\{r(t), t \geq 0\}$ neprekidan s desna proces Markova. Oznaka $|x|$ se odnosi na Euklidsku normu vektora $x \in R^d$, dok $|A|^2 = trace(A^T A)$ označava normu matrice A, gde je A^T transponovana matrica ili vektor.

U skladu sa ranije navedenim oznakama, za dato $\tau > 0$, $C([-\tau, 0]; R^d)$ označava familiju neprekidnih funkcija $\varphi : [-\tau, 0] \to R^d$ sa supremum normom definisanom sa $\|\varphi\| = \sup_{-\tau\leq t\leq 0} |\varphi(t)|$. Pored toga, $C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R^d)$ predstavlja familiju ograničenih, $\mathcal{F}_0$-merljivih, slučajnih funkcija koje pripadaju klasi $C([-\tau, 0]; R^d)$.

U nastavku će od značaja biti funkcija kašnjenja $\delta : R_+ \to R_+$, koja je Borel-merljiva, pri čemu je $R_+ = [0, \infty)$.

U ovoj glavi se razmatra sledeća neutralna stohastička diferencijalna jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova

$$\begin{aligned} d[x(t) - u(x(t-\delta(t)), t, r(t))] \\ = f(x(t), x(t-\delta(t)), t, r(t))dt + g(x(t), x(t-\delta(t)), t, r(t))dw(t), \ t \geq 0, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

sa početnim uslovima

$$x_0 = \varphi = \{\varphi(t) : t \in [-\tau, 0]\} \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R^d), \tag{2.1.2}$$

$$r(0) = i_0 \in S. \tag{2.1.3}$$

Pritom su

$$f : R^d \times R^d \times R_+ \times S \to R^d,\ \ g : R^d \times R^d \times R_+ \times S \to R^{d\times m},\ \ u : R^d \times R_+ \times S \to R^d$$

Borel-merljive funkcije i $\{x(t), t \geq -\tau\}$ je d-dimenzionalni stohastički proces koji predstavlja stanje sistema čija je evolucija opisana jednačinom (2.1.1).

Pored već navedenih oznaka i uslova, neophodno je uvesti sledeće pretpostavke:

$\mathcal{A}_1$: (Lokalni Lipschitzov uslov) Za svaki ceo broj h, postoji konstanta $K_h > 0$, tako da za svako $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R^d$, gde je $|x_1| \vee |x_2| \vee |y_1| \vee |y_2| \leq h$ i za svako $t \in R_+$, $i \in S$, važi

$$\begin{aligned}|f(x_1, y_1, t, i) - f(x_2, y_2, t, i)|^2 \vee |g(x_1, y_1, t, i) - g(x_2, y_2, t, i)|^2 \\ \leq K_h(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2).\end{aligned}$$

$\mathcal{A}_2$: Postoje tri funkcije $V \in C^{2,1}(R^d \times R_+ \times S; R_+)$ i $U_1, U_2 \in C(R^d \times [-\tau, \infty); R_+)$ i nenegativne konstante c_1, c_2, c_3, pri čemu je $c_2 > c_3$, tako da je

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(\inf_{t\geq 0} U_1(x, t) \right) = \infty, \tag{2.1.4}$$

i za svako $x, y \in R^d,\ t \in R_+$ i $i \in S$ važi

$$U_1(x, t) \leq V(x, t, i) \leq U_2(x, t), \tag{2.1.5}$$

$$LV(x, y, t, i) \leq c_1 - c_2 U_2(x, t) + c_3(1 - \bar{\delta})U_2(y, t - \delta(t)). \tag{2.1.6}$$

$\mathcal{A}_3$: Funkcija kašnjenja $\delta : R_+ \to R_+$ je diferencijabilna i $\delta'(t) \leq \bar{\delta} < 1$.

$\mathcal{A}_4$: Postoji konstanta $\beta \in (0, 1)$ tako da, za svako $x, y \in R^d$, $t \geq 0$ i $i \in S$, važi

$$|u(x, t, i) - u(y, t, i)| \leq \beta|x - y|. \tag{2.1.7}$$

Pritom, ako je $u(0, t, i) = 0$ za svako $t \geq 0$, $i \in S$, iz pretpostavke (2.1.7), sledi da je

$$|u(x, t, i)| \leq \beta|x|. \tag{2.1.8}$$

Ako je $\delta_1(t) = t - \delta(t), t \in R_+$, tada je $\delta_1'(t) \geq 1 - \bar{\delta} > 0$, što znači da je $\delta_1(t)$ rastuća funkcija po t i $t - \delta(t) \geq -\delta(0)$, $t \in R_+$. Imajući u vidu početni uslov (2.1.2), može se zaključiti da $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\delta(0), 0]; R^d)$ i sve prethodno uvedene pretpostavke važe za $\tau = \delta(0)$.

Kao što je pomenuto u uvodu, u Poglavlju 2.2 su, između ostalog, navedeni rezultati koji se odnose na stabilnost tačnog rešenja jednačine 2.1.1 i oni jednim delom predstavljaju proširenje rezultata iz rada [65], M. Milošević, pri čemu se rezultati u tom radu odnose na neutralne stohastičke diferencijalne jednačine bez prelaza Markova i sa ograničenim vremenski-zavisnim kašnjenjem. Još jedna bitna razlika između rezultata koji će biti navedeni u nastavku i onih iz rada [65] je u drugačijoj verziji uopštenih uslova Khasminskiiog. Preciznije, umesto pretpostavke $\mathcal{A}_2$, u radu [65] se zahtevaju sledeći uslovi:

Postoje funkcije $V \in C^{2,1}(R^d \times [-\tau, +\infty); R_+)$ i $U \in C(R^d \times [-\tau, +\infty); R_+)$ i pozitivne konstante $\lambda_1, \lambda_2, c_1, c_2$ tako da je

$$\lambda_2 > \frac{\lambda_1}{1-\bar{\delta}} \tag{2.1.9}$$

i za svako $x, y \in R^d$ i $t \geq 0$, važi

$$c_1|x|^p \leq V(x,t) \leq c_2|x|^p, \tag{2.1.10}$$

$$LV(x,y,t) \leq \lambda_1[1 + V(x,t) + V(y,t-\delta(t)) + U(y,t-\delta(t))] - \lambda_2 U(x,t). \tag{2.1.11}$$

Dakle, pretpostavka (2.1.10), koja je prisutna u radovima [65] i [66], prilikom dokaza egzistencije, jedinstvenosti i stabilnosti tačnog rešenja, u ovoj glavi se zamenjuje pretpostavkom (2.1.5).

2.2 Egzistencija, jedinstvenost i stabilnost tačnog rešenja

Kao što je pomenuto u uvodu, u radu [20], autori L. Hu, X. Mao, Y. Shen su pod pretpostavkom da važe uopšteni uslovi Khasminskiiog, razmatrali stohastičku diferencijalnu jednačinu sa kašnjenjem i prelazima Markova, odnosno jednačinu oblika

$$dx(t) = f(x(t), x(t-\delta(t)), t, r(t))dt + g(x(t), x(t-\delta(t)), t, r(t))dw(t), \quad t \geq 0, \tag{2.2.12}$$

sa početnim uslovima

$$x_0 = \varphi = \{\varphi(t) : t \in [-\tau, 0]\} \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R^d),$$
$$r(0) = i_0 \in S,$$

i pritom su dokazali egzistenciju i jedinstvenost rešenja sledećom teoremom.

Teorema 2.1 *Ako su zadovoljeni uslovi $\mathcal{A}_1$–$\mathcal{A}_3$, tada za svaki zadati početni uslov $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\delta(0), 0]; R^d)$ postoji jedinstveno globalno rešenje $x = \{x(t), t \in [-\delta(0), \infty)\}$ jednačine (2.1). Pored toga, rešenje x zadovoljava uslove*

$$EU_1(x(t), t) < \infty, \quad t \geq 0,$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t EU_2(x(s),s)ds \le \frac{c_1}{c_2-c_3}.$$

Dalje, ako je $c_1 = 0$*, tada za rešenje* x *važi da je*

$$\int_0^\infty EU_2(x(t),t)dt \le \frac{1}{c_2-c_3}\left(U_2(x(0),0) + c_3\int_{-\delta(0)}^0 U_2(x(s),s)ds\right),$$
$$\int_0^\infty U_2(x(t),t)dt < \infty \quad s.i.$$

Navedeni rezultat je proširen na klasu jednačina oblika (2.1.1). Zbog toga je za dokaz sledeće teoreme od važnosti pretpostavka $\mathcal{A}_4$.

Teorema 2.2 *Ako su zadovoljeni uslovi* $\mathcal{A}_1$*–*$\mathcal{A}_4$*, tada za svaki zadati početni uslov* $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\delta(0),0];R^d)$ *postoji jedinstveno globalno rešenje* $x = \{x(t), t\in[-\delta(0),\infty)\}$ *jednačine (2.1.1). Pored toga, rešenje* x *zadovoljava uslove*

$$EU_1(x(t) - u(x(t-\delta(t)),t,r(t)),t) < \infty, \quad t \ge 0, \tag{2.2.13}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t EU_2(x(s),s)ds \le \frac{c_1}{c_2-c_3}. \tag{2.2.14}$$

Dalje, ako je $c_1 = 0$*, tada za rešenje* x *važi da je*

$$\int_0^\infty EU_2(x(t),t)dt$$
$$\le \frac{1}{c_2-c_3}\left(U_2(x(0)-u(x(-\delta(0)),0,r(0)),0) + c_3\int_{-\delta(0)}^0 U_2(x(s),s)ds\right)$$

i

$$\int_0^\infty U_2(x(t),t)dt < \infty \quad s.i.$$

Dokaz. Imajuči u vidu lokalni Lipschitzov uslov $\mathcal{A}_1$, sledi da za svaki početni uslov $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\delta(0),0];R^d)$ postoji jedinstveno maksimalno lokalno rešenje $x(t)$, $t\in[-\delta(0),\tau_e)$, gde je τ_e vreme eksplozije. Neka je $k_0 > 0$ dovoljno veliki prirodan broj, tako da je $\|\varphi\| = \sup_{[-\delta(0),0]}|\varphi(t)| \le k_0$. Za svaki prirodan broj $k \ge k_0$, definiše se vreme zaustavljanja

$$\tau_k = \inf\{t\in[0,\tau_e) : |x(t)| \ge k\}, \quad \inf\emptyset = \infty.$$

Očigledno, niz $\{\tau_k, k\ge 0\}$ je rastući. Neka je $\tau_\infty = \lim_{k\to\infty}\tau_k$, gde je $\tau_\infty \le \tau_e$ s.i. Ako se dokaže da je $\tau_\infty = \infty$ s.i, tada je $\tau_e = \infty$ s.i, što znači da rešenje $\{x(t), t\in[-\delta(0),\infty)\}$ neće eksplodirati u konačnom vremenskom intervalu.

Najpre će biti dokazano da je $\tau_\infty = \infty$ s.i. Primenjujući formulu Itôa na jednačinu (2.1.1) i uslov (2.1.6), za svako $t \geq 0$ važi

$$
\begin{aligned}
&dV(x(t) - u(x(t-\delta(t)), t, r(t)), t, r(t)) \\
&\quad = LV(x(t), x(t-\delta(t)), t, r(t))dt + dM_1(t) \\
&\quad \leq c_1 - c_2U_2(x(t), t) + c_3(1-\bar{\delta})U_2(x(t-\delta(t)), t-\delta(t)) + dM_1(t),
\end{aligned} \tag{2.2.15}
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
M_1(t) = &\int_0^t V_x(x(s) - u(x(s-\delta(s)), s, r(s)), s, r(s))g(x(s), x(s-\delta(s)), s, r(s))d\omega(s) \\
&+\int_0^t\int_R \Big(V(x(s) - u(x(s-\delta(s)), s, r(s)), s, r(s) + \tilde{h}(r(s), l)) \\
&\quad - V(x(s) - u(x(s-\delta(s)), s, r(s)), s, r(s))\Big)\mu(ds, dl)
\end{aligned}
$$

lokalni martingal i $M_1(0) = 0$, dok je $\mu(ds, dl) = \nu(ds, dl) - m(ds)ds$ martingalna mera, tj. kompenzovana Poissonova slučajna mera.

Za svako $k \geq k_0$, integracijom obe strane nejednakosti (2.2.15) i primenom matematičkog očekivanja, dobija se da je za svako $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
&EV(x(\tau_k \wedge t) - u(x(\tau_k \wedge t - \delta(\tau_k \wedge t)), \tau_k \wedge t, r(\tau_k \wedge t)), \tau_k \wedge t, r(\tau_k \wedge t)) \\
&\quad \leq V(x(0) - u(x(-\delta(0)), 0, r(0)), 0, r(0)) + c_1 t \\
&\quad -c_2 E\int_0^{\tau_k \wedge t} U_2(x(s), s)ds + c_3(1-\bar{\delta})E\int_0^{\tau_k \wedge t} U_2(x(s-\delta(s)), s-\delta(s))ds.
\end{aligned} \tag{2.2.16}
$$

Na osnovu uslova (2.1.5) sledi

$$
V(x(0) - u(x(-\delta(0)), 0, r(0)), 0, r(0)) \leq U_2(x(0) - u(x(-\delta(0)), 0, r(0)), 0),
$$

dok se na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_3$ može zaključiti da je

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^{\tau_k \wedge t} U_2(x(s-\delta(s)), s-\delta(s))ds \\
&\qquad \leq \frac{1}{1-\bar{\delta}} E\int_{-\delta(0)}^{\tau_k \wedge t - \delta(\tau_k \wedge t)} U_2(x(s), s)ds \\
&\qquad \leq \frac{1}{1-\bar{\delta}} \left(\int_{-\delta(0)}^0 U_2(x(s), s)ds + E\int_0^{\tau_k \wedge t} U_2(x(s), s)ds\right).
\end{aligned}
$$

Zamenom prethodnog izraza u (2.2.16) i primenjujući (2.1.5), važi da je

$$
\begin{aligned}
&EU_1(x(\tau_k \wedge t) - u(x(\tau_k \wedge t - \delta(\tau_k \wedge t)), \tau_k \wedge t, r(\tau_k \wedge t)), \tau_k \wedge t) \\
&\quad \leq K + c_1 t - (c_2 - c_3)E\int_0^{\tau_k \wedge t} U_2(x(s), s)ds,
\end{aligned} \tag{2.2.17}
$$

gde je

$$K = U_2(x(0) - u(x(-\delta(0)), 0, r(0)), 0) + c_3 \int_{-\delta(0)}^{0} U_2(x(s), s)ds < \infty.$$

Kako je $c_2 > c_3$, sledi da je

$$EU_1(x(\tau_k \wedge t) - u(x(\tau_k \wedge t - \delta(\tau_k \wedge t)), \tau_k \wedge t, r(\tau_k \wedge t)), \tau_k \wedge t) \leq K + c_1 t.$$

Neka je $\mu_k = \inf_{|y|\geq(1-\beta)k, t\geq 0} U_1(y,t)$. Na osnovu (2.1.8) se može zaključiti da je

$$\begin{aligned}
&|x(\tau_k) - u(x(\tau_k - \delta(\tau_k)), \tau_k, r(\tau_k))| I_{\{\tau_k \leq t\}} \\
&\qquad \geq (|x(\tau_k)| - |u(x(\tau_k - \delta(\tau_k)), \tau_k, r(\tau_k))|) I_{\{\tau_k \leq t\}} \\
&\qquad \geq (|x(\tau_k)| - \beta |x(\tau_k - \delta(\tau_k))|) I_{\{\tau_k \leq t\}} \\
&\qquad \geq k - \beta k = (1-\beta)k.
\end{aligned}$$

Pored toga,

$$\begin{aligned}
&EU_1(x(\tau_k \wedge t) - u(x(\tau_k \wedge t - \delta(\tau_k \wedge t)), \tau_k \wedge t, r(\tau_k \wedge t)), \tau_k \wedge t) \\
&\qquad \geq E[U_1(x(\tau_k) - u(x(\tau_k - \delta(\tau_k)), \tau_k, r(\tau_k)), \tau_k) I_{\{\tau_k \leq t\}}] \\
&\qquad \geq E\left[\inf_{|y|\geq(1-\beta)k, t\geq 0} U_1(y,t) I_{\{\tau_k \leq t\}}\right] \\
&\qquad = \mu_k E I\{\tau_k \leq t\} = \mu_k P\{\tau_k \leq t\},
\end{aligned}$$

tako da je $\mu_k P\{\tau_k \leq t\} \leq K + c_1 t$.

Pretpostavka (2.1.4) implicira $\lim_{k\to\infty} \mu_k = \infty$. Tada, na osnovu poslednjeg izraza, kada $k \to \infty$, sledi da je $P\{\tau_\infty \leq t\} = 0$, odnosno, $P\{\tau_\infty > t\} = 1$. Kako je $t \geq 0$ proizvoljno, važi da je $P\{\tau_\infty = \infty\} = 1$, što je i trebalo dokazati.

Iz relacije (2.2.17) sledi

$$(c_2 - c_3) E \int_0^{\tau_k \wedge t} U_2(x(s), s)ds \leq K + c_1 t. \tag{2.2.18}$$

Kada $k \to \infty$, primenom Fubinijeve teoreme (Teoreme 1.2), dobija se da je

$$(c_2 - c_3) \int_0^{t} EU_2(x(s), s)ds \leq K + c_1 t.$$

Deljenjem obe strane prethodne nejednakosti izrazom $(c_2 - c_3)t$, pri čemu $t \to \infty$, dokazuje se tvrđenje (2.2.14).

Sada se razmatra slučaj kada je $c_1 = 0$. Tada relacija (2.2.17) implicira

$$(c_2 - c_3) E \int_0^{\tau_k \wedge t} U_2(x(s), s)ds \leq K.$$

Deljenjem obe strane prethodne nejednakosti izrazom $c_2 - c_3$, pri čemu $t \to \infty$, sledi

$$\int_0^\infty EU_2(x(s), s)ds \leq \frac{K}{c_2 - c_3},$$

što je i trebalo dokazati. Primenom Fubinijeve teoreme, dobija se

$$E\int_0^\infty U_2(x(t), t)dt \leq \frac{K}{c_2 - c_3},$$

što implicira

$$\int_0^\infty U_2(x(t), t)dt < \infty \quad s.i.$$

$\diamondsuit$

Specijalno, za $u(x, t, i) = 0$, $x \in R^d, t \geq 0, i \in S$, Teorema 2.2 se svodi na Teoremu 2.1.

Sledeće tvrđenje ukazuje na to da rešenje x jednačine (2.1.1) ostaje u kompaktnom skupu sa velikom verovatnoćom na svakom konačnom vremenskom intervalu.

Posledica 2.1 *Neka su zadovoljeni uslovi $\mathcal{A}_1$–$\mathcal{A}_4$. Za proizvoljno $\varepsilon \in (0, 1)$ i $T > 0$ postoji dovoljno veliki prirodan broj $k^* = k^*(\varepsilon, T)$, tako da je*

$$P\{\tau_k \leq T\} \leq \varepsilon, \quad k \geq k^*,$$

gde je $\{\tau_k, k \geq k_0\}$ niz vremena zaustavljanja definisanih u Teoremi 2.2.

Dokaz. Na osnovu dokaza Teoreme 2.2, sledi

$$\mu_k P\{\tau_k \leq T\} \leq K + c_1 T.$$

Imajući u vidu da $\mu_k \to \infty$, kada $k \to \infty$, može se zaključiti da za svako $\varepsilon \in (0, 1)$, postoji dovoljno veliki prirodan broj k^*, tako da je

$$\mu_k \geq \frac{K + c_1 T}{\varepsilon}, \quad k \geq k^*.$$

Prema tome,

$$P\{\tau_k \leq T\} \leq \varepsilon, \quad k \geq k^*,$$

čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Specijalno, ako je funkcija kašnjenja $\delta(t)$, $t \in R_+$ ograničena u smislu da je

$$\overline{h} := \sup_{t \geq 0} \delta(t) < \infty, \tag{2.2.19}$$

tada se može dokazati sledeća teorema.

Teorema 2.3 *Neka važe pretpostavke $\mathcal{A}_1$–$\mathcal{A}_4$ i uslov (2.2.19). Tada, za dati početni uslov $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\delta(0),0];R^d)$, jedinstveno rešenje $x=\{x(t),t\geq\delta(0)\}$ jednačine (2.1.1) zadovoljava nejednakost*

$$\limsup_{t\to\infty} EU_1(x(t)-u(x(t-\delta(t)),t,r(t)),t) \leq \frac{c_1}{\varepsilon}, \tag{2.2.20}$$

gde je $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, pri čemu je ε_0 jedinstveno pozitivno rešenje jednačine $c_2=\varepsilon_0+c_3e^{\varepsilon_0\overline{h}}$.

Pored toga, ako je $c_1=0$, tada za rešenje x važi

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(EU_1(x(t)-u(x(t-\delta(t)),t,r(t)),t)) \leq -\varepsilon \tag{2.2.21}$$

i

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log(U_1(x(t)-u(x(t-\delta(t)),t,r(t)),t)) \leq -\varepsilon \quad s.i. \tag{2.2.22}$$

Dokaz. Pimenjujući formulu Itôa, za $t\geq 0$, sledi

$$\begin{aligned} d&\left[e^{\varepsilon t}V(x(t)-u(x(t-\delta(t),t,r(t)),t,r(t))\right] \\ &= e^{\varepsilon t}\left[\varepsilon V(x(t)-u(x(t-\delta(t)),t,r(t)),t,r(t))\right. \\ &\quad \left.+LV(x(t),x(t-\delta(t)),t,r(t))\right]dt+dM_2(t), \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

gde je

$$\begin{aligned} M_2(t)=&\int_0^t e^{\varepsilon s}[V_x(x(s)-u(x(s-\delta(s)),s,r(s)),s,r(s))g(x(s),x(s-\delta(s)),s,r(s))d\omega(s) \\ &+\int_R\Big(V(x(s)-u(x(s-\delta(s)),s,r(s)),s,r(s)+\tilde{h}(r(s),l)) \\ &\quad -V(x(s)-u(x(s-\delta(s)),s,r(s)),s,r(s))\Big)\mu(ds,dl)\Big] \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

lokalni martingal, pri čemu je $M_2(0)=0$.

Za svako $k\geq k_0$, integracijom obe strane jednakosti (2.2.23) i primenom matematičkog očekivanja, dobija se da je za svako $t\geq 0$,

$$\begin{aligned} E&\left(e^{\varepsilon(\tau_k\wedge t)}V(x(\tau_k\wedge t)-u(x(\tau_k\wedge t-\delta(\tau_k\wedge t)),\tau_k\wedge t,r(\tau_k\wedge t)),\tau_k\wedge t,r(\tau_k\wedge t))\right) \\ &= V(x(0)-u(x(-\delta(0)),0,r(0)),0,r(0)) \\ &\quad +E\int_0^{\tau_k\wedge t}e^{\varepsilon s}\left[\varepsilon V(x(s)-u(x(s-\delta(s)),s,r(s)),s,r(s))\right. \\ &\qquad \left.+LV(x(s),x(s-\delta(s)),s,r(s))\right]ds. \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

Na osnovu uslova (2.1.5) i (2.1.6) i prethodne relacije sledi

$$
\begin{aligned}
&E\left(e^{\varepsilon(\tau_k\wedge t)}U_1(x(\tau_k\wedge t)-u(x(\tau_k\wedge t-\delta(\tau_k\wedge t)),\tau_k\wedge t,r(\tau_k\wedge t)),\tau_k\wedge t)\right)\\
&\quad\le U_2(x(0)-u(x(-\delta(0)),0,r(0)),0)\\
&\quad +E\int_0^{\tau_k\wedge t}e^{\varepsilon s}\left[c_1-(c_2-\varepsilon)U_2(x(s),s)+c_3(1-\overline{\delta})U_2(x(s-\delta(s)),s-\delta(s))\right]ds\\
&\quad\le U_2(x(0)-u(x(-\delta(0)),0,r(0)),0)+\frac{c_1}{\varepsilon}e^{\varepsilon t}-(c_2-\varepsilon)E\int_0^{\tau_k\wedge t}e^{\varepsilon s}U_2(x(s),s)ds\\
&\quad +c_3(1-\overline{\delta})E\int_0^{\tau_k\wedge t}e^{\varepsilon s}U_2(x(s-\delta(s)),s-\delta(s))ds. \qquad (2.2.26)
\end{aligned}
$$

Primenom pretpostavki $\mathcal{A}_3$ i (2.2.19) dolazi se do nejednakosti

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^{\tau_k\wedge t}e^{\varepsilon s}U_2(x(s-\delta(s)),s-\delta(s))ds\\
&\qquad\le e^{\varepsilon\overline{h}}E\int_0^{\tau_k\wedge t}e^{\varepsilon(s-\delta(s))}U_2(x(s-\delta(s)),s-\delta(s))ds\\
&\qquad\le \frac{e^{\varepsilon\overline{h}}}{1-\overline{\delta}}E\int_{-\delta(0)}^{\tau_k\wedge t-\delta(\tau_k\wedge t)}e^{\varepsilon s}U_2(x(s),s)ds\\
&\qquad\le \frac{e^{\varepsilon\overline{h}}}{1-\overline{\delta}}\left(\int_{-\delta(0)}^0U_2(x(s),s)ds+E\int_0^{\tau_k\wedge t}U_2(x(s),s)ds\right). \qquad (2.2.27)
\end{aligned}
$$

Zamenom izraza (2.2.27) u (2.2.26) dobija se

$$
\begin{aligned}
&E\left(e^{\varepsilon(\tau_k\wedge t)}U_1(x(\tau_k\wedge t)-u(x(\tau_k\wedge t-\delta(\tau_k\wedge t)),\tau_k\wedge t,r(\tau_k\wedge t)),\tau_k\wedge t)\right)\\
&\qquad\le K_1+\frac{c_1}{\varepsilon}e^{\varepsilon t}+(c_3e^{\varepsilon\overline{h}}-(c_2-\varepsilon))E\int_0^{\tau_k\wedge t}U_2(x(s),s)ds,
\end{aligned}
$$

gde je $K_1=U_2(x(0)-u(x(-\delta(0)),0,r(0)),0)+c_3e^{\varepsilon\overline{h}}\int_{-\delta(0)}^0U_2(x(s),s)ds$.

Kako je ε_0 jedinstveno pozitivno rešenje jednačine $c_2=\varepsilon_0+c_3e^{\varepsilon_0\overline{h}}$, tada za svako $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ važi

$$
\begin{aligned}
&E\left(e^{\varepsilon(\tau_k\wedge t)}U_1(x(\tau_k\wedge t)-u(x(\tau_k\wedge t-\delta(\tau_k\wedge t)),\tau_k\wedge t,r(\tau_k\wedge t)),\tau_k\wedge t)\right)\\
&\qquad\le K_1+\frac{c_1}{\varepsilon}e^{\varepsilon t}.
\end{aligned}
$$

Na osnovu prethodne ocene kada $k\to\infty$, sledi

$$E\left(e^{\varepsilon t}U_1(x(t)-u(x(t-\delta(t)),t,r(t)),t)\right)\le K_1+\frac{c_1}{\varepsilon}e^{\varepsilon t}, \qquad (2.2.28)$$

što implicira

$$\limsup_{t\to\infty}EU_1(x(t)-u(x(t-\delta(t)),t,r(t)),t)\le\frac{c_1}{\varepsilon}.$$

Ako je $c_1 = 0$, tada iz nejednakosti (2.2.28) sledi

$$EU_1(x(t) - u(x(t - \delta(t)), t, r(t)), t) \leq \frac{K_1}{e^{\varepsilon t}}. \tag{2.2.29}$$

Jasno, iz prethodne relacije direktno sledi tvrđenje (2.2.21).

Da bi se dokazalo tvrđenje (2.2.22), izraz (2.2.23) će biti predstavljen u ekvivalentnom integralnom obliku, tj.

$$\begin{aligned} & e^{\varepsilon t} V(x(t) - u(x(t - \delta(t), t, r(t)), t, r(t)) - V(x(0) - u(x(-\delta(0)), 0, r(0)), 0, r(0)) \\ & = \int_0^t e^{\varepsilon s} \left[\varepsilon V(x(s) - u(x(s - \delta(s)), s, r(s)), s, r(s)) + LV(x(s), x(s - \delta(s)), s, r(s))\right] ds \\ & \quad + M_2(t), \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

pri čemu je stohastički proces $M_2(t)$ definisan izrazom (2.2.24). Na osnovu pretpostavki $\mathcal{A}_2$ i $\mathcal{A}_3$, kada je $c_1 = 0$, na isti način kao u prethodnom delu dokaza, dobija se

$$e^{\varepsilon t} U_1(x(t) - u(x(t - \delta(t)), t, r(t)), t) \leq K_1 + M_2(t). \tag{2.2.31}$$

Primenjujući Teoremu o konvergenciji nenegativnih semi-martingala (Teoremu 1.6), sledi

$$\limsup_{t \to \infty} \left[e^{\varepsilon t} U_1(x(t) - u(x(t - \delta(t)), t, r(t)), t)\right] < \infty \quad s.i.$$

Prema tome, postoji konačna pozitivna slučajna promenljiva ξ takva da je

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \left[e^{\varepsilon t} U_1(x(t) - u(x(t - \delta(t)), t, r(t)), t)\right] \leq \xi \quad s.i. \tag{2.2.32}$$

Odatle sledi da je

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log(U_1(x(t) - u(x(t - \delta(t)), t, r(t)), t)) \leq -\varepsilon \quad s.i.,$$

čime je tvrđenje dokazano. $\diamondsuit$

Kada funkcija $U_1(x, t)$ zadovoljava određene dodatne uslove, mogu se dokazati eksponencijalna stabilnost u srednjem reda p i skoro izvesna eksponencijalna stabilnost rešenja $x = \{x(t), t \in [-\delta(0), \infty)\}$ jednačine (2.1.1). Navedena tvrđenja su data u sledećoj teoremi.

Teorema 2.4 *Neka su zadovoljeni uslovi $\mathcal{A}_1$–$\mathcal{A}_4$, pri čemu je $c_1 = 0$ i neka su c i p pozitivne konstante takve da je $c|x|^p \leq U_1(x, t)$, $\quad (x, t) \in R^d \times R^+$. Ako je funkcija* *kašnjenja* $\delta(t)$, $t \in R_+$ *ograničena u smislu (2.2.19), tada za svaki početni uslov* $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\delta(0), 0]; R^d)$, *jedinstveno rešenje* x *jednačine (2.1.1) ima osobine*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(E|x(t)|^p) \leq -\varepsilon, \tag{2.2.33}$$

i

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log|x(t)| \leq -\frac{\varepsilon}{p} \quad s.i., \tag{2.2.34}$$

pri čemu je $\varepsilon \in \Big(0, -\frac{1\wedge p}{\bar{h}} \ln \beta \wedge \varepsilon_0\Big)$, *dok je* ε_0 *jedinstveno pozitivno rešenje jednačine* $c_2 = \varepsilon_0 + c_3 e^{\varepsilon_0 \bar{h}}$.

Dokaz. Na osnovu relacije (2.2.29) i pretpostavke $c|x|^p \leq U_1(x,t)$, za $K_2 = K_1/c$, sledi

$$e^{\varepsilon t} E|x(t) - u(x(t-\delta(t)), t, r(t))|^p \leq K_2, \quad t \geq 0. \tag{2.2.35}$$

U nastavku dokaza se razmatraju dva slučaja.

Prvi slučaj se odnosi na $0 < p \leq 1$. Primenom elementarne nejednakosti (1.9.56) i pretpostavke (2.1.8), ocena (2.2.35) implicira

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon t} E|x(t)|^p &\leq e^{\varepsilon t} E|x(t) - u(x(t-\delta(t)), t, r(t))|^p + e^{\varepsilon t} E|u(x(t-\delta(t)), t, r(t))|^p \\ &\leq K_2 + \beta^p e^{\varepsilon\delta(t)} e^{\varepsilon(t-\delta(t))} E|x(t-\delta(t))|^p. \end{aligned}$$

Dalje, za svako $T > 0$, na osnovu pretpostavke (2.2.19), dobija se

$$\begin{aligned} \sup_{0\leq t\leq T} \Big[e^{\varepsilon t} E|x(t)|^p\Big] &\leq K_2 + \beta^p e^{\varepsilon\delta(t)} \sup_{0\leq t\leq T} \Big[e^{\varepsilon(t-\delta(t))} E|x(t-\delta(t))|^p\Big] \\ &\leq K_2 + \beta^p e^{\varepsilon\bar{h}} E\|\varphi\|^p + \beta^p e^{\varepsilon\bar{h}} \sup_{0\leq t\leq T} \Big[e^{\varepsilon t} E|x(t)|^p\Big]. \end{aligned}$$

Kako je $\varepsilon \in \Big(0, -\frac{1\wedge p}{\bar{h}} \ln \beta \wedge \varepsilon_0\Big)$, sledi da je $\beta^p e^{\varepsilon\bar{h}} < 1$, tako da se na osnovu prethodne relacije može zaključiti da je

$$\sup_{0\leq t\leq T} \Big[e^{\varepsilon t} E|x(t)|^p\Big] \leq \frac{K_2 + E\|\varphi\|^p}{1 - \beta^p e^{\varepsilon\bar{h}}}.$$

Kada $T \to \infty$ sledi da je

$$\sup_{0\leq t<\infty} \Big[e^{\varepsilon t} E|x(t)|^p\Big] \leq \frac{K_2 + E\|\varphi\|^p}{1 - \beta^p e^{\varepsilon\bar{h}}},$$

što implicira

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(E|x(t)|^p) \leq -\varepsilon.$$

Sada se razmatra drugi slučaj, kada je $p > 1$. Primenom elementarne nejednakosti (1.9.54), za $\theta = \beta/(1-\beta)$, i relacije (2.2.35), sledi

$$\begin{aligned}
&e^{\varepsilon t} E|x(t)|^p \\
&\le (1-\beta)^{1-p} e^{\varepsilon t} E|x(t) - u(x(t-\delta(t)), t, r(t))|^p + \beta^{1-p} e^{\varepsilon t} E|u(x(t-\delta(t)), t, r(t))|^p \\
&\le K_2(1-\beta)^{1-p} + \beta e^{\varepsilon \delta(t)} e^{\varepsilon(t-\delta(t))} E|x(t-\delta(t))|^p.
\end{aligned}$$

Kako je $K_3 := \beta e^{\varepsilon \bar{h}} < 1$, tada za svako $T > 0$, na osnovu prethodne ocene sledi

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le t\le T} \left[e^{\varepsilon t} E|x(t)|^p\right] &\le K_2(1-\beta)^{1-p} + K_3 \sup_{0\le t\le T} \left[e^{\varepsilon(t-\delta(t))} E|x(t-\delta(t))|^p\right] \\
&\le K_2(1-\beta)^{1-p} + K_3 E\|\varphi\|^p + K_3 \sup_{0\le t\le T} \left[e^{\varepsilon t} E|x(t)|^p\right].
\end{aligned}$$

Na taj način se može zaključiti da je

$$\sup_{0\le t\le T} \left[e^{\varepsilon t} E|x(t)|^p\right] \le \frac{K_2(1-\beta)^{1-p} + K_3 E\|\varphi\|^p}{1-K_3}.$$

Kada $T \to \infty$, sledi da je

$$\sup_{0\le t<\infty} \left[e^{\varepsilon t} E|x(t)|^p\right] \le \frac{K_2(1-\beta)^{1-p} + K_3 E\|\varphi\|^p}{1-K_3},$$

odnosno

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(E|x(t)|^p) \le -\varepsilon,$$

čime je dokazano tvrđenje (2.2.33).

Primenom postupka, analognog onom kojim je određena ocena (2.2.33), na osnovu (2.2.32) sledi da je, za $0 < p \le 1$,

$$\sup_{0\le t<\infty} \left[e^{\varepsilon t} |x(t)|^p\right] \le \frac{\xi/c + \|\varphi\|^p}{1-\beta^p e^{\varepsilon \bar{h}}} \quad s.i,$$

dok je za $p > 1$,

$$\sup_{0\le t<\infty} \left[e^{\varepsilon t} |x(t)|^p\right] \le \frac{\xi/c(1-\beta)^{1-p} + K_3\|\varphi\|^p}{1-K_3} \quad s.i.$$

U oba slučaja se dobija

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(|x(t)|) \le -\frac{\varepsilon}{p} \quad s.i,$$

čime je tvrđenje dokazano. $\diamondsuit$

Posledica 2.2 *Neka važe pretpostavke $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_3$ i $\mathcal{A}_4$, zajedno sa pretpostavkom (2.2.19). Pored toga, neka postoje pozitivne konstante $\beta_i, i = 1, 2, 3, 4$, koje zadovoljavaju uslov*

$$\beta_1 - \beta_3 - \frac{\beta_2 + \beta_4}{1 - \bar{\delta}} > 0, \tag{2.2.36}$$

tako da, za svako $x, y \in R^d$, $i \in S$ i $t \in R_+$, važi

$$2(x - u(y, t, i))^T f(x, y, t, i) \leq -\beta_1 |x|^2 + \beta_2 |y|^2, \tag{2.2.37}$$
$$|g(x, y, t, i)|^2 \leq \beta_3 |x|^2 + \beta_4 |y|^2. \tag{2.2.38}$$

Tada, za svaki početni uslov $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\delta(0), 0]; R^d)$, jedinstveno rešenje x jednačine (2.1.1) ima osobine

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(E|x(t)|^2) \leq -\varepsilon, \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log|x(t)| \leq -\frac{\varepsilon}{2} \quad s.i, \tag{2.2.39}$$

gde je $\varepsilon \in \left(0, -\frac{\ln \beta}{\bar{h}} \wedge \varepsilon_0\right)$, dok je ε_0 jedinstveno pozitivno rešenje jednačine

$$\beta_1 - \beta_3 = \varepsilon_0 + \frac{\beta_2 + \beta_4}{1 - \bar{\delta}} e^{\varepsilon_0 \bar{h}}.$$

Dokaz. Neka je $V(x, t, i) = U_1(x, t) = U_2(x, t) = |x|^2$, za $x \in R^d, i \in S$ i $t \in R_+$. Tada, imajući u vidu definiciju (1.5.30) operatora LV, za svako $x, y \in R^d, i \in S$ i $t \in R_+$, važi

$$LV(x, y, t, i) = 2(x - u(y, t, i))^T f(x, y, t, i) + |g(x, y, t, i)|^2 + \sum_{j=1}^{N} \gamma_{ij} |x - u(y, t, i)|^2.$$

Primenjujući pretpostavke (2.2.37) i (2.2.38), dobija se

$$LV(x, y, t, i) \leq -(\beta_1 - \beta_3)|x|^2 + (\beta_2 + \beta_4)|y|^2.$$

Na osnovu navedenog se može zaključiti da pretpostavka $\mathcal{A}_2$ važi za $c_1 = 0, c_2 = \beta_1 - \beta_3$ i $c_3 = \frac{\beta_2 + \beta_4}{1 - \bar{\delta}}$. Kako su sve pretpostavke Teoreme 2.4 zadovoljene za $p = 2$ i $c \leq 1$, važi tvrđenje (2.2.39). $\diamondsuit$

2.3 Euler-Maruyamina metoda

U ovom poglavlju je dokazana konvergencija u verovatnoći diskretnog i neprekidnog Euler-Maruyaminog rešenja ka tačnom rešenju, kao i skoro izvesna eksponencijalna stabilnost diskretnog Euler-Maruyaminog rešenja za neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova.

Predmet razmatranja biće autonomna verzija polazne jednačine (2.1.1), čiji je integralni oblik

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \varphi(0) + u(x(t-\delta(t)), r(t)) - u(x(-\delta(0)), r(0)) \qquad (2.3.40)\\
&\quad + \int_0^t f(x(s), x(s-\delta(s)), r(s))ds + \int_0^t g(x(s), x(s-\delta(s)), r(s))dw(s), \quad t \geq 0,
\end{aligned}
$$

sa početnim uslovima $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-\delta(0), 0]$, $r(0) = i_0 \in S$.

Pretpostavlja se da umesto hipoteza $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_4$, važe njihove autonomne verzije.

Prvo se razmatra slučaj kada je funkcija kašnjenja δ neograničena. Na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_3$ važi $t - \delta(t) \geq -\delta(0)$. Neka je $\Delta \in (0, 1)$ veličina koraka za koji važi $\Delta = \delta(0)/n_*$, za neki prirodan broj $n_* > \delta(0)$. Definiše se eksplicitno diskretno Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje $\bar{y}$ koje odgovara jednačini (2.3.40) na ekvidistantnoj particiji $k\Delta, k = -(n_*+1), -n_*, ..., -1, 0, 1, ...$ vremenskog intervala. Ovo rešenje je dobro definisano ukoliko je

$$
\delta(-\Delta) = \delta(0), \quad \bar{y}(-(n_*+1)\Delta) = \varphi(-n_*\Delta), \quad r_{-1}^{\Delta} = r_0^{\Delta} = r(0). \qquad (2.3.41)
$$

Neka je $[\cdot]$ funkcija koja realnom broju pridružuje celobrojnu vrednost tog broja. Diskretno Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje se definiše kao

$$
\bar{y}(k\Delta) = \varphi(k\Delta), \ k = -n_*, -n_*+1, ..., 0, \qquad (2.3.42)
$$

dok je za $k \in \{0, 1, 2, ...\}$

$$
\begin{aligned}
&\bar{y}((k+1)\Delta) \qquad (2.3.43)\\
&= \bar{y}(k\Delta) + u(\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta}) - u(\bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^{\Delta})\\
&\quad + f(\bar{y}(k\Delta), \bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta})\Delta + g(\bar{y}(k\Delta), \bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta})\Delta w_k,
\end{aligned}
$$

gde je $\Delta w_k = w((k+1)\Delta) - w(k\Delta)$ i $r_k^{\Delta} = r(k\Delta)$.

Za potrebe daljeg razmatranja neophodno je definisati neprekidno aproksimativno Euler-Maruyamino rešenje. U tom smislu se, za $t \geq 0$, uvode stepenasti procesi

$$
z_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{y}(k\Delta) I_{[k\Delta, (k+1)\Delta)}(t), \qquad (2.3.44)
$$

$$z_2(t) = \sum_{k=-1}^{\infty} \bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta) I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t), \tag{2.3.45}$$

$$\bar{r}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k^{\Delta} I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t). \tag{2.3.46}$$

Imajući u vidu da neutralni član u zavisi od procesa Markova neophodno je definisati linearnu kombinaciju izraza $u(\bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^{\Delta})$ i $u(\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta})$, tj.

$$\bar{u}_k(t) = u(z_2((k-1)\Delta), r_{k-1}^{\Delta}) + \frac{t-k\Delta}{\Delta}(u(z_2(k\Delta), r_k^{\Delta}) - u(z_2((k-1)\Delta), r_{k-1}^{\Delta})), \tag{2.3.47}$$

za svako $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta], k = 0, 1, 2, ...$ Način na koji je definisan proces $\bar{u}_k(t)$ se suštinski razlikuje od onog koji se primenjuje u radu [65] i uslovljen je samom prirodom jednačine koja se razmatra.

Neka je

$$z_3(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k(t) I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t). \tag{2.3.48}$$

Neprekidno Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje se definiše tako da je $y(t) = \varphi(t), t \in [-\delta(0), 0]$, dok je, za $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \varphi(0) + z_3(t) - u(\bar{y}(-\Delta - [\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta), r_{-1}^{\Delta}) \\ &\quad + \int_0^t f(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))ds + \int_0^t g(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))dw(s). \end{aligned} \tag{2.3.49}$$

Kada je $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta]$, jednačina (2.3.49) se može predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} y(t) &= \bar{y}(k\Delta) + \bar{u}_k(t) - u(\bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^{\Delta}) \\ &\quad + \int_{k\Delta}^t f(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))ds + \int_{k\Delta}^t g(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))dw(s). \end{aligned} \tag{2.3.50}$$

Na osnovu (2.3.44)-(2.3.47) i (2.3.50) može se zaključiti da je $y(k\Delta) = \bar{y}(k\Delta)$, tj. diskretno i neprekidno Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje se poklapaju u tačkama particije.

Pored uslova $\mathcal{A}_1$–$\mathcal{A}_4$, navedenih u Poglavlju 2.1, neophodno je uvesti dodatne pretpostavke bitne za dokazivanje glavnog rezultata, tj. bliskosti tačnog rešenja jednačine (2.3.40) i Euler-Maruyaminog rešenja (2.3.49).

$\mathcal{A}_5$: Postoji pozitivna konstanta C_φ tako da važi

$$\sup_{t,s\in[-\delta(0),0],|s-t|\leq\Delta} E|\varphi(s) - \varphi(t)|^2 \leq C_\varphi \Delta.$$

$\mathcal{A}_6$: Postoji konstanta $\eta > 0$ tako da se

$$|\delta(t) - \delta(s)| \leq \eta|t-s|, \quad t, s \geq 0.$$

Kao u Teoremi 2.2, k_0 je dovoljno veliki prirodan broj za koji važi

$$\max_{\theta\in[-\delta(0),0]} |\varphi(\theta)| \leq k_0.$$

Takođe, definiše se niz vremena zaustavljanja

$$\rho_h = \inf\{t \geq 0 : |y(t)| \geq h\}, \quad h \geq k_0, \tag{2.3.51}$$

gde je $\inf\emptyset = +\infty$.

Da bi se dokazala konvergencija u verovatnoći Euler-Maruyaminog rešenja ka tačnom rešenju potrebno je najpre navesti dve leme i dokazati dve propozicije. U tom smislu se uvodi još jedna pretpostavka.

$\mathcal{A}'_3$: Funkcija δ je diferencijabilna, pri čemu je $|\delta'(t)| \leq \eta$, $t \geq 0$, gde je $\eta \in (0,1)$.

Ova pretpostavka je uvedena da bi omogućila $t - \delta(t) \geq -\delta(0) = -n^*\Delta$. Jasno je da iz prepostavke $\mathcal{A}'_3$ sledi $\mathcal{A}_6$, za $\eta \in (0,1)$.

Sledeće dve leme su navedene bez dokaza, a dokazi se mogu naći u [65] i [59], respektivno.

Lema 2.1 *Pod pretpostavkom $\mathcal{A}'_3$, za diskretno Euler-Maruyamino rešenje (2.3.43) važi*

$$\begin{aligned}|\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)-\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\ \leq (3+[\eta])^2 \sup_{-n_*\leq j, j\Delta\leq T\wedge\rho_h} |\bar{y}(j\Delta) - \bar{y}((j-1)\Delta)|^2\end{aligned} \tag{2.3.52}$$

gde je ρ_h definisano sa (2.3.51).

Pored toga, ako se za svako $t \in [0, T\wedge\rho_h]$ definiše $k = [t/\Delta]$, tako da je $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta \wedge T \wedge \rho_h)$ i ako $k_t \in \{-n_*, -n_*+1, ...\}$ zadovoljava uslov $t - \delta(t) \in [k_t\Delta, (k_t+1)\Delta \wedge T \wedge \rho_h)$, tada je

$$|k_t - (k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta])| \leq 5 + [2\eta]. \tag{2.3.53}$$

Lema 2.2 *Postoji konstanta $C > 0$ tako da, za svako $k \in \{0,1,2,...\}$ i svako $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta]$, važi*

$$E\Big[I_{\{r(t)\neq r_k^\Delta\}}\Big] = C(\Delta + o(\Delta)). \tag{2.3.54}$$

Propozicija 2.1 *Neka su zadovoljene pretpostavke $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}'_3$, $\mathcal{A}_4$ i $\mathcal{A}_5$. Neka je $T > 0$ proizvoljan broj i pretpostavlja se da je $f(0,0,i) = g(0,0,i) = 0$, za svako $i \in S$. Ako je $(3+[\eta])\beta < 1$, tada*

$$\sup_{t\in[-\delta(0),T]} E|z_1(t\wedge\rho_h) - z_1(t\wedge\rho_h - \Delta)|^2 \leq A(h)\Delta + o(\Delta), \tag{2.3.55}$$

gde je $A(h)$ konstanta koja zavisi od h, ali ne zavisi od Δ.

Dokaz. Neka je $t \in [0, T \wedge \rho_h]$ proizvoljno i $k = [t/\Delta]$. Tada, $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta \wedge T \wedge \rho_h)$ i na osnovu definicije (2.3.44), sledi

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[-\delta(0),T]} & E|z_1(t\wedge\rho_h) - z_1(t\wedge\rho_h - \Delta)|^2 \\ &= \sup_{-n_*\le k, k\Delta\le T} E|\bar{y}(k\Delta\wedge\rho_h) - \bar{y}((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2 \\ &\le \sup_{-n_*\le k\le 0} E|\bar{y}(k\Delta) - \bar{y}((k-1)\Delta)|^2 \\ &\quad + \sup_{1\le k, k\Delta\le T} E|\bar{y}(k\Delta\wedge\rho_h) - \bar{y}((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2. \quad (2.3.56)\end{aligned}$$

Imajući u vidu da je $\bar{y}(-(n_*+1)\Delta) = \varphi(-n_*\Delta)$, primenom prepostavke $\mathcal{A}_5$ se dolazi do ocene

$$\sup_{-n_*\le k\le 0} E|\bar{y}(k\Delta)-\bar{y}((k-1)\Delta)|^2 = \sup_{-n_*+1\le k\le 0} E|\varphi(k\Delta)-\varphi((k-1)\Delta)|^2 \le C_\varphi\Delta \quad (2.3.57)$$

Kada je $k = 1, 2, ...$, iz (2.3.43) sledi

$$\begin{aligned}&\bar{y}(k\Delta)-\bar{y}((k-1)\Delta) \\ &= u(\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1}) - u(\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-2}) \\ &\quad + f(\bar{y}((k-1)\Delta), \bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1})\Delta \\ &\quad + g(\bar{y}((k-1)\Delta), \bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1})\Delta w_{k-1}. \quad (2.3.58)\end{aligned}$$

Potrebno je uočiti da je

$$\begin{aligned}&u(\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1}) - u(\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-2}) \\ &= u(\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1}) - u(\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1}) \\ &\quad + \Big(u(\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1}) - u(\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-2})\Big) \\ &\quad \times I_{\{r^\Delta_{k-2}\ne r^\Delta_{k-1}\}}. \quad (2.3.59)\end{aligned}$$

Tada, na osnovu (2.1.7), sledi

$$\begin{aligned}&|u(\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1}) - u(\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-2})| \\ &\qquad \le \beta|\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta) - \bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)| \\ &\qquad\quad + 2\beta|\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)| I_{\{r^\Delta_{k-2}\ne r^\Delta_{k-1}\}}. \quad (2.3.60)\end{aligned}$$

Imajući u vidu relaciju (2.3.60) i primenjujući elementarnu nejednakost (1.9.55) dva puta, kao i pretpostavku $\mathcal{A}_1$ na (2.3.58), sledi

$$\begin{aligned}&|\bar{y}(k\Delta) - \bar{y}((k-1)\Delta)|^2 \\ &\qquad \le \frac{\beta^2}{\varepsilon^2}|\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta) - \bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\Big(2\beta|\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|\Big)^2 I_{\{r^\Delta_{k-2}\neq r^\Delta_{k-1}\}}\\
&+\frac{2}{1-\varepsilon}|f(\bar{y}((k-1)\Delta),\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta,r^\Delta_{k-1}))|^2\Delta^2\\
&+\frac{2}{1-\varepsilon}|g(\bar{y}((k-1)\Delta),\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta),r^\Delta_{k-1})\Delta w_{k-1}|^2\\
\le{}&\frac{\beta^2}{\varepsilon^2}|\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)-\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\
&+\frac{4\beta^2h^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}I_{\{r^\Delta_{k-2}\neq r^\Delta_{k-1}\}}+D_h(\Delta^2+|w(k\Delta)-w((k-1)\Delta)|^2),
\end{aligned}
$$

gde je $D_h=\frac{4K_hh^2}{1-\varepsilon}$. Odatle je

$$
\begin{aligned}
&\sup_{1\le k,k\Delta\le T}E|\bar{y}(k\Delta\wedge\rho_h)-\bar{y}((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2\\
&\le\frac{\beta^2}{\varepsilon^2}\sup_{1\le k,k\Delta\le T}E|\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h)\\
&\quad-\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h)|^2+\frac{4\beta^2h^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\sup_{1\le k,k\Delta\le T}E[I_{\{r^\Delta_{k-2}\neq r^\Delta_{k-1}\}}]\\
&\quad+D_h(\Delta^2+\sup_{1\le k,k\Delta\le T}E|w(k\Delta)-w((k-1)\Delta)|^2).
\end{aligned}
\tag{2.3.61}
$$

Na osnovu (2.3.52), prvi sabirak izraza (2.3.61) se može oceniti sa

$$
\begin{aligned}
&\frac{\beta^2}{\varepsilon^2}\sup_{1\le k,k\Delta\le T}E|\bar{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h)-\bar{y}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h)|^2\\
&\qquad\le\frac{(3+[\eta])^2\beta^2}{\varepsilon^2}\sup_{-n_*\le k,k\Delta\le T}E|\bar{y}(k\Delta\wedge\rho_h)-\bar{y}((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2,
\end{aligned}
\tag{2.3.62}
$$

dok je

$$
\begin{aligned}
&\sup_{1\le k,k\Delta\le T}E|w(k\Delta)-w((k-1)\Delta))|^2\\
&\quad=\sup_{1\le k,k\Delta\le T}\sum_{j=1}^m E|w_j(k\Delta)-w_j((k-1)\Delta))|^2=m\Delta.
\end{aligned}
\tag{2.3.63}
$$

Zamenom (2.3.62) i (2.3.63) u (2.3.61) i primenjući Lemu 2.2 dobija se

$$
\begin{aligned}
&\sup_{1\le k,k\Delta\le T}E|\bar{y}(k\Delta\wedge\rho_h)-\bar{y}((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2\\
&\quad\le\frac{(3+[\eta])^2\beta^2}{\varepsilon^2}\sup_{-n_*\le k,k\Delta\le T}E|\bar{y}(k\Delta\wedge\rho_h)-\bar{y}((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2\\
&\qquad+\frac{4\beta^2h^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}C(\Delta+o(\Delta))+D_h\,\Delta^2+D_hm\Delta.
\end{aligned}
\tag{2.3.64}
$$

Tada (2.3.57) i (2.3.64), zajedno sa (2.3.56), daju

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[-\delta(0),T]} E|z_1(t\wedge\rho_h)-z_1(t\wedge\rho_h-\Delta)|^2\\
&\quad< C_\varphi\Delta+\frac{(3+[\eta])^2\beta^2}{\varepsilon^2}\sup_{-n_*\le k,k\Delta\le T} E|\bar y(k\Delta\wedge\rho_h)-\bar y((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2\\
&\quad\quad+\frac{4\beta^2h^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}C(\Delta+o(\Delta))+D_h(1+m)\Delta. \qquad (2.3.65)
\end{aligned}$$

Na osnovu pretpostavke $a=(3+[\eta])\beta<1$, može se izabrati $\varepsilon=\bar\varepsilon\in(a,1)$ tako da je $\frac{(3+[\eta])^2\beta^2}{\bar\varepsilon^2}<1$. Tada ocena (2.3.65) postaje

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[-\delta(0),T]} E|z_1(t\wedge\rho_h)-z_1(t\wedge\rho_h-\Delta)|^2\\
&\quad<\frac{\big(C_\varphi+D_h(1+m)\big)\bar\varepsilon^2}{\bar\varepsilon^2-a^2}\Delta+\frac{4\beta^2h^2\bar\varepsilon}{(\bar\varepsilon^2-a^2)(1-\bar\varepsilon)}C(\Delta+o(\Delta))\\
&\quad\le A(h)\Delta+o(\Delta), \qquad (2.3.66)
\end{aligned}$$

gde je $A(h)=\frac{1}{\bar\varepsilon^2-a^2}\Big((C_\varphi+D_h(1+m))\bar\varepsilon^2+\frac{4\beta^2h^2\bar\varepsilon C}{1-\bar\varepsilon}\Big)$, čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Propozicija 2.2 *Neka su ispunjeni uslovi Propozicije 2.1. Tada je*

$$\sup_{t\in[0,T]} E|u(y(t\wedge\rho_h-\delta(t\wedge\rho_h)),r(t\wedge\rho_h))-z_3(t\wedge\rho_h)|^2\le D(h)\Delta+o(\Delta),$$

gde je $D(h)$ konstanta koja zavisi od h, ali ne zavisi od Δ i ρ_h je vreme zaustavljanja definisano sa (2.3.51).

Dokaz. Neka su, za fiksirano $t\in[0,T\wedge\rho_h]$ i $k=[t/\Delta]$, tako da je $t\in[k\Delta,(k+1)\Delta\wedge T\wedge\rho_h)$, indeksi $k_t\in\{-n_*,-n_*+1,...\}$ takvi da važi $t-\delta(t)\in[k_t\Delta,(k_t+1)\Delta\wedge T\wedge\rho_h)$.

Na osnovu definicije (2.3.48) stepenastog procesa z_3, za $t\in[k\Delta,(k+1)\Delta)$, važi

$$\begin{aligned}
&|u(y(t-\delta(t)),r(t))-z_3(t)|^2\\
&\quad=|u(y(t-\delta(t)),r(t))-u(z_2((k-1)\Delta),r^\Delta_{k-1})\\
&\quad\quad-\frac{t-k\Delta}{\Delta}(u(z_2(k\Delta),r^\Delta_k)-u(z_2((k-1)\Delta),r^\Delta_{k-1}))|^2\\
&\quad\le 2|u(y(t-\delta(t)),r(t))-u(z_2((k-1)\Delta),r^\Delta_{k-1})|^2\\
&\quad\quad+2|u(z_2(k\Delta),r^\Delta_k)-u(z_2((k-1)\Delta),r^\Delta_{k-1})|^2\\
&\quad\le 6|u(y(t-\delta(t)),r(t))-u(z_2((k-1)\Delta),r(t))|^2\\
&\quad\quad+6|u(z_2((k-1)\Delta),r(t))-u(z_2((k-1)\Delta),r^\Delta_k)|^2\\
&\quad\quad+6|u(z_2((k-1)\Delta),r^\Delta_k)-u(z_2((k-1)\Delta),r^\Delta_{k-1})|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+4|u(z_2(k\Delta), r_k^\Delta) - u(z_2((k-1)\Delta), r_k^\Delta)|^2 \\
&+4|u(z_2((k-1)\Delta), r_k^\Delta) - u(z_2((k-1)\Delta), r_{k-1}^\Delta)|^2 \\
\leq\ & 6\beta^2|y(t-\delta(t)) - z_2((k-1)\Delta)|^2 + 4\beta^2h^2(3I_{\{r(t)\neq r_k^\Delta\}} + 5I_{\{r_k^\Delta \neq r_{k-1}^\Delta\}}) \\
&+4\beta^2|z_2(k\Delta) - z_2((k-1)\Delta|^2.
\end{aligned}
$$

Tada je primenom Leme 2.2 i Propozicije 2.1

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} E|u(y(t\wedge\rho_h - \delta(t\wedge\rho_h)), r(t\wedge\rho_h)) - z_3(t\wedge\rho_h)|^2 \\
&\quad \leq 12\beta^2 \sup_{t\in[0,T]} E|y(t\wedge\rho_h - \delta(t\wedge\rho_h)) - \bar{y}(k_t\Delta\wedge\rho_h)|^2 \\
&\quad\quad +12\beta^2 \sup_{t\in[0,T]} E|\bar{y}(k_t\Delta\wedge\rho_h) - z_2((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2 \\
&\quad\quad +32\beta^2Ch^2\Delta + 4\beta^2A(h)\Delta + o(\Delta). \qquad (2.3.67)
\end{aligned}
$$

Prilikom ocenjivanja izraza $\sup_{t\in[0,T]} E|y(t\wedge\rho_h - \delta(t\wedge\rho_h)) - \bar{y}(k_t\Delta\wedge\rho_h)|^2$ se razmatraju sledeća dva slučaja.

Slučaj 1: Ako je $k_t \leq -1$, tada je, na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_5$

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T],k_t\leq -1} E|y(t\wedge\rho_h - \delta(t\wedge\rho_h)) - \bar{y}(k_t\Delta\wedge\rho_h)|^2 \\
&\quad = \sup_{t\in[0,T],k_t\leq -1} E|\varphi(t-\delta(t)) - \varphi(k_t\Delta)|^2 \leq C_\varphi\Delta. \qquad (2.3.68)
\end{aligned}
$$

Slučaj 2: Ako je $t \in [0,\rho_h]$ i $k_t \geq 0$, tada se, imajući u vidu (2.1.7) i (2.3.50), dobija

$$
\begin{aligned}
&|y(t-\delta(t)) - \bar{y}(k_t\Delta)|^2 \\
&\quad \leq 3|\bar{u}_{k_t}(t-\delta(t)) - u(\bar{y}((k_t-1)\Delta - [\delta((k_t-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k_t-1}^\Delta)|^2 \\
&\quad\quad +3\Delta^2|f(z_1(k_t\Delta), z_2(k_t\Delta), r_{k_t}^\Delta)|^2 + 3|g(z_1(k_t\Delta), z_2(k_t\Delta), r_{k_t}^\Delta)|^2|w(t-\delta(t)) - w(k_t\Delta)|^2 \\
&\quad \leq 3\beta^2\left|\frac{t-\delta(t)-k_t\Delta}{\Delta}\Big(u(z_2(k_t\Delta), r_{k_t}^\Delta) - u(z_2((k_t-1)\Delta), r_{k_t-1}^\Delta)\Big)\right|^2 \\
&\quad\quad +Q_h(\Delta^2 + |w(t-\delta(t)) - w(k_t\Delta)|^2) \\
&\quad \leq 6\beta^2|z_2(k_t\Delta) - z_2((k_t-1)\Delta)|^2 + 12\beta^2h^2 I_{\{r_{k_t}^\Delta \neq r_{k_t-1}^\Delta\}} \\
&\quad\quad +Q_h(\Delta^2 + |w(t-\delta(t)) - w(k_t\Delta)|^2), \qquad (2.3.69)
\end{aligned}
$$

gde je $Q_h = 6K_hh^2$. Dalje, na osnovu ocene (2.3.62), Propozicije 2.1 i Leme 2.2, iz (2.3.69) sledi

$$
\sup_{t\in[0,T],k_t\geq 0} E|y(t\wedge\rho_h - \delta(t\wedge\rho_h)) - \bar{y}(k_t\Delta\wedge\rho_h)|^2
$$

$$\leq 6\beta^2 \sup_{t\in[0,T],k_t\geq 0} E|\bar{y}(k_t\Delta - [\delta(k_t\Delta)/\Delta]\Delta \wedge \rho_h) - \bar{y}((k_t-1)\Delta - [\delta((k_t-1)\Delta)/\Delta]\Delta \wedge \rho_h)|^2$$
$$+12\beta^2 h^2 C\Delta + o(\Delta) + Q_h\Big(\Delta^2 + \sup_{t\in[0,T]} E|w(t-\delta(t)) - w(k_t\Delta)|^2\Big)$$
$$\leq 6\beta^2((3+[\eta])^2 A(h) + 2Ch^2)\Delta + o(\Delta) + Q_h(\Delta^2 + m\Delta). \tag{2.3.70}$$

Imajući u vidu ocene (2.3.68) i (2.3.70), dobija se

$$\sup_{t\in[0,T]} E|y(t\wedge\rho_h - \delta(t\wedge\rho_h)) - \bar{y}(k_t\Delta\wedge\rho_h)|^2 \leq M(h)\Delta + o(\Delta), \tag{2.3.71}$$

gde je $M(h) = C_\varphi \vee \Big(6\beta^2((3+[\eta])^2 A(h) + 2Ch^2) + Q_h(1+m)\Big)$.

Prilikom ocenjivanja izraza $\sup_{t\in[0,T]} E|\bar{y}(k_t\Delta\wedge\rho_h) - z_2((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2$ koji figuriše u (2.3.67), primenjuje se ocena (2.3.53) i Propozicija 2.1. Tada je

$$\sup_{t\in[0,T]} E|\bar{y}(k_t\Delta\wedge\rho_h) - z_2((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2 \leq (5+[2\eta])^2 A(h)\Delta + o(\Delta). \tag{2.3.72}$$

Konačno, (2.3.71) i (2.3.72), zajedno sa ocenom (2.3.67), impliciraju

$$\sup_{t\in[0,T]} E|u(y(t-\delta(t)\wedge\rho_h), r(t\wedge\rho_h)) - z_3(t\wedge\rho_h)|^2 \leq D(h)\Delta + o(\Delta), \tag{2.3.73}$$

gde je $D(h) = 12\beta^2 M(h) + 4\beta^2(3(5+[2\eta])^2+1)A(h) + 32C\beta^2h^2$.$\diamondsuit$

Analogno kao u Posledici 2.1, biće dokazano da Euler-Maruyamino rešenje, dato sa (2.3.49), ostaje u kompaktu sa velikom verovatnoćom. Uvodi se sledeća dodatna hipoteza.

$\mathcal{A}_7$: Pretpostavlja se da za svaki ceo broj $h \geq 1$ postoji konstanta $G_h > 0$ takva da, za svako $x, y \in R^d$ za koje je $|x| \vee |y| \leq h$ i za svako $i \in S$, važi

$$|V(x,i) - V(y,i)| \vee |V_x(x,i) - V_x(y,i)| \vee |V_{xx}(x,i) - V_{xx}(y,i)| \leq G_h|x-y|.$$

Teorema 2.5 *Neka su ispunjene pretpostavke $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}'_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_7$ i neka važi $\beta(3+[\eta]) < 1$. Za proizvoljno $\varepsilon \in (0,1)$ i $T > 0$ postoji dovoljno veliki broj $h^* = h^*(\varepsilon, T)$ tako da je*

$$P\{\rho_h \leq T\} \leq \varepsilon, \quad h \geq h^*,$$

gde je $\{\rho_h, h \geq k_0\}$ niz vremena zaustavljanja definisanih sa (2.3.51).

Dokaz. Za $h > 0$, definiše se niz vremena zaustavljanja

$$\nu_h = \inf\{t \geq 0 : V(y(t) - z_3(t), r(t)) \geq h\}.$$

Imajući u vidu (2.3.49), primenom Itôve formule za svako $t \geq 0$, dobija se

$$\begin{aligned}
&dV(y(t)-z_3(t),r(t))\\
&\quad= V_x(y(t)-z_3(t),r(t))f(z_1(t),z_2(t),\bar{r}(t))dt\\
&\qquad+V_x(y(t)-z_3(t),r(t))g(z_1(t),z_2(t),\bar{r}(t))dw(t)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\text{trace}[g^T(z_1(t),z_2(t),\bar{r}(t))V_{xx}(y(t)-z_3(t),r(t))g(z_1(t),z_2(t),\bar{r}(t))]dt\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{N}\gamma_{r(t)j}V(y(t)-z_3(t),j)dt\\
&\quad=\Big(LV(y(t),y(t-\delta(t)),\bar{r}(t))+F(y(t)-z_3(t),y(t),y(t-\delta(t)),z_1(t),z_2(t),r(t),\bar{r}(t))\Big)dt\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{N}\Big(\gamma_{r(t)j}V(y(t)-z_3(t),j)-\gamma_{\bar{r}(t)j}V(y(t)-u(y(t-\delta(t))),j)\Big)dt\\
&\qquad+V_x(y(t)-z_3(t))g(z_1(t),z_2(t),\bar{r}(t))dw(t),
\end{aligned}\tag{2.3.74}$$

pri čemu je funkcija $F: R^d \times R^d \times R^d \times R^d \times R^d \times S \times S \to R^d$ određena sa

$$\begin{aligned}
&F(\bar{a},y_1,y_2,z_1,z_2,i,\bar{i})\\
&\quad=[V_x(\bar{a},i)-V_x(y_1-u(y_2,i),i)]f(z_1,z_2,\bar{i})\\
&\qquad+[V_x(y_1-u(y_2,i),i)-V_x(y_1-u(y_2,i),\bar{i})]f(z_1,z_2,\bar{i})\\
&\qquad+[V_x(y_1-u(y_2,i),\bar{i})-V_x(y_1-u(y_2,\bar{i}),\bar{i})]f(z_1,z_2,\bar{i})\\
&\qquad+V_x(y_1-u(y_2,\bar{i}),\bar{i})[f(z_1,z_2,\bar{i})-f(y_1,y_2,\bar{i})]\\
&\qquad+\frac{1}{2}\text{trace}\Big([g^T(z_1,z_2,\bar{i})-g^T(y_1,y_2,\bar{i})]V_{xx}(\bar{a},i)g(z_1,z_2,\bar{i})\Big)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\text{trace}\Big(g^T(y_1,y_2,\bar{i})[V_{xx}(\bar{a},i)-V_{xx}(\bar{a},\bar{i})]g(z_1,z_2,\bar{i})\Big)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\text{trace}\Big(g^T(y_1,y_2,\bar{i})[V_{xx}(\bar{a},\bar{i})-V_{xx}(y_1-u(y_2,i),\bar{i})]g(z_1,z_2,\bar{i}))\\
&\qquad+\frac{1}{2}\text{trace}\Big(g^T(y_1,y_2,\bar{i})[V_{xx}(y_1-u(y_2,i),\bar{i})-V_{xx}(y_1-u(y_2,\bar{i}),\bar{i})]g(z_1,z_2,\bar{i})\Big)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\text{trace}\Big([g^T(y_1,y_2,\bar{i})]V_{xx}(y_1-u(y_2,\bar{i}),\bar{i})[g(z_1,z_2,\bar{i})-g(y_1,y_2,\bar{i})]\Big).
\end{aligned}\tag{2.3.75}$$

Neka je h dovoljno veliki broj. Ako je $|y_1|\vee|y_2|\vee|z_1|\vee|z_2| \leq h$ za $y_l, z_l \in R^d$, $l = 1, 2$, tada na osnovu pretpostavke (2.1.8) i definicije (2.3.48) sledi da je $|\bar{a}| \leq (1+3\beta)h$ i $y_1 - u(y_2, i) \leq (1 + \beta)h$. Dakle, na osnovu $\mathcal{A}_7$ sledi

$$\begin{aligned}
&|V_x(y(t)-z_3(t),r(t))-V_x(y(t)-u(y(t-\delta(t)),r(t)),r(t))|\\
&\qquad\leq G_{(1+3\beta)h}|u(y(t-\delta(t)),r(t))-z_3(t)|.
\end{aligned}\tag{2.3.76}$$

Ako se uvede oznaka $S_h^x = \sup\{V_x(x,i) : |x| \leq h, i \in S\}$, tada je

$$|V_x(y(t)-u(y(t-\delta(t)),r(t)),r(t))-V_x(y(t)-u(y(t-\delta(t)),r(t)),\bar{r}(t))|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2S^x_{(1+\beta)h} I_{\{r(t)\neq\bar r(t)\}},\\
&V_x(y(t)-u(y(t-\delta(t)),\bar r(t)),\bar r(t)) \leq S^x_{(1+\beta)h}. \qquad (2.3.77)
\end{aligned}
$$

Takođe se može zaključiti da je

$$
\begin{aligned}
&|V_x(y(t)-u(y(t-\delta(t)),r(t)),\bar r(t)) - V_x(y(t)-u(y(t-\delta(t)),\bar r(t)),\bar r(t))|\\
&\quad \leq G_{(1+\beta)h}|u(y(t-\delta(t)),r(t)) - u(y(t-\delta(t)),\bar r(t))|\\
&\quad \leq 2\beta G_{(1+\beta)h} h I_{\{r(t)\neq\bar r(t)\}}. \qquad (2.3.78)
\end{aligned}
$$

Analogno se ocenjuju i ostali sabirci na desnoj strani jednakosti (2.3.75) koji sadrže V_{xx}, koristeći $S^{xx}_h = \sup\{V_{xx}(x,i) : |x| \leq h, i \in S\}$.

Tada na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_1$ sledi

$$
\begin{aligned}
&F(y(t)-z_3(t), y(t), y(t-\delta(t)), z_1(t), z_2(t), r(t), \bar r(t))\\
&\quad \leq B^{(1)}_h |u(y(t-\delta(t)),r(t)) - z_3(t)| + B^{(2)}_h I_{\{r(t)\neq\bar r(t)\}}\\
&\quad\ \ + B^{(3)}_h \Big(|y(t)-z_1(t)| + |y(t-\delta(t)) - z_2(t)|\Big),
\end{aligned}
$$

gde su B^l_h, $l=1,2,3$ pozitivne generičke konstante koje zavise od h, ali ne od Δ. Zbog toga, i koristeći $V_h = \sup\{V(x,i) : |x| \leq h, i \in S\}$, kao i $\mathcal{A}_7$, za $t \in [0, \rho_h \wedge \nu_h]$, izraz (2.3.74) se može oceniti na sledeći način

$$
\begin{aligned}
&dV(y(t)-z_3(t), r(t))\\
&\leq \Big(LV(y(t), y(t-\delta(t)), \bar r(t)) + B^{(1)}_h |u(y(t-\delta(t)), r(t)) - z_3(t)|\Big)dt\\
&\quad + B^{(2)}_h I_{\{r(t)\neq\bar r(t)\}}dt + B^{(3)}_h \Big(|y(t)-z_1(t)| + |y(t-\delta(t)) - z_2(t)|\Big)dt\\
&\quad + V_x(y(t)-u(z_3(t)), \bar r(t)) g(z_1(t), z_2(t)) dw(t).
\end{aligned}
$$

Dalje, za $t \in [0,T]$ važi da je

$$
\begin{aligned}
&EV(y(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h) - z_3(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h), r(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h))\\
&\leq V(\varphi(0)-z_3(0), r(0)) + E\int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h} LV(y(s), y(s-\delta(s)), \bar r(s))ds\\
&\quad + B^{(1)}_h E\int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h} |u(y(s-\delta(s)), r(s)) - z_3(s)|ds + B^{(2)}_h \int_0^t EI_{\{r(s)\neq\bar r(s)\}}ds\\
&\quad + B^{(3)}_h E\int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h} \Big(|y(s)-z_1(s)| + |y(s-\delta(s)) - z_2(s)|\Big)ds. \qquad (2.3.79)
\end{aligned}
$$

Primenom Hölderove nejednakosti, a zatim i Propozicije 2.2, sledi

$$
\begin{aligned}
&B^{(1)}_h E\int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h} |u(y(s-\delta(s)), r(s)) - z_3(s)|ds\\
&= B^{(1)}_h \int_0^t E|u(y(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h - \delta(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)), r(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)) - z_3(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)|ds\\
&\leq B^{(1)}_h \int_0^t \Big(E|u(y(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h - \delta(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)), r(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)) - z_3(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}ds\\
&\leq B^{(1)}_h T(D(h)\Delta + o(\Delta))^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.3.80)
\end{aligned}
$$

dok se na osnovu Leme 2.2 dobija

$$B_h^{(2)} \int_0^t EI_{\{r(s)\neq \bar{r}(s)\}} ds \le B_h^{(2)} TC(\Delta + o(\Delta)). \tag{2.3.81}$$

Pored toga, važi da je

$$\begin{aligned}
B_h^{(3)} E & \int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h} (|y(s)-z_1(s)| + |y(s-\delta(s))-z_2(s)|) ds \\
&\le B_h^{(3)} \int_0^t \Big(E|y(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)-z_1(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} ds \\
&+ B_h^{(3)} \int_0^t (E|y(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h-\delta(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h))-z_2(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)|^2)^{\frac{1}{2}} ds. \qquad (2.3.82)
\end{aligned}$$

Ako se sa $\tilde{k}_s$ označi broj za koji je $s \in [\tilde{k}_s\Delta, (\tilde{k}_s+1)\Delta \wedge T \wedge \rho_h \wedge \nu_h)$ tada se primenom procedure kojom je određena ocena (2.3.71), dolazi do ocene

$$\begin{aligned}
& E|y(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)-z_1(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)|^2 \\
&\quad \le \sup_{t\in[0,T],\tilde{k}_t\ge 0} E|y(t\wedge\rho_h)-\bar{y}(k_t\Delta\wedge\rho_h)|^2 \le M(h)\Delta + o(\Delta). \qquad (2.3.83)
\end{aligned}$$

Za ocenu drugog sabirka na desnoj strani nejednakosti (2.3.82), prateći oznake iz dokaza Propozicije 2.2, neka je $k_s \in \{-n^*, -n^*+1, ..., -1, 0, 1, ...\}$ broj takav da je $s-\delta(s) \in [k_s\Delta, (k_s+1)\Delta \wedge T \wedge \rho_h \wedge \nu_h)$. Tada je, za svako $u \in [0, s\wedge\rho_h\wedge\nu_h]$,

$$\begin{aligned}
& E|y(u-\delta(u))-z_2(u)|^2 \\
&\quad \le 2E|y(u-\delta(u)) - \bar{y}(k_u\Delta)|^2 + 2E|\bar{y}(k_u\Delta) - \bar{y}(\tilde{k}_u\Delta - [\delta(\tilde{k}_u\Delta)/\Delta]\Delta)|^2.
\end{aligned}$$

Ako je $\tilde{k}_u\Delta - [\delta(\tilde{k}_u\Delta)/\Delta]\Delta \le k_u\Delta \le u-\delta(u)$, tada, na osnovu $\mathcal{A}_3'$ sledi

$$\begin{aligned}
& k_u\Delta - \tilde{k}_u\Delta + [\delta(\tilde{k}_u\Delta)/\Delta]\Delta \\
&\quad \le u-\delta(u) - \tilde{k}_u\Delta + \delta(\tilde{k}_u\Delta) \le \Delta + \eta|u-\tilde{k}_u\Delta| \le (2+[\eta])\Delta,
\end{aligned}$$

dok, za $k_u\Delta \le u-\delta(u) \le \tilde{k}_u\Delta - [\delta(\tilde{k}_u\Delta)/\Delta]\Delta$, važi

$$\begin{aligned}
|k_u\Delta - \tilde{k}_u\Delta + [\delta(\tilde{k}_u\Delta)/\Delta]\Delta| &= \tilde{k}_u\Delta - [\delta(\tilde{k}_u\Delta)/\Delta]\Delta - k_u\Delta \\
&\le \tilde{k}_u\Delta - \delta(\tilde{k}_u\Delta) + \Delta - k_u\Delta \\
&\le \tilde{k}_u\Delta - \delta(\tilde{k}_u\Delta) + \Delta - (u-\delta(u)) + \Delta \\
&= \Delta - (u-\tilde{k}_u\Delta) + \delta(u) - \delta(\tilde{k}_u\Delta) \le \Delta + \eta|u-\tilde{k}_u| \\
&\le (2+[\eta])\Delta.
\end{aligned}$$

Na taj način se zaključuje da je

$$|k_u - \tilde{k}_u + [\delta(\tilde{k}_u\Delta)/\Delta]| \le 2+[\eta].$$

Primenjujući prethodnu ocenu, (2.3.71) i Propoziciju 2.1, dobija se

$$\begin{aligned}
&E|y(u-\delta(u))-z_2(u)|^2\\
&\quad\le 2E|y(u-\delta(u))-\bar{y}(k_u\Delta)|^2\\
&\qquad+2(2+[\eta])^2\sup_{t\in[-\delta(0),T]}E|z_1(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h)-z_1(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h-\Delta)|^2\\
&\quad\le \alpha(h)\Delta+o(\Delta),
\end{aligned}\tag{2.3.84}$$

gde je $\alpha(h)=2(M(h)+(2+[\eta])^2A(h))$.

Zamenom (2.3.83) i (2.3.84) u (2.3.82), a zatim (2.3.80)-(2.3.82) u (2.3.79), sledi

$$\begin{aligned}
&EV(y(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h)-z_3(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h),r(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h))\\
&\quad\le V(\varphi(0)-z_3(0),r(0))+E\int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h}LV(y(s),y(s-\delta(s)),\bar{r}(s))ds\\
&\qquad+B_h^{(1)}T(D(h)\Delta+o(\Delta))^{\frac{1}{2}}+B_h^{(2)}TC(\Delta+o(\Delta))\\
&\qquad+B_h^{(3)}T(M(h)\Delta+o(\Delta))^{\frac{1}{2}}+B_h^{(3)}T(\alpha(h)\Delta+o(\Delta))^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\tag{2.3.85}$$

Uvodeći oznaku $G(h)=T(B_h^{(1)}(D(h))^{\frac{1}{2}}+B_h^{(2)}C+B_h^{(3)}(M(h))^{\frac{1}{2}}+B_h^{(3)}(\alpha(h))^{\frac{1}{2}})$, izraz (2.3.79) se može zapisati kao

$$\begin{aligned}
&EV(y(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h)-z_3(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h),r(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h))\\
&\quad\le G(h)\Delta^{\frac{1}{2}}+(o(\Delta))^{\frac{1}{2}}+V(\varphi(0)-z_3(0),r(0))\\
&\qquad+E\int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h}LV(y(s),y(s-\delta(s)),\bar{r}(s))ds.
\end{aligned}\tag{2.3.86}$$

Primenom (2.1.5) i (2.1.6) iz pretpostavke $\mathcal{A}_2$ na prethodni izraz, sledi

$$EU_1(y(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h)-z_3(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h),r(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h))\le G(h)\Delta^{\frac{1}{2}}+(o(\Delta))^{\frac{1}{2}}+K'+c_1t,$$

gde je $K'=V(\varphi(0)-z_3(0),r(0))+c_3\int_{-\delta(0)}^0U_2(y(s))ds$.

Uvođenjem oznake $v_h=\inf_{|y|\ge(1-\beta)h}U_1(y)$, prethodna nejednakost implicira

$$P\{\rho_h\wedge\nu_h\le T\}\le\frac{G(h)\Delta^{\frac{1}{2}}+(o(\Delta))^{\frac{1}{2}}+K'+c_1T}{v_h}.$$

Dalje, za svako $\varepsilon\in(0,1)$, postoji dovoljno veliko h^* tako da za svako $h\ge h^*$, važi

$$\frac{K'+c_1T}{v_h}\le\varepsilon/2$$

i može se izabrati dovoljno malo Δ_* tako da je za svako $\Delta\in(0,\Delta^*)$,

$$\frac{G(h)\Delta^{\frac{1}{2}}+(o(\Delta))^{\frac{1}{2}}}{v_h}\le\varepsilon/2,\quad h\ge h^*.$$

Tada je

$$P\{\rho_h \wedge \nu_h \le T\} \le \varepsilon, \quad \Delta \in (0, \Delta^*),\ h \ge h^*.$$

tj.

$$P\{\rho_h \le T\} \le \varepsilon, \quad \Delta \in (0, \Delta^*),\ h \ge h^*.$$

$\diamondsuit$

Sada je moguće oceniti bliskost između rešenja x jednačine (2.3.40) i Euler-Maruyaminog rešenja određenog izrazom (2.3.49).

Teorema 2.6 *Neka su ispunjene pretpostavke $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3', \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_7$, i neka je $\beta(3+[\eta]) < 1$ i $f(0,0,i) = g(0,0,i) = 0$, $i \in S$. Tada je*

$$\sup_{s\in[-\delta(0),T]} E|x(s\wedge\tau_h\wedge\rho_h)-y(s\wedge\tau_h\wedge\rho_h)|^2 \le N(h)\Delta + o(\Delta),$$

gde je $N(h)$ konstanta koja zavisi od h, ali ne zavisi od Δ i τ_h, ρ_h su vremena zaustavljanja definisana u Teoremi 2.2 i izrazom (2.3.51), respektivno.

Dokaz. Za svako $t \in [0, T\wedge\tau_h\wedge\rho_h]$, na osnovu (2.3.40) i (2.3.49), važi da je

$$\begin{aligned}
&x(t)-y(t)\\
&\quad= u(x(t-\delta(t)), r(t)) - z_3(t) - u(\varphi(-\delta(0)), r(0)) + u(\bar{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{-1})\\
&\qquad+\int_0^t \Big(f(x(s), x(s-\delta(s)), r(s)) - f(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))\Big)ds\\
&\qquad+\int_0^t \Big(g(x(s), x(s-\delta(s)), r(s)) - g(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))\Big)dw(s).
\end{aligned}$$

Tada, za svako $\varepsilon \in (0,1)$, primenom elementarne nejednakosti (1.9.55), sledi

$$\begin{aligned}
&|x(t)-y(t)|^2\\
&\le \frac{1}{\varepsilon}|u(x(t-\delta(t)), r(t)) - z_3(t) - u(\varphi(-\delta(0)), r(0)) + u(\bar{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{-1})|^2\\
&\quad+\frac{2}{1-\varepsilon}\Big(T\int_0^t |f(x(s), x(s-\delta(s)), r(s)) - f(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))|^2 ds\\
&\quad+\Big|\int_0^t \Big(g(x(s), x(s-\delta(s)), r(s)) - g(z_1(s), z_2(s)), \bar{r}(s)\Big)dw(s)\Big|^2\Big). \qquad (2.3.87)
\end{aligned}$$

Primenjujući dva puta (1.9.55), i na osnovu pretpostavke (2.1.8), dolazi se do ocene

$$\begin{aligned}
&|u(x(t-\delta(t)), r(t)) - z_3(t) - u(\varphi(-\delta(0)), r(0)) + u(\bar{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{-1})|^2\\
&\le \frac{1}{\varepsilon}|u(x(t-\delta(t)), r(t)) - z_3(t)|^2\\
&\quad+\frac{1}{1-\varepsilon}|u(\varphi(-\delta(0)), r(0)) - u(\bar{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{-1})|^2
\end{aligned}$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2}|u(x(t-\delta(t)),r(t))-u(y(t-\delta(t)),r(t))|^2+\frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}|u(y(t-\delta(t)),r(t))-z_3(t)|^2$$
$$+\frac{1}{1-\varepsilon}|u(\varphi(-\delta(0)),r(0))-u(\bar{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta),r^{\Delta}_{-1})|^2$$
$$\le\frac{\beta^2}{\varepsilon^2}|x(t-\delta(t))-y(t-\delta(t))|^2+\frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}|u(y(t-\delta(t)),r(t))-z_3(t)|^2$$
$$+\frac{1}{1-\varepsilon}|u(\varphi(-\delta(0)),r(0))-u(\bar{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta),r^{\Delta}_{-1})|^2. \qquad (2.3.88)$$

Zamenom (2.3.88) u (2.3.87) se dobija nejednakost

$$|x(t)-y(t)|^2 \le \frac{\beta^2}{\varepsilon^3}|x(t-\delta(t))-y(t-\delta(t))|^2+\frac{1}{\varepsilon^2(1-\varepsilon)}|u(y(t-\delta(t)),r(t))-z_3(t)|^2$$
$$+\frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}|u(\varphi(-\delta(0)),r(0))-u(\bar{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta),r^{\Delta}_{-1}|^2$$
$$+\frac{2}{1-\varepsilon}\Big(T\int_0^t|f(x(s),x(s-\delta(s)),r(s))-f(z_1(s),z_2(s),\bar{r}(s))|^2ds$$
$$+\Big|\int_0^t(g(x(s),x(s-\delta(s)),r(s))-g(z_1(s),z_2(s),\bar{r}(s)))dw(s)\Big|^2\Big). \qquad (2.3.89)$$

Na osnovu definicije neprekidnog Euler-Maruyaminog rešenja y važi da je $\varphi(-\delta(0)) = y(-\delta(0))$ i $u(\bar{y}(-\Delta-[\delta(0)/\Delta]\Delta, r^{\Delta}_{-1}) = z_3(0)$. Kako x i y zadovoljavaju isti početni uslov, na osnovu (2.3.89) se zaključuje da je

$$\sup_{s\in[-\delta(0),t]} E|x(s)-y(s)|^2$$
$$\le\frac{\beta^2}{\varepsilon^3}\sup_{s\in[-\delta(0),t]}E|x(s)-y(s)|^2$$
$$+\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2(1-\varepsilon)}\sup_{s\in[0,T]}E|u(y(s\wedge\rho_h-\delta(s\wedge\rho_h)),r(s\wedge\rho_h))-z_3(s\wedge\rho_h)|^2$$
$$+\frac{2}{1-\varepsilon}\Big(T\int_0^t E|f(x(s),x(s-\delta(s)),r(s))-f(z_1(s),z_2(s),\bar{r}(s))|^2ds$$
$$+4\int_0^t E|g(x(s),x(s-\delta(s)),r(s))-g(z_1(s),z_2(s),\bar{r}(s))|^2ds\Big). \qquad (2.3.90)$$

Primenjujući Propoziciju 2.2, birajući $\varepsilon=\beta^{\frac{1}{3}}$ i primenjujući lokalni Lipschitzov uslov $\mathcal{A}_1$, izraz (2.3.90) postaje

$$\sup_{s\in[-\delta(0),t]} E|x(s)-y(s)|^2$$
$$\le\frac{(1+\beta^{\frac{1}{3}})D(h)}{\beta^{\frac{2}{3}}(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\Delta+o(\Delta)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{4(T+4)K_h}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\int_0^t(E|x(s)-z_1(s)|^2+E|x(s-\delta(s))-z_2(s))|^2)ds\\
&+\frac{4T}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\int_0^t E(|f(x(s),x(s-\delta(s)),r(s))|\\
&\quad+|f(x(s),x(s-\delta(s)),\bar{r}(s))|)^2 I_{\{r(s)\neq\bar{r}(s)\}}ds\\
&+\frac{16}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\int_0^t E(|g(x(s),x(s-\delta(s)),r(s))|\\
&\quad+|g(x(s),x(s-\delta(s)),\bar{r}(s))|)^2 I_{\{r(s)\neq\bar{r}(s)\}}ds. \qquad (2.3.91)
\end{aligned}
$$

Imajući u vidu pretpostavku $f(0,0,i)=g(0,0,i)=0$, Lemu 2.2 i hipotezu $\mathcal{A}_1$, sledi

$$
\begin{aligned}
&\sup_{s\in[-\delta(0),t]} E|x(s)-y(s)|^2\\
&\quad\le \frac{4(T+4)K_h}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\int_0^t\Big(E|x(s)-z_1(s)|^2+E|x(s-\delta(s))-z_2(s))|^2\Big)ds\\
&\quad+\frac{(1+\beta^{\frac{1}{3}})D(h)}{\beta^{\frac{2}{3}}(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\Delta+o(\Delta)+\frac{32(T+4)TCh^2K_h}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\Delta. \qquad (2.3.92)
\end{aligned}
$$

Neka je $u\in[0,t]$ proizvoljno fiksirano i neka je k_u prirodan broj takav da je $u\in[k_u\Delta,(k_u+1)\Delta\wedge T\wedge\tau_h\wedge\rho_h)$. Na osnovu definicije (2.3.44) stepenastog procesa z_1 i procedure kojom je određena ocena (2.3.70), za $s\in[0,t]$ sledi

$$
\begin{aligned}
E|x(s)-z_1(s)|^2 &\le 2E|x(s)-y(s)|^2+2E|y(s)-z_1(s)|^2\\
&\le 2\sup_{u\in[-\delta(0),s]}E|x(u)-y(u)|^2+2\sup_{u\in[0,s]}E|y(u)-\bar{y}(k_u\Delta)|^2\\
&\le 2\sup_{u\in[-\delta(0),s]}E|x(u)-y(u)|^2+2M(h)\Delta+o(\Delta). \qquad (2.3.93)
\end{aligned}
$$

Sa druge strane, primenom ocene (2.3.84) dobija se

$$
\begin{aligned}
E|x(s-\delta(s))-z_2(s)|^2 &\le 2E|x(s-\delta(s))-y(s-\delta(s))|^2+2E|y(s-\delta(s))-z_2(s)|^2\\
&\le 2E|x(s-\delta(s))-y(s-\delta(s))|^2+2\alpha(h)\Delta+o(\Delta). \quad (2.3.94)
\end{aligned}
$$

Sada, ocene (2.3.93) i (2.3.94), zajedno sa (2.3.91), daju

$$
\begin{aligned}
&\sup_{s\in[-\delta(0),t]} E|x(s)-y(s)|^2\\
&\le \frac{(1+\beta^{\frac{1}{3}})D(h)+8\beta^{\frac{2}{3}}(T+4)TK_h(M(h)+\alpha(h)+4Ch^2)}{\beta^{\frac{2}{3}}(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\Delta+o(\Delta)\\
&+\frac{16(T+4)K_h}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\int_0^t\sup_{u\in[-\delta(0),s]}E|x(u)-y(u)|^2ds.
\end{aligned}
$$

Primenom Gronwall-Bellmanove leme (Teoreme 1.24), zaključuje se da je

$$\sup_{s\in[-\delta(0),T]} E|x(s\wedge\tau_h\wedge\rho_h)-y(s\wedge\tau_h\wedge\rho_h)|^2 \leq N(h)\Delta + o(\Delta),$$

gde je $N(h) = \frac{(1+\beta^{\frac{1}{3}})D(h)+8\beta^{\frac{2}{3}}(T+4)TK_h\left(M(h)+\alpha(h)+4Ch^2\right)}{\beta^{\frac{2}{3}}(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)} e^{M_1T}, M_1 = \frac{16(T+4)TK_h}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}$, čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Sledeći rezultati se odnose na konvergenciju u verovatnoći neprekidnog Euler-Maruyaminog aproksimativnog rešenja y jednačine (2.3.49), kao i odgovarajućeg diskretnog rešenja $\bar{y}$, ka rešenju x jednačine (2.3.40), kada $\Delta\to 0$.

Teorema 2.7 *Neka važe pretpostavke $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3', \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_7$, kao i uslovi $\beta(3+[\eta]) < 1$ i $f(0,0,i) = g(0,0,i) = 0$, $i\in S$. Tada, za svako $T>0$ i $t\in[0,T]$, važi*

$$\lim_{\Delta\to 0}|x(t)-y(t)| = 0 \quad u \quad verovatnoći,$$
$$\lim_{\Delta\to 0}|x(t)-z_1(t)| = 0 \quad u \quad verovatnoći.$$

Dokaz prethodne teoreme je izostavljen zbog toga što se zasniva na ideji iz rada [65] i na primeni Posledice 2.1 i Teorema 2.5 i 2.6.

Napomena 2.1 *Potrebno je naglasiti da je u prethodnim rezultatima u Poglavlju 2.3 važila pretpostavka da je funkcija kašnjenja neograničena, pri čemu je Euler-Maruyamina metoda definisana na particiji*

$$k\Delta,\ k\in\{-(n_*+1), -n_*, ..., -1, 0, 1, ...\}, \tag{2.3.95}$$

gde je $n_*\Delta = \delta(0)$. Neka važi (2.2.19), tj. neka je funkcija kašnjenja ograničena tako da je njena gornja granica $\overline{h}$. Euler-Maruyamina metoda je tada definisana na particiji (2.3.95), pri čemu je broj n_* izabran tako da je $n_*\Delta = \overline{h}$. U tom slučaju je $t-\delta(t)\geq -\overline{h}, t\geq 0$, zbog čega bi u Lemi 2.1 pretpostavku $\mathcal{A}_3'$ trebalo zameniti sa $\mathcal{A}_6$. Treba imati u vidu da Propozicije 2.1 i 2.2, kao i Teoreme 2.5,2.6 i 2.7 važe kada se pretpostavka $\mathcal{A}_3'$ zameni pretpostavkama $\mathcal{A}_3$ i $\mathcal{A}_6$, dok su rešenja x i y definisana na intervalu $[-\overline{h},\infty)$ umesto na $[-\delta(0),\infty)$.

Sledeći rezultati se odnose na skoro izvesnu eksponencijalnu stabilnost diskretnog Euler-Maruyaminog rešenja koje je definisano relacijama (2.3.41)–(2.3.43), pod pretpostavkom (2.2.19). U tom smislu, bira se $\Delta\in(0,1)$ tako da $n_*\in N$ zadovoljava $n_*\Delta = \overline{h}$. Prethodni rezultati su dobijeni pod uslovima koji su slabiji od uslova linearnog rasta. U sledećoj teoremi dodaje se uslov linearnog rasta za koeficijent prenosa f.

Teorema 2.8 *Neka važe pretpostavke $\mathcal{A}_4$ i $\mathcal{A}_6$, kao i uslov (2.2.19). Neka postoje pozitivne konstante $\beta_i, i = 1, 2, ..., 6$, pri čemu je*

$$\beta_1 - \beta_3 - \beta_5 - (\beta_2 + \beta_4 + \beta_6 + 12\beta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1) > 0, \tag{2.3.96}$$

tako da, za svako $x, y \in R^d, i \in S$, važi

$$2(x - u(y,i))^T f(x,y,i) \leq -\beta_1|x|^2 + \beta_2|y|^2. \tag{2.3.97}$$
$$|g(x,y,i)|^2 \leq \beta_3|x|^2 + \beta_4|y|^2, \tag{2.3.98}$$
$$|f(x,y,i)|^2 \leq \beta_5|x|^2 + \beta_6|y|^2. \tag{2.3.99}$$

Neka je $\overline{\varepsilon}$ jedinstveno pozitivno rešenje jednačine

$$-\beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + 2\overline{\varepsilon} + (\beta_2 + \beta_4 + \beta_6 + 12\beta^2 + 2\beta^2\overline{\varepsilon})([(1-\eta)^{-1}] + 1)e^{\overline{\varepsilon}\overline{h}} = 0. \tag{2.3.100}$$

Tada, za svako $\delta \in (0, \overline{\varepsilon}/2)$, postoji $\gamma \in (0, -\frac{1}{\overline{h}+1} log\beta \wedge (\overline{\varepsilon} - 2\delta))$ i Δ_* tako da, za svaki početni uslov $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\overline{h}, 0]; R^d)$, Euler-Maruyamino rešenje ima osobinu

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|\overline{y}(k\Delta)|}{k\Delta} \leq -\frac{\gamma}{2} \quad s.i. \tag{2.3.101}$$

Dokaz. Na osnovu (2.3.43) se može primetiti da je

$$\begin{aligned}
&|\overline{y}((k+1)\Delta) - u(\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k)|^2 \\
&\quad - |\overline{y}(k\Delta) - u(\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1})|^2 \\
&\quad \leq |f(\overline{y}(k\Delta), \overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k)|^2\Delta^2 \\
&\quad + |g(\overline{y}(k\Delta), \overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k)|^2\Delta \\
&\quad + 2(\overline{y}(k\Delta) - u(\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k))^T f(\overline{y}(k\Delta), \overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k)\Delta \\
&\quad + 2(u(\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k) - u(\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1}))^T \\
&\qquad \times f(\overline{y}(k\Delta), \overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k)\Delta + m_k,
\end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned}
m_k = {}& 2(\overline{y}(k\Delta) - u(\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1}) \\
&+ f(\overline{y}(k\Delta), \overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k)\Delta)^T g(\overline{y}(k\Delta), \overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k)\Delta\omega_k \\
&+ |g(\overline{y}(k\Delta), \overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k)|^2(|\Delta\omega_k|^2 - \Delta)
\end{aligned}$$

lokalni martingal.

Primenjujući pretpostavke (2.3.97)-(2.3.99), kao i $\mathcal{A}_4$, sledi

$$\begin{aligned}
&|\overline{y}((k+1)\Delta) - u(\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k)|^2 \\
&\quad - |\overline{y}(k\Delta) - u(\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1})|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (\beta_5|\overline{y}(k\Delta)|^2 + \beta_6|\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2)\Delta^2\\
&\quad +(\beta_3|\overline{y}(k\Delta)|^2 + \beta_4|\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2)\Delta\\
&\quad +(-\beta_1|\overline{y}(k\Delta)|^2 + \beta_2|\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2)\Delta\\
&\quad +|f(\overline{y}(k\Delta), \overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta)|^2\Delta\\
&\quad +|u(\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta) - u(\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^\Delta)|^2\Delta + m_k\\
&\leq (\beta_5|\overline{y}(k\Delta)|^2 + \beta_6|\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2)(\Delta^2 + \Delta)\\
&\quad +(\beta_3|\overline{y}(k\Delta)|^2 + \beta_4|\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2)\Delta\\
&\quad +(-\beta_1|\overline{y}(k\Delta)|^2 + \beta_2|\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2)\Delta\\
&\quad +2|u(\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta) - u(\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta)|^2\Delta\\
&\quad +2|u(\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta) - u(\overline{y}((k-1)\Delta\\
&\qquad -[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^\Delta)|^2\Delta + m_k\\
&\leq (-\beta_1 + \beta_3 + \beta_5(1+\Delta))\Delta|\overline{y}(k\Delta)|^2 + (\beta_2 + \beta_4 + \beta_6(1+\Delta))\Delta|\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\
&\quad +2\beta^2|\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta) - \overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\Delta\\
&\quad +4\beta^2|\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\Delta I_{\{r_k^\Delta \neq r_{k-1}^\Delta\}} + m_k\\
&\leq (-\beta_1 + \beta_3 + \beta_5(1+\Delta))\Delta|\overline{y}(k\Delta)|^2\\
&\quad +(\beta_2 + \beta_4 + \beta_6(1+\Delta) + 4\beta^2)\Delta|\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\
&\quad +8\beta^2\Delta|\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 + m_k.
\end{aligned}
\tag{2.3.102}
$$

Tada se, primenom (2.1.8) i (2.3.102), za svaku konstantu $C \geq 1$, dobija

$$
\begin{aligned}
&C^{(k+1)\Delta}|\overline{y}((k+1)\Delta) - u(\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta)|^2\\
&\qquad -C^{k\Delta}|\overline{y}(k\Delta) - u(\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^\Delta)|^2\\
&\quad = C^{(k+1)\Delta}\Big[|\overline{y}((k+1)\Delta) - u(\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta)|^2\\
&\qquad -|\overline{y}(k\Delta) - u(\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^\Delta)|^2\Big]\\
&\qquad +(C^{(k+1)\Delta} - C^{k\Delta})|\overline{y}(k\Delta) - u(\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^\Delta)|^2\\
&\quad \leq C^{(k+1)\Delta}[(-\beta_1 + \beta_3 + \beta_5(1+\Delta))\Delta|\overline{y}(k\Delta)|^2\\
&\qquad +(\beta_2 + \beta_4 + \beta_6(1+\Delta) + 4\beta^2)\Delta|\overline{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\
&\qquad +8\beta^2\Delta|\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\
&\qquad +(1 - C^{-\Delta})(2|\overline{y}(k\Delta)|^2 + 2\beta^2|\overline{y}(k\Delta - [\delta(k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2) + m_k].
\end{aligned}
$$

Na osnovu prethodne relacije, sumiranjem po $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, sledi

$$
\begin{aligned}
&C^{k\Delta}|\overline{y}(k\Delta) - u(\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^\Delta)|^2\\
&\quad \leq |\overline{y}(0) - u(\overline{y}(-\Delta - [\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta), r_{-1}^\Delta)|^2\\
&\qquad +[(-\beta_1 + \beta_3 + \beta_5(1+\Delta))\Delta + 2(1 - C^{-\Delta})]\sum_{i=0}^{k-1} C^{(i+1)\Delta}|\overline{y}(i\Delta)|^2
\end{aligned}
$$

$$+(\beta_2+\beta_4+\beta_6(1+\Delta)+4\beta^2)\Delta\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|\overline{y}(i\Delta-[\delta(i\Delta)/\Delta]\Delta)|^2$$
$$+2\beta^2[4\Delta+1-C^{-\Delta}]\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|\overline{y}((i-1)\Delta-[\delta((i-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2+M_k \quad (2.3.103)$$

gde je

$$M_k=\sum_{i=0}^{k-1}m_i$$

takođe lokalni martingal i $M_0=0$.

Imajući u vidu (2.3.41), sledi

$$\begin{aligned}&2\beta^2[4\Delta+1-C^{-\Delta}]\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|\overline{y}((i-1)\Delta-[\delta((i-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\&\quad\le 2\beta^2[4C^{\Delta}\Delta+C^{\Delta}-1]\Big[|\overline{y}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\&\qquad+\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|\overline{y}(i\Delta-[\delta(i\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\Big].\end{aligned}$$

Tada (2.3.103) postaje

$$\begin{aligned}&C^{k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)-u(\overline{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta),r_{k-1}^{\Delta})|^2\\&\quad\le|\overline{y}(0)-u(\overline{y}(-\Delta-[\delta(0)/\Delta]\Delta),r_0^{\Delta})|^2\\&\qquad+2\beta^2[4C^{\Delta}\Delta+C^{\Delta}-1]|\overline{y}(-\Delta-[\delta(0)/\Delta]\Delta)|^2\\&\qquad+[(-\beta_1+\beta_3+\beta_5(1+\Delta))\Delta+2(1-C^{-\Delta})]\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|\overline{y}(i\Delta)|^2\\&\qquad+[(\beta_2+\beta_4+\beta_6(1+\Delta)+4\beta^2+8\beta^2C^{\Delta})\Delta\\&\qquad+2\beta^2(C^{\Delta}-1)]\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|\overline{y}(i\Delta-[\delta(i\Delta)/\Delta]\Delta)|^2+M_k.\end{aligned}\quad (2.3.104)$$

Primenjujući uslov (2.2.19) i Lemu 3 iz rada [66] na drugu sumu na desnoj strani nejednakosti (2.3.104), dobija se

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|\overline{y}(i\Delta-[\delta(i\Delta)/\Delta]\Delta)|^2&\le C^{\overline{h}}\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1-[\delta(i\Delta)/\Delta])\Delta}|\overline{y}(i\Delta-[\delta(i\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\&\le([(1-\eta)^{-1}]+1)C^{\overline{h}}\sum_{i=-n^*}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|\overline{y}(i\Delta)|^2.\end{aligned}$$

Tada se izraz (2.3.104) može oceniti kao

$$C^{k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)-u(\overline{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta),r^{\Delta}_{k-1})|^2$$
$$\leq X + h(C,\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} C^{(i+1)\Delta}|\overline{y}(i\Delta)|^2 + M_k, \qquad (2.3.105)$$

gde je

$$X = |\overline{y}(0) - u(\overline{y}(-\Delta - [\delta(0)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_0)|^2 + 2\beta^2[5C-1]|\overline{y}(-\Delta - [\delta(0)/\Delta]\Delta)|^2$$
$$+[\beta_2 + \beta_4 + 2\beta_6 + 4\beta^2 + 8\beta^2 C)$$
$$+2\beta^2(C-1)]([(1-\eta)^{-1}] + 1)C^{\overline{h}} \sum_{i=-n^*}^{-1} C^{(i+1)\Delta}|\varphi(i\Delta)|^2 < \infty \qquad (2.3.106)$$

i

$$h(C,\Delta) = (-\beta_1 + \beta_3 + \beta_5(1+\Delta))\Delta + 2(1 - C^{-\Delta})$$
$$+[(\beta_2 + \beta_4 + \beta_6(1+\Delta) + 4\beta^2 + 8\beta^2 C^{\Delta})\Delta + 2\beta^2(C^{\Delta} - 1)]$$
$$\times([(1-\eta)^{-1}] + 1)C^{\overline{h}}. \qquad (2.3.107)$$

Dalje, za svako $\Delta \in (0,1)$ i $C \geq 1$, važi

$$\frac{d}{dC}h(C,\Delta)$$
$$= 2\Delta C^{-\Delta-1} + ([(1-\eta)^{-1}]+1)C^{\overline{h}-1}$$
$$\times\left[2\beta^2\Delta C^{\Delta}(4\Delta+1) + [(\beta_2+\beta_4+\beta_6(1+\Delta)+4\beta^2+8\beta^2C^{\Delta})\Delta+2\beta^2(C^{\Delta}-1)]\overline{h}\right] > 0.$$

Najpre je potrebno uočiti da je

$$h(1,\Delta)$$
$$= (-\beta_1 + \beta_3 + \beta_5(1+\Delta))\Delta + (\beta_2 + \beta_4 + \beta_6(1+\Delta) + 12\beta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1)\Delta.$$

Na osnovu pretpostavke (2.3.96) sledi da je $h(1,\Delta) < 0$, za svako $\Delta \in (0, \Delta_1)$, gde je

$$\Delta_1 = \frac{\beta_1 - \beta_3 - \beta_5 - (\beta_2 + \beta_4 + \beta_6 + 12\beta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1)}{\beta_5 + \beta_6([(1-\eta)^{-1}] + 1)}.$$

Dakle, postoji jedinstveno $C^*_{\Delta} > 1$, tako da je $h(C^*_{\Delta}, \Delta) = 0$.

Tada za (2.3.105) važi

$$C^{*k\Delta}_{\Delta}|\overline{y}(k\Delta)-u(\overline{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k-1})|^2 \leq X + M_k. \qquad (2.3.108)$$

Na osnovu Leme 2 ([66]), sledi

$$\limsup_{k\to\infty} C_\Delta^{*k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)-u(\overline{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta),r_{k-1}^\Delta)|^2 \leq \limsup_{k\to\infty}(X+M_k)<\infty \ \ s.i.$$

Neka je $h_1(\mu,\Delta)=h(C,\Delta)/\Delta$, gde je $\mu=\log C$. Tada je $h_1(\mu_\Delta^*,\Delta)=0$ i

$$\lim_{\Delta\to 0} h_1(\mu,\Delta) = -\beta_1+\beta_3+\beta_5+2\mu+(\beta_2+\beta_4+\beta_6+12\beta^2+2\beta^2\mu)([(1-\eta)^{-1}]+1)e^{\mu\overline{h}}.$$

Jednačina (2.3.100) ima jedinstveno pozitivno rešenje $\overline{\varepsilon}$, tako da je

$$\lim_{\Delta\to 0}\mu_\Delta^*=\overline{\varepsilon}.$$

Prema tome, za svako $\delta\in(0,\overline{\varepsilon}/2)$, postoji Δ_2, tako da je za svako $\Delta\in(0,\Delta_2)$,

$$\mu_\Delta^*>\overline{\varepsilon}-2\delta.$$

Kako je

$$\limsup_{k\to\infty} e^{\mu_\Delta^* k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)-u(\overline{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta),r_{k-1}^\Delta)|^2<\infty \quad s.i,$$

sledi da je za svako $\Delta\in(0,\Delta_*)$, gde je $\Delta_*=\Delta_1\wedge\Delta_2$,

$$\overline{\sigma}=\limsup_{k\to\infty} e^{(\overline{\varepsilon}-2\delta)k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)-u(\overline{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta),r_{k-1}^\Delta)|^2<\infty \ \ s.i.$$

Za svako $\gamma\in(0,-\frac{1}{\overline{h}+1}\log\beta\wedge(\overline{\varepsilon}-2\delta))$, postoji prirodan broj k_1 tako da je

$$e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)-u(\overline{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta),r_{k-1}^\Delta)|^2\leq\overline{\sigma}+\gamma,\ k\geq k_1.$$

Primenom elementarne nejednakosti (1.9.54), za $p=2$ i $\varepsilon=\beta/(1-\beta)$, kao i uslova (2.1.8), može se zaključiti da je

$$\begin{aligned} e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)|^2 &\leq (1-\beta)^{-1}e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)-u(\overline{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta),r_{k-1}^\Delta)|^2\\ &\quad+\beta e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2. \end{aligned} \tag{2.3.109}$$

Tada, za svaki prirodan broj $k_2>k_1$, važi da je

$$\begin{aligned} &\sup_{k_1\leq k\leq k_2} e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)|^2\\ &\leq (1-\beta)^{-1}(\overline{\sigma}+\gamma)+\beta\sup_{k_1\leq k\leq k_2} e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\ &\leq (1-\beta)^{-1}(\overline{\sigma}+\gamma)\\ &\quad+\beta e^{\gamma(\overline{h}+1)}\sup_{k_1\leq k\leq k_2} e^{\gamma(k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta])\Delta}|\overline{y}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\ &\leq (1-\beta)^{-1}(\overline{\sigma}+\gamma)+\beta e^{\gamma(\overline{h}+1)}\sup_{k_1-n_*-1\leq k\leq k_1} e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)|^2\\ &\quad+\beta e^{\gamma(\overline{h}+1)}\sup_{k_1\leq k\leq k_2} e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)|^2. \end{aligned}$$

Na osnovu prethodne nejednakosti sledi

$$\sup_{k_1\le k\le k_2} e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)|^2$$
$$\le (1-\beta e^{\gamma(\overline{h}+1)})^{-1}\Big[(1-\beta)^{-1}(\overline{\sigma}+\gamma)+e^{\gamma(\overline{h}+1)}\sup_{k_1-n_*-1\le k\le k_1} e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)|^2\Big].$$

U prethodnom izrazu, kada $k_2\to+\infty$, važi

$$\sup_{k_1\le k\le +\infty} e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)|^2$$
$$\le (1-\beta e^{\gamma(\overline{h}+1)})^{-1}\Big[(1-\beta)^{-1}(\overline{\sigma}+\gamma)+e^{\gamma(\overline{h}+1)}\sup_{k_1-n_*-1\le k\le k_1} e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)|^2\Big]<\infty,$$

odakle je

$$\limsup_{k\to\infty} e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)|^2<\infty.$$

Za ranije definisano γ, važi da je

$$\sup_{k\to\infty} e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)|^2\le (1-\beta e^{\gamma(\overline{h}+1)})^{-1}(1-\beta)^{-1}\overline{\sigma}.$$

Konačno, zaključuje se da je

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\log(e^{\gamma k\Delta}|\overline{y}(k\Delta)|^2)}{k\Delta}=0,$$

što implicira (2.3.101). $\diamondsuit$

Prethodna teorema predstavlja proširenje rezultata iz rada [66] (Teorema 4), zbog prisustva procesa Markova u jednačini (2.1.1). Ako se izostavi proces Markova u jednačini (2.1.1), tada se može primetiti da su uslovi Teoreme 2.8 malo slabiji u odnosu na one iz navedene teoreme.

Sledećim primerom su ilustrovani teorijski rezultati vezani za egzistenciju i jedinstvenost tačnog rešenja, kao i konvergenciju niza Euler-Maruyaminih rešenja ka tačnom rešenju.

Primer 2.1 *Razmatra se jednačina (2.1.1), odnosno neutralna stochastička diferencijalna jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova, sa početnim uslovom* $\varphi(t)=1$, $t\in[-\delta(0),0]$, *pri čemu je funkcija kašnjenja* $\delta(t)=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\sin t$, $t\ge 0$, *tako da je* $\overline{h}=\delta(0)=\frac{1}{5}$ *i* $\varphi\in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\delta(0),0];R)$. *Dalje, neka je* $\omega(t)$ *skalarno Brownovo kretanje i* $r(t)$ *neprekidan s desna proces Markova sa skupom stanja* $S=\{1,2\}$ *i generatorom*

$$\Gamma=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 4 & -4\end{pmatrix}.$$

Proces Markova je nezavisan od Brownovog kretanja i $r(0) = 1$.

Neka je

$$\begin{aligned} &u(y,1) = \frac{1}{5}y, \quad u(y,2) = \frac{1}{10}y, \\ &f(x,y,1) = -3x^3 - \frac{3}{5}x^2y, \quad f(x,y,2) = -x - \frac{1}{30}y, \\ &g(x,y,1) = y^2, \quad g(x,y,2) = \frac{y}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Tada se za $t \geq 0$, *polazna jednačina (2.1.1) može predstaviti u obliku*

$$d\Big[x(t) - \frac{1}{5}x(t-\delta(t))\Big] = \Big(-3x^3(t) - \frac{3}{5}x^2(t)x(t-\delta(t))\Big)dt + x^2(t-\delta(t))dw(t), \tag{2.3.110}$$

$$d\Big[x(t) - \frac{1}{10}x(t-\delta(t))\Big] = \Big(-x(t) - \frac{1}{30}x(t-\delta(t))\Big)dt + \frac{x(t-\delta(t))}{\sqrt{6}}dw(t), \tag{2.3.111}$$

kada je $r(1) = 1$ *i* $r(2) = 2$, *respektivno.*

Koeficijenti jednačina (2.3.110) i (2.3.111) zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov $\mathcal{A}_1$, *dok funkcije* $u(y,1) = \frac{1}{5}y$, $u(y,2) = \frac{1}{10}y$ *zadovoljavaju pretpostavku* $\mathcal{A}_4$ *za* $\beta = \frac{1}{5}$. *Kako je* $\delta(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sin t$, $t \geq 0$, *sledi da je*

$$\delta'(t) = -\frac{1}{5}\cos t \leq \frac{1}{5} = \bar{\delta},$$

odnosno važi pretpostavka $\mathcal{A}_3$.

Neka je funkcija $V : R \times S \to R_+$ *definisana sa*

$$V(x,1) = 1 + x^2, \quad V(x,2) = 1 + x^4$$

Na osnovu (1.5.30) dobija se da je

$$\begin{aligned} LV(x,y,1) &= 2\Big(x - \frac{1}{5}y\Big)\Big(-3x^3 - \frac{3}{5}x^2y\Big) + y^4 - \Big(1 + \Big(x - \frac{1}{5}y\Big)^2\Big) + \Big(1 + \Big(x - \frac{1}{5}y\Big)^4\Big) \\ &= -6x^4 - \frac{6}{5}x^3y + \frac{6}{5}yx^3 + \frac{6}{25}x^2y^2 + y^4 - \Big(x - \frac{1}{5}y\Big)^2 + \Big(x - \frac{1}{5}y\Big)^4. \end{aligned}$$

Tada se primenom elementarne nejednakosti $2ab \leq a^2 + b^2$ *i nejednakosti (1.9.54), za* $\varepsilon = 1$ *dobija*

$$\begin{aligned} LV(x,y,1) &\leq -6x^4 + \frac{3}{25}x^4 + \frac{3}{25}y^4 + y^4 + \Big(x - \frac{1}{5}y\Big)^2\Big(\Big(x - \frac{1}{5}y\Big)^2 - 1\Big) \\ &\leq -\frac{147}{25}x^4 + \frac{28}{25}y^4 + \Big(2x^2 + \frac{2}{25}y^2\Big)\Big(2x^2 + \frac{2}{25}y^2 - 1\Big) \\ &\leq -\frac{43}{25}x^4 + \frac{804}{625}y^4 - 2x^2 - \frac{2}{25}y^2 \\ &\leq -1,72x^4 + 1,2864y^4 - 2x^2 - 0,08y^2 \\ &\leq -1,72x^4 + 1,2864y^4. \end{aligned}$$

Dalje, važi da je

$$
\begin{aligned}
LV(x,y,2) &= 4\Big(x-\frac{1}{10}y\Big)^3\Big(-x-\frac{1}{30}y\Big)+\Big(x-\frac{1}{10}y\Big)^2y^2\\
&\quad +4\Big(1+(x-\frac{1}{10}y)^2\Big)-4\Big(1+(x-\frac{1}{10}y)^4\Big)\\
&= 4\Big(x^3-\frac{3}{10}x^2y+\frac{3}{100}y^2x-\frac{1}{1000}y^3\Big)\Big(-x-\frac{1}{30}y\Big)+\Big(x-\frac{1}{10}y\Big)^2y^2\\
&\quad +4\Big(x-\frac{1}{10}y\Big)^2-4\Big(x-\frac{1}{10}y\Big)^4\\
&\le -4x^4-\frac{4}{30}x^3y+\frac{12}{10}x^3y+\frac{12}{300}x^2y^2-\frac{12}{100}x^2y^2-\frac{12}{3000}xy^3+\frac{4}{1000}xy^3\\
&\quad +\frac{4}{30000}y^4+\Big(x-\frac{1}{10}y\Big)^2y^2+4\Big(x-\frac{1}{10}y\Big)^2\\
&\le -4x^4+\frac{16}{15}x^3y-\frac{2}{25}x^2y^2+\frac{1}{7500}y^4\\
&\quad +(y^2+4)\Big(2x^2+\frac{1}{50}y^2\Big).
\end{aligned}
$$

Primenom nejednakosti (1.9.57) dobija se da je $x^3y \le \frac{3}{4}x^4+\frac{1}{4}y^4$ *i* $x^2y^2 \le \frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}y^4$. *Sledi da je*

$$
\begin{aligned}
LV(x,y,2) &\le -4x^4+\frac{4}{5}x^4+\frac{4}{15}y^4+\frac{48}{25}x^2y^2+\frac{151}{7500}y^4+8x^2+\frac{2}{25}y^2\\
&\le -\frac{56}{25}x^4+\frac{9351}{7500}y^4+8x^2+\frac{2}{25}y^2\\
&= -2,24x^4+1,2468y^4+8x^2+0,08y^2\\
&= -1,72x^4+1,2864y^4+8x^2-0,52x^4+0,08y^2-0,0396y^4.
\end{aligned}
$$

Tada je, za svako $(x,y)\in R\times R$,

$$\max\{8x^2-0,52x^4+0,08y^2-0,0396y^4\}=30,738<5712,0664$$

odnosno

$$LV(x,y,i)\le 5712,0664-1,72x^4+1,2864y^4,\ \forall(x,y,i)\in R\times R\times S.$$

Neka je $U_1(x)=x^2$ *i* $U_2(x)=1+x^4$. *Tada je* $U_1(x)\le V(x,i)\le U_2(x)$, $\forall(x,i)\in R\times S$ *i* $\forall(x,y,i)\in R\times R\times S$,

$$LV(x,y,i)\le 5712,5-1,72(1+x^4)+1,60575\Big(1-\frac{1}{5}\Big)(1+y^4).$$

Ispunjene su sve pretpostavke Teoreme 2.2 za $c_1=5712,5; c_2=1,72; c_3=1,60575$. *Dakle, postoji jedinstveno rešenje jednačine (2.1.1) tako da je*

$$Ex^2(t) < \infty, \; t \geq 0$$
$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Ex^4(s)ds \leq 50000.$$

Nadalje, početni uslov $\varphi(t) = 1$, $t \in [-\delta(0), 0]$ *zadovoljava pretpostavku* $\mathcal{A}_5$, *pri čemu za funkciju kašnjenja važi da je*

$$|\delta'(t)| = |-\frac{1}{5}\cos t| \leq \frac{1}{5} = \eta,$$

čime je zadovoljen i uslov $\mathcal{A}'_3$. *Pored toga, zadovoljen je i uslov* $\mathcal{A}_7$ *za funkcije*

$$V(x,1) = 1 + x^2, \quad V(x,2) = 1 + x^4.$$

Kako je ispunjen i uslov $\beta(3 + [\eta]) = \frac{1}{3} < 1$, *sledi da važe svi uslovi Teoreme 2.7, odnosno niz odgovarajućih Euler-Maruyaminih rešenja konvergira u verovatnoći ka tačnom rešenju. Euler-Maruyamino rešenje je definisano kao* $\bar{y}(k\Delta) = \varphi(k\Delta)$, $k = -n_*, -n_* + 1, ..., 0$, *dok je za* $k = 0, 1, 2, ...$, *ako je* $r_k^\Delta = r_{k-1}^\Delta = 1$,

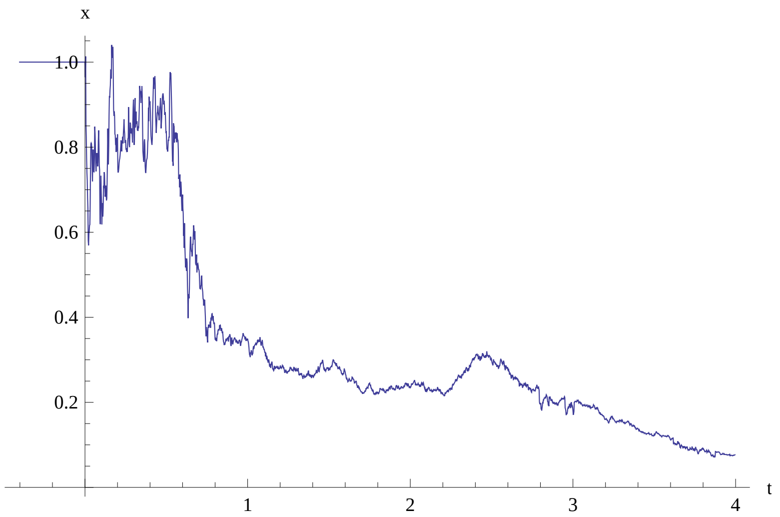
$$\begin{aligned}\bar{y}((k+1)\Delta) = {} & \bar{y}(k\Delta) + \frac{1}{5}\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)) - \frac{1}{5}\bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta) \\ & + \Big(-3\bar{y}^3(k\Delta) - \frac{3}{5}\bar{y}^2(k\Delta)\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)\Big)\Delta \\ & + \bar{y}^2(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)\Delta w_k, \end{aligned} \tag{2.3.112}$$

dok je za $r_k^\Delta = r_{k-1}^\Delta = 2$,

$$\begin{aligned}\bar{y}((k+1)\Delta) = {} & \bar{y}(k\Delta) + \frac{1}{10}\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)) - \frac{1}{10}\bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta) \\ & + \Big(-\bar{y}(k\Delta) - \frac{1}{30}\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)\Big)\Delta \\ & + \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)\Delta w_k, \end{aligned} \tag{2.3.113}$$

za $r_k^\Delta = 1, r_{k-1}^\Delta = 2$,

$$\begin{aligned}\bar{y}((k+1)\Delta) = {} & \bar{y}(k\Delta) + \frac{1}{5}\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)) - \frac{1}{10}\bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta) \\ & + \Big(-3\bar{y}^3(k\Delta) - \frac{3}{5}\bar{y}^2(k\Delta)\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)\Big)\Delta \\ & + \bar{y}^2(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)\Delta w_k, \end{aligned} \tag{2.3.114}$$



Slika 2.1: Euler-Maruyamino rešenje za $\Delta = 0.002$

i za $r_k^\Delta = 2, r_{k-1}^\Delta = 1,$

$$\begin{aligned}\bar{y}((k+1)\Delta) = &\bar{y}(k\Delta) + \frac{1}{10}\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)) - \frac{1}{5}\bar{y}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta) \\ &+ \Big(-\bar{y}(k\Delta) - \frac{1}{30}\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)\Big)\Delta \\ &+ \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{y}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)\Delta w_k. \end{aligned} \tag{2.3.115}$$

Na Slici 2.1 je prikazano Euler-Maruyamino rešenje za $\Delta = 0.002$.

2.4 Backward i forward-backward Eulerova metoda

U ovom poglavlju su predstavljene implicitne metode za neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa neograničenim vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova pod uslovima iz Poglavlja 2.2. Dokazana je konvergencija u verovatnoći neprekidnog i diskretnog forward-backward Eulerovog rešenja ka tačnom rešenju, kao i konvergencija u verovatnoći diskretnog backward Eulerovog rešenja. Neutralni član je takođe hibridan tj. zavisi od procesa Markova. Kako bi backward Eulerova metoda bila dobro definisana, zahteva se da koeficijent prenosa zadovoljava jednostrani Lipshitzov uslov.

Pretpostavkama $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_6$, biće dodata i sledeća pretpostavka.

$\mathcal{C}_1$: Neka je $f \in C(R^d \times R^d; R^d)$ i neka postoje konstante $\mu_1, \mu_2 > 0$ tako da za svako $x, y, z \in R^d$, $i \in S, t \geq 0$, važi da je

$$\langle x - y, f(x, z, t, i) - f(y, z, t, i) \rangle \leq \mu_1 |x - y|^2, \tag{2.4.116}$$

$$\langle x - y, f(z, x, t, i) - f(z, y, t, i) \rangle \leq \mu_2 |x - y|^2. \tag{2.4.117}$$

Ovi uslovi su poznati kao jednostrani Lipschitzovi uslovi po prvom i drugom argumentu funkcije f, respektivno.

Predmet razmatranja biće autonomna verzija početne jednačine (2.1.1), čiji je oblik

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(0) + u(x(t - \delta(t)), r(t)) - u(x(-\delta(0)), r(0)) \\ &+ \int_0^t f(x(s), x(s - \delta(s)), r(s)) ds + \int_0^t g(x(s), x(s - \delta(s)), r(s)) dw(s), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{2.4.118}$$

sa početnim uslovom $x(t) = \varphi(t)$, $\theta \in [-\delta(0), 0]$, $r(0) = i_0 \in S$.

Umesto hipoteza $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_4$, neka važe njihove autonomne verzije.

Prvo se razmatra slučaj kada je funkcija kašnjenja δ neograničena. Bira se veličina koraka $\Delta \in (0, 1)$ za koji važi $\Delta = \delta(0)/n_*$, za neki prirodan broj $n_* > \delta(0)$.

Definiše se backward Eulerovo (BE) aproksimativno rešenje $q(k\Delta)$ koje odgovara jednačini (2.4.118) na ekvidistantnoj particiji $k\Delta, k = -n_*, ..., -1, 0, 1, ...$ vremenskog intervala $[0, \infty)$. Diskretno BE aproksimativno rešenje se definiše kao

$$q(k\Delta) = \varphi(k\Delta), \ k = -n_*, -n_* + 1, ..., 0, \tag{2.4.119}$$

dok je, za $k \in \{1, 2, ...\}$,

$$\begin{aligned} q(k\Delta) = & \, q((k-1)\Delta) + u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta) \\ & - u(q((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^\Delta) \\ & + f(q(k\Delta), q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta)\Delta \\ & + g(q(k-1)\Delta, q((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^\Delta)\Delta w_{k-1}. \end{aligned} \tag{2.4.120}$$

Potrebno je naglasiti da odgovarajuće neprekidno BE rešenje nije $\mathcal{F}_t$-merljivo jer sadrži član

$$\int_{(k-1)\Delta}^t f(q(k\Delta), q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta) ds, \tag{2.4.121}$$

kada je $t \in [(k-1)\Delta, k\Delta), k = 1, 2, \ldots$. Zbog toga se uvodi neprekidno forward-backward Eulerovo (FBE) aproksimativno rešenje umesto neprekidnog BE rešenja. Da bi diskretno FBE rešenje $\bar{q}(k\Delta)$, $k = -(n_* + 1), -n_*, \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ bilo dobro definisano, potrebno je uvesti oznake

$$\bar{q}(-(n_* + 1)\Delta) = \bar{q}(-n_*\Delta) = \varphi(-n_*\Delta), \quad \delta(-\Delta) = \delta(0), \quad r_{-1}^\Delta = r_0^\Delta = r(0). \tag{2.4.122}$$

Tada je

$$\bar{q}(k\Delta) = \varphi(k\Delta),\ k = -n_*, -n_* + 1, \dots, 0, \tag{2.4.123}$$

dok je, za $k \in \{0, 1, 2, ...\}$,

$$\begin{aligned}\bar{q}((k+1)\Delta) = \bar{q}(k\Delta) &+ u(\bar{q}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta)\\ &-u(\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^\Delta)\\ &+f(q(k\Delta), q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta)\Delta\\ &+g(q(k\Delta), q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta)\Delta w_k,\end{aligned} \tag{2.4.124}$$

gde je $\Delta w_k = w((k+1)\Delta) - w(k\Delta)$ i $r_k^\Delta = r(k\Delta)$.

Treba odrediti uslove koji garantuju egzistenciju i jedinstvenost diskretnog BE rešenja jednačine (2.4.120), odnosno, treba dokazati egzistenciju i jedinstvenost rešenja jednačine oblika

$$x = d + \Delta f(x, a, i)I_{A^c} + \Delta f(x, x, i)I_A + u(x, i)I_A, \quad x \in R^d, \tag{2.4.125}$$

za dato $a, d \in R^d$, $i \in S$, pri čemu je $I_A = 1$ ako je $[\delta(k\Delta)/\Delta] = 0$ i $I_A = 0$ u suprotnom.

Egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine (2.4.125) iskazana je sledećom lemom koja je navedena bez dokaza, a dokaz se može naći u radu [67].

Lema 2.3 *Pretpostavlja se da važi uslov (2.1.7) i hipoteza $\mathcal{C}_1$. Ako je $(\mu_1 + \mu_2)\Delta + \beta < 1$, tada postoji jedinstveno rešenje jednačine (2.4.125).*

Za potrebe daljeg razmatranja koriste se neprekidne aproksimacije. U tom smislu se uvode stepenasti procesi

$$z_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q(k\Delta)I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t), \tag{2.4.126}$$

$$z_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t), \tag{2.4.127}$$

$$\bar{z}_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{q}(k\Delta)I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t), \tag{2.4.128}$$

$$\bar{z}_2(t) = \sum_{k=-1}^{\infty} \bar{q}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t), \tag{2.4.129}$$

$$\bar{r}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k^\Delta I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t). \tag{2.4.130}$$

Kako neutralni član zavisi od procesa Markova, definiše se linearna kombinacija izraza $u(\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^\Delta)$ i $u(\bar{q}((k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta)$, tj.

$$\bar{u}_k(t) = u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r_{k-1}^\Delta) + \frac{t - k\Delta}{\Delta}\Big(u(\bar{z}_2(k\Delta), r_k^\Delta) - u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r_{k-1}^\Delta)\Big). \tag{2.4.131}$$

za svako $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta), k = 0, 1, 2, ...$

Neka je

$$z_3(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k(t) I_{[k\Delta,(k+1)\Delta)}(t). \tag{2.4.132}$$

Neprekidno FBE aproksimativno rešenje se definiše tako da je $\bar{q}(t) = \varphi(t), t \in [-\delta(0), 0]$, dok je, za $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \bar{q}(t) = \varphi(0) + z_3(t) - u(\bar{q}(-\Delta - [\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta), r_{-1}^{\Delta}) \\ + \int_0^t f(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))ds + \int_0^t g(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))dw(s). \end{aligned} \tag{2.4.133}$$

Kada je $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)$, jednačina (2.4.133) se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} \bar{q}(t) = \bar{q}(k\Delta) + \bar{u}_k(t) - u(\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^{\Delta}) \\ + \int_{k\Delta}^t f(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))ds + \int_{k\Delta}^t g(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))dw(s). \end{aligned} \tag{2.4.134}$$

Na osnovu (2.4.124), (2.4.134) i definicija (2.4.126)-(2.4.131) može se zaključiti da se diskretno i neprekidno FBE aproksimativno rešenje poklapaju u tačkama particije.

Napomena 2.2 *Zbog prisustva lanca Markova u jednačinama (2.4.118) i (2.4.124), neutralni član u je drugačije opisan od onog u radu [67], u kome se razmatraju BE i FBE metoda za klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem. Linearna interpolacija (2.4.131) čini da $u_k(t)$ zavisi od dva, u opštem slučaju različita stanja r_{k-1}^{Δ} i r_k^{Δ} procesa Markova, za razliku od pristupa u radu [67], u kome se primenjuje linearna interpolacija članova $\bar{z}_2((k-1)\Delta)$ i $\bar{z}_2(k\Delta)$, tj. po argumentima funkcije u u definiciji neprekidnog FBE rešenja.*

Nadalje, pretpostavlja se da je k_0 dovoljno veliki prirodan broj za koji važi

$$\max_{t \in [-\delta(0), 0]} |\varphi(t)| \leq k_0.$$

Takođe, definiše se niz vremena zaustavljanja

$$\rho_h = \inf\{t \geq 0 : |\bar{q}(t)| \geq h\}, \quad h \geq k_0, \tag{2.4.135}$$

gde je $\inf \emptyset = +\infty$.

U ovom delu se dokazuje konvergencija u verovatnoći diskretnog i neprekidnog FBE rešenja definisanih redom sa (2.4.124) i (2.4.133) i takođe diskretnog BE rešenja definisanog sa (2.4.120), ka tačnom rešenju x jednačine (2.1.1). Da bi se dokazao glavni rezultat potrebno je nekoliko lema i propozicija.

Lema 2.4 *Pod pretpostavkom $\mathcal{A}_3'$, za diskretno FBE rešenje $\bar{q}$ važi*

$$|\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)-\bar{q}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\ \leq (3+[\eta])^2 \sup_{-n_*\leq j, j\Delta\leq T\wedge\rho_h} |\bar{q}(j\Delta)-\bar{q}((j-1)\Delta)|^2, \quad (2.4.136)$$

gde je ρ_h definisano sa (2.4.135).

Pored toga, ako za svako $t\in[0,T\wedge\rho_h]$ za koje je $k=[t/\Delta]$, tako da je $t\in[k\Delta,(k+1)\Delta\wedge T\wedge\rho_h)$ i ako $k_t\in\{-n_*,-n_*+1,...\}$ zadovoljava da je $t-\delta(t)\in[k_t\Delta,(k_t+1)\Delta\wedge T\wedge\rho_h)$, tada

$$|k_t-(k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta])|\leq 5+[2\eta]. \quad (2.4.137)$$

Dokaz Leme 2.4 se može naći u radu [65] (videti dokaze Propozicija 1 i 2, respektivno).

Sledeća lema biće eksplicitno primenjena u dokazivanju narednih rezultata. Dokaz se može naći u radu [66] (Lema 3).

Lema 2.5 *Neka je zadovoljena pretpostavka $\mathcal{A}_6$. Za proizvoljno ali fiksirano $i\in\{0,1,2,\ldots\}$, neka je $i-[\delta(i\Delta)/\Delta]=a$, gde je $a\in\{-n_*,-n_*+1,...,0,1,...,i\}$. Tada,*

$$\#\{j\in\{0,1,2,\ldots\}: j-[\delta(i\Delta)/\Delta]=a\}\leq[(1-\eta)^{-1}]+1,$$

pri čemu $\#S$ je broj elemenata skupa S.

Propozicija 2.3 *Neka su zadovoljene pretpostavke $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_3'$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_5$ i uslovi Leme 2.3. Neka je $T>0$ proizvoljan broj i pretpostavlja se da je $f(0,0,i)=g(0,0,i)=0$, za svako $i\in S$. Ako je $(3+[\eta])\beta<1$, tada*

$$\sup_{t\in[-\delta(0),T]} E|\bar{z}_1(t\wedge\rho_h)-\bar{z}_1(t\wedge\rho_h-\Delta)|^2\leq A(h)\Delta+o(\Delta), \quad (2.4.138)$$

$$\sup_{t\in[-\delta(0),T-\Delta]} E|z_1(t\wedge\rho_h+\Delta)-z_1(t\wedge\rho_h)|^2\leq A_1(h)\Delta+o(\Delta), \quad (2.4.139)$$

gde je ρ_h vreme zaustavljanja definisano sa (2.4.135), dok su $A(h)$ i $A_1(h)$ konstante koje zavise od h ali ne zavise od Δ.

Dokaz. Neka je $t\in[0,T\wedge\rho_h]$ proizvoljno i $k=[t/\Delta]$. Tada, $t\in[k\Delta,(k+1)\Delta\wedge T\wedge\rho_h)$ i na osnovu definicije (2.4.128) sledi da je

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[-\delta(0),T]} & E|\bar{z}_1(t\wedge\rho_h)-\bar{z}_1(t\wedge\rho_h-\Delta)|^2\\ &= \sup_{-n_*\leq k, k\Delta\leq T} E|\bar{q}(k\Delta\wedge\rho_h)-\bar{q}((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2\\ &\leq \sup_{-n_*\leq k\leq 0} E|\bar{q}(k\Delta)-\bar{q}((k-1)\Delta)|^2\\ &\quad+\sup_{1\leq k, k\Delta\leq T} E|\bar{q}(k\Delta\wedge\rho_h)-\bar{q}((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2. \quad (2.4.140)\end{aligned}$$

Imajući u vidu da je $\bar{q}(-(n_*+1)\Delta) = \varphi(-n_*\Delta)$ i primenjujući prepostavku $\mathcal{A}_5$, važi da je

$$\sup_{-n_*\le k\le 0} E|\bar{q}(k\Delta)-\bar{q}((k-1)\Delta)|^2 = \sup_{-n_*+1\le k\le 0} E|\varphi(k\Delta)-\varphi((k-1)\Delta)|^2 \le C_\varphi\Delta \tag{2.4.141}$$

Kada je $k = 1, 2, ...,$ iz (2.4.124) dobija se

$$\begin{aligned}\bar{q}(k\Delta)-\bar{q}((k-1)\Delta) = {} & u(\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1}) \\ & -u(\bar{q}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-2}) \\ & +f(q((k-1)\Delta), q((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1})\Delta \\ & +g(q((k-1)\Delta), q((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1})\Delta w_{k-1}.\end{aligned} \tag{2.4.142}$$

Dalje je

$$\begin{aligned}& u(\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1})-u(\bar{q}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-2}) \\ & = u(\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1})-u(\bar{q}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1}) \\ & +(u(\bar{q}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1})-u(\bar{q}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-2})) \\ & I_{\{r^\Delta_{k-2}\neq r^\Delta_{k-1}\}}.\end{aligned} \tag{2.4.143}$$

Tada, na osnovu (2.1.7) i (2.1.8), sledi

$$\begin{aligned}& |u(\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1}) - u(\bar{q}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-2})| \\ & \quad \le \beta|\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta) - \bar{q}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)| \\ & \quad\quad +2\beta|\bar{q}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|I_{\{r^\Delta_{k-2}\neq r^\Delta_{k-1}\}}.\end{aligned} \tag{2.4.144}$$

Primenjujući (2.4.144), (1.9.55) i pretpostavku $\mathcal{A}_1$ na (2.4.142), dobija se da je

$$\begin{aligned}& |\bar{q}(k\Delta) - \bar{q}((k-1)\Delta)|^2 \\ & \le \frac{\beta^2}{\varepsilon^2}|\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)-\bar{q}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\ & +\frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\Big(2\beta|\bar{q}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|\Big)^2 I_{\{r^\Delta_{k-2}\neq r^\Delta_{k-1}\}} \\ & +\frac{2}{1-\varepsilon}|f(q((k-1)\Delta), q((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta, r^\Delta_{k-1}))|^2\Delta^2 \\ & +\frac{2}{1-\varepsilon}|g(q((k-1)\Delta), q((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_{k-1})\Delta w_{k-1}|^2 \\ & \le \frac{\beta^2}{\varepsilon^2}|\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)-\bar{q}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\ & +\frac{4\beta^2h^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}I_{\{r^\Delta_{k-2}\neq r^\Delta_{k-1}\}} + D_h(\Delta^2 + |w(k\Delta) - w((k-1)\Delta)|^2),\end{aligned}$$

gde je $D_h = \frac{4K_h h^2}{1-\varepsilon}$. Odatle sledi da je

$$\begin{aligned}
\sup_{1\leq k,k\Delta\leq T} & E|\bar{q}(k\Delta \wedge \rho_h) - \bar{q}((k-1)\Delta \wedge \rho_h)|^2 \\
& \leq \frac{\beta^2}{\varepsilon^2} \sup_{1\leq k,k\Delta\leq T} E|\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta \wedge \rho_h) \\
& \quad -\bar{q}((k-2)\Delta - [\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta \wedge \rho_h)|^2 \\
& \quad + \frac{4\beta^2 h^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \sup_{1\leq k,k\Delta\leq T} E[I_{\{r^{\Delta}_{k-2}\neq r^{\Delta}_{k-1}\}}] \\
& \quad + D_h(\Delta^2 + \sup_{1\leq k,k\Delta\leq T} E|w(k\Delta) - w((k-1)\Delta)|^2). \qquad (2.4.145)
\end{aligned}$$

Na osnovu (2.4.136), prvi sabirak na desnoj strani nejednakosti (2.4.145) se može oceniti na sledeći način

$$\begin{aligned}
\frac{\beta^2}{\varepsilon^2} & \sup_{1\leq k,k\Delta\leq T} E|\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta \wedge \rho_h) - \bar{q}((k-2)\Delta - [\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta \wedge \rho_h)|^2 \\
& \leq \frac{(3+[\eta])^2\beta^2}{\varepsilon^2} \sup_{-n_*\leq k,k\Delta\leq T} E|\bar{q}(k\Delta \wedge \rho_h) - \bar{q}((k-1)\Delta \wedge \rho_h)|^2, \qquad (2.4.146)
\end{aligned}$$

dok je

$$\begin{aligned}
\sup_{1\leq k,k\Delta\leq T} & E|w(k\Delta) - w((k-1)\Delta)|^2 \\
& = \sup_{1\leq k,k\Delta\leq T} \sum_{j=1}^{m} E|w_j(k\Delta) - w_j((k-1)\Delta)|^2 = m\Delta. \qquad (2.4.147)
\end{aligned}$$

Zamenom (2.4.146) i (2.4.147) u (2.4.145) i primenjujući Lemu 2.2, dobija se da je

$$\begin{aligned}
\sup_{1\leq k,k\Delta\leq T} & E|\bar{q}(k\Delta \wedge \rho_h) - \bar{q}((k-1)\Delta \wedge \rho_h)|^2 \\
& \leq \frac{(3+[\eta])^2\beta^2}{\varepsilon^2} \sup_{-n_*\leq k,k\Delta\leq T} E|\bar{q}(k\Delta \wedge \rho_h) - \bar{q}((k-1)\Delta \wedge \rho_h)|^2 + \frac{4\beta^2 h^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)} C(\Delta + o(\Delta)) \\
& \quad + D_h\Delta^2 + D_h m\Delta. \qquad (2.4.148)
\end{aligned}$$

Tada, (2.4.141) i (2.4.148), zajedno sa (2.4.140), daju

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[-\delta(0),T]} & E|\bar{z}_1(t \wedge \rho_h) - \bar{z}_1(t \wedge \rho_h - \Delta)|^2 \\
& < C_\varphi\Delta + \frac{(3+[\eta])^2\beta^2}{\varepsilon^2} \sup_{-n_*\leq k,k\Delta\leq T} E|\bar{q}(k\Delta \wedge \rho_h) - \bar{q}((k-1)\Delta \wedge \rho_h)|^2 \\
& \quad + \frac{4\beta^2 h^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)} C(\Delta + o(\Delta)) + D_h(1+m)\Delta. \qquad (2.4.149)
\end{aligned}$$

Na osnovu pretpostavke $a = (3 + [\eta])\beta < 1$, može se izabrati $\varepsilon = \bar{\varepsilon} \in (a, 1)$ tako da je $\frac{(3+[\eta])^2\beta^2}{\bar{\varepsilon}^2} < 1$. Tada ocena (2.4.149) postaje

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[-\delta(0),T]} & E|\bar{z}_1(t \wedge \rho_h) - \bar{z}_1(t \wedge \rho_h - \Delta)|^2 \\
& < \frac{\big(C_\varphi + D_h(1 + m)\big)\bar{\varepsilon}^2}{\bar{\varepsilon}^2 - a^2}\Delta + \frac{4\beta^2 h^2 \bar{\varepsilon}}{(\bar{\varepsilon}^2 - a^2)(1 - \bar{\varepsilon})} C(\Delta + o(\Delta)) \\
& \leq A(h)\Delta + o(\Delta), \qquad (2.4.150)
\end{aligned}$$

gde je $A(h) = \frac{1}{\bar{\varepsilon}^2 - a^2}\Big((C_\varphi + D_h(1 + m))\bar{\varepsilon}^2 + \frac{4\beta^2 h^2 \bar{\varepsilon} C}{1-\bar{\varepsilon}}\Big)$.

Ocena (2.4.141) se dobija ponavljanjem prethodne procedure na osnovu jednačine (2.4.120). $\diamondsuit$

Propozicija 2.4 *Neka su ispunjeni uslovi Propozicije 2.3. Tada je*

$$\sup_{t\in[0,T]} E|u(\bar{q}(t \wedge \rho_h - \delta(t \wedge \rho_h)), r(t \wedge \rho_h)) - z_3(t \wedge \rho_h)|^2 \leq D(h)\Delta + o(\Delta),$$

gde je $D(h)$ konstanta koja zavisi od h ali ne zavisi od Δ i ρ_h je vreme zaustavljanja definisano sa (2.4.135).

Dokaz. Neka je, za fiksirano $t \in [0, T \wedge \rho_h]$ i $k = [t/\Delta]$, takvo da je $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta \wedge T \wedge \rho_h)$, $k_t \in \{-n_*, -n_*+1, ...\}$ tako da važi $t - \delta(t) \in [k_t\Delta, (k_t+1)\Delta \wedge T \wedge \rho_h)$.

Na osnovu definicije (2.4.132) stepenastih procesa z_3, za $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)$, važi

$$\begin{aligned}
|u(\bar{q}&(t - \delta(t)), r(t)) - z_3(t)|^2 \\
&= |u(\bar{q}(t - \delta(t)), r(t)) - u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r^\Delta_{k-1}) \\
&\quad - \frac{t - k\Delta}{\Delta}(u(\bar{z}_2(k\Delta), r^\Delta_k) - u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r^\Delta_{k-1}))|^2 \\
&\leq 2|u(\bar{q}(t - \delta(t)), r(t)) - u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r^\Delta_{k-1})|^2 \\
&\quad + 2|u(\bar{z}_2(k\Delta), r^\Delta_k) - u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r^\Delta_{k-1})|^2 \\
&\leq 6|u(\bar{q}(t - \delta(t)), r(t)) - u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r(t))|^2 \\
&\quad + 6|u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r(t)) - u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r^\Delta_k)|^2 \\
&\quad + 6|u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r^\Delta_k) - u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r^\Delta_{k-1})|^2 \\
&\quad + 4|u(\bar{z}_2(k\Delta), r^\Delta_k) - u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r^\Delta_k)|^2 \\
&\quad + 4|u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r^\Delta_k) - u(\bar{z}_2((k-1)\Delta), r^\Delta_{k-1})|^2 \\
&\leq 6\beta^2|\bar{q}(t - \delta(t)) - \bar{z}_2((k-1)\Delta)|^2 + 4\beta^2 h^2(3I_{\{r(t)\neq r^\Delta_k\}} + 5I_{\{r^\Delta_k \neq r^\Delta_{k-1}\}}) \\
&\quad + 4\beta^2|\bar{z}_2(k\Delta) - \bar{z}_2((k-1)\Delta)|^2.
\end{aligned}$$

Tada je, primenom Leme 2.2 i Propozicije 2.3,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} E|u(\bar{q}(t\wedge\rho_h-\delta(t\wedge\rho_h)),r(t\wedge\rho_h))-z_3(t\wedge\rho_h)|^2\\
&\qquad\le 12\beta^2\sup_{t\in[0,T]} E|\bar{q}(t\wedge\rho_h-\delta(t\wedge\rho_h))-\bar{q}(k_t\Delta\wedge\rho_h)|^2\\
&\qquad\quad +12\beta^2\sup_{t\in[0,T]} E|\bar{q}(k_t\Delta\wedge\rho_h)-\bar{z}_2((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2\\
&\qquad\quad +32\beta^2Ch^2\Delta+4\beta^2A(h)\Delta+o(\Delta). \qquad (2.4.151)
\end{aligned}$$

Prilikom ocenjivanja izraza $\sup_{t\in[0,T]} E|\bar{q}(t\wedge\rho_h-\delta(t\wedge\rho_h))-\bar{q}(k_t\Delta\wedge\rho_h)|^2$ se razmatraju sledeća dva slučaja.

Slučaj 1: Ako je $k_t\le -1$, tada je, na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_5$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T],k_t\le -1} E|\bar{q}(t\wedge\rho_h-\delta(t\wedge\rho_h))-\bar{q}(k_t\Delta\wedge\rho_h)|^2\\
&\qquad=\sup_{t\in[0,T],k_t\le -1} E|\varphi(t-\delta(t))-\varphi(k_t\Delta)|^2\le C_\varphi\Delta. \qquad (2.4.152)
\end{aligned}$$

Slučaj 2: Ako je $t\in[0,\rho_h]$ i $k_t\ge 0$, tada se, imajući u vidu (2.1.7), (2.1.8) i (2.4.134), dobija

$$\begin{aligned}
&|\bar{q}(t-\delta(t))-\bar{q}(k_t\Delta)|^2\\
&\quad\le 3|\bar{u}_{k_t}(t-\delta(t))-u(\bar{q}((k_t-1)\Delta-[\delta((k_t-1)\Delta)/\Delta]\Delta),r^\Delta_{k_t-1})|^2\\
&\qquad+3\Delta^2|f(z_1(k_t\Delta),z_2(k_t\Delta),r^\Delta_{k_t})|^2\\
&\qquad+3|g(z_1(k_t\Delta),z_2(k_t\Delta),r^\Delta_{k_t})|^2|w(t-\delta(t))-w(k_t\Delta)|^2\\
&\quad\le 3\left|\frac{t-\delta(t)-k_t\Delta}{\Delta}\Big(u(\bar{z}_2(k_t\Delta),r^\Delta_{k_t})-u(\bar{z}_2((k_t-1)\Delta),r^\Delta_{k_t-1})\Big)\right|^2\\
&\qquad+Q_h(\Delta^2+|w(t-\delta(t))-w(k_t\Delta)|^2)\\
&\quad\le 6\beta^2|\bar{z}_2(k_t\Delta)-\bar{z}_2((k_t-1)\Delta)|^2+12\beta^2h^2I_{\{r^\Delta_{k_t}\ne r^\Delta_{k_t-1}\}}\\
&\qquad+Q_h(\Delta^2+|w(t-\delta(t))-w(k_t\Delta)|^2), \qquad (2.4.153)
\end{aligned}$$

gde je $Q_h=6K_hh^2$. Dalje, primenjujući ocenu (2.4.146), Propoziciju 2.3 i Lemu 2.2, na osnovu (2.4.153) sledi

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T],k_t\ge 0} E|\bar{q}(t\wedge\rho_h-\delta(t\wedge\rho_h))-\bar{q}(k_t\Delta\wedge\rho_h)|^2\\
&\le 6\beta^2\sup_{t\in[0,T],k_t\ge 0} E|\bar{q}(k_t\Delta-[\delta(k_t\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h)-\bar{q}((k_t-1)\Delta-[\delta((k_t-1)\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h)|^2\\
&\quad+12\beta^2h^2C\Delta+o(\Delta)+Q_h\Big(\Delta^2+\sup_{t\in[0,T]} E|w(t-\delta(t))-w(k_t\Delta)|^2\Big)\\
&\le 6\beta^2((3+[\eta])^2A(h)+2Ch^2)\Delta+o(\Delta)+Q_h(\Delta^2+m\Delta). \qquad (2.4.154)
\end{aligned}$$

Imajući u vidu ocene (2.4.152) i (2.4.154), može se zaključiti

$$\sup_{t\in[0,T]} E|\bar{q}(t\wedge\rho_h-\delta(t\wedge\rho_h))-\bar{q}(k_t\Delta\wedge\rho_h)|^2 \leq M(h)\Delta+o(\Delta), \qquad (2.4.155)$$

gde je $M(h)=C_\varphi\vee\Big(6\beta^2((3+[\eta])^2A(h)+2Ch^2)+Q_h(1+m)\Big)$.

Prilikom ocenjivanja izraza $\sup_{t\in[0,T]} E|\bar{q}(k_t\Delta\wedge\rho_h)-\bar{z}_2((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2$ iz izraza (2.4.151), primenjuju se ocena (2.4.137) i Propozicija 2.3. Tada je

$$\sup_{t\in[0,T]} E|\bar{q}(k_t\Delta\wedge\rho_h)-\bar{z}_2((k-1)\Delta\wedge\rho_h)|^2 \leq (5+[2\eta])^2A(h)\Delta+o(\Delta). \quad (2.4.156)$$

Konačno, (2.4.155) i (2.4.156) sa (2.4.151) daju

$$\sup_{t\in[0,T]} E|u(\bar{q}(t-\delta(t)\wedge\rho_h),r(t\wedge\rho_h))-z_3(t\wedge\rho_h)|^2 \leq D(h)\Delta+o(\Delta), \quad (2.4.157)$$

gde je $D(h)=12\beta^2M(h)+4\beta^2(3(5+[2\eta])^2+1)A(h)+32\beta^2Ch^2$. $\diamondsuit$

Sada se može proceniti bliskost BE i FBE rešenja.

Propozicija 2.5 *Neka su ispunjene pretpostavke Propozicije 2.3. Pretpostavimo da je $\beta\in(0,\bar{\beta})$, gde je $\bar{\beta}=(3+[\eta])^{-1}\wedge([(1-\eta)^{-1}]+1)^{-\frac{1}{2}}$.*

Tada je

$$\sup_{t\in[0,T]} E|\bar{z}_1(t\wedge\rho_h)-z_1(t\wedge\rho_h)|^2 \leq Z(h)\Delta+o(\Delta), \qquad (2.4.158)$$

$$\sup_{t\in[0,T]} E|\bar{z}_2(t\wedge\rho_h)-z_2(t\wedge\rho_h)|^2 \leq ([(1-\eta)^{-1}]+1)(Z(h)\Delta+o(\Delta)), \quad (2.4.159)$$

gde je $Z(h)$ konstanta koja zavisi od h, ali je nezavisna od Δ i ρ_h je vreme zaustavljanja definisamo sa (2.4.135).

Dokaz. Za svako $k=1,2,3,\ldots$, na osnovu (2.4.120) i (2.4.124), dobija se

$$\begin{aligned}
&\bar{q}(k\Delta)-q(k\Delta)\\
&\quad=\bar{q}((k-1)\Delta)-q((k-1)\Delta)+u(\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta),r^\Delta_{k-1})\\
&\quad\;-u(q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta),r^\Delta_k)-u(\bar{q}((k-2)\Delta-[\delta((k-2)\Delta)/\Delta]\Delta),r^\Delta_{k-2})\\
&\quad\;+u(q((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta),r^\Delta_{k-1})\\
&\quad\;+f(q((k-1)\Delta),q((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta),r^\Delta_{k-1})\Delta\\
&\quad\;-f(q(k\Delta),q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta),r^\Delta_k)\Delta.
\end{aligned}$$

Ponavljajući ovaj korak, sledi da je

$$\begin{aligned}
&\bar{q}(k\Delta) - q(k\Delta) \\
&\quad = \bar{q}(0) - q(0) + u(\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k-1}) \\
&\qquad - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k}) - u(\bar{q}(-\Delta - [\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{-1}) \\
&\qquad + u(q(-[\delta(0)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{0}) + [f(q(0), q(-[\delta(0)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{0}) \\
&\qquad - f(q(k\Delta), q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k})]\Delta. \qquad (2.4.160)
\end{aligned}$$

Potrebno je uočiti da BE rešenje q i FBE rešenje $\bar{q}$ zadovoljavaju isti početni uslov tj. $\bar{q}(0) = q(0)$. Kako je $\bar{q}(-(n_* + 1)\Delta) = \bar{q}(-n_*\Delta) = \varphi(-n_*\Delta)$, $\delta(-\Delta) = \delta(0)$, $r^{\Delta}_{-1} = r^{\Delta}_{0} = r(0)$, iz (2.4.160) sledi da je

$$\begin{aligned}
&\bar{q}(k\Delta) - q(k\Delta) \qquad (2.4.161) \\
&\quad = u(\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k-1}) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k}) \\
&\qquad - [u(\varphi(-\Delta - [\delta(0)/\Delta]\Delta), r(0)) - u(\varphi(-[\delta(0)/\Delta]\Delta), r(0))] I_{\{[\delta(0)/\Delta] \neq n_*\}} \\
&\qquad + [f(q(0), q(-[\delta(0)/\Delta]\Delta), r(0)) - f(q(k\Delta), q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k})]\Delta.
\end{aligned}$$

Pored toga, važi da je

$$\begin{aligned}
&u(\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k-1}) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k}) \\
&\quad = u(\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k-1}) \\
&\qquad - u(q((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k-1}) \\
&\qquad - [u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k-1}) - u(q((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k-1})] \\
&\qquad - [u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k}) \\
&\qquad - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k-1})] I_{\{r^{\Delta}_{k-1} \neq r^{\Delta}_{k}\}}. \qquad (2.4.162)
\end{aligned}$$

Na osnovu (2.1.7) i (2.1.8), važi

$$\begin{aligned}
&|u(\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k-1}) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k})| \\
&\quad \leq \beta|\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta) - q((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)| \\
&\qquad + \beta|q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta) - q((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)| \\
&\qquad + 2\beta|q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)| I_{\{r^{\Delta}_{k-1} \neq r^{\Delta}_{k}\}}. \qquad (2.4.163)
\end{aligned}$$

Primenjujući elementarnu nejednakost (1.9.55) na (2.4.161), kao i (2.1.7), (2.4.163) i $\mathcal{A}_1$, sledi

$$\begin{aligned}
&|\bar{q}(k\Delta) - q(k\Delta)|^2 \\
&\quad \leq \frac{1}{\varepsilon}|u(\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k-1}) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k})|^2 \\
&\qquad + \frac{1}{1-\varepsilon}|u(\varphi(-\Delta - [\delta(0)/\Delta]\Delta), r(0)) - u(\varphi(-[\delta(0)/\Delta]\Delta), r(0))] I_{\{[\delta(0)/\Delta] \neq n_*\}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+[f(q(k\Delta), q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta) - f(q(0), q(-[\delta(0)/\Delta]\Delta), r(0))]\Delta|^2 \\
&\le \frac{1}{\varepsilon}|u(\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k-1}^\Delta) - u(q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta)|^2 \\
&+\frac{2\beta^2}{1-\varepsilon}|\varphi(-\Delta-[\delta(0)/\Delta]\Delta) - \varphi(-[\delta(0)/\Delta]\Delta)|^2 \\
&+\frac{4}{1-\varepsilon}(|f(q(k\Delta), q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta)|^2 + |f(q(0), q(-[\delta(0)/\Delta]\Delta), r(0))|^2)\Delta^2 \\
&\le \frac{\beta^2}{\varepsilon^2}|\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta) - q((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\
&+\frac{2\beta^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}|q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta) - q((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\
&+\frac{4\beta^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}|q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 I_{\{r_{k-1}^\Delta \ne r_k^\Delta\}} \\
&+\frac{2\beta^2}{1-\varepsilon}|\varphi(-\Delta-[\delta(0)/\Delta]\Delta) - \varphi(-[\delta(0)/\Delta]\Delta)|^2 + \frac{16K_h h^2}{1-\varepsilon}\Delta^2. \qquad (2.4.164)
\end{aligned}
$$

Zatim, primenjujući $\mathcal{A}_5$ dobija se

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\le k, k\Delta\le T} E|\bar{q}(k\Delta\wedge\rho_h) - q(k\Delta\wedge\rho_h)|^2 \\
&\le \frac{\beta^2}{\varepsilon^2}\sup_{0\le k, k\Delta\le T} E|\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h) \\
&\quad -q((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h)|^2 \\
&+\frac{2\beta^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\sup_{0\le k, k\Delta\le T} E|q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h) - q((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h)|^2 \\
&+\frac{4\beta^2 h^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\sup_{0\le k, k\Delta\le T} E[I_{\{r_{k-1}^\Delta \ne r_k^\Delta\}}] + \frac{2(\beta^2 C_\varphi + 8K_h h^2\Delta)}{1-\varepsilon}\Delta. \qquad (2.4.165)
\end{aligned}
$$

Primenom Leme 2.5, prvi sabirak izraza (2.4.165) postaje

$$
\begin{aligned}
&\frac{\beta^2}{\varepsilon^2}\sup_{0\le k, k\Delta\le T} E|\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h) \\
&\qquad -q((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h)|^2 \\
&\qquad \le \frac{\beta^2([(1-\eta)^{-1}]+1)}{\varepsilon^2}\sup_{-n_*\le k, k\Delta\le T} E|\bar{q}(k\Delta\wedge\rho_h) - q(k\Delta\wedge\rho_h)|^2 \\
&\qquad \le \frac{\beta^2([(1-\eta)^{-1}]+1)}{\varepsilon^2}\sup_{0\le k, k\Delta\le T} E|\bar{q}(k\Delta\wedge\rho_h) - q(k\Delta\wedge\rho_h)|^2. \qquad (2.4.166)
\end{aligned}
$$

Na osnovu (2.4.136) i (2.4.139), dolazi se do zaključka da se drugi sabirak na desnoj strani nejednakosti (2.4.165) može oceniti na sledeći način:

$$
\frac{2\beta^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\sup_{0\le k, k\Delta\le T} E|q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h) - q((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h)|^2
$$

$$\leq \frac{2\beta^2(3+[\eta])^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \sup_{-n_*\leq k,(k+1)\Delta\leq T} E|q((k+1)\Delta\wedge\rho_h)-q(k\Delta\wedge\rho_h)|^2$$
$$\leq \frac{2\beta^2(3+[\eta])^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \sup_{t\in[-\delta(0),T-\Delta]} E|z_1(t\wedge\rho_h+\Delta)-z_1(t\wedge\rho_h)|^2$$
$$\leq \frac{2\beta^2(3+[\eta])^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}(A_1(h)\Delta+o(\Delta)). \tag{2.4.167}$$

Zamenom (2.4.166) i (2.4.167) u (2.4.165) i primenom Leme 2.2 se dobija

$$\sup_{0\leq k,k\Delta\leq T} E|\bar{q}(k\Delta\wedge\rho_h)-q(k\Delta\wedge\rho_h)|^2$$
$$\leq \frac{\beta^2([(1-\eta)^{-1}]+1)}{\varepsilon^2} \sup_{0\leq k,k\Delta\leq T} E|\bar{q}(k\Delta\wedge\rho_h)-q(k\Delta\wedge\rho_h)|^2$$
$$+\frac{2(3+[\eta])^2\beta^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}(A_1(h)\Delta+o(\Delta))+\frac{4\beta^2h^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}C(\Delta+o(\Delta))+\frac{2(\beta^2C_\varphi+8K_hh^2)}{1-\varepsilon}\Delta$$
$$\leq \frac{\beta^2([(1-\eta)^{-1}]+1)}{\varepsilon^2} \sup_{0\leq k,k\Delta\leq T} E|\bar{q}(k\Delta\wedge\rho_h)-q(k\Delta\wedge\rho_h)|^2+S(h,\varepsilon), \tag{2.4.168}$$

gde je $S(h,\varepsilon)=\frac{2\beta^2[(3+[\eta])^2(A(h)\Delta+o(\Delta))+2h^2C(\Delta+o(\Delta))]}{\varepsilon(1-\varepsilon)}+\frac{2(\beta^2C_\varphi+8K_hh^2)\Delta}{1-\varepsilon}$.

Birajući $\varepsilon\in(\beta^2([(1-\eta)^{-1}]+1),1)$, tako da je $\frac{\beta^2([(1-\eta)^{-1}]+1)}{\varepsilon^2}=\varepsilon_0^2<1$, na osnovu (2.4.168) se zaključuje da je

$$\sup_{t\in[0,T]} E|\bar{z}_1(t\wedge\rho_h)-z_1(t\wedge\rho_h)|^2$$
$$=\sup_{0\leq k,k\Delta\leq T} E|\bar{q}(k\Delta\wedge\rho_h)-q(k\Delta\wedge\rho_h)|^2\leq Z(h)\Delta+o(\Delta), \tag{2.4.169}$$

pri čemu je $Z(h)=\frac{S(h,\beta^2([(1-\eta)^{-1}]+1)/\varepsilon_0^2)}{1-\varepsilon_0^2}$.

S obzirom na to da FBE rešenje $\bar{q}$ i BE rešenje q zadovoljavaju isti početni uslov, primenom Leme 2.5 i prethodne ocene, dobija se

$$\sup_{t\in[0,T]} E|\bar{z}_2(t\wedge\rho_h)-z_2(t\wedge\rho_h)|^2$$
$$=\sup_{1\leq k,k\Delta\leq T} E|\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h)$$
$$-q((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta\wedge\rho_h)|^2$$
$$\leq([(1-\eta)^{-1}]+1)\sup_{0\leq k,k\Delta\leq T} E|\bar{q}(k\Delta\wedge\rho_h)-q(k\Delta\wedge\rho_h)|^2$$
$$\leq([(1-\eta)^{-1}]+1)(Z(h)\Delta+o(\Delta)),$$

čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Napomena 2.3 *U prethodnoj propoziciji zahteva se uslov* $\beta \in (0, \bar{\beta})$*, gde je* $\bar{\beta} = (3+[\eta])^{-1} \wedge ([(1-\eta)^{-1}]+1)^{-\frac{1}{2}}$*, iako se eksplicitno primenjuje pretpostavka* $\bar{\beta} < ([(1-\eta)^{-1}]+1)^{-\frac{1}{2}}$*. Treba naglasiti da je pretpostavka* $\bar{\beta} < (3+[\eta])^{-1}$ *uvedena sa ciljem da omogući primenu Propozicije 2.3.*

Analogno Teoremi 4 iz rada [73], koja se odnosi na neprekidno Euler-Maruyamino rešenje, biće dokazano da neprekidno FBE rešenje, koje je određeno jednačinom (2.4.133), ostaje u kompaktnom skupu sa velikom verovatnoćom. Pre toga, uvodi se sledeća hipoteza.

$\mathcal{A}_7$: Neka za svaki prirodan broj $h \geq 1$ postoji konstanta $G_h > 0$ takva da, za svako $x, y \in R^d$ koje zadovoljava $|x| \vee |y| \leq h$ i svako $i \in S$, važi

$$|V(x,i) - V(y,i)| \vee |V_x(x,i) - V_x(y,i)| \vee |V_{xx}(x,i) - V_{xx}(y,i)| \leq G_h|x-y|.$$

Teorema 2.9 *Neka su ispunjene pretpostavke* $\mathcal{A}_1$*,* $\mathcal{A}_2$*,* $\mathcal{A}'_3$*,* $\mathcal{A}_4$*,* $\mathcal{A}_5$*,* $\mathcal{A}_7$ *i* $\mathcal{C}_1$*. Neka je* $\beta \in (0, \bar{\beta})$*, gde je* $\bar{\beta} = (3+[\eta])^{-1} \wedge ([(1-\eta)^{-1}]+1)^{-\frac{1}{2}}$*. Za proizvoljno* $\varepsilon \in (0,1)$ *i* $T > 0$ *postoji dovoljno veliki ceo broj* $h^* = h^*(\varepsilon, T)$ *tako da je*

$$P\{\rho_h \leq T\} \leq \varepsilon, \quad h \geq h^*,$$

gde je $\rho_h, h \geq k_0$ *niz vremena zaustavljanja definisanih sa (2.4.135).*

Dokaz. Za $h > 0$, definiše se niz vremena zaustavljanja

$$\nu_h = \inf\{t \geq 0 : V(\bar{q}(t) - z_3(t), r(t)) \geq h\}.$$

Imajući u vidu (2.4.133), koristeći Itôvu formulu, za svako $t \geq 0$, sledi

$$\begin{aligned}
&dV(\bar{q}(t)-z_3(t), r(t)) \\
&\quad = V_x(\bar{q}(t)-z_3(t), r(t)) f(z_1(t), z_2(t), \bar{r}(t))dt \\
&\qquad + V_x(\bar{q}(t)-z_3(t), r(t)) g(z_1(t), z_2(t), \bar{r}(t))dw(t) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\text{trace}[g^T(z_1(t), z_2(t), \bar{r}(t))V_{xx}(\bar{q}(t)-z_3(t), r(t))g(z_1(t), z_2(t), \bar{r}(t))]dt \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{N} \gamma_{r(t)j} V(\bar{q}(t) - z_3(t), j)dt \\
&\quad = \Big(LV(\bar{q}(t), \bar{q}(t-\delta(t)), \bar{r}(t)) + F(\bar{q}(t)-z_3(t), \bar{q}(t), \bar{q}(t-\delta(t)), z_1(t), z_2(t), r(t), \bar{r}(t))\Big)dt \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{N} \Big(\gamma_{r(t)j} V(\bar{q}(t) - z_3(t), j) - \gamma_{\bar{r}(t)j} V(\bar{q}(t) - u(\bar{q}(t-\delta(t))), j)\Big)dt \\
&\qquad + V_x(\bar{q}(t)-z_3(t)) g(z_1(t), z_2(t), \bar{r}(t))dw(t),
\end{aligned} \tag{2.4.170}$$

pri čemu je funkcija $F : R^d \times R^d \times R^d \times R^d \times R^d \times S \times S \to R^d$ definisana na sledeći način

$$\begin{aligned}
&F(\bar{a}, y_1, y_2, z_1, z_2, i, \bar{i})\\
&\quad= [V_x(\bar{a}, i) - V_x(y_1 - u(y_2, i), i)] f(z_1, z_2, \bar{i})\\
&\qquad + [V_x(y_1 - u(y_2, i), i) - V_x(y_1 - u(y_2, i), \bar{i})] f(z_1, z_2, \bar{i})\\
&\qquad + [V_x(y_1 - u(y_2, i), \bar{i}) - V_x(y_1 - u(y_2, \bar{i}), \bar{i})] f(z_1, z_2, \bar{i})\\
&\qquad + V_x(y_1 - u(y_2, \bar{i}), \bar{i})[f(z_1, z_2, \bar{i}) - f(y_1, y_2, \bar{i})]\\
&\qquad + \frac{1}{2}\mathrm{trace}([g^T(z_1, z_2, \bar{i}) - g^T(y_1, y_2, \bar{i})] V_{xx}(\bar{a}, i) g(z_1, z_2, \bar{i}))\\
&\qquad + \frac{1}{2}\mathrm{trace}(g^T(y_1, y_2, \bar{i})[V_{xx}(\bar{a}, i) - V_{xx}(\bar{a}, \bar{i})] g(z_1, z_2, \bar{i}))\\
&\qquad + \frac{1}{2}\mathrm{trace}(g^T(y_1, y_2, \bar{i})[V_{xx}(\bar{a}, \bar{i}) - V_{xx}(y_1 - u(y_2, i), \bar{i})] g(z_1, z_2, \bar{i}))\\
&\qquad + \frac{1}{2}\mathrm{trace}(g^T(y_1, y_2, \bar{i})[V_{xx}(y_1 - u(y_2, i), \bar{i}) - V_{xx}(y_1 - u(y_2, \bar{i}), \bar{i})] g(z_1, z_2, \bar{i}))\\
&\qquad + \frac{1}{2}\mathrm{trace}([g^T(y_1, y_2, \bar{i})] V_{xx}(y_1 - u(y_2, \bar{i}), \bar{i})[g(z_1, z_2, \bar{i}) - g(y_1, y_2, \bar{i})]).
\end{aligned} \tag{2.4.171}$$

Neka je h dovoljno veliki prirodan broj. Ako je $|y_1| \vee |y_2| \vee |z_1| \vee |z_2| \leq h$ za $y_l, z_l \in R^d$, $l = 1, 2$, tada, na osnovu pretpostavke (2.1.8) i definicije (2.4.132), sledi da je $|\bar{a}| \leq (1 + 3\beta)h$ i $y_1 - u(y_2, i) \leq (1 + \beta)h$. Dakle, na osnovu $\mathcal{A}_7$ se zaključuje da je

$$\begin{aligned}
&|V_x(\bar{q}(t) - z_3(t), r(t)) - V_x(\bar{q}(t) - u(\bar{q}(t - \delta(t)), r(t)), r(t))|\\
&\quad \leq G_{(1+3\beta)h} |u(\bar{q}(t - \delta(t)), r(t)) - z_3(t)|.
\end{aligned} \tag{2.4.172}$$

Ako se uvede oznaka $S^x_h = \sup\{V_x(x, i) : |x| \leq h, i \in S\}$, tada je

$$\begin{aligned}
&|V_x(\bar{q}(t) - u(\bar{q}(t - \delta(t)), r(t)), r(t)) - V_x(\bar{q}(t) - u(\bar{q}(t - \delta(t)), r(t)), \bar{r}(t))|\\
&\quad \leq 2S^x_{(1+\beta)h} I_{\{r(t) \neq \bar{r}(t)\}},\\
&V_x(\bar{q}(t) - u(\bar{q}(t - \delta(t)), \bar{r}(t)), \bar{r}(t)) \leq S^x_{(1+\beta)h}.
\end{aligned} \tag{2.4.173}$$

Pored toga, važi da je

$$\begin{aligned}
&|V_x(\bar{q}(t) - u(\bar{q}(t - \delta(t)), r(t)), \bar{r}(t)) - V_x(\bar{q}(t) - u(\bar{q}(t - \delta(t)), \bar{r}(t)), \bar{r}(t))|\\
&\quad \leq G_{(1+\beta)h} |u(\bar{q}(t - \delta(t)), r(t)) - u(\bar{q}(t - \delta(t)), \bar{r}(t))|\\
&\quad \leq 2\beta G_{(1+\beta)h} h I_{\{r(t) \neq \bar{r}(t)\}}.
\end{aligned} \tag{2.4.174}$$

Analogno se može oceniti član iz (2.4.171) koji sadrži V_{xx}, koristeći $S^{xx}_h = \sup\{V_{xx}(x, i) : |x| \leq h, i \in S\}$.

Na osnovu pretpostavke $\mathcal{A}_1$ sledi

$$\begin{aligned}
&F(\bar{q}(t)-z_3(t),\bar{q}(t),\bar{q}(t-\delta(t)),z_1(t),z_2(t),r(t),\bar{r}(t))\\
&\qquad\le B_h^{(1)}|u(\bar{q}(t-\delta(t)),r(t))-z_3(t)|+B_h^{(2)}I_{\{r(t)\neq\bar{r}(t)\}}\\
&\qquad\quad+B_h^{(3)}(|\bar{q}(t)-z_1(t)|+|\bar{q}(t-\delta(t))-z_2(t)|),
\end{aligned}$$

gde su $B_h^{(l)}$, $l=1,2,3$ pozitivne generičke konstante koje zavise od h, ali ne i od Δ. Sada, koristeći $V_h=\sup\{V(x,i):|x|\le h, i\in S\}$, kao i $\mathcal{A}_7$, za $t\in[0,\rho_h\wedge\nu_h]$, izraz (2.4.170) se može oceniti kao

$$\begin{aligned}
&dV(\bar{q}(t)-z_3(t),r(t))\\
&\quad\le (LV(\bar{q}(t),\bar{q}(t-\delta(t)),\bar{r}(t))+B_h^{(1)}|u(\bar{q}(t-\delta(t)),r(t))-z_3(t)|)dt\\
&\qquad+B_h^{(2)}I_{\{r(t)\neq\bar{r}(t)\}}dt+B_h^{(3)}(|\bar{q}(t)-z_1(t)|+|\bar{q}(t-\delta(t))-z_2(t)|)dt\\
&\qquad+V_h\bar{\gamma}dt+V_x(\bar{q}(t)-u(z_3(t)),\bar{r}(t))g(z_1(t),z_2(t))dw(t),
\end{aligned}$$

gde je $\bar{\gamma}=\sup\limits_{i,\bar{i}\in S}\sum\limits_{j=1}^{N}(|\gamma_{ij}|+|\gamma_{\bar{i}j}|)$.

Tada, za $t\in[0,T]$, sledi

$$\begin{aligned}
&EV(\bar{q}(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h)-z_3(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h),r(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h))\\
&\quad\le V(\varphi(0)-z_3(0),r(0))+V_h\bar{\gamma}t+E\int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h}LV(\bar{q}(s),\bar{q}(s-\delta(s)),\bar{r}(s))ds\\
&\qquad+B_h^{(1)}E\int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h}|u(\bar{q}(s-\delta(s)),r(s))-z_3(s)|ds+B_h^{(2)}\int_0^t EI_{\{r(s)\neq\bar{r}(s)\}}ds\\
&\qquad+B_h^{(3)}E\int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h}(|\bar{q}(s)-z_1(s)|+|\bar{q}(s-\delta(s))-z_2(s)|)ds. \qquad (2.4.175)
\end{aligned}$$

Primenom Hölderove nejednakosti, a zatim i Propozicije 2.4, dobija se

$$\begin{aligned}
&B_h^{(1)}E\int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h}|u(\bar{q}(s-\delta(s)),r(s))-z_3(s)|ds\\
&=B_h^{(1)}\int_0^t E|u(\bar{q}(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h-\delta(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)),r(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h))-z_3(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)|ds\\
&\le B_h^{(1)}\int_0^t\Big(E|u(\bar{q}(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h-\delta(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)),r(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h))-z_3(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}ds\\
&\le B_h^{(1)}T(D(h)\Delta+o(\Delta))^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.4.176)
\end{aligned}$$

dok se, na osnovu Leme 2.2, zaključuje da je

$$B_h^{(2)}\int_0^t EI_{\{r(s)\neq\bar{r}(s)\}}ds\le B_h^{(2)}TC(\Delta+o(\Delta)). \qquad (2.4.177)$$

Dalje, važi da je

$$
\begin{aligned}
&B_h^{(3)} E\int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h} (|\bar{q}(s)-z_1(s)| + |\bar{q}(s-\delta(s))-z_2(s)|)ds \\
&\quad\le B_h^{(3)} \int_0^t \Big(E|\bar{q}(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)-z_1(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} ds \\
&\qquad + B_h^{(3)} \int_0^t (E|\bar{q}(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h-\delta(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h))-z_2(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)|^2)^{\frac{1}{2}} ds. \quad (2.4.178)
\end{aligned}
$$

Ako se sa $\tilde{k}_s$ označi ceo broj za koji je $s \in [\tilde{k}_s\Delta, (\tilde{k}_s+1)\Delta \wedge T \wedge \rho_h \wedge \nu_h)$, tada, primenom procedure koja daje ocenu (2.4.155), sledi

$$
\begin{aligned}
E|\bar{q}(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)-z_1(s\wedge\rho_h\wedge\nu_h)|^2 &\le \sup_{t\in[0,T],\tilde{k}_t\ge 0} E|\bar{q}(t\wedge\rho_h)-\bar{q}(k_t\Delta\wedge\rho_h)|^2 \\
&\le M(h)\Delta + o(\Delta). \quad (2.4.179)
\end{aligned}
$$

Nadalje, za ocenu drugog sabirka na desnoj strani nejednakosti (2.4.178), prateći oznake iz dokaza Propozicije 2.4, neka je $k_s \in \{-n^*, -n^*+1, ..., -1, 0, 1, ...\}$ ceo broj takav da je $s-\delta(s) \in [k_s\Delta, (k_s+1)\Delta\wedge T\wedge\rho_h\wedge\nu_h)$. Tada, za svako $u \in [0, s\wedge\rho_h\wedge\nu_h]$, važi da je

$$
\begin{aligned}
&E|\bar{q}(u-\delta(u))-z_2(u)|^2 \\
&\quad\le 2E|\bar{q}(u-\delta(u)) - \bar{q}(k_u\Delta)|^2 + 2E|\bar{q}(k_u\Delta) - \bar{q}(\tilde{k}_u\Delta - [\delta(\tilde{k}_u\Delta)/\Delta]\Delta)|^2.
\end{aligned}
$$

Sledeća ocena se može naći u [73] (Teorema 4).

Ako je $\tilde{k}_u\Delta - [\delta(\tilde{k}_u\Delta)/\Delta]\Delta \le k_u\Delta \le u-\delta(u)$, tada, na osnovu propozicije $\mathcal{A}_3'$, sledi da je

$$
\begin{aligned}
&k_u\Delta - \tilde{k}_u\Delta + [\delta(\tilde{k}_u\Delta)/\Delta]\Delta) \\
&\quad\le u-\delta(u) - \tilde{k}_u\Delta + \delta(\tilde{k}_u\Delta \le \Delta + \eta|u-\tilde{k}_u\Delta| \le (2+[\eta])\Delta,
\end{aligned}
$$

dok, za $k_u\Delta \le u-\delta(u) \le \tilde{k}_u\Delta - [\delta(\tilde{k}_u\Delta)/\Delta]\Delta$, važi

$$
|k_u\Delta - \tilde{k}_u\Delta + [\delta(\tilde{k}_u\Delta)/\Delta]\Delta| \le (2+[\eta])\Delta.
$$

Dakle, zaključuje se da je

$$
|k_u - \tilde{k}_u + [\delta(\tilde{k}_u\Delta)/\Delta]| \le 2+[\eta].
$$

Primenom prethodne nejednakosti, ocene (2.4.155) i Propozicije 2.3, sledi

$$
\begin{aligned}
&E|\bar{q}(u-\delta(u))-z_2(u)|^2 \\
&\quad\le 2E|\bar{q}(u-\delta(u)) - \bar{q}(k_u\Delta)|^2 \\
&\qquad +2(2+[\eta])^2 \sup_{t\in[-\delta(0),T]} E|z_1(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h)-z_1(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h-\Delta)|^2 \\
&\quad\le \alpha(h)\Delta + o(\Delta), \quad (2.4.180)
\end{aligned}
$$

gde je $\alpha(h) = 2(M(h) + (2 + [\eta])^2 A_1(h))$.

Zamenom (2.4.179) i (2.4.180) u (2.4.178), a zatim (2.4.176) – (2.4.178) u (2.4.175), sledi

$$\begin{aligned}
&EV(\bar{q}(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h)-z_3(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h), r(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h))\\
&\quad\le V(\varphi(0)-z_3(0), r(0)) + E\int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h} LV(\bar{q}(s),\bar{q}(s-\delta(s)),\bar{r}(s))ds\\
&\qquad +B_h^{(1)}T(D(h)\Delta+o(\Delta))^{\frac{1}{2}} + B_h^{(2)}TC(\Delta+o(\Delta))\\
&\qquad +B_h^{(3)}T(M(h)\Delta+o(\Delta))^{\frac{1}{2}} + B_h^{(3)}T(\alpha(h)\Delta+o(\Delta))^{\frac{1}{2}} + V_hT\bar{\gamma}. \qquad (2.4.181)
\end{aligned}$$

Uvodeći oznaku $G(h) = T(B_h^{(1)}(D(h))^{\frac{1}{2}} + B_h^{(2)}C + B_h^{(3)}(M(h))^{\frac{1}{2}} + B_h^{(3)}(\alpha(h))^{\frac{1}{2}} + V_h\bar{\gamma})$, izraz (2.4.175) se može napisati u obliku

$$\begin{aligned}
&EV(\bar{q}(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h)-z_3(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h), r(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h)) \qquad (2.4.182)\\
&\quad\le G(h)\Delta^{\frac{1}{2}} + (o(\Delta))^{\frac{1}{2}} + V(\varphi(0)-z_3(0), r(0))\\
&\qquad +E\int_0^{t\wedge\rho_h\wedge\nu_h} LV(\bar{q}(s),\bar{q}(s-\delta(s)),\bar{r}(s))ds.
\end{aligned}$$

Primenom (2.1.5) i (2.1.6) iz hipoteze $\mathcal{A}_2$ na prethodni izraz, sledi

$$\begin{aligned}
&EU_1(\bar{q}(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h)-z_3(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h), r(t\wedge\rho_h\wedge\nu_h)))\\
&\quad\le G(h)\Delta^{\frac{1}{2}} + (o(\Delta))^{\frac{1}{2}} + K' + c_1 t, \qquad (2.4.183)
\end{aligned}$$

pri čemu je $K' = V(\varphi(0)-z_3(0), r(0)) + c_3\int_{-\delta(0)}^0 U_2(y(s))ds$.

Ako se uvede ozaka $v_h = \inf_{|y|\ge(1-\beta)h} U_1(y)$, tada iz prethodne nejednakosti sledi

$$P\{\rho_h\wedge\nu_h\le T\} \le \frac{G(h)\Delta^{\frac{1}{2}} + (o(\Delta))^{\frac{1}{2}} + K' + c_1T}{v_h}.$$

Dalje, za svako $\varepsilon\in(0,1)$, postoji dovoljno veliko h^* takvo da, kad god je $h\ge h^*$, važi

$$\frac{K'+c_1T}{v_h}\le\varepsilon/2,$$

i može se izabati dovoljno malo Δ_* takvo da, za svako $\Delta\in(0,\Delta^*)$,

$$\frac{G(h)\Delta^{\frac{1}{2}} + (o(\Delta))^{\frac{1}{2}}}{v_h}\le\varepsilon/2,\quad h\ge h^*.$$

Zatim iz

$$P\{\rho_h\wedge\nu_h\le T\}\le\varepsilon,\quad \Delta\in(0,\Delta^*),\ h\ge h^*.$$

sledi

$$P\{\rho_h\le T\}\le\varepsilon,\quad \Delta\in(0,\Delta^*),\ h\ge h^*.$$

čime je dokaz završen. $\diamondsuit$

Imajući u vidu lokalni Lipschitzov uslov $\mathcal{A}_1$, sledi da za zadati početni uslov $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\delta(0),0];R^d)$, postoji jedinstveno lokalno maksimalno rešenje $x(t)$ na intervalu $t\in[-\delta(0),\tau_e)$, gde je τ_e vreme eksplozije. Neka je $k_0>0$ dovoljno veliko tako da je $\|\varphi\| = \sup_{t\in[-\delta(0),0]}|\varphi(t)| \le k_0$. Za svako $h\ge k_0$, definiše se vreme zaustavljanja

$$\tau_h = \inf\{t\in[0,\tau_e) : |x(t)|\ge h\},\quad \inf\emptyset=\infty. \tag{2.4.184}$$

Sada se može proceniti bliskost između rešenja x jednačine (2.4.118) i FBE rešenja jednačine (2.4.133).

Teorema 2.10 *Neka važe pretpostavke $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}'_3$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_7$ i $\mathcal{C}_1$. Dalje, neka je $\beta\in(0,\bar\beta)$, gde je $\bar\beta=(3+[\eta])^{-1}\wedge([(1-\eta)^{-1}]+1)^{-\frac12}$ i $f(0,0,i)=g(0,0,i)=0$, $i\in S$. Tada je*

$$\sup_{s\in[-\delta(0),T]} E|x(s\wedge\tau_h\wedge\rho_h)-\bar q(s\wedge\tau_h\wedge\rho_h)|^2 \le N(h)\Delta+o(\Delta),$$

gde je $N(h)$ konstanta koja zavisi od h, ali ne zavisi od Δ i pritom su ρ_h, τ_h vremena zaustavljanja definisana redom sa (2.4.135) i (2.4.184).

Dokaz. Za svako $t\in[0,T\wedge\tau_h\wedge\rho_h]$, koristeći jednačine (2.4.118) i (2.4.133) i primenjujući elementarnu nejednakost (1.9.55), za svako $\varepsilon\in(0,1)$, sledi

$$\begin{aligned}
&|x(t)-\bar q(t)|^2\\
&\le \frac{1}{\varepsilon}|u(x(t-\delta(t)),r(t))-z_3(t)-u(\varphi(-\delta(0)),r(0))+u(\bar q(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta),r^{\Delta}_{-1})|^2\\
&\quad+\frac{2}{1-\varepsilon}\bigg(T\int_0^t|f(x(s),x(s-\delta(s)),r(s))-f(z_1(s),z_2(s),\bar r(s))|^2ds\\
&\quad+\bigg|\int_0^t\Big(g(x(s),x(s-\delta(s)),r(s))-g(z_1(s),z_2(s)),\bar r(s)\Big)dw(s)\bigg|^2\bigg).
\end{aligned}\tag{2.4.185}$$

Primenjujući nejednakost (1.9.55) dva puta, kao i pretpostavku (2.1.8), dobija se

$$\begin{aligned}
&|u(x(t-\delta(t)),r(t))-z_3(t)-u(\varphi(-\delta(0)),r(0))+u(\bar q(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta),r^{\Delta}_{-1})|^2\\
&\le\frac{1}{\varepsilon}|u(x(t-\delta(t)),r(t))-z_3(t)|^2\\
&\quad+\frac{1}{1-\varepsilon}|u(\varphi(-\delta(0)),r(0))-u(\bar q(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta),r^{\Delta}_{-1})|^2\\
&\le\frac{1}{\varepsilon^2}|u(x(t-\delta(t)),r(t))-u(\bar q(t-\delta(t)),r(t))|^2+\frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}|u(\bar q(t-\delta(t)),r(t))-z_3(t)|^2\\
&\quad+\frac{1}{1-\varepsilon}|u(\varphi(-\delta(0)),r(0))-u(\bar q(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta),r^{\Delta}_{-1})|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{\beta^2}{\varepsilon^2}|x(t-\delta(t))-\bar{q}(t-\delta(t))|^2 + \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}|u(\bar{q}(t-\delta(t)), r(t)) - z_3(t)|^2 \\
&+\frac{1}{1-\varepsilon}|u(\varphi(-\delta(0)), r(0))-u(\bar{q}(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{-1})|^2. \qquad (2.4.186)
\end{aligned}
$$

Zamenom (2.4.186) u (2.4.185) sledi da je

$$
\begin{aligned}
|x(t)-\bar{q}(t)|^2 \leq &\frac{\beta^2}{\varepsilon^3}|x(t-\delta(t))-\bar{q}(t-\delta(t))|^2+\frac{1}{\varepsilon^2(1-\varepsilon)}|u(\bar{q}(t-\delta(t)), r(t))-z_3(t)|^2 \\
&+\frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}|u(\varphi(-\delta(0)), r(0))-u(q(-\Delta-[\delta(-\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{-1})|^2 \\
&+\frac{2}{1-\varepsilon}\Big(T\int_0^t |f(x(s), x(s-\delta(s)), r(s)) - f(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))|^2 ds \\
&+\Big|\int_0^t (g(x(s), x(s-\delta(s)), r(s)) - g(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s)))dw(s)\Big|^2\Big) \qquad (2.4.187)
\end{aligned}
$$

Na osnovu definicije neprekidnog FBE rešenja $\bar{q}$ je $\varphi(-\delta(0)) = \bar{q}(-\delta(0))$ i još je $u(\bar{q}(-\Delta-[\delta(0)/\Delta]\Delta, r^{\Delta}_{-1}) = z_3(0)$. Dalje, kako x i $\bar{q}$ zadovoljavaju isti početni uslov, na osnovu (2.4.187) važi da je

$$
\begin{aligned}
&\sup_{s\in[-\delta(0),t]} E|x(s)-\bar{q}(s)|^2 \\
&\quad\leq \frac{\beta^2}{\varepsilon^3}\sup_{s\in[-\delta(0),t]} E|x(s)-\bar{q}(s)|^2 \\
&\quad+\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2(1-\varepsilon)}\sup_{s\in[0,T]} E|u(\bar{q}(s\wedge\rho_h-\delta(s\wedge\rho_h)), r(s\wedge\rho_h))-z_3(s\wedge\rho_h)|^2 \\
&\quad+\frac{2}{1-\varepsilon}\Big(T\int_0^t E|f(x(s), x(s-\delta(s)), r(s)) - f(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))|^2 ds \\
&\quad+4\int_0^t E|g(x(s), x(s-\delta(s)), r(s)) - g(z_1(s), z_2(s), \bar{r}(s))|^2 ds\Big). \qquad (2.4.188)
\end{aligned}
$$

Primenjujući Propoziciju 2.4, birajući $\varepsilon = \beta^{\frac{1}{3}}$ i primenjujući lokalni Lipschitzov uslov $\mathcal{A}_1$, izraz (2.4.188) postaje

$$
\begin{aligned}
&\sup_{s\in[-\delta(0),t]} E|x(s)-\bar{q}(s)|^2 \\
&\quad\leq \frac{(1+\beta^{\frac{1}{3}})D(h)}{\beta^{\frac{2}{3}}(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\Delta + o(\Delta)) \\
&\quad+\frac{2(T+4)K_h}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\int_0^t(E|x(s)-z_1(s)|^2+E|x(s-\delta(s))-z_2(s))|^2)ds \\
&\quad+\frac{4T}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}\int_0^t E(|f(x(s), x(s-\delta(s)), r(s))|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+|f(x(s),x(s-\delta(s)),\bar r(s))|^2)I_{\{r(s)\neq\bar r(s)\}}ds\\
&+\frac{16}{(1-\beta^{\frac13})(1-\beta)}\int_0^t E(|g(x(s),x(s-\delta(s)),r(s))|^2\\
&+|g(x(s),x(s-\delta(s)),\bar r(s))|^2)I_{\{r(s)\neq\bar r(s)\}}ds. \qquad (2.4.189)
\end{aligned}
$$

Na osnovu pretpostavke $f(0,0,i)=g(0,0,i)=0$, Leme 2.2 i hipoteze $\mathcal{A}_1$, sledi da je

$$
\begin{aligned}
&\sup_{s\in[-\delta(0),t]} E|x(s)-\bar q(s)|^2\\
&\le \frac{(1+\beta^{\frac13})D(h)}{\beta^{\frac23}(1-\beta^{\frac13})(1-\beta)}\Delta+o(\Delta)\\
&+\frac{2(T+4)K_h}{(1-\beta^{\frac13})(1-\beta)}\int_0^t(E|x(s)-z_1(s)|^2+E|x(s-\delta(s))-z_2(s))|^2)ds\\
&+\frac{16(T+4)TCh^2K_h}{(1-\beta^{\frac13})(1-\beta)}\Delta. \qquad (2.4.190)
\end{aligned}
$$

Fiksira se proizvoljno $u\in[0,t]$ i neka je k_u ceo broj takav da je $u\in[k_u\Delta,(k_u+1)\Delta\wedge T\wedge\tau_h\wedge\rho_h)$. Pozivajući se na definiciju (2.4.126) stepenastog procesa z_1 i koristeći proceduru koja daje ocenu (2.4.154), za $s\in[0,t]$, važi

$$
\begin{aligned}
E|x(s)-z_1(s)|^2 &\le 2E|x(s)-\bar q(s)|^2+2E|\bar q(s)-z_1(s)|^2\\
&\le 2\sup_{u\in[-\delta(0),s]}E|x(u)-\bar q(u)|^2+2\sup_{u\in[0,s]}E|\bar q(u)-\bar q(k_u\Delta)|^2\\
&\le 2\sup_{u\in[-\delta(0),s]}E|x(u)-\bar q(u)|^2+2M(h)\Delta+o(\Delta). \qquad (2.4.191)
\end{aligned}
$$

Sa druge strane, primenjujući ocenu (2.4.180) sledi da je

$$
\begin{aligned}
E|x(s-\delta(s))-z_2(s)|^2 &\le 2E|x(s-\delta(s))-\bar q(s-\delta(s))|^2+2E|\bar q(s-\delta(s))-z_2(s)|^2\\
&\le 2E|x(s-\delta(s))-\bar q(s-\delta(s))|^2+2\alpha(h)\Delta+o(\Delta). \quad (2.4.192)
\end{aligned}
$$

Sada ocene (2.4.191) i (2.4.192) zajedno sa (2.4.189) daju

$$
\begin{aligned}
\sup_{s\in[-\delta(0),t]}E|x(s)-\bar q(s)|^2 \le{}& \frac{(1+\beta^{\frac13})D(h)+4\beta^{\frac23}(T+4)TK_h(M(h)+\alpha(h)+4Ch^2)}{\beta^{\frac23}(1-\beta^{\frac13})(1-\beta)}\Delta\\
&+o(\Delta)+\frac{8(T+4)K_h}{(1-\beta^{\frac13})(1-\beta)}\int_0^t\sup_{u\in[-\delta(0),s]}E|x(u)-\bar q(u)|^2ds.
\end{aligned}
$$

Primenom Gronwall-Bellmanove leme sledi

$$
\sup_{s\in[-\delta(0),T]}E|x(s\wedge\tau_h\wedge\rho_h)-\bar q(s\wedge\tau_h\wedge\rho_h)|^2\le N(h)\Delta+o(\Delta),
$$

gde je $N(h) = \frac{(1+\beta^{\frac{1}{3}})D(h)+4\beta^{\frac{2}{3}}(T+4)TK_h\big(M(h)+\alpha(h)+4Ch^2\big)}{\beta^{\frac{2}{3}}(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)} e^{M_1T}, M_1 = \frac{8(T+4)TK_h}{(1-\beta^{\frac{1}{3}})(1-\beta)}$, što je i trebalo dokazati.$\diamondsuit$

Sledeći rezultat se odnosi na konvergenciju u verovatnoći neprekidnog FBE rešenja $\bar{q}$ jednačine (2.4.133) ka rešenju x jednačine (2.4.118).

Teorema 2.11 *Neka važe pretpostavke $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}'_3$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_7$ i $\mathcal{C}_1$. Dalje, neka je $\beta \in (0, \bar{\beta})$, gde je $\bar{\beta} = (3+[\eta])^{-1} \wedge ([(1-\eta)^{-1}]+1)^{-\frac{1}{2}}$ i $f(0,0,i) = g(0,0,i) = 0$, $i \in S$. Tada, za svako $T > 0$ i $t \in [0,T]$, važi da je*

$$\lim_{\Delta \to 0} |x(t) - \bar{q}(t)| = 0 \quad \text{u verovatnoći.}$$

Dokaz prethodne teoreme je izostavljen jer se zasniva na ideji iz rada [65](videti Teoremu 4), odnosno na primeni Posledice 1 iz rada [73] i Teoreme 2.9.

Na osnovu definicije stepenastih procesa z_1 i $\bar{z}_1$ i jednačine (2.4.133), važi da se neprekidno FBE rešenje $\bar{q}(t), t \geq 0$ ne može odrediti, dok diskretno BE rešenje z_1 i diskretno FBE rešenje $\bar{z}_1$ mogu. U tom smislu, biće dokazano da z_1 i $\bar{z}_1$ takođe konvergiraju u verovatnoći ka rešenju x jednačine (2.4.118).

Teorema 2.12 *Neka važe pretpostavke $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}'_3$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_7$ i $\mathcal{C}_1$. Dalje, neka je $\beta \in (0, \bar{\beta})$, gde je $\bar{\beta} = (3 + [\eta])^{-1} \wedge ([(1-\eta)^{-1}] + 1)^{-\frac{1}{2}}$ i $f(0,0,i) = g(0,0,i) = 0$, $i \in S$. Tada, za svako $T > 0$ i $t \in [0,T]$,*

$$\lim_{\Delta \to 0} |x(t) - z_1(t)| = 0 \quad \text{u verovatnoći,} \tag{2.4.193}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} |x(t) - \bar{z}_1(t)| = 0 \quad \text{u verovatnoći,} \tag{2.4.194}$$

Primenjujući Teoremu 2.10, dokaz prethodne teoreme se zasniva na proceduri koja se koristi u radu [67] (Teorema 5).

Napomena 2.4 *Svi prethodni rezultati su prikazani za slučaj kada je funkcija kašnjenja neograničena, pri čemu je FBE metoda definisana na particiji*

$$k\Delta,\ k \in \{-(n_* + 1), -n_*, ..., -1, 0, 1, ...\}, \tag{2.4.195}$$

za $n_*\Delta = \delta(0)$.

Ako je funkcija kašnjenja $\delta(t)$ ograničena, u smislu

$$\overline{h} := \sup_{t \geq 0} \delta(t) < \infty, \tag{2.4.196}$$

tada je FBE metoda definisana na particiji (2.4.195), pri čemu je n_* izabrano tako da je $n_*\Delta = \overline{h}$. U tom slučaju je $t - \delta(t) \geq -\overline{h}, t \geq 0$. Zbog toga bi u Lemi 2.4 pretpostavku $\mathcal{A}'_3$ trebalo zameniti pretpostavkom $\mathcal{A}_6$. Dalje, Propozicije 2.3, 2.4 i 2.5, kao i Teoreme 2.9-2.12 važe kada se zameni pretpostavka $\mathcal{A}'_3$ pretpostavkama $\mathcal{A}_3$ i $\mathcal{A}_6$, pri čemu su rešenja x i $\bar{q}$ definisana na intervalu $[-\overline{h}, \infty)$ umesto na intervalu $[-\delta(0), \infty)$.

2.5 Skoro izvesna asimptotska eksponencijalna stabilnost backward Eulerove metode

Glavni cilj u ovom poglavlju je dokazivanje skoro izvesne asimptotske eksponencijalne stabilnosti backward Eulerovog aproksimativnog rešenja u slučaju kada je funkcija kašnjenja ograničena. Rezultat je dokazan bez primene uslova linearnog rasta za drift koeficijent. Zbog prisustva procesa Markova ovaj rezultat predstavlja proširenje rezultata iz rada [67], u kome su dokazani rezultati koji se odnose na BE metodu za klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem. Treba istaći da je u ovom poglavlju drugačiji pristup neutralnom članu prilikom definisanja aproksimativnog rešenja u odnosu na onaj u radu [67].

U prethodnom poglavlju BE rešenje je definisano kao

$$q(k\Delta) = \varphi(k\Delta),\ k = -n_*, -n_*+1, ..., 0, \tag{2.5.197}$$

dok je, za $k \in \{0, 1, 2, ...\}$,

$$\begin{aligned} &q((k+1)\Delta) \\ &\quad = q(k\Delta) + u(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k+1}) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k}) \\ &\qquad + f(q((k+1)\Delta), q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k+1})\Delta \\ &\qquad + g(q(k\Delta), q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^{\Delta}_{k})\Delta w_k. \end{aligned} \tag{2.5.198}$$

U daljem razmatranju važiće pretpostavka $u(0) = f(0,0) = g(0,0) = 0$.

Teorema 2.13 *Neka važe pretpostavke $\mathcal{A}_4$ i $\mathcal{C}_1$, zajedno sa (2.4.196). Pretpostavimo da postoje pozitivne konstante $\beta_i, i = 1, 2, ..., 6$, za koje je*

$$\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - (\beta_2 + \beta_4)([(1-\eta)^{-1}] + 1) > 0, \tag{2.5.199}$$

tako da, za svako $x, y \in R^d, i \in S$,

$$2(x - u(y,i))^T f(x,y,i) \le -\beta_1|x|^2 + \beta_2|y|^2. \tag{2.5.200}$$

$$|g(x,y,i)|^2 \le \beta_3|x|^2 + \beta_4|y|^2. \tag{2.5.201}$$

Neka je $\bar{\varepsilon}$ jedinstveno pozitivno rešenje jednačine

$$-\beta_1 + \beta_3 + 2\bar{\varepsilon} + ((\beta_2 + \beta_4 + 2\beta^2\bar{\varepsilon})([(1-\eta)^{-1}] + 1) + \beta_2)e^{\bar{\varepsilon}\bar{h}} = 0 \tag{2.5.202}$$

Tada, za svako $\delta \in (0, \bar{\varepsilon}/2)$, postoji $\gamma \in (0, -\frac{1}{\bar{h}} log\beta \wedge (\bar{\varepsilon} - 2\delta))$ i $\Delta_* < \frac{1-\beta}{\mu_1+\mu_2}$ tako da, za svako $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\bar{h}, 0]; R^d)$, BE rešenje ima osobinu

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log|q(k\Delta)|}{k\Delta} \le -\frac{\gamma}{2} \quad s.i, \tag{2.5.203}$$

kada je $\Delta \in (0, \Delta_*)$.

Dokaz. Uslovi Leme 2.3 su zadovoljeni, tako da je BE metoda (2.5.198) dobro definisana kada je $\Delta \in (0, \frac{1-\beta}{\mu_1+\mu_2})$. Na osnovu (2.5.198) i pretpostavke (2.5.200), sledi

$$
\begin{aligned}
&|q((k+1)\Delta) - u(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k+1}^{\Delta})|^2 \\
&\quad = (q((k+1)\Delta) - u(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k+1}^{\Delta}))^T \\
&\qquad f(q((k+1)\Delta), q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k+1}^{\Delta})\Delta \\
&\quad +(q((k+1)\Delta) - u(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k+1}^{\Delta}))^T \\
&\qquad q(k\Delta) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta}) + g(q(k\Delta), q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta})\Delta w_k \\
&\quad \le -\frac{\beta_1}{2}|q((k+1)\Delta)|^2\Delta + \frac{\beta_2}{2}|q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\Delta \\
&\quad +\frac{1}{2}|q((k+1)\Delta) - u(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k+1}^{\Delta})|^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}|q(k\Delta) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta}) \\
&\quad +g(q(k\Delta), q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta})\Delta w_k|^2 \\
&\quad \le -\frac{\beta_1}{2}|q((k+1)\Delta)|^2\Delta + \frac{\beta_2}{2}|q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\Delta \\
&\quad +\frac{1}{2}|q((k+1)\Delta) - u(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k+1}^{\Delta})|^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}|q(k\Delta) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta})|^2 \\
&\quad +\frac{1}{2}|g(q(k\Delta), q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta})|^2\Delta + m_k
\end{aligned}
\tag{2.5.204}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
m_k = &\frac{1}{2}|q((k+1)\Delta) - u(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k+1}^{\Delta})|^2[|\Delta w_k|^2 - \Delta] \\
&+\langle q(k\Delta) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta}), g(q(k\Delta), q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta})\Delta w_k\rangle
\end{aligned}
$$

lokalni martingal.

Na osnovu uslova (2.5.201) važi

$$
\begin{aligned}
&|q((k+1)\Delta) - u(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k+1}^{\Delta})|^2 \\
&\quad -|q(k\Delta) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta})|^2 \\
&\quad \le -\beta_1|q((k+1)\Delta)|^2\Delta + \beta_2|q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\Delta \\
&\quad +\beta_3|q(k\Delta)|^2\Delta + \beta_4|q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\Delta + 2m_k.
\end{aligned}
\tag{2.5.205}
$$

Tada, primenom (2.1.8) i (2.5.205), za svako $C \ge 1$, dobija se

$$
C^{(k+1)\Delta}|q((k+1)\Delta) - u(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta), r_{k+1}^{\Delta})|^2
$$

$$
\begin{aligned}
&-C^{k\Delta}|q(k\Delta)-u(q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta),r_k^{\Delta})|^2\\
&= C^{(k+1)\Delta}\Big[|q((k+1)\Delta)-u(q((k+1)\Delta-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta),r_{k+1}^{\Delta})|^2\\
&\quad -|q(k\Delta)-u(q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta),r_k^{\Delta})|^2\Big]\\
&\quad +(C^{(k+1)\Delta}-C^{k\Delta})|q(k\Delta)-u(q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta),r_k^{\Delta})|^2\\
&\le C^{(k+1)\Delta}[-\beta_1|q((k+1)\Delta)|^2\Delta+\beta_2|q((k+1)\Delta-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\Delta\\
&\quad +\beta_3|q(k\Delta)|^2\Delta+\beta_4|q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\Delta+2m_k\\
&\quad +(1-C^{-\Delta})(2|q(k\Delta)|^2+2\beta^2|q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2)].
\end{aligned}
$$

Odatle sledi da je

$$
\begin{aligned}
&C^{k\Delta}|q(k\Delta)-u(q(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta),r_k^{\Delta})|^2\\
&\quad\le |q(0)-u(q(-[\delta(0)/\Delta]\Delta),r_0^{\Delta})|^2-\beta_1\Delta\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|q((i+1)\Delta)|^2\\
&\quad +(\beta_3\Delta+2(1-C^{-\Delta}))\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|q(i\Delta)|^2\\
&\quad +\beta_2\Delta\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|q((i+1)\Delta-[\delta((i+1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2\\
&\quad +(\beta_4\Delta+2\beta^2(1-C^{-\Delta}))\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|q(i\Delta-[\delta(i\Delta)/\Delta]\Delta)|^2+M_k
\end{aligned}
\tag{2.5.206}
$$

gde je

$$M_k = 2\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}m_i$$

lokalni martingal i $M_0 = 0$. Potrebno je uočiti da je

$$
\begin{aligned}
&-\beta_1\Delta\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|q((i+1)\Delta)|^2\\
&\quad = -\beta_1\Delta C^{-\Delta}\sum_{i=1}^{k}C^{(i+1)\Delta}|q(i\Delta)|^2\\
&\quad = \beta_1\Delta|q(0)|^2-\beta_1\Delta C^{-\Delta}\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|q(i\Delta)|^2-\beta_1\Delta C^{k\Delta}|q(k\Delta)|^2.
\end{aligned}
\tag{2.5.207}
$$

Slično se može zaključiti da je

$$\beta_2\Delta\sum_{i=0}^{k-1}C^{(i+1)\Delta}|q((i+1)\Delta-[\delta((i+1)\Delta)/\Delta]\Delta)|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= -\beta_2\Delta|q(-[\delta(0)/\Delta]\Delta)|^2 + \beta_2\Delta C^{-\Delta}\sum_{i=0}^{k-1} C^{(i+1)\Delta}|q(i\Delta - [\delta(i\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\
&+\beta_2\Delta C^{k\Delta}|q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2. \qquad (2.5.208)
\end{aligned}
$$

Primenjujući (2.5.207) i (2.5.208), ocena (2.5.206) postaje

$$
\begin{aligned}
&C^{k\Delta}|q(k\Delta) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^\Delta)|^2 \\
&\leq |q(0) - u(q(-[\delta(0)/\Delta]\Delta), r_0^\Delta)|^2 + \beta_1\Delta|q(0)|^2 - \beta_2\Delta|q(-[\delta(0)/\Delta]\Delta)|^2 \\
&\quad +(-\beta_1\Delta C^{-\Delta} + \beta_3\Delta + 2(1 - C^{-\Delta}))\sum_{i=0}^{k-1} C^{(i+1)\Delta}|q(i\Delta)|^2 \\
&\quad +(\beta_2\Delta C^{-\Delta} + \beta_4\Delta + 2\beta^2(1 - C^{-\Delta}))\sum_{i=0}^{k-1} C^{(i+1)\Delta}|q(i\Delta - [\delta(i\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\
&\quad -\beta_1\Delta C^{k\Delta}|q(k\Delta)|^2 + \beta_2\Delta C^{k\Delta}|q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 + M_k. \qquad (2.5.209)
\end{aligned}
$$

Primenom uslova (2.4.196) i Leme 2.5 na drugu sumu na desnoj strani nejednakosti (2.5.209), sledi

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} C^{(i+1)\Delta}|q(i\Delta - [\delta(i\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 &\leq C^{\bar{h}}\sum_{i=0}^{k-1} C^{(i+1-[\delta(i\Delta)/\Delta])\Delta}|q(i\Delta - [\delta(i\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\
&\leq ([(1-\eta)^{-1}] + 1)C^{\bar{h}}\sum_{i=-n^*}^{k-1} C^{(i+1)\Delta}|q(i\Delta)|^2.
\end{aligned}
$$

Pored toga važi da je

$$
\begin{aligned}
&\beta_2\Delta C^{k\Delta}|q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\
&\quad \leq \beta_2\Delta C^{k\Delta}|q(k\Delta)|^2 + \beta_2\Delta C^{k\Delta}|q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 I_{\{[\delta(k\Delta)/\Delta]\neq 0\}},
\end{aligned}
$$

dok je

$$
\begin{aligned}
&C^{k\Delta}|q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 I_{\{[\delta(k\Delta)/\Delta]\neq 0\}} \\
&\quad \leq C^{(\bar{h}-\Delta)}C^{(k-[\delta(k\Delta)/\Delta]+1)\Delta}|q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\
&\quad \leq C^{(\bar{h}-\Delta)}\sum_{i=-n^*}^{k-1} C^{(i+1)\Delta}|q(i\Delta)|^2.
\end{aligned}
$$

Dakle, važi

$$
\begin{aligned}
&\beta_2\Delta C^{k\Delta}|q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)|^2 \\
&\quad \leq \beta_2\Delta C^{k\Delta}|q(k\Delta)|^2 + \beta_2\Delta C^{(\bar{h}-\Delta)}\sum_{i=-n^*}^{k-1} C^{(i+1)\Delta}|q(i\Delta)|^2. \qquad (2.5.210)
\end{aligned}
$$

Dalje, imajući u vidu da je $n_*\Delta = \bar{h}$, (2.5.209) se može oceniti kao

$$(\beta_1 - \beta_2)\Delta C^{k\Delta}|q(k\Delta)|^2 + C^{k\Delta}|q(k\Delta) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta})|^2 \\ \leq X + h(C,\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} C^{i\Delta}|q(i\Delta)|^2 + M_k, \tag{2.5.211}$$

gde je

$$X = |q(0) - u(q(-[\delta(0)/\Delta]\Delta), r_0^{\Delta})|^2 + \beta_1\Delta|q(0)|^2 - \beta_2\Delta|q(-[\delta(0)/\Delta]\Delta)|^2 \\ +[(\beta_2\Delta C^{-\Delta} + \beta_4\Delta + 2\beta^2(1 - C^{-\Delta}))([(1-\eta)^{-1}] + 1) \\ +\beta_2\Delta C^{-\Delta}]C^{\bar{h}} \sum_{i=-n^*}^{-1} C^{(i+1)\Delta}|\varphi(i\Delta)|^2 < \infty$$

i

$$h(C,\Delta) = (-\beta_1\Delta + \beta_3\Delta C^{\Delta} + 2(C^{\Delta} - 1)) \\ +[(\beta_2\Delta + \beta_4\Delta C^{\Delta} + 2\beta^2(C^{\Delta} - 1))([(1-\eta)^{-1}] + 1) + \beta_2\Delta]C^{\bar{h}}. \tag{2.5.212}$$

Primenom pretpostavke (2.5.199), može se uočiti da iz (2.5.211) sledi

$$C^{k\Delta}|q(k\Delta) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta})|^2 \\ \leq X + h(C,\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} C^{i\Delta}|q(i\Delta)|^2 + M_k. \tag{2.5.213}$$

Za svako $\Delta \in (0, \frac{1-\beta}{\mu_1+\mu_2})$ i $C \geq 1$,

$$\frac{d}{dC}h(C,\Delta) \\ = \beta_3\Delta^2 C^{\Delta-1} + 2\Delta C^{\Delta-1} + (\beta_4\Delta^2 C^{\Delta-1} + 2\beta^2\Delta C^{\Delta-1})([(1-\eta)^{-1}] + 1)C^{\bar{h}} \\ +[(\beta_2\Delta + \beta_4\Delta C^{\Delta} + 2\beta^2(C^{\Delta} - 1))([(1-\eta)^{-1}] + 1) + \beta_2\Delta]\bar{h}C^{\bar{h}} > 0.$$

Pritom, važi da je

$$h(1,\Delta) = -(\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - (\beta_2 + \beta_4)([(1-\eta)^{-1}] + 1)\Delta.$$

Na osnovu pretpostavke (2.5.199) sledi da je $h(1,\Delta) < 0$ za svako $\Delta \in (0, \frac{1-\beta}{\mu_1+\mu_2})$. Dakle, postoji jedinstveno $C_{\Delta}^* > 1$ tako da je $h(C_{\Delta}^*, \Delta) = 0$. Dalje, (2.5.213) postaje

$$C_{\Delta}^{*k\Delta}|q(k\Delta) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta})|^2 \leq X + M_k. \tag{2.5.214}$$

Na osnovu Leme 2 iz rada [66], važi da je

$$\limsup_{k\to\infty} C_{\Delta}^{*k\Delta}|q(k\Delta) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r_k^{\Delta})|^2 \leq \limsup_{k\to\infty}(X + M_k) < \infty \ \ s.i$$

Neka je $h_1(\mu, \Delta) = h(C, \Delta)/\Delta$, pri čemu je $\mu = \log C$. Tada je $h_1(\mu^*_\Delta, \Delta) = 0$ i

$$\lim_{\Delta\to 0} h_1(\mu, \Delta) = -\beta_1 + \beta_3 + 2\mu + ((\beta_2 + \beta_4 + 2\beta^2\mu)([(1-\eta)^{-1}] + 1) + \beta_2)e^{\mu\bar{h}}.$$

Kako jednačina (2.5.202) ima jedinstveno pozitivno rešenje $\bar{\varepsilon}$, može se zaključiti da je

$$\lim_{\Delta\to 0} \mu^*_\Delta = \bar{\varepsilon}.$$

Tada, za svako $\delta \in (0, \bar{\varepsilon}/2)$, postoji Δ_1 tako da je, za svako $\Delta \in (0, \Delta_1 \wedge \frac{1-\beta}{\mu_1+\mu_2})$,

$$\mu^*_\Delta > \bar{\varepsilon} - 2\delta.$$

Kako je

$$\limsup_{k\to\infty} e^{\mu^*_\Delta k\Delta} |q(k\Delta) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k)|^2 < \infty \quad s.i,$$

dobija se, za svako $\Delta \in (0, \Delta_*)$ gde je $\Delta_* = \Delta_1 \wedge \frac{1-\beta}{\mu_1+\mu_2}$, da je

$$\bar{\sigma} = \limsup_{k\to\infty} e^{(\bar{\varepsilon}-2\delta)k\Delta} |q(k\Delta) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k)|^2 < \infty \;\; s.i.$$

Za svako $\gamma \in (0, -\frac{1}{\bar{h}}\log\beta \wedge (\bar{\varepsilon} - 2\delta))$, postoji ceo broj k_1 tako da je

$$e^{\gamma k\Delta} |q(k\Delta) - u(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta), r^\Delta_k)|^2 \le \bar{\sigma} + \gamma,\; k \ge k_1.$$

Nadalje, primenjujući proceduru iz dokaza Teoreme 6 iz rada [67], dobija se da je

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log(e^{\gamma k\Delta}|q(k\Delta)|^2)}{k\Delta} = 0,$$

što daje (2.5.203). $\diamondsuit$

Sledeći primer ilustruje prethodni rezultat.

Primer 2.2 *Razmatra se jednačina (2.1.1), odnosno skalarna neutralna stochastička diferencijalna jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova, sa početnim uslovom* $\varphi(t) = 1$, $t \in [-\delta(0), 0]$, *pri čemu je* $\bar{h} = \delta(0) = \frac{2}{5}$ *i* $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\delta(0), 0]; R)$. *Dalje, neka je* $\omega(t)$ *skalarno Brownovo kretanje i* $r(t)$ *neprekidan s desna proces Markova sa skupom stanja* $S = \{1, 2\}$ *i generatorom*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Proces Markova je nezavisan od Brownovog kretanja i $r(0) = 1$.

Definiše se funkcija kašnjenja $\delta(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cos t,\ t \geq 0,$ *dok je*

$$u(y,1) = \frac{1}{30}\sin y, \quad u(y,2) = \frac{1}{20}\sin y,$$
$$f(x,y,1) = -3x - 3x^3 - y, \quad f(x,y,2) = -4x - 4x^3 - \sin y,$$
$$g(x,y,1) = \frac{1}{5}\frac{x}{1+y^4}\cos y, \quad g(x,y,2) = \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{x}{1+y^2}\sin y.$$

Tada se (2.1.1) može predstaviti kao

$$d\Big[x(t) - \frac{1}{30}\sin x(t-\delta(t))\Big] \tag{2.5.215}$$
$$= \Big(-3x(t) - 3x^3(t) - x(t-\delta(t))\Big)dt + \frac{1}{5}\frac{x(t)}{1+x^4(t-\delta(t))}\cos x(t-\delta(t))dw(t),\ t \geq 0,$$

$$d\Big[x(t) - \frac{1}{20}\sin x(t-\delta(t))\Big] \tag{2.5.216}$$
$$= \Big(-4x(t) - 4x^3(t) - \sin x(t-\delta(t))\Big)dt + \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{x(t)}{1+x^2(t-\delta(t))}\sin x(t-\delta(t))dw(t),$$
$$t \geq 0.$$

Koeficijenti jednačina (2.5.215) i (2.5.216) zadovoljavaju lokalni Lipschitzov uslov $\mathcal{A}_1$*, dok funkcije* $u(y,1) = \frac{1}{30}\sin y$, $u(y,2) = \frac{1}{20}\sin y$ *zadovoljavaju pretpostavku* $\mathcal{A}_4$ *za* $\beta = \frac{1}{20}$. *Kako je* $\delta(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cos t,\ t \geq 0,$ *važi da je*

$$|\delta'(t)| = \Big|\frac{1}{5}\sin t\Big| \leq \frac{1}{5} = \bar{\delta}$$

i pritom važi pretpostavka $\mathcal{A}_3$.

Primenjujući elementarnu nejednakost (1.9.57) za $x, y \in R$*, dobija se da je*

$$\begin{aligned}
&2(x - u(y,1))f(x,y,1)\\
&\quad= -6x^2 - 6x^4 - 2xy + \frac{1}{5}x\sin y + \frac{1}{5}x^3\sin y + \frac{2}{30}y\sin y\\
&\quad\leq -6x^2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{10}(x^2+y^2) + \frac{1}{5}(x^4)^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{5}(\sin^4 y)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{15}y^2\\
&\quad\leq -\frac{49}{10}x^2 + \frac{73}{60}y^2
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&2(x - u(y,2))f(x,y,2)\\
&\quad= -8x^2 - 8x^4 - 2x\sin y + \frac{2}{5}x\sin y + \frac{2}{5}x^3\sin y + \frac{1}{10}\sin^2 y\\
&\quad\leq -8x^2 + x^2 + y^2 + \frac{2}{10}(x^2+y^2) + \frac{2}{5}(x^4)^{\frac{3}{4}} + \frac{2}{5}(\sin^4 y)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{10}y^2\\
&\quad\leq -\frac{68}{10}x^2 + \frac{14}{10}y^2.
\end{aligned}$$

Tada je $2(x-u(y,i))f(x,y,i) \leq -\frac{49}{10}x^2 + \frac{14}{10}y^2$ *i* $|g(x,y,i)|^2 \leq \frac{1}{10}|x|^2 + \frac{1}{10}|y|^2$, $i \in S$.

Sledi da važi pretpostavka Posledice 2.2 za $\beta_1 = \frac{49}{10}, \beta_2 = \frac{14}{10}, \beta_3 = \frac{1}{10}, \beta_4 = \frac{1}{10}$. *Dakle, postoji jedinstveno rešenje jednačine (2.1.1) i* ε *tako da je*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log|x(t)|}{t} \leq -\frac{\varepsilon}{2} \quad s.i.$$

Diskretno BE rešenje definisano je sa $q(k\Delta) = \varphi(k\Delta)$, $k = -n_*, -n_*+1, ..., 0$, *dok je za* $k = 0, 1, 2, ...$, *ako je* $r^{\Delta}_{k+1} = r^{\Delta}_k = 1$,

$$\begin{aligned} &q((k+1)\Delta) \\ &\quad = q(k\Delta) + \frac{1}{30}\sin(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta)) - \frac{1}{30}\sin(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)) \\ &\quad + \Big(-3q((k+1)\Delta) - 3q^3((k+1)\Delta) - q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta)\Big)\Delta \\ &\quad + \frac{1}{5}\frac{q(k\Delta)}{1+q^4(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)}\cos(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_k, \end{aligned} \tag{2.5.217}$$

ako je $r^{\Delta}_{k+1} = r^{\Delta}_k = 2$,

$$\begin{aligned} &q((k+1)\Delta) \\ &\quad = q(k\Delta) + \frac{1}{20}\sin(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta)) - \frac{1}{20}\sin(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)) \\ &\quad + \Big(-4q((k+1)\Delta) - 4q^3((k+1)\Delta) - \sin(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta))\Big)\Delta \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{q(k\Delta)}{1+q^2(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)}\sin(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_k, \end{aligned} \tag{2.5.218}$$

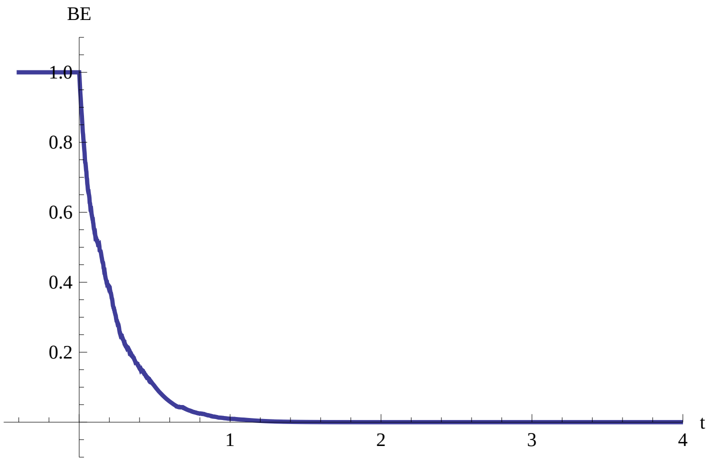
ako je $r^{\Delta}_{k+1} = 1, r^{\Delta}_k = 2$,

$$\begin{aligned} &q((k+1)\Delta) \\ &\quad = q(k\Delta) + \frac{1}{30}\sin(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta)) - \frac{1}{20}\sin(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)) \\ &\quad + \Big(-3q((k+1)\Delta) - 3q^3((k+1)\Delta) - q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta)\Big)\Delta \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{q(k\Delta)}{1+q^2(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)}\sin(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_k, \end{aligned} \tag{2.5.219}$$

i ako je $r^{\Delta}_{k+1} = 2, r^{\Delta}_k = 1$,

$$\begin{aligned} &q((k+1)\Delta) \\ &\quad = q(k\Delta) + \frac{1}{20}\sin(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta)) - \frac{1}{30}\sin(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)) \\ &\quad + \Big(-4q((k+1)\Delta) - 4q^3((k+1)\Delta) - \sin(q((k+1)\Delta - [\delta((k+1)\Delta)/\Delta]\Delta))\Big)\Delta \\ &\quad + \frac{1}{5}\frac{q(k\Delta)}{1+q^4(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)}\cos(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_k. \end{aligned} \tag{2.5.220}$$

Na Slici 2.2 predstavljena je trajektorija BE rešenja za $\Delta = 0.002$.



Slika 2.2: Trajektorija BE rešenja za $\Delta = 0.002$

Nadalje, kako za svako $x_1, x_2, y \in R^d$, *važi da je*

$$\begin{aligned}
&\langle x_1 - x_2, f(x_1, y, 1) - f(x_2, y, 1)\rangle \\
&\qquad = -3\langle x_1 - x_2, (x_1 - x_2)(1 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)\rangle \leq -3|x_1 - x_2|^2, \\
&\langle x_1 - x_2, f(y, x_1, 1) - f(y, x_2, 1)\rangle \\
&\qquad = -\langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle \leq -|x_1 - x_2|^2,
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&\langle x_1 - x_2, f(x_1, y, 2) - f(x_2, y, 2)\rangle \\
&\qquad = -4\langle x_1 - x_2, (x_1 - x_2)(1 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)\rangle \leq -4|x_1 - x_2|^2, \\
&\langle x_1 - x_2, f(y, x_1, 2) - f(y, x_2, 2)\rangle \\
&\qquad = -\langle x_1 - x_2, \sin x_1 - \sin x_2\rangle \leq -|x_1 - x_2|^2,
\end{aligned}$$

sledi da $\mathcal{C}_1$ *važi za svako pozitivno* μ_1 *i* μ_2. *Dakle, biraju se* $\mu_1 = \frac{1}{2}$ *i* $\mu_2 = \frac{1}{3}$, *tako da je* $(\mu_1+\mu_2)\Delta+\beta < 1$ *za svako* $\Delta \in (0, 1)$. *Pritom se na osnovu Leme 2.3, zaključuje da odgovarajuće BE aproksimativne jednačine imaju jedinstvena rešenja.*

Može se uočiti

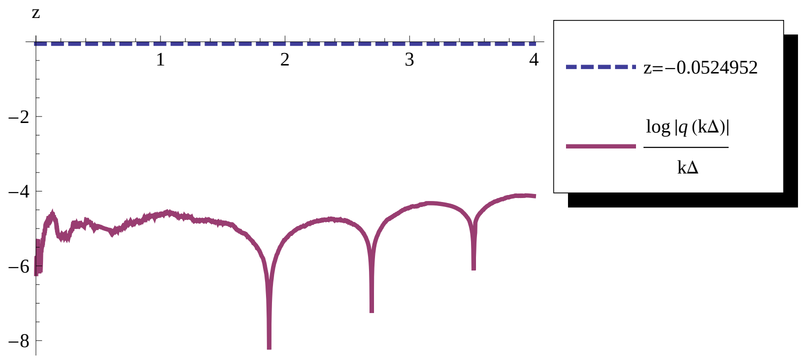
$$|\delta(t) - \delta(s)| \leq \frac{1}{5}|t - s|, \quad t, s \geq 0.$$

Tada se može zaključiti da važe pretpostavke $\mathcal{A}_6$ *i (2.5.199) za* $\eta = \frac{1}{5}$. *Sve pretpostavke Teoreme 2.13 su ispunjene. Jedinstveno pozitivno rešenje jednačine (2.5.202) je* $\bar{\varepsilon} = 0.105044$. *Tada, za svako* $\delta \in (0, 0.052522)$, *postoji* $\gamma \in (0, 7.48933 \wedge (\bar{\varepsilon} - 2\delta))$ *i* $\Delta_* \in (0, 1)$, *tako da je za svako* $\Delta \in (0, \Delta_*)$

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log|q(k\Delta)|}{k\Delta} \leq -\frac{\gamma}{2} \ s.i. \tag{2.5.221}$$

Birajući $\Delta = 0.002$, *dobija se da je* $\delta = 0.000027$. *Tada, (2.5.221) važi za svako* $\frac{\gamma}{2} \in (0, 0.0524952)$.

U cilju ilistracije prethodne nejednakosti, na Slici 2.3 je prikazana trajektorija količnika $\frac{\log|q(k\Delta)|}{k\Delta}$ *u odnosu na pravu* $z = -0.0524952$.



Slika 2.3: Trajektorije količnika $\frac{\log|q(k\Delta)|}{k\Delta}$ u poređenju sa pravom $z = -0.0524952$.

FBE rešenje je definisano sa $\bar{q}(k\Delta) = \varphi(k\Delta)$, $k = -n_*, -n_* + 1, ..., 0$, *dok je za* $k = 0, 1, 2, ...$, *ako je* $r_k^\Delta = r_{k-1}^\Delta = 1$,

$$\begin{aligned}
&\bar{q}((k+1)\Delta) \\
&\quad = \bar{q}(k\Delta) + \frac{1}{30}\sin(\bar{q}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)) - \frac{1}{30}\sin(\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)) \\
&\quad + \Big(-3q(k\Delta) - 3q^3(k\Delta) - q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)\Big)\Delta \\
&\quad + \frac{1}{5}\frac{q(k\Delta)}{1 + q^4(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)}\cos(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_k,
\end{aligned} \tag{2.5.222}$$

ako je $r_k^\Delta = r_{k-1}^\Delta = 2$,

$$\begin{aligned}
&\bar{q}((k+1)\Delta) \\
&\quad = \bar{q}(k\Delta) + \frac{1}{20}\sin(\bar{q}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)) - \frac{1}{20}\sin(\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta)) \\
&\quad + \Big(-4q(k\Delta) - 4q^3(k\Delta) - \sin(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))\Big)\Delta \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{q(k\Delta)}{1 + q^2(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)}\sin(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_k,
\end{aligned} \tag{2.5.223}$$

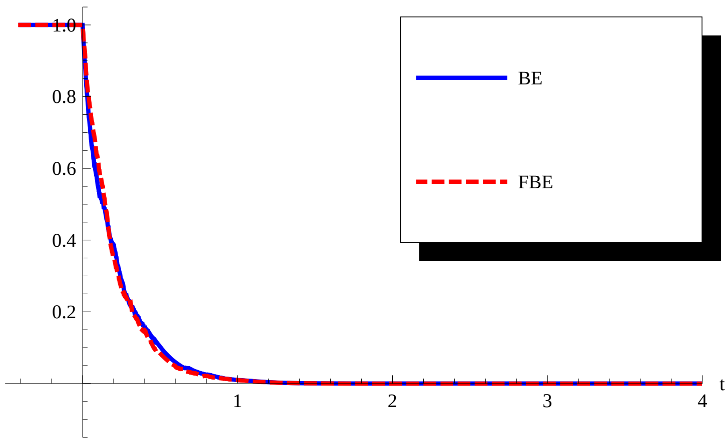
ako je $r_k^\Delta = 1, r_{k-1}^\Delta = 2$,

$$\begin{aligned}
&\bar{q}((k+1)\Delta) \\
&\quad = \bar{q}(k\Delta) + \frac{1}{30}\sin(\bar{q}(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)) - \frac{1}{20}\sin(\bar{q}((k-1)\Delta - [\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta))
\end{aligned}$$

$$+\Big(-3q(k\Delta)-3q^3(k\Delta) - q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)\Big))\Delta$$
$$+\frac{1}{5}\frac{q(k\Delta)}{1+q^4(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)}\cos(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_k \qquad (2.5.224)$$

i ako je $r_k^\Delta = 2, r_{k-1}^\Delta = 1,$

$$\bar{q}((k+1)\Delta)$$
$$= \bar{q}(k\Delta)+\frac{1}{20}\sin(\bar{q}(k\Delta-[\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))-\frac{1}{30}\sin(\bar{q}((k-1)\Delta-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]\Delta))$$
$$+\Big(-4q(k\Delta)-4q^3(k\Delta) - \sin(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))\Big)\Delta$$
$$+\frac{1}{\sqrt{10}}\frac{q(k\Delta)}{1+q^2(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta)}\sin(q(k\Delta - [\delta(k\Delta)/\Delta]\Delta))\Delta w_k. \qquad (2.5.225)$$



Slika 2.4: Trajektorije BE i FBE rešenja za $\Delta = 0.002$

Na Slici 2.4 je ilustrovana bliskost između BE i FBE rešenja sa odgovarajućim trajektorijama za $\Delta = 0.002$.

Glava 3

Skoro izvesna eksponencijalna stabilnost θ-Euler-Maruyamine metode za neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem

Predmet razmatranja u ovoj glavi je θ-Euler-Maruyamina metoda za klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem. Ova metoda se razmatra posebno za slučaj kada je $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ i za slučaj kada je $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$. Kada je $\theta = 0$, θ-Euler-Maruyamina metoda se svodi na Euler-Maruyaminu metodu, dok za $\theta = 1$, θ-Euler-Maruyamina metoda se svodi na backward Eulerovu metodu. U Poglavlju 3.1 su navedeni osnovni pojmovi, hipoteze i neki od postojećih rezultata koji se primenjuju pri dokazivanju glavnih rezultata u ovoj glavi. Rezultati sadržani u Poglavljima 3.2-3.4 su objavljeni u radu [74]. U Poglavlju 3.2 se razmatra egzistencija i jedinstvenost θ-Euler-Maruyaminog rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem za $\theta \in (0, 1]$, kao i skoro izvesna eksponencijalna stabilnost tog rešenja za $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$. Zbog prisustva vremenski-zavisnog kašnjenja u koeficijentu prenosa i u neutralnom članu, tehnika koja se koristi u dokazivanju skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti se razlikuje od drugih koje su korišćene za neke druge klase neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina. Pored toga, između ostalih uslova, prisutan je i uslov linearnog rasta za koeficijent prenosa. Kako bi ispitivanje skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti bilo kompletno, u Poglavlju 3.3 se posebno razmatra slučaj kada je $\theta = 0$, odnosno Euler-Maruyamin slučaj. Nakon toga, u Poglavlju 3.4 je predstavljen primer sa numeričkim simulacijama koji ilustruje teorijske rezultate iz Poglavlja 3.2. Rezultati predstavljeni u Poglavljima 3.5-3.7 su objavljeni u radu [75]. θ-Euler-

Maruyamina metoda za klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem za slučaj kada je $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, pri čemu važe uslovi nelinearnog rasta, razmatra se u Poglavlju 3.5, dok je u Poglavlju 3.6 predstavljen deterministički slučaj. Glavna motivacija potiče iz rada [42], čiji su autori G. Lan i C. Yuan, gde je razmatrana θ-metoda, pri čemu je $\theta \in (\frac{1}{2}, 1]$, za klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa konstantnim kašnjenjem i prelazima Markova. U tom radu predstavljeni su rezultati eksponencijalne stabilnosti θ-Euler-Maruyaminog rešenja bez uslova linearnog rasta za koeficijent prenosa i koeficijent difuzije. U radu [67], predstavljena je backward Eulerova metoda za klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem, a rezultat skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti je dokazan bez uslova linearnog rasta za koeficijent prenosa. Tehnika koja je primenjena u ovom poglavlju je drugačija nego u radu [67] i predstavlja proširenje rezultata skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti iz tog rada. Imajuči u vidu da je backward Eulerova metoda specijalni slučaj θ-metode, kada je $\theta = 1$, rezultati stabilnosti u ovom poglavlju su dati pod malo strožim uslovima u poređenju sa onim iz radova [42] i [67], jer je u aproksimativnoj jednačini osim koeficijenta prenosa i neutralni član parametrizovan pomoću θ. U Poglavlju 3.7 je naveden primer sa numeričkim simulacijama koji ilustruje teorijske rezultate iz Poglavlja 3.5. Rezultati navedeni u Poglavlju 3.8 su sadržani u radu [76] koji je u pripremi. U tom poglavlju se razmatra skoro izvesna asimptotska eksponencijalna stabilnost diskretnog θ-Euler-Maruyaminog aproksimativnog rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem za $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, pod uslovom linearnog rasta.

3.1 Uvodni pojmovi i rezultati

U ovoj glavi će biti korišćene oznake koje su uvedene u Glavi 2.

Od značaja je funkcija kašnjenja $\delta : R_+ \to [0, \tau]$, koja je Borel-merljiva, pri čemu je $R_+ = [0, \infty)$, gde je $\tau > 0$.

Predmet razmatranja je sledeća neutralna stohastička diferencijalna jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem

$$d[x(t)-u(x(t-\delta(t)), t)] = f(x(t), x(t-\delta(t)), t)dt + g(x(t), x(t-\delta(t)), t)dw(t) \tag{3.1.1}$$

za $t \geq 0$, sa početnim uslovom

$$x_0 = \varphi = \{\varphi(t) : t \in [-\tau, 0]\} \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R^d). \tag{3.1.2}$$

Pritom su

$$f : R^d \times R^d \times R_+ \to R^d,\ g : R^d \times R^d \times R_+ \to R^{d\times m},\ u : R^d \times R_+ \to R^d$$

Borel-merljive funkcije i $\{x(t), t \geq -\tau\}$ je d-dimenzionalni stohastički proces koji predstavlja stanje sistema čija je evolucija opisana jednačinom (3.1.1).

U nastavku će biti uvedene pretpostavke koje se eksplicitno primenjuju u cilju dokazivanja glavnih rezultata, odnosno skoro izvesne eksponencijalne stabilnost θ-Euler-Maruyamine metode za različite vrednosti parametra θ i pod različitim uslovima.

$\mathcal{A}_1$: Postoji pozitivna konstanta K tako da, za svako $x, y \in R^d$ i svako $t \geq 0$, važi

$$|f(x,y,t)|^2 \leq K(|x|^2 + |y|^2). \tag{3.1.3}$$

$\mathcal{A}_2$: Postoji konstanta $\beta \in (0,1)$ tako da, za svako $x, y \in R^d$ i svako $t \geq 0$, važi

$$|u(x,t) - u(y,t)| \leq \beta|x - y|. \tag{3.1.4}$$

Pritom, ako je $u(0,t) = 0$, $t \geq 0$, tada iz pretpostavke (3.1.4) za svako $x \in R^d$, sledi da je

$$|u(x,t)| \leq \beta|x|. \tag{3.1.5}$$

$\mathcal{A}_3$: Funkcija kašnjenja $\delta : R_+ \to [0,\tau]$ je diferencijabilna i $|\delta'(t)| \leq \eta,\ t \geq 0$, pri čemu je $\eta \in (0,1)$.

Može se uočiti da pretpostavka $\mathcal{A}_3$ implicira da je

$$|\delta(t) - \delta(s)| \leq \eta|t - s|,\ t, s \geq 0. \tag{3.1.6}$$

$\mathcal{A}_4$: Neka postoje konstante α_1 i α_2, $\alpha_1 > \frac{\alpha_2}{1-\eta} > 0$, tako da za svako $x, y \in R^d$ i svako $t \geq 0$, važi

$$2(x - u(y,t))^T f(x,y,t) + |g(x,y,t)|^2 \leq -\alpha_1|x|^2 + \alpha_2|y|^2. \tag{3.1.7}$$

Pritom je

$$f(0,0,t) = g(0,0,t) = u(0,t) = 0,\ t \geq 0. \tag{3.1.8}$$

U radovima [65] i [66], čiji je autor M. Milošević, može se zaključiti da hipoteze $\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_4$, zajedno sa lokalnim Lipschitzovim uslovom za f i g i pretpostavkom (3.1.8), garantuju egzistenciju u jedinstvenost globalnog rešenja jednačine (3.1.1), koje je skoro izvesno eksponencijalno stabilno. Rezultati iz rada [66] zahtevaju uslov $\mathcal{A}_4$, kao i uslov linearnog rasta $\mathcal{A}_1$ za koeficijent prenosa jednačine (3.1.1), u cilju dokazivanja skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti Euler-Maruyaminog rešenja.

Rezultati predstavljeni u Poglavlju 3.2 su proširenje rezultata stabilnosti Euler-Maruyaminog rešenja iz rada [66]. Potrebno je naglasiti da se tehnika koja se primenjuje u Poglavlju 3.2 razlikuje u odnosu na tehniku iz rada [66], kao i da se zasniva na pretpostavci da je $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$. Slučaj kada je $\theta = 0$ se razmatra posebno u Poglavlju 3.3.

Jednačine koje određuju θ-Euler-Maruyamino rešenje su implicitne i prvo treba dokazati egzistenciju i jedinstvenost tog rešenja. Zbog toga se uvode jednostrani Lipschitzovi uslovi po prvom i drugom argumentu funkcije f, koji su dati pretpostavkom $\mathcal{C}_1$.

$\mathcal{C}_1$: Neka je $f \in C(R^d \times R^d \times R_+; R^d)$ i neka postoje konstante $\mu_1, \mu_2 > 0$ tako da, za svako $x, y, z \in R^d$ i svako $t \geq 0$, važi

$$\langle x - y, f(x, z, t) - f(y, z, t)\rangle \leq \mu_1 |x - y|^2, \tag{3.1.9}$$

$$\langle x - y, f(z, x, t) - f(z, y, t)\rangle \leq \mu_2 |x - y|^2. \tag{3.1.10}$$

Sledeća lema i Lema 2.5 se primenjuju u dokazima stabilnosti θ-Euler-Maruyaminog rešenja.

Lema 3.1 *Na osnovu elementarne nejednakost (1.9.54) i pretpostavke (3.1.5), ako je $\varepsilon = \beta$, tada je, za svako $x, y \in R^d$, $t \geq 0$,*

$$|x - u(y, t)|^p \leq (1 + \beta)^{p-1}(|x|^p + \beta^{-1}|y|^p). \tag{3.1.11}$$

Neka je $[\cdot]$ funkcija koja realnom broju pridružuje ceo deo tog broja.

3.2 Skoro izvesna eksponencijalna stabilnost θ-Euler-Maruyaminog rešenja za $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$

U ovom poglavlju se razmatra egzistencija i jedinstvenost θ-Euler-Maruyaminog rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem za $\theta \in (0, 1]$, kao i skoro izvesna eksponencijalna stabilnost tog rešenja za $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$.

Razmatra se autonomna verzija jednačine (3.1.1), čiji je integralni oblik

$$\begin{aligned} x(t) = \varphi(0) + u(x(t - \delta(t))) - u(x(-\delta(0))) + \int_0^t f(x(s), x(s - \delta(s)))ds \\ + \int_0^t g(x(s), x(s - \delta(s)))dw(s), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

sa početnim uslovom $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-\tau, 0]$.

Pretpostavlja se da umesto uslova $\mathcal{A}_1$–$\mathcal{A}_4$, (3.1.8) i $\mathcal{C}_1$, važe njihove autonomne verzije.

Bira se veličina koraka $\Delta \in (0, 1)$, za koji važi $\Delta = \tau/n_*$, za neki prirodan broj $n_* > \tau$. Definiše se diskretno θ-Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje q koje odgovara jednačini (3.2.12) na ekvidistantnoj particiji

$$k\Delta,\ k = -(n_* + 1), -n_*, ..., -1, 0, 1, ...$$

vremenskog intervala $[0,\infty)$. Da bi ovo rešenje bilo dobro definisano, potrebno je uvesti oznake

$$\delta(-\Delta)=\delta(0), \quad q_{-(n_*+1)\Delta}=\varphi(-n_*\Delta). \tag{3.2.13}$$

Diskretno θ-Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje se definiše kao

$$q_k=\varphi(k\Delta),\ k=-n_*,-n_*+1,...,0, \tag{3.2.14}$$

dok je, za $k\in\{0,1,2,...\}$,

$$\begin{aligned}q_{k+1}&=q_k+\theta u(q_{k+1-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]})+(1-\theta)u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})-\theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\\&\quad-(1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})+\theta f(q_{k+1},q_{k+1-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]})\Delta\\&\quad+(1-\theta)f(q_k,q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\Delta+g(q_k,q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\Delta w_k,\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

gde je $\Delta w_k=w((k+1)\Delta)-w(k\Delta)$.

Motivacija za definisanje θ-Euler-Maruyamine metode je iz činjenice da za $\theta=0$, izraz (3.2.15) postaje

$$\begin{aligned}q_{k+1}&=q_k+u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})-u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})\\&\quad+f(q_k,q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\Delta+g(q_k,q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\Delta w_k,\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

što je Euler-Maruyamina aproksimacija koja je razmatrana u radu [66].

Sa druge strane, za $\theta=1$, izraz (3.2.15) se svodi na

$$\begin{aligned}q_{k+1}&=q_k+u(q_{k+1-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]})-u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\\&\quad+f(q_{k+1},q_{k+1-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]})\Delta+g(q_k,q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\Delta w_k,\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

što predstavlja backward Eulerovu metodu iz rada [67].

Zbog pojednostavljenja, uvode se oznake

$$\begin{aligned}z_k&=q_k-(1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})-\theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})-\theta f(q_k,q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\Delta,\\f_k&=f(q_k,q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}),\\g_k&=g(q_k,q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}).\end{aligned}$$

Tada se jednačina (3.2.15) može napisati u obliku

$$z_{k+1}=z_k+f_k\Delta+g_k\Delta w_k, \quad k\in\{0,1,2,...\}. \tag{3.2.18}$$

Kao što je pomenuto u uvodu, prvo treba odrediti dovoljne uslove egzistencije i jedinstvenosti θ-Euler-Maruyaminog aproksimativnog rešenja jednačine (3.2.15), odnosno egzistencije i jedinstvenosti rešenja jednačine oblika

$$x=\tilde{d}+\theta(\Delta f(x,a)I_{A^c}+\Delta f(x,x)I_A+u(x)I_A), \quad x\in R^d, \tag{3.2.19}$$

za dato $a,\tilde{d}\in R^d$, gde je $I_A=1$ ako je $[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]=0$ i $I_A=0$, u suprotnom.

Sledećom lemom su predstavljene egzistencija i jedinstvenost rešenja jednačine (3.2.19) za svako $\theta\in(0,1]$. Dokaz leme za slučaj kada je $\theta=1$ može se naći u radu [67].

Lema 3.2 *Pretpostavlja se da važi uslov (3.1.4) i pretpostavka $\mathcal{C}_1$. Ako je $\theta((\mu_1 + \mu_2)\Delta + \beta) < 1$, tada postoji jedinstveno rešenje jednačine (3.2.19).*

Dokaz. Jedinstvenost rešenja jednačine (3.2.19) se dokazuje direktno. Dakle, ako se pretpostavi da su x i y rešenja jednačine (3.2.19), tada na osnovu uslova (3.1.4), (3.1.9) i (3.1.10), za svako $a, \tilde{d} \in R^d$, važi da je

$$
\begin{aligned}
&|x-y|^2\\
&\quad = \theta\Big[\Delta I_{A^c}\langle x-y, f(x,a)-f(y,a)\rangle + \Delta I_A\langle x-y, f(x,x)-f(y,y)\rangle\\
&\qquad + I_A\langle x-y, u(x)-u(y)\rangle\Big]\\
&\quad \le \theta\Big[\Delta\mu_1 I_{A^c}|x-y|^2 + \Delta I_A\langle x-y, f(x,x)-f(x,y)\rangle\\
&\qquad + \Delta I_A\langle x-y, f(x,y)-f(y,y)\rangle + I_A\beta|x-y|^2\Big]\\
&\quad \le \theta\Big[\Delta\mu_1 I_{A^c}|x-y|^2 + \Delta\mu_2 I_A|x-y|^2 + \Delta\mu_1 I_A|x-y|^2 + I_A\beta|x-y|^2\Big]\\
&\quad \le \theta((\mu_1+\mu_2)\Delta + \beta)|x-y|^2.
\end{aligned}
$$

Imajući u vidu pretpostavku $\theta((\mu_1 + \mu_2)\Delta + \beta) < 1$, zaključuje se da je $x = y$.

Da bi se dokazala egzistencija rešenja jednačine (3.2.19), uvodi se oznaka

$$
R = \frac{\theta|\Delta f(\tilde{d}, a)I_{A^c} + \Delta f(\tilde{d}, \tilde{d})I_A + u(\tilde{d})I_A|}{1 - \theta((\mu_1 + \mu_2)\Delta + \beta)}.
$$

Zatim se definišu sfera $B = \{x \in R^d : |x - \tilde{d}| \le R\}$ i funkcije $H : R^d \to B,\ G : B \to B$, tako da je

$$
H(x) = \tilde{d} + R\frac{x - \tilde{d}}{R \vee |x - \tilde{d}|},\ x \in R^d, \tag{3.2.20}
$$

$$
G(x) = H(\tilde{d} + \theta(\Delta f(x,a)I_{A^c} + \Delta f(x,x)I_A + u(x)I_A)),\ x \in B. \tag{3.2.21}
$$

Kako je B kompaktan i konveksan skup i G neprekidna funkcija na B, iz Teoreme 1.8 sledi da postoji fiksna tačka $x^* = G(x^*)$.

Ako se pretpostavi da je

$$
\theta|\Delta f(x^*, a)I_{A^c} + \Delta f(x^*, x^*)I_A + u(x^*)I_A| > R, \tag{3.2.22}
$$

tada

$$
\begin{aligned}
x^* = G(x^*) &= H\Big(\tilde{d} + \theta(\Delta f(x^*, a)I_{A^c} + \Delta f(x^*, x^*)I_A + u(x^*)I_A)\Big)\\
&= \tilde{d} + R\frac{\Delta f(x^*, a)I_{A^c} + \Delta f(x^*, x^*)I_A + u(x^*)I_A}{|\Delta f(x^*, a)I_{A^c} + \Delta f(x^*, x^*)I_A + u(x^*)I_A|},
\end{aligned} \tag{3.2.23}
$$

implicira da je $|x^* - \tilde{d}| = R$.

Sa druge strane, na osnovu (3.2.23) važi da je

$$\frac{|\Delta f(x^*,a)I_{A^c}+\Delta f(x^*,x^*)I_A+u(x^*)I_A|}{R}(x^*-\tilde{d})=\Delta f(x^*,a)I_{A^c}+\Delta f(x^*,x^*)I_A+u(x^*)I_A.$$

Na osnovu postupka iz rada [67] (Lema 1), dobija se da je

$$|\Delta f(x^*,a)I_{A^c} + \Delta f(x^*,x^*)I_A + u(x^*)I_A| \leq R,$$

što je kontradikcija u odnosu na pretpostavku (3.2.22), s obzirom na to da je $\theta \in (0,1]$. Tada se zaključuje da je $\theta|\Delta f(x^*,a)I_{A^c} + \Delta f(x^*,x^*)I_A + u(x^*)I_A)| \leq R$. Na osnovu definicija (3.2.20) i (3.2.21) važi da je

$$\begin{aligned} x^* &= H\Big(\tilde{d} + \theta(\Delta f(x^*,a)I_{A^c} + \Delta f(x^*,x^*)I_A + u(x^*)I_A)\Big) \\ &= \tilde{d} + \theta(\Delta f(x^*,a)I_{A^c} + \Delta f(x^*,x^*)I_A + u(x^*)I_A), \end{aligned}$$

odnosno, x^* je jedinstveno rešenje jednačine (3.2.19). $\diamondsuit$

Cilj je ispitati pod kojim je uslovima θ-Euler-Maruyamino rešenje, definisano sa (3.2.13)-(3.2.15), skoro izvesno asimptotski eksponencijalno stabilno u smislu sledeće definicije.

Definicija 3.1 *Rešenje q_k jednačine (3.2.15) je skoro izvesno asimptotski eksponencijalno stabilno ako postoji konstanta $\varepsilon > 0$ tako da*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log|q_k|}{k\Delta} \leq -\varepsilon \ s.i.$$

za svaki ograničen početni uslov φ.

Sledećom teoremom je dokazana globalna skoro izvesna asimptotska eksponencijalna stabilnost diskretnog θ-Euler-Maruyaminog rešenja kada je $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$, za dovoljno mali korak Δ.

Teorema 3.1 *Pretpostavlja se da su zadovoljeni uslovi Leme 3.2, kao i hipoteze $\mathcal{A}_1$–$\mathcal{A}_4$. Pored toga, neka je $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ i neka je*

$$\beta \in \left(0, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right), \tag{3.2.24}$$

$$\alpha_1 > \max\left\{K+\Big(K+\alpha_2+4\beta^2(1-\theta)^2\Big)([(1-\eta)^{-1}]+1), 2\theta K+\alpha_2+4\beta^2\frac{(1-\theta)^2}{\theta}\right\} \tag{3.2.25}$$

Tada postoji $\Delta^* \in (0,1)$ tako da je θ-Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje, definisano sa (3.2.13)-(3.2.15), skoro izvesno asimptotski eksponencijalno stabilno, kada je $\Delta \in (0, \Delta^*)$.

Dokaz. Na osnovu (3.2.15) i (3.2.18) važi da je

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}|^2 = & |z_k|^2 + [2(q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^T f_k \\
& + |g_k|^2 + (1-2\theta)|f_k|^2\Delta]\Delta + m_k, \\
= & |z_k|^2 + [2(q_k - u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^T f_k + |g_k|^2 + (1-2\theta)|f_k|^2\Delta]\Delta \\
& + 2(1-\theta)(u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}))^T f_k\Delta + m_k, \qquad (3.2.26)
\end{aligned}$$

gde je

$$m_k = |g_k\Delta w_k|^2 - |g_k|^2\Delta + 2(z_k + f_k\Delta)^T g_k\Delta w_k. \qquad (3.2.27)$$

Primenom pretpostavki $\mathcal{A}_4$ i $\mathcal{A}_2$, kao i pretpostavke $\mathcal{A}_1$ u izrazu (3.2.26), za $\alpha_1 > \frac{\alpha_2}{1-\eta} > 0$ i $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$, sledi da je

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}|^2 \leq & |z_k|^2 + (-\alpha_1|q_k|^2 + \alpha_2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 + (1-2\theta)|f_k|^2\Delta)\Delta \\
& + 2\beta(1-\theta)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]} - q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}||f_k|\Delta + m_k \\
\leq & |z_k|^2 + (-\alpha_1|q_k|^2 + \alpha_2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 + (1-2\theta)|f_k|^2\Delta)\Delta \\
& + (\beta^2(1-\theta)^2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]} - q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + |f_k|^2)\Delta + m_k \\
\leq & |z_k|^2 - \alpha_1|q_k|^2\Delta + \alpha_2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta + (1-2\theta)K|q_k|^2\Delta^2 \\
& + (1-2\theta)K|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta^2 + 2\beta^2(1-\theta)^2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta \\
& + 2\beta^2(1-\theta)^2|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta + K|q_k|^2\Delta + K|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta + m_k \qquad (3.2.28)
\end{aligned}$$

Ocena (3.2.28) se može eksplicitno predstaviti u obliku

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}|^2 \leq & |z_k|^2 + \Big(\alpha_2 + (1-2\theta)K\Delta + 2\beta^2(1-\theta)^2 + K\Big)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta \\
& + 2\beta^2(1-\theta)^2|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta \\
& + \Big(-\alpha_1 + (1-2\theta)K\Delta + K\Big)|q_k|^2\Delta + m_k. \qquad (3.2.29)
\end{aligned}$$

Tada, za prozvoljnu konstantu $A > 1$, važi da je

$$\begin{aligned}
& A^{(k+1)\Delta}|z_{k+1}|^2 - A^{k\Delta}|z_k|^2 \\
& \quad \leq A^{(k+1)\Delta}|z_k|^2(1 - A^{-\Delta}) + [-\alpha_1 + (1-2\theta)K\Delta + K]\,\Delta A^{(k+1)\Delta}|q_k|^2 \\
& \quad + \Big[\alpha_2 + (1-2\theta)K\Delta + 2\beta^2(1-\theta)^2 + K\Big]\,\Delta A^{(k+1)\Delta}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
& \quad + 2\beta^2(1-\theta)^2\Delta A^{(k+1)\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + A^{(k+1)\Delta}m_k. \qquad (3.2.30)
\end{aligned}$$

Zbog pojednostavljenja, uvode se oznake

$$\begin{aligned}
R_1(\Delta) &= 1 - A^{-\Delta}, \\
R_2(\Delta) &= -\alpha_1 + (1-2\theta)K\Delta + K, \\
R_3(\Delta) &= \alpha_2 + (1-2\theta)K\Delta + 2\beta^2(1-\theta)^2 + K.
\end{aligned}$$

Na osnovu (3.2.30) sledi da je

$$\begin{aligned}A^{k\Delta}|z_k|^2 \le |z_0|^2 &+ R_1(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|z_i|^2 + R_2(\Delta)\Delta\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2 \\ &+R_3(\Delta)\Delta\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \\ &+2\beta^2(1-\theta)^2\Delta\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-1-[\delta((i-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + M_k, \qquad (3.2.31)\end{aligned}$$

pri čemu je

$$M_k = \sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta} m_i$$

lokalni martingal i $M_0 = 0$.

Na osnovu definicije z_k i elementarne nejednakosti (1.9.54) za $\varepsilon = \beta$, važi da je

$$|z_k|^2 \le (1+\beta)|q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 + \frac{1+\beta}{\beta}|\theta f_k \Delta|^2.$$

Primenom pretpostavke $\mathcal{A}_1$, nejednakosti (1.9.54), Leme 3.1 i pretpostavke $\mathcal{A}_2$, sledi da je

$$\begin{aligned}|z_k|^2 &\le (1+\beta)|q_k - u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) + (1-\theta)(u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}))|^2 \\ &\quad + \frac{1+\beta}{\beta}\theta^2 K(|q_k|^2 + |q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2)\Delta^2 \\ &\le (1+\beta)^2|q_k - u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 \\ &\quad + \frac{(1+\beta)^2}{\beta}(1-\theta)^2|u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}))|^2 \\ &\quad + \frac{1+\beta}{\beta}\theta^2 K(|q_k|^2 + |q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2)\Delta^2 \\ &\le (1+\beta)^3\left(|q_k|^2 + \beta|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\right) \\ &\quad + \beta(1+\beta)^2(1-\theta)^2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]} - q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2 \\ &\quad + \frac{1+\beta}{\beta}\theta^2 K(|q_k|^2 + |q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2)\Delta^2 \\ &\le (1+\beta)^3\left(|q_k|^2 + \beta|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\right) \\ &\quad + 2\beta(1+\beta)^2(1-\theta)^2\left(|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 + |q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2\right) \\ &\quad + \frac{1+\beta}{\beta}\theta^2 K(|q_k|^2 + |q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2)\Delta^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left((1+\beta)^3 + \frac{1+\beta}{\beta}\theta^2 K\Delta^2 \right) |q_k|^2 \\
&+ \left(\beta(1+\beta)^3 + 2\beta(1+\beta)^2(1-\theta)^2 + \frac{1+\beta}{\beta}\theta^2 K\Delta^2 \right) |q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&+ 2\beta(1+\beta)^2(1-\theta)^2 |q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2. \qquad (3.2.32)
\end{aligned}
$$

Tada se zamenom (3.2.32) u (3.2.31) dobija

$$
\begin{aligned}
A^{k\Delta}|z_k|^2 \leq |z_0|^2 &+ K_1(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2 + K_2(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&+ K_3(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-1-[\delta((i-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + M_k, \qquad (3.2.33)
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
K_1(\Delta) &= R_1(\Delta)\left((1+\beta)^3 + \frac{1+\beta}{\beta}\theta^2 K\Delta^2 \right) + R_2(\Delta)\Delta, \\
K_2(\Delta) &= R_1(\Delta)\left(\beta(1+\beta)^3 + 2\beta(1+\beta)^2(1-\theta)^2 + \frac{1+\beta}{\beta}\theta^2 K\Delta^2 \right) + R_3(\Delta)\Delta, \\
K_3(\Delta) &= 2R_1(\Delta)\beta(1+\beta)^2(1-\theta)^2 + 2\beta^2(1-\theta)^2\Delta.
\end{aligned}
$$

Kako je $K_3(\Delta) > 0$, imajući u vidu (3.2.13), zaključuje se da je

$$
\begin{aligned}
&K_3(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-1-[\delta((i-1)\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\qquad \leq K_3(\Delta)A^{\Delta}|q_{-1-[\delta(0)/\Delta]}|^2 + K_3(\Delta)A^{\Delta}\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2.
\end{aligned}
$$

Tada (3.2.33) postaje

$$
\begin{aligned}
&A^{k\Delta}|z_k|^2 \\
&\leq |z_0|^2 + K_1(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2 + (K_2(\Delta) + K_3(\Delta)A^{\Delta})\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\quad + K_3(\Delta)A^{\Delta}|q_{-1-[\delta(0)/\Delta]}|^2 + M_k. \qquad (3.2.34)
\end{aligned}
$$

Primenom Leme 2.5 na drugu sumu na desnoj strani nejednakosti (3.2.34), sledi da je

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 &\leq A^{n_*\Delta}\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i-[\delta(i\Delta)/\Delta]+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\leq ([(1-\eta)^{-1}] + 1)A^{n_*\Delta}\sum_{i=-n_*}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2. \qquad (3.2.35)
\end{aligned}
$$

Imajući u vidu da je $n_*\Delta = \tau, K_2(\Delta) > 0$ i $K_3(\Delta) > 0$, na osnovu ocene (3.2.35), izraz (3.2.34) se može predstaviti u obliku

$$A^{k\Delta}|z_k|^2 \leq X + h(A,\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2 + M_k, \tag{3.2.36}$$

gde je za svako $\Delta \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} X &= |z_0|^2 + K_3(\Delta)A^{\Delta}|q_{-1-[\delta(0)/\Delta]}|^2 \\ &\quad +(K_2(\Delta) + K_3(\Delta)A^{\Delta})([(1-\eta)^{-1}]+1)A^{\tau}\sum_{i=-n_*}^{-1} A^{(i+1)\Delta}|\varphi(i\Delta)|^2 < \infty, \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

i

$$\begin{aligned} h(A,\Delta) &= K_1(\Delta) + (K_2(\Delta) + K_3(\Delta)A^{\Delta})([(1-\eta)^{-1}]+1)A^{\tau} \\ &= (1-A^{-\Delta})\left((1+\beta)^3 + \frac{1+\beta}{\beta}\theta^2 K\Delta^2\right) + (-\alpha_1 + (1-2\theta)K\Delta + K)\Delta \\ &\quad +\Big[(1-A^{-\Delta})\left(\beta(1+\beta)^3 + 2\beta(1+\beta)^2(1-\theta)^2 + \frac{1+\beta}{\beta}\theta^2 K\Delta^2\right) \\ &\quad +(\alpha_2 + (1-2\theta)K\Delta + 2\beta^2(1-\theta)^2 + K)\Delta \\ &\quad +(2(1-A^{-\Delta})\beta(1+\beta)^2(1-\theta)^2 + 2\beta^2(1-\theta)^2\Delta)A^{\Delta}\Big]([(1-\eta)^{-1}]+1)A^{\tau}. \end{aligned}$$

Može se primetiti da je

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dA}h(A,\Delta) \\ &\quad= \Delta A^{-\Delta-1}\left((1+\beta)^3 + \frac{1+\beta}{\beta}\theta^2 K\Delta^2\right) \\ &\quad +\Big[(1-A^{-\Delta})\left(\beta(1+\beta)^3 + 2\beta(1+\beta)^2(1-\theta)^2 + \frac{1+\beta}{\beta}\theta^2 K\Delta^2\right) \\ &\quad +(\alpha_2 + (1-2\theta)K\Delta + 2\beta^2(1-\theta)^2 + K)\Delta \\ &\quad +(2(1-A^{-\Delta})\beta(1+\beta)^2(1-\theta)^2 + 2\beta^2(1-\theta)^2\Delta)A^{\Delta}\Big]([(1-\eta)^{-1}]+1)\tau A^{\tau-1} \\ &\quad +([(1-\eta)^{-1}]+1)A^{\tau}\Big[\Delta A^{-\Delta-1}\left(\beta(1+\beta)^3 + 2\beta(1+\beta)^2(1-\theta)^2 + \frac{1+\beta}{\beta}\theta^2 K\Delta^2\right) \\ &\quad +\Big(2(1-A^{-\Delta})\beta(1+\beta)^2(1-\theta)^2 + 2\beta^2(1-\theta)^2\Delta\Big)\Delta A^{\Delta-1} \\ &\quad +2\Delta A^{-1}\beta(1+\beta)^2(1-\theta)^2\Big] > 0. \end{aligned}$$

Sa druge strane, važi da je

$$\begin{aligned} h(1,\Delta) &= (-\alpha_1 + (1-2\theta)K\Delta + K)\Delta \\ &\quad +((1-2\theta)K\Delta + K + \alpha_2 + 4\beta^2(1-\theta)^2)([(1-\eta)^{-1}]+1)\Delta. \end{aligned}$$

Primenom uslova (3.2.25) sledi da postoji

$$\Delta_1 = \frac{\alpha_1 - K - \Big(K + \alpha_2 + 4\beta^2(1-\theta)^2\Big)([(1-\eta)^{-1}] + 1)}{(1-2\theta)K([(1-\eta)^{-1}] + 2)},$$

tako da, za svako $\Delta \in (0, \Delta^*)$, gde je $\Delta^* = \Delta_1 \wedge 1$, važi da je $h(1, \Delta) < 0$. Pritom je za svaki korak $\Delta \in (0, \Delta^*)$, funkcija $h(A, \Delta)$ neprekidna u odnosu na $A \in (1, +\infty)$ i teži ka $+\infty$ kada $A \to +\infty$. Dakle, postoji jedinstveno $\bar{A} = \bar{A}(\Delta) > 1$, za koje je $h(\bar{A}, \Delta) = 0$, pri čemu je $h(A, \Delta) \leq 0$ kada je $A \in (1, \bar{A}]$.

Na osnovu ocene (3.2.36) zaključuje se da je, za svako $\Delta \in (0, \Delta^*)$ i svako $A \in (1, \bar{A}]$,

$$A^{k\Delta}|z_k|^2 \leq X + M_k. \tag{3.2.38}$$

Na osnovu Diskretne verzije teoreme o konvergenciji semi-martingala (Teoreme 1.7), važi da je

$$\limsup_{k\to\infty} A^{k\Delta}|z_k|^2 \leq \limsup_{k\to\infty}(X + M_k) < \infty \;\; s.i. \tag{3.2.39}$$

Imajući u vidu definiciju z_k, pretpostavku $\mathcal{A}_4$ i nejednakost (1.9.54) za $\varepsilon = \beta$, dobija se

$$\begin{aligned}
|z_k|^2 \geq\; & |q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 \\
& -2\theta\Delta(q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^T f_k \\
=\; & |q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 \\
& -2\theta\Delta(q_k - u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^T f_k \\
& -2\theta(1-\theta)\Delta(u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}))^T f_k \\
\geq\; & \frac{1}{1+\beta}|q_k|^2 - \frac{1}{\beta}|(1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) + \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 \\
& +\alpha_1\theta\Delta|q_k|^2 - \alpha_2\theta\Delta|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
& -(1-\theta)^2\Delta|u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2 - \theta^2\Delta|f_k|^2.
\end{aligned}$$

Primenom uslova (3.1.4) i (3.1.5) sledi da je

$$\begin{aligned}
|z_k|^2 \geq\; & \frac{1}{1+\beta}|q_k|^2 - 2(1-\theta)^2\beta|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 - 2\theta^2\beta|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
& +\alpha_1\theta\Delta|q_k|^2 - \alpha_2\theta\Delta|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 - (1-\theta)^2\beta^2\Delta(2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
& +2|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2) - \theta^2 K\Delta(|q_k|^2 + |q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2) \\
=\; & \left(\frac{1}{1+\beta} + \alpha_1\theta\Delta - \theta^2 K\Delta\right)|q_k|^2 \\
& + \Big(-2\theta^2\beta - \alpha_2\theta\Delta - 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta - \theta^2 K\Delta\Big)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
& + \Big(-2(1-\theta)^2\beta - 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta\Big)|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2.
\end{aligned} \tag{3.2.40}$$

Zamenom izraza (3.2.40) u (3.2.38), može se zaključiti da je

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{1+\beta}+\alpha_1\theta\Delta-\theta^2K\Delta\Big)A^{k\Delta}|q_k|^2\\&\qquad\le\Big(2\theta^2\beta+\alpha_2\theta\Delta+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta+\theta^2K\Delta\Big)\,A^{k\Delta}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\\&\qquad\quad+2(1-\theta)^2\beta\,(1+\beta\Delta)\,A^{k\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2+X+M_k,\end{aligned}$$

za svako $A\in(1,\bar{A}]$. Dakle, za svako $\gamma\in(0,\log\bar{A})$, postoji prirodan broj k_1 takav da za svaki prirodan broj $k_2>k_1$, važi da je

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{1+\beta}+\alpha_1\theta\Delta-\theta^2K\Delta\Big)\sup_{k_1\le k\le k_2}e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2\\&\le\Big(2\theta^2\beta+\alpha_2\theta\Delta+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta+\theta^2K\Delta\Big)\sup_{k_1\le k\le k_2}e^{\gamma k\Delta}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\\&\quad+2(1-\theta)^2\beta\,(1+\beta\Delta)\sup_{k_1\le k\le k_2}e^{\gamma k\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2+\sup_{k_1\le k\le k_2}(X+M_k)\\&\le\Big(2\theta^2\beta+\alpha_2\theta\Delta+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta+\theta^2K\Delta\Big)\,e^{\gamma\tau}\sup_{k_1\le k\le k_2}e^{\gamma(k-[\delta(k\Delta)/\Delta])\Delta}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\\&\quad+2(1-\theta)^2\beta\,(1+\beta\Delta)\,e^{\gamma(\tau+1)}\sup_{k_1\le k\le k_2}e^{\gamma(k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta])\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\\&\quad+\sup_{k_1\le k\le k_2}(X+M_k)\\&\le\Big(2\theta^2\beta+\alpha_2\theta\Delta+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta+\theta^2K\Delta\Big)\\&\quad\times\left(e^{\gamma\tau}\sup_{k_1-n_*\le k\le k_1-1}e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2+e^{\gamma\tau}\sup_{k_1\le k\le k_2}e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2\right)\\&\quad+2(1-\theta)^2\beta\,(1+\beta\Delta)\left(e^{\gamma(\tau+1)}\sup_{k_1-n_*-1\le k\le k_1-1}e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2+e^{\gamma(\tau+1)}\sup_{k_1\le k\le k_2}e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2\right)\\&\quad+\sup_{k_1\le k\le k_2}(X+M_k),\end{aligned}$$

što implicira

$$\begin{aligned}&l(\Delta)\sup_{k_1\le k\le k_2}e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2\\&\quad\le\Big(2\theta^2\beta+\alpha_2\theta\Delta+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta+\theta^2K\Delta\Big)\,e^{\gamma\tau}\sup_{k_1-n_*\le k\le k_1-1}e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2\\&\qquad+2(1-\theta)^2\beta\,(1+\beta\Delta)\,e^{\gamma(\tau+1)}\sup_{k_1-n_*-1\le k\le k_1-1}e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2+\sup_{k_1\le k\le k_2}(X+M_k),\end{aligned}\tag{3.2.41}$$

gde je

$$\begin{aligned}l(\Delta)=&\frac{1}{1+\beta}+\alpha_1\theta\Delta-\theta^2K\Delta-\Big(2\theta^2\beta+\alpha_2\theta\Delta+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta+\theta^2K\Delta\Big)\,e^{\gamma\tau}\\&-2(1-\theta)^2\beta\,(1+\beta\Delta)\,e^{\gamma(\tau+1)}.\end{aligned}$$

Može se primetiti da je

$$l(\Delta) > \Delta\Big[\alpha_1\theta - \theta^2 K - \Big(\alpha_2\theta + 4(1-\theta)^2\beta^2 + \theta^2 K\Big)\, e^{\gamma(\tau+1)}\Big] \\ + \frac{1}{1+\beta} - 2\beta[\theta^2 + (1-\theta)^2]e^{\gamma(\tau+1)}.$$

Za svako $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ i svako

$$\gamma \in \Big(0, -\frac{1}{\tau+1}\log\left(2\beta(1+\beta)(\theta^2 + (1-\theta)^2\right) \wedge \log \bar{A}\Big),$$

uslov (3.2.24), odnosno $\beta \in \Big(0, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\Big)$, daje

$$\frac{1}{1+\beta} - 2\beta[\theta^2 + (1-\theta)^2]e^{\gamma(\tau+1)} > 0.$$

Na osnovu (3.2.25) može se pronaći γ iz intervala

$$\Big(0, -\frac{1}{\tau+1}\log\left(2\beta(1+\beta)(\theta^2+(1-\theta)^2)\right) \wedge \frac{1}{\tau+1}\log\frac{\alpha_1\theta-\theta^2K}{\alpha_2\theta+4(1-\theta)^2\beta^2+\theta^2K} \wedge \log \bar{A}\Big) \tag{3.2.42}$$

tako da je

$$\alpha_1\theta - \theta^2 K - \Big(\alpha_2\theta + 4(1-\theta)^2\beta^2 + \theta^2 K\Big)\, e^{\gamma(\tau+1)} > 0.$$

Dalje, ako γ zadovoljava uslov (3.2.42), tada je $l(\Delta) > 0$ za svako $\Delta \in (0, \Delta^*)$. Zbog toga, kada $k_2 \to +\infty$, na osnovu (3.2.41) se zaključuje da je

$$\sup_{k_1 \le k < \infty} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 \\ \le \frac{1}{l(\Delta)}\Bigg[\Big(2\theta^2\beta + \alpha_2\theta\Delta + 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta + \theta^2 K\Delta\Big)\, e^{\gamma\tau} \sup_{k_1-n_*\le k\le k_1-1} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 \\ + 2(1-\theta)^2\beta\,(1+\beta\Delta)\, e^{\gamma(\tau+1)} \sup_{k_1-n_*-1\le k\le k_1-1} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 + \sup_{k_1\le k<\infty}(X + M_k)\Bigg].$$

Na osnovu prethodne nejednakosti i (3.2.39) sledi da je

$$\limsup_{k\to\infty} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 < \infty,$$

pri čemu γ zadovoljava uslov (3.2.42) i $\Delta \in (0, \Delta^*)$. Tada, na osnovu (3.2.40) važi da je

$$\limsup_{k\to\infty} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 \le \frac{1}{l(\Delta)}\limsup_{k\to\infty}(X + M_k) < \infty,$$

odnosno

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log(e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2)}{k\Delta} = 0.$$

Odatle je

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log|q_k|}{k\Delta} \leq -\frac{\gamma}{2}$$

za svako $\Delta \in (0, \Delta^*)$ i svako γ koje zadovoljava uslov (3.2.42), čime je tvrđenje dokazano. $\diamondsuit$

3.3 Euler-Maruyamin slučaj

Kako bi ispitivanje skoro izvesne asimptotske stabilnosti bilo kompletno, posebno se razmatra slučaj kada je $\theta = 0$, odnosno, takozvani Euler-Maruyamin slučaj. Tada (3.2.15) postaje

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= q_k + u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) \\ &\quad + f(q_k, q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\Delta + g(q_k, q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\Delta w_k, \quad k \in \{0,1,2,...\}, \end{aligned} \tag{3.3.43}$$

tako da (3.2.13), (3.2.14) i (3.3.43) određuju diskretno Euler-Maruyamino rešenje. U tom slučaju je

$$z_k = q_k - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}).$$

U ovom poglavlju će biti dokazani rezultati koji se odnose na rešenje jednačine (3.3.43), analogno onima iz Teoreme 3.1. Dakle, data je samo skica dokaza, pri čemu su istaknuti delovi koji se razlikuju od odgovarajućih delova iz dokaza Teoreme 3.1.

Teorema 3.2 *Pretpostavlja se da važe hipoteze $\mathcal{A}_1$–$\mathcal{A}_4$ i neka je*

$$\beta \in \left(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right), \tag{3.3.44}$$

$$\alpha_1 > K + (K + \alpha_2 + 4\beta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1). \tag{3.3.45}$$

Tada postoji $\tilde{\Delta}^* \in (0,1)$, tako da je Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje, definisano sa (3.2.13), (3.2.14) i (3.3.43), skoro izvesno asimptotski eksponencijalno stabilno, kada je $\Delta \in (0, \tilde{\Delta}^*)$.

Dokaz. Na osnovu (3.3.43) važi da je

$$|z_{k+1}|^2 = |z_k|^2 + [2(q_k - u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^T f_k + |g_k|^2 + |f_k|^2\Delta]\Delta$$
$$+2(u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}))^T f_k\Delta + m_k, \quad (3.3.46)$$

gde je

$$m_k = |g_k\Delta w_k|^2 - |g_k|^2\Delta + 2(z_k + f_k\Delta)^T g_k\Delta w_k.$$

Primenjujući argumente koji se koriste u dobijanju ocene (3.2.29), sledi

$$|z_{k+1}|^2 \leq |z_k|^2 + (\alpha_2 + K\Delta + 2\beta^2 + K)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta + 2\beta^2|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta$$
$$+(-\alpha_1 + K\Delta + K)|q_k|^2\Delta + m_k.$$

Tada, za proizvoljnu konstantu $A > 1$, važi da je

$$A^{(k+1)\Delta}|z_{k+1}|^2 - A^{k\Delta}|z_k|^2 \leq A^{(k+1)\Delta}|z_k|^2(1 - A^{-\Delta}) + [-\alpha_1 + K\Delta + K]\,\Delta A^{(k+1)\Delta}|q_k|^2$$
$$+\Big[\alpha_2 + K\Delta + 2\beta^2 + K\Big]\,\Delta A^{(k+1)\Delta}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2$$
$$+2\beta^2\Delta A^{(k+1)\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + A^{(k+1)\Delta}m_k. \quad (3.3.47)$$

Kako je $R_1(\Delta) = 1 - A^{-\Delta}$ i uvođenjem oznaka

$$\tilde{R}_2(\Delta) = -\alpha_1 + K\Delta + K, \quad \tilde{R}_3(\Delta) = \alpha_2 + K\Delta + 2\beta^2 + K,$$

na osnovu (3.3.47) sledi da je

$$A^{k\Delta}|z_k|^2 \leq |z_0|^2 + R_1(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|z_i|^2 + \tilde{R}_2(\Delta)\Delta\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2$$
$$+\tilde{R}_3(\Delta)\Delta\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2$$
$$+2\beta^2\Delta\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-1-[\delta((i-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + M_k, \quad (3.3.48)$$

gde je

$$M_k = \sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}m_i$$

lokalni martingal i $M_0 = 0$.

Na osnovu definicije z_k i (3.1.11), sledi

$$|z_k|^2 = |q_k - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2 \leq (1+\beta)|q_k|^2 + \beta(1+\beta)|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2. \quad (3.3.49)$$

Tada se zamenom (3.3.49) u (3.3.48) dobija ocena

$$A^{k\Delta}|z_k|^2 \le |z_0|^2 + \tilde{K}_1(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2 + \tilde{K}_2(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2$$
$$+\tilde{K}_3(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-1-[\delta((i-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + M_k, \tag{3.3.50}$$

gde je

$$\tilde{K}_1(\Delta)=R_1(\Delta)(1+\beta)+\tilde{R}_2(\Delta)\Delta,\ \tilde{K}_2(\Delta)=\tilde{R}_3(\Delta)\Delta,\ \tilde{K}_3(\Delta)=R_1(\Delta)\beta(1+\beta)+2\beta^2\Delta.$$

Koristeći ocenu (3.2.34) i činjenicu da je $\tilde{K}_3(\Delta) > 0$, izraz (3.3.50) postaje

$$\begin{aligned} &A^{k\Delta}|z_k|^2 \\ &\quad\le |z_0|^2+\tilde{K}_1(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2+(\tilde{K}_2(\Delta)+\tilde{K}_3(\Delta)A^{\Delta})\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \\ &\quad\quad+\tilde{K}_3(\Delta)A^{\Delta}|q_{-1-[\delta(0)/\Delta]}|^2 + M_k. \end{aligned} \tag{3.3.51}$$

Primenjujući Lemu 2.5 na drugu sumu na desnoj strani nejednakosti (3.3.51) i imajući u vidu da je $n_*\Delta = \tau$, izraz (3.3.51) se može napisati u obliku

$$A^{k\Delta}|z_k|^2 \le \tilde{X} + \tilde{h}(A,\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2 + M_k. \tag{3.3.52}$$

U prethodnom izrazu $\tilde{X}$ ima oblik (3.2.37), gde su $K_2(\Delta)$ i $K_3(\Delta)$ zamenjeni sa $\tilde{K}_2(\Delta)$ i $\tilde{K}_3(\Delta)$, respektivno, dok je

$$\begin{aligned} \tilde{h}(A,\Delta) &= \tilde{K}_1(\Delta) + (\tilde{K}_2(\Delta) + \tilde{K}_3(\Delta)A^{\Delta})([(1-\eta)^{-1}]+1)A^{\tau} \\ &= (1-A^{-\Delta})(1+\beta) + (-\alpha_1 + K\Delta + K)\Delta \\ &\quad+\Big[(\alpha_2 + K\Delta + 2\beta^2 + K)\Delta + (A^{\Delta}-1)\beta(1+\beta) + 2\beta^2\Delta A^{\Delta}\Big] \\ &\quad\times([(1-\eta)^{-1}]+1)A^{\tau}. \end{aligned}$$

Funkcija $\tilde{h}$ je rastuća u odnosu na A, odnosno

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dA}\tilde{h}(A,\Delta) \\ &\quad= \Delta A^{-\Delta-1}(1+\beta) \\ &\quad\quad+\Big[(\alpha_2+K\Delta+2\beta^2+K)\Delta + (A^{\Delta}-1)\beta(1+\beta) + 2\beta^2\Delta A^{\Delta}\Big]([(1-\eta)^{-1}]+1)\tau A^{\tau-1} \\ &\quad\quad+([(1-\eta)^{-1}]+1)A^{\tau}\Delta A^{\Delta-1}\beta\Big((1+\beta)+2\beta\Delta\Big) > 0. \end{aligned}$$

Na osnovu pretpostavke (3.3.45), važi da je

$$\tilde{h}(1,\Delta) = (-\alpha_1 + K\Delta + K)\Delta + \Big(K\Delta + K + \alpha_2 + 4\beta^2\Big)\Delta([(1-\eta)^{-1}] + 1) < 0$$

za svako $\Delta \in (0, \tilde{\Delta}^*)$, gde je $\tilde{\Delta}^* = \tilde{\Delta}_1 \wedge 1$, dok je

$$\tilde{\Delta}_1 = \frac{\alpha_1 - K - (K + \alpha_2 + 4\beta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1)}{K([(1-\eta)^{-1}] + 2)}.$$

Dakle, za svako $\Delta \in (0, \tilde{\Delta}^*)$, postoji jedinstveno $\tilde{A} = \tilde{A}(\Delta) > 1$, za koje je $\tilde{h}(\tilde{A}, \Delta) = 0$, tako da je $\tilde{h}(A, \Delta) \leq 0$ za $A \in (1, \tilde{A}]$.

Na osnovu izraza (3.3.52) zaključuje se da je, za svako $\Delta \in (0, \tilde{\Delta}^*)$ i svako $A \in (1, \tilde{A}]$,

$$A^{k\Delta}|z_k|^2 \leq \tilde{X} + M_k. \tag{3.3.53}$$

Na osnovu Diskretne verzije teoreme o konvergenciji semi-martingala (Teoreme 1.7) sledi da je

$$\limsup_{k\to\infty} A^{k\Delta}|z_k|^2 \leq \limsup_{k\to\infty}(\tilde{X} + M_k) < \infty \;\; s.i.$$

Na osnovu definicije z_k, nejednakosti (1.9.54) za $\varepsilon = \beta$, kao i uslova (3.1.5), sledi

$$|z_k|^2 \geq \frac{1}{1+\beta}|q_k|^2 - \frac{1}{\beta}|u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2 \geq \frac{1}{1+\beta}|q_k|^2 - \beta|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 \tag{3.3.54}$$

Zamenom izraza (3.3.54) u (3.3.53), dobija se

$$\frac{1}{1+\beta}A^{k\Delta}|q_k|^2 \leq \beta A^{k\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + \tilde{X} + M_k.$$

Dakle, za svako $\tilde{\gamma} \in (0, \log \tilde{A})$, postoji prirodan broj k_1 tako da je, za svaki prirodan broj $k_2 > k_1$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{k_1\leq k\leq k_2} e^{\tilde{\gamma}k\Delta}|q_k|^2 \\
&\quad\leq \beta\,(1+\beta) \sup_{k_1\leq k\leq k_2} e^{\tilde{\gamma}k\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + (1+\beta) \sup_{k_1\leq k\leq k_2} (\tilde{X} + M_k) \\
&\quad\leq \beta(1+\beta)e^{\tilde{\gamma}(\tau+1)} \sup_{k_1\leq k\leq k_2} e^{\tilde{\gamma}(k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta])\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\qquad+(1+\beta) \sup_{k_1\leq k\leq k_2} (\tilde{X} + M_k) \\
&\quad\leq \beta(1+\beta)\Bigg(e^{\tilde{\gamma}(\tau+1)} \sup_{k_1-n_*-1\leq k\leq k_1-1} e^{\tilde{\gamma}k\Delta}|q_k|^2 + e^{\tilde{\gamma}(\tau+1)} \sup_{k_1\leq k\leq k_2} e^{\tilde{\gamma}k\Delta}|q_k|^2\Bigg) \\
&\qquad+(1+\beta) \sup_{k_1\leq k\leq k_2} (\tilde{X} + M_k).
\end{aligned}$$

Na osnovu uslova (3.3.44), tj. $\beta \in \Big(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\Big)$, za svako

$$\tilde{\gamma} \in \Big(0, -\frac{1}{\tau+1}\log(\beta(1+\beta)) \wedge \log \tilde{A}\Big),$$

važi da je

$$\begin{aligned}\sup_{k_1 \le k \le k_2} e^{\tilde{\gamma}k\Delta}|q_k|^2 &\le \Big(1-\beta(1+\beta)e^{\tilde{\gamma}(\tau+1)}\Big)^{-1} \\ &\Bigg[\beta(1+\beta)\Bigg(e^{\tilde{\gamma}(\tau+1)} \sup_{k_1-n_*-1 \le k \le k_1-1} e^{\tilde{\gamma}k\Delta}|q_k|^2\Bigg) + (1+\beta)\sup_{k_1 \le k \le k_2}(\tilde{X}+M_k)\Bigg]\end{aligned} \tag{3.3.55}$$

Na osnovu relacije (3.3.55), kada $k_2 \to +\infty$, sledi

$$\begin{aligned}\sup_{k_1 \le k < \infty} e^{\tilde{\gamma}k\Delta}|q_k|^2 &\le \Big(1-\beta(1+\beta)e^{\tilde{\gamma}(\tau+1)}\Big)^{-1} \\ &\Bigg[\beta(1+\beta)\Bigg(e^{\tilde{\gamma}(\tau+1)} \sup_{k_1-n_*-1 \le k \le k_1-1} e^{\tilde{\gamma}k\Delta}|q_k|^2\Bigg) + (1+\beta)\sup_{k_1 \le k < \infty}(\tilde{X}+M_k)\Bigg],\end{aligned}$$

što implicira

$$\limsup_{k\to\infty} e^{\tilde{\gamma}k\Delta}|q_k|^2 < \infty.$$

Koristeći proceduru dokaza Teoreme 3.1, zaključuje se da je

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log|q_k|}{k\Delta} \le -\frac{\tilde{\gamma}}{2}$$

za svako $\Delta \in (0, \Delta^*)$ i svako $\tilde{\gamma} \in \Big(0, -\frac{1}{\tau+1}\log(\beta(1+\beta)) \wedge \log \tilde{A}\Big)$. $\diamondsuit$

3.4 Numeričke simulacije

Sledeći primer ilustruje skoro izvesnu eksponencijalnu stabilnost θ-Euler-Maruyaminog rešenja jednačine koja je razmatrana u Poglavlju 3.2. Naime, simulirane su trajektorije θ-Euler-Maruyaminog rešenja kada je $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$, kao i trajektorije količnika $\frac{\log|q_k|}{k\Delta}$, $k = 1, ..., 5\,000$, za korak $\Delta = 0.01$, pri čemu su dobijeni rezultati u skladu sa prethodno navedenim teorijskim rezultatima.

Primer 3.1 *Razmatra se sledeća skalarna neutralna stohastička diferencijalna jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem*

$$\begin{aligned}d\Big[x(t) - \frac{1}{50}x(t-\delta(t))\Big] &\\ = \Big(-\frac{1}{20}x(t) - \frac{1}{40}\sin x(t-\delta(t))\Big)dt &+ \frac{1}{10\sqrt{10}}\frac{x(t-\delta(t))}{1+x^4(t-\delta(t))}\cos x(t)dw(t),\end{aligned} \tag{3.4.56}$$

za $t \in [0,50]$*, sa početnim uslovom* $\varphi(t) = -1$, $t \in [-\tau, 0]$*, gde je* $\tau = 0.5$ *i* $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0]; R)$*. Koeficijent prenosa* $f(x,y) = -\frac{1}{20}x - \frac{1}{40}\sin y$ *zadovoljava uslov linearnog rasta* $\mathcal{A}_1$ *za* $K = \frac{2}{20^2}$*, dok funkcija* $u(x) = \frac{1}{50}x$, $x \in R$ *zadovoljava pretpostavku* $\mathcal{A}_2$ *za* $\beta = \frac{1}{50}$*. Kako je funkcija kašnjenja oblika* $\delta(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin t$, $t \in [0,50]$*, sledi da je*

$$
\begin{aligned}
|\delta'(t)| &= \Big| -\frac{1}{4}\cos t \Big| \le \frac{1}{4} = \eta,\\
|\delta(t) - \delta(s)| &\le \frac{1}{4}|t-s|, \quad t,s \in [0,50]
\end{aligned}
$$

i ispunjen je uslov $\mathcal{A}_3$ *za* $\eta = \frac{1}{4}$*. Primenjujući elementarnu nejednakost (1.9.57), dobija se da je*

$$
\begin{aligned}
&2(x - u(y))f(x,y) + |g(x,y)|^2\\
&\quad = -\frac{2}{20}x^2 - \frac{2}{40}x\sin y + \frac{2}{20\cdot 50}xy + \frac{2}{40\cdot 50}y\sin y + \frac{1}{1\,000}\frac{y^2}{(1+y^4)^2}\cos^2 x\\
&\quad \le -\frac{2}{20}x^2 + \frac{1}{40}(x^2+y^2) + \frac{1}{1\,000}(x^2+y^2) + \frac{1}{1\,000}y^2 + \frac{1}{1\,000}y^2\\
&\quad \le -\frac{37}{500}x^2 + \frac{14}{500}y^2.
\end{aligned}
$$

Dakle, $\alpha_1 = \frac{37}{500}$ *i* $\alpha_2 = \frac{14}{500}$ *i pritom je*

$$
\frac{\alpha_2}{1-\eta} = \frac{14}{375} < \frac{37}{500} = \alpha_1.
$$

Uslov $\mathcal{A}_4$ *važi, kao i (3.1.8), tj.* $f(0,0) = g(0,0) = u(0) = 0$.

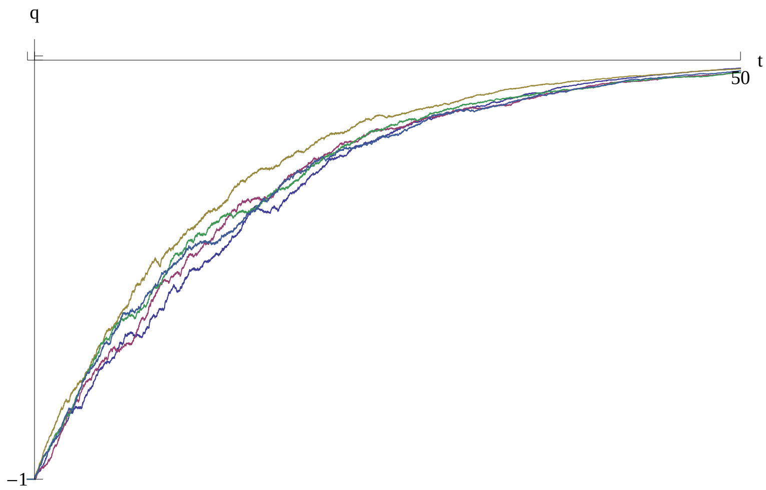
Kako za svako $x_1, x_2, y \in R^d$ *važi da je*

$$
\begin{aligned}
\langle x_1 - x_2, f(x_1,y) - f(x_2,y)\rangle &= -\frac{1}{20}\langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle = -\frac{1}{20}|x_1 - x_2|^2,\\
\langle x_1 - x_2, f(y,x_1) - f(y,x_2)\rangle &= -\frac{1}{40}\langle x_1 - x_2, \sin x_1 - \sin x_2\rangle \le \frac{1}{40}|x_1 - x_2|^2,
\end{aligned}
$$

zaključuje se da $\mathcal{C}_1$ *važi za svako* $\mu_1 > 0$ *i* $\mu_2 = \frac{1}{40}$*. Dakle, bira se* $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{40}$*, tako da je* $\theta((\mu_1+\mu_2)\Delta + \beta) < 1$ *za svako* $\Delta \in (0,1)$ *i svako* $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$*. Tada, na osnovu Leme 3.2, odgovarajuće* θ*-Euler-Maruyamine aproksimativne jednačine imaju jedinstvena rešenja. Imajući u vidu (3.2.15), za* $\theta = \frac{1}{4}$ *i svako* $\Delta \in (0,1)$*, sledi da je* $q_k = \varphi(k\Delta)$, $k = -n_*, -n_*+1, ..., 0$ *i za* $k = 0, 1, 2, ...,$

$$
\begin{aligned}
q_{k+1} = q_k &+ \frac{1}{200}q_{k+1-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]} + \frac{1}{100}q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]} - \frac{3}{200}q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}\\
&- \frac{1}{80}q_{k+1}\Delta - \frac{3}{80}q_k\Delta - \frac{1}{160}\sin q_{k+1-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]}\Delta\\
&- \frac{3}{160}\sin q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}\Delta + \frac{1}{10\sqrt{10}}\frac{q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}}{1+q^4_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}}\cos q_k\Delta w_k. \qquad (3.4.57)
\end{aligned}
$$

Na Slici 3.1, je predstavljeno nekoliko trajektorija θ-Euler-Maruyaminog rešenja koje je dato jednačinom (3.4.57).



Slika 3.1: Trajektorije θ-Euler-Maruyaminog rešenja za $\Delta = 0.01$

Pretpostavka (3.2.24) važi jer je $\frac{1}{50} = \beta \in \left(0, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$. *Takođe,*

$$\frac{37}{500} = \alpha_1 > \max\left\{K + \left(K + \alpha_2 + 4\beta^2(1-\theta)^2\right)([(1-\eta)^{-1}] + 1), 2\theta K + \alpha_2 + 4\beta^2 \frac{(1-\theta)^2}{\theta}\right\}$$
$$= 0.0728,$$

odnosno, uslov (3.2.25) je ispunjen.

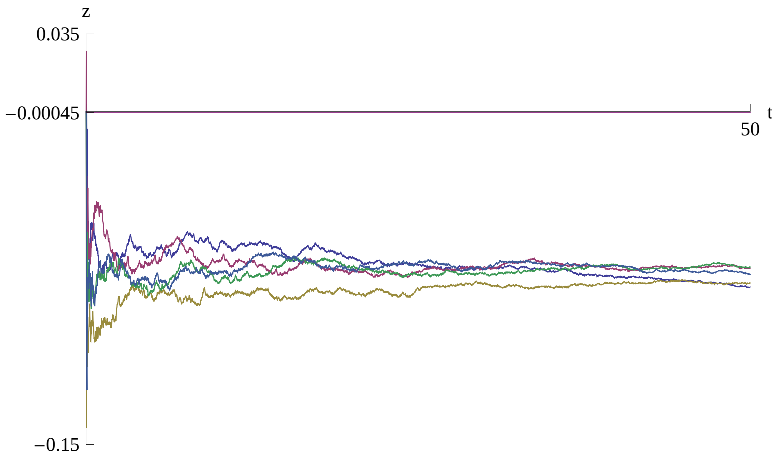
U cilju određivanja intervala kome pripada Δ *tako da je* θ*-Euler-Maruyamino rešenje (3.4.57) s.i. eksponencijalno stabilno, izračunava se* Δ_1*, definisano u (3.2.38). Kako je* $\Delta_1 = 0.16$*, sledi da* $\Delta \in (0, 0.16)$*. Dakle, može se izabrati* $\Delta = 0.01$*. Tada je potrebno izračunati* $\bar{A} = \bar{A}(0.01)$*, što je jedinstveno rešenje jednačine* $h(A, 0.01) = 0$*, gde je* $h(A, \Delta)$ *dato sa (3.2.38). Direktnim izračunavanjem se dobija da je* $\bar{A} = 1.0009$*. Koristeći (3.2.42) iz Teoreme 3.1 zaključuje se da za svako*

$$\gamma \in \left(0, 1.0623 \wedge 0.2302 \wedge 0.0009\right),$$

odnosno, za $\gamma \in (0, 0.0009)$*, za* θ*-Euler-Maruyamino rešenje važi*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log|q_k|}{k\Delta} \leq -\frac{\gamma}{2} \ s.i.$$

Kako bi se ilustrovalo da prethodna nejednakost važi, simulirane su trajektorije izraza na levoj strani nejednakosti, koje odgovaraju trajektorijama prikazanim na Slici 3.1. Trajektorije su prikazane u odnosu na pravu $z = -0.00045$*. Rezultat te simulacije je prikazan na Slici 3.2.*



Slika 3.2: Trajektorije količnika $\frac{\log |q_k|}{k\Delta}$, $k = 1, ..., 5\,000$, u odnosu na pravu $z = -0.00045$, za $\Delta = 0.01$

3.5 Skoro izvesna eksponencijalna stabilnost θ-Euler-Maruyaminog rešenja za $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$ pod uslovima nelinearnog rasta

U ovom poglavlju je pokazano da je diskretno θ-Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje (3.2.15) skoro izvesno asimptotski eksponencijalno stabilno za $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$. U radu [67] rezultat skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti je dokazan za backward Eulerovu metodu (tj. za $\theta = 1$) bez primene uslova linearnog rasta za koeficijent f. Pritom je korišćena drugačija tehnika od one koja se koristi u dokazivanju rezultata koji su dati u ovom poglavlju. Treba naglasiti da je tehnika iz pomenutog rada uspešno primenjena u radu [42], za klasu neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa konstantnim kašnjenjem i prelazima Markova, gde je odgovarajuće θ-Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje implicitno samo u odnosu na koeficijent prenosa. Rezultati predstavljeni u ovom poglavlju su proširenje rezultata stabilnosti iz rada [67] na klasu θ-Euler-Maruyaminih aproksimativnih rešenja za $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, pod malo strožim uslovima nelinearnog rasta u poređenju sa onima iz radova [42] i [67], jer je aproksimativno rešenje implicitno i u odnosu na koeficijent prenosa f i u odnosu na neutralni član u, pri čemu je neutralni član parametrizovan sa θ.

Pored pretpostavki koje su uvedene u Poglavlju 3.1, uvode se sledeće dodatne pretpostavke:

$\mathcal{A}_5$: Funkcija kašnjenja $\delta : R_+ \to [0, \tau]$ je diferencijabilna i $\delta'(t) \leq \bar{\delta} < 1$.

$\mathcal{A}_6$: Postoji konstanta $\eta > 0$ tako da je

$$|\delta(t) - \delta(s)| \leq \eta |t - s|,\; t, s \geq 0. \tag{3.5.58}$$

$\mathcal{A}_7$: Postoje pozitivne konstante β_1, β_2 i β_3 tako da je $\beta_1 > \frac{\beta_2+\beta_3}{1-\bar{\delta}} > 0$, i za svako $x, y, z \in R^d$ i svako $t \geq 0$, važi

$$2(x - u(z,t))^T f(x,y,t) + |g(x,y,t)|^2 \leq -\beta_1|x|^2 + \beta_2|y|^2 + \beta_3|z|^2. \tag{3.5.59}$$

Na osnovu rada [66], može se zaključiti da prethodni uslov i hipoteze $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, zajedno sa lokalnim Lipschitzovim uslovom za f i g i pretpostavkom $f(0,0,t) = g(0,0,t) = 0$, $t \geq 0$ garantuju egzistenciju i jedinstvenost globalnog rešenja jednačine (3.1.1), koje je s.i. eksponencijalno stabilno. Pod pretpostavkom da važe uvedene hipoteze, biće dokazano da je θ-Euler-Maruyamino rešenje s.i. asimptotski eksponencijalno stabilno.

Treba imati u vidu da je diskretno θ-Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje q koje odgovara jednačini (3.2.12) na ekvidistantnoj particiji

$$k\Delta,\ k = -(n_* + 1), -n_*, ..., -1, 0, 1, ...$$

vremenskog intervala $[0, \infty)$, definisano sa

$$q_k = \varphi(k\Delta),\ \ k = -n_*, -n_* + 1, ..., 0, \tag{3.5.60}$$

dok je, za $k \in \{0, 1, 2, ...\}$,

$$\begin{aligned} q_{k+1} = q_k &+ \theta u(q_{k+1-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]}) + (1-\theta)u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) \\ &-(1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) + \theta f(q_{k+1}, q_{k+1-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]})\Delta \\ &+(1-\theta)f(q_k, q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\Delta + g(q_k, q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\Delta w_k, \end{aligned} \tag{3.5.61}$$

gde je $\Delta w_k = w((k+1)\Delta) - w(k\Delta)$.

Pritom je

$$\delta(-\Delta) = \delta(0), \quad q_{-(n_*+1)\Delta} = \varphi(-n_*\Delta). \tag{3.5.62}$$

Sledećom teoremom je predstavljena skoro izvesna asimptotska eksponencijalna stabilnost diskretnog θ-Euler-Maruyaminog rešenja definisanog sa (3.5.60)-(3.5.62).

Teorema 3.3 *Neka su zadovoljeni uslovi Leme 3.2, kao i hopoteze $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_6$, $\mathcal{A}_7$ i neka je*

$$\beta^2 \in \Big(0, \frac{4}{99([(1-\eta)^{-1}] + 1)}\Big), \tag{3.5.63}$$

$$\beta_1 > \frac{9([(1-\eta)^{-1}] + 1)\Big(3\beta_2 + 5\beta_3\Big)}{4 - 99\beta^2([(1-\eta)^{-1}] + 1)}. \tag{3.5.64}$$

Ako je $\bar{a}$ jedinstveno pozitivno rešenje jednačine

$$\beta_1 - \Big(\beta_2 + \frac{\beta_3}{2}(1 + e^{\bar{a}})\Big)([(1-\eta)^{-1}] + 1)e^{\bar{a}\tau} = 0, \tag{3.5.65}$$

tada postoji $\Delta_1 = \frac{2\theta-1}{C'\theta^2}\Big(1 - \frac{2C'(1+c_0)}{\beta_1}\Big) \wedge \frac{1}{\mu_1+\mu_2}\Big(\frac{1}{\theta} - \beta\Big) \wedge 1$, *pri čemu su* c_0 *i* C' *konstante takve da je* $c_0 > 0, 0 < C' < \frac{\beta_1}{2(1+c_0)}$, *tako da je za svako* $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$ *i svako* $\Delta \in (0, \Delta_1)$, *θ-Euler-Maruyamino approksimativmo rešenje (3.5.61) skoro izvesno asimptotski eksponencijalno stabilno.*

Dokaz. Na osnovu (3.5.61) i (3.2.18) sledi

$$\begin{aligned}|z_{k+1}|^2 &= |z_k|^2 + [2(q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^T f_k + |g_k|^2 \\ &\quad +(1-2\theta)|f_k|^2\Delta]\Delta + m_k, \\ &= |z_k|^2 + (I_k^T f_k + |g_k|^2 + (1-2\theta)|f_k|^2\Delta)\Delta + m_k, \end{aligned} \tag{3.5.66}$$

gde je

$$I_k = 2(q_k - u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) + (1-\theta)(u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}))) \tag{3.5.67}$$

i

$$m_k = |g_k\Delta w_k|^2 - |g_k|^2\Delta + 2(z_k + f_k\Delta)^T g_k\Delta w_k. \tag{3.5.68}$$

Pretpostavka $\mathcal{A}_7$ implicira

$$\begin{aligned} I_k^T f_k &= 2\theta\left(q_k - u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\right)^T f_k + 2(1-\theta)(q_k - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}))^T f_k \\ &\leq \theta\left(-\beta_1|q_k|^2 + (\beta_2+\beta_3)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 - |g_k|^2\right) \\ &\quad +(1-\theta)\left(-\beta_1|q_k|^2 + \beta_2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 + \beta_3|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 - |g_k|^2\right) \\ &= -\beta_1|q_k|^2 + (\beta_2 + \theta\beta_3)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\ &\quad +(1-\theta)\beta_3|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 - |g_k|^2. \end{aligned} \tag{3.5.69}$$

Na osnovu (3.5.69), iz izraza (3.5.66) sledi da je

$$\begin{aligned}|z_{k+1}|^2 &\leq |z_k|^2 + \Big[-\beta_1|q_k|^2 + (\beta_2+\theta\beta_3)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\ &\quad +(1-\theta)\beta_3|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Big]\Delta + (1-2\theta)|f_k|^2\Delta^2 + m_k. \end{aligned} \tag{3.5.70}$$

Dalje, potrebno je izraziti član $(1-2\theta)|f_k|^2$ iz izraza (3.5.70) koristeći $|z_k|^2$, $|q_k|^2$, $|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2$ i $|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2$. Tada se, za svako $c_0 > 0$, može izabrati C', tako da je $0 < C' < \frac{\beta_1}{2(1+c_0)}$. Na osnovu definicije z_k, važi da je

$$\begin{aligned}&(2\theta-1)|f_k|^2\Delta - C'|z_k|^2 \\ &\quad = [(2\theta-1)\Delta - C'\theta^2\Delta^2]|f_k|^2 \\ &\qquad +2C'\theta\Delta(q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^T f_k \\ &\qquad -C'|q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2. \end{aligned}$$

Uvodeći oznake $a' = (2\theta - 1)\Delta - C'\theta^2\Delta^2$ i $b' = \frac{C'\theta\Delta}{a'}$, prethodni izraz postaje

$$\begin{aligned}(2\theta - 1)&|f_k|^2\Delta - C'|z_k|^2\\ &= a'|f_k + b'(q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2\\ &\quad -(a'(b')^2 + C')|q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2. \end{aligned} \tag{3.5.71}$$

Za $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$ se može naći dovojno malo Δ_1^* tako da, za svako $\Delta \in (0, \Delta_1^*)$, sledi da je $a' > 0$ i $-(a'(b')^2 + C') \geq -\frac{\beta_1}{2(1+c_0)}$, odnosno

$$\Delta_1^* = \frac{2\theta - 1}{C'\theta^2}\Big(1 - \frac{2C'(1+c_0)}{\beta_1}\Big) \wedge 1.$$

Na osnovu prethodnog izraza i uslova za Δ u Lemi 3.2, sledi da je

$$\Delta_1 = \frac{2\theta - 1}{C'\theta^2}\Big(1 - \frac{2C'(1+c_0)}{\beta_1}\Big) \wedge \frac{1}{\mu_1 + \mu_2}\Big(\frac{1}{\theta} - \beta\Big) \wedge 1. \tag{3.5.72}$$

Imajući u vidu Lemu 3.1 i uslove (3.1.4) i (3.1.5) iz $\mathcal{A}_2$, za svako $\Delta \in (0, \Delta_1)$, važi

$$\begin{aligned}(2\theta - 1)&|f_k|^2\Delta - C'|z_k|^2\\ &\geq -\frac{\beta_1}{2(1+c_0)}|q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2\\ &\geq -\frac{\beta_1}{1+c_0}|q_k - u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2\\ &\quad -\frac{\beta_1}{1+c_0}|(1-\theta)(u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2\\ &\geq -\beta_1|q_k|^2 - \frac{\beta_1\beta^2}{c_0}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 - \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\\ &\quad -\frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2. \end{aligned}$$

Na osnovu elementarnih transformacija prethodnog izraza sledi da je

$$\begin{aligned}(2\theta - 1)&|f_k|^2\Delta - C'|z_k|^2\\ &\geq -\beta_1|q_k|^2 + (\beta_2 + \theta\beta_3)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 + (1-\theta)\beta_3|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2\\ &\quad -\left(\beta_2 + \theta\beta_3 + \frac{\beta_1\beta^2}{c_0} + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}\right)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\\ &\quad -\left((1-\theta)\beta_3 + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}\right)|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2. \end{aligned} \tag{3.5.73}$$

Tada važi da je

$$\begin{aligned}
&-\beta_1|q_k|^2 + (\beta_2 + \theta\beta_3)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 + (1-\theta)\beta_3|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2 \\
&\quad +(1-2\theta)|f_k|^2\Delta \\
&\quad \le -C'|z_k|^2 + \left(\beta_2 + \theta\beta_3 + \frac{\beta_1\beta^2}{c_0} + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}\right)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\quad\quad + \left((1-\theta)\beta_3 + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}\right)|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2.
\end{aligned} \tag{3.5.74}$$

Zamenom (3.5.74) u (3.5.70), sledi

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}|^2 \le |z_k|^2 - C'|z_k|^2\Delta
&+ \left(\beta_2 + \theta\beta_3 + \frac{\beta_1\beta^2}{c_0} + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}\right)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta \\
&+ \left((1-\theta)\beta_3 + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}\right)|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2\Delta + m_k.
\end{aligned}$$

Tada je za proizvoljnu konstantu $B > 1$,

$$\begin{aligned}
&B^{(k+1)\Delta}|z_{k+1}|^2 - B^{k\Delta}|z_k|^2 \\
&\quad \le B^{(k+1)\Delta}\Big[[|z_k|^2(1 - C'\Delta) \\
&\quad + \left(\beta_2 + \theta\beta_3 + \frac{\beta_1\beta^2}{c_0} + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}\right)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta \\
&\quad + \left((1-\theta)\beta_3 + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}\right)|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta + m_k\Big] - B^{k\Delta}|z_k|^2 \\
&\quad = B^{(k+1)\Delta}|z_k|^2(1 - C'\Delta - B^{-\Delta}) \\
&\quad +B^{(k+1)\Delta}\left(\beta_2 + \theta\beta_3 + \frac{\beta_1\beta^2}{c_0} + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}\right)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta \\
&\quad +B^{(k+1)\Delta}\left((1-\theta)\beta_3 + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}\right)|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta + B^{(k+1)\Delta}m_k.
\end{aligned}$$

Zbog pojednostavljenja se uvode oznake

$$\begin{aligned}
Q_1(\Delta) &= 1 - C'\Delta - B^{-\Delta}, \\
Q_2 &= \beta_2 + \theta\beta_3 + \frac{\beta_1\beta^2}{c_0} + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}, \\
Q_3 &= (1-\theta)\beta_3 + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}.
\end{aligned}$$

Tada se prethodna ocena može napisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&B^{(k+1)\Delta}|z_{k+1}|^2 - B^{k\Delta}|z_k|^2 \\
&\quad \le Q_1(\Delta)B^{(k+1)\Delta}|z_k|^2 + Q_2\Delta B^{(k+1)\Delta}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\quad\quad + Q_3\Delta B^{(k+1)\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + B^{(k+1)\Delta}m_k.
\end{aligned}$$

Na osnovu poslednje relacije sledi da je

$$\begin{aligned}
B^{k\Delta}|z_k|^2 \le |z_0|^2 + Q_1(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}|z_i|^2 + Q_2\Delta\sum_{i=0}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \\
+ Q_3\Delta\sum_{i=0}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}|q_{i-1-[\delta((i-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + M'_k, \qquad (3.5.75)
\end{aligned}$$

gde je

$$M'_k = \sum_{i=0}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}m_i$$

lokalni martingal i $M'_0 = 0$.

Na osnovu definicije z_k i izraza (3.5.67) i (3.5.69) zaključuje se da je

$$\begin{aligned}
|z_k|^2 &\ge |q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 - \theta\Delta I_k^T f_k \\
&\ge |q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 \\
&\quad + \theta\beta_1\Delta|q_k|^2 - \theta(\beta_2+\theta\beta_3)\Delta|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\quad - \theta(1-\theta)\beta_3\Delta|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + \theta\Delta|g_k|^2.
\end{aligned}$$

Tada, primenom elementarne nejednakosti (1.9.55) i uslova (3.1.5), prethodni izraz postaje

$$\begin{aligned}
|z_k|^2 &\ge \frac{1}{1+c_0}|q_k|^2 - \frac{1}{c_0}|(1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) + \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 \\
&\quad + \theta\beta_1\Delta|q_k|^2 - \theta(\beta_2+\theta\beta_3)\Delta|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\quad - \theta(1-\theta)\beta_3\Delta|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\ge \frac{1}{1+c_0}|q_k|^2 - \frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 - \frac{2\theta^2\beta^2}{c_0}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\quad + \theta\beta_1\Delta|q_k|^2 - \theta(\beta_2+\theta\beta_3)\Delta|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\quad - \theta(1-\theta)\beta_3\Delta|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&= \left(\frac{1}{1+c_0} + \theta\beta_1\Delta\right)|q_k|^2 + \left(-\frac{2\theta^2\beta^2}{c_0} - \theta(\beta_2+\theta\beta_3)\Delta\right)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\quad + \left(-\frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0} - \theta(1-\theta)\beta_3\Delta\right)|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2. \qquad (3.5.76)
\end{aligned}$$

Može se primetiti da je $Q_1(0) = 0$ i $Q_1'(\Delta) = -C' + B^{-\Delta}\log B$. Dakle, pretpostavlja se da je $1 < B < e^{C'}$, tako da je $Q_1'(\Delta) < 0$, $\Delta \in (0, \Delta_1)$, što implicira da je $Q_1(\Delta) < 0$, $\Delta \in (0, \Delta_1)$. Tada, zamenom (3.5.76) u (3.5.75) sledi da je, za svako $\Delta \in (0, \Delta_1)$,

$$\begin{aligned} B^{k\Delta}|z_k|^2 \le |z_0|^2 &+ L_1(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}|q_i|^2 + L_2(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \\ &+ L_3(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}|q_{i-1-[\delta((i-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + M_k', \end{aligned} \tag{3.5.77}$$

gde je

$$\begin{aligned} L_1(\Delta) &= Q_1(\Delta)\left(\frac{1}{1+c_0} + \theta\beta_1\Delta\right), \\ L_2(\Delta) &= Q_1(\Delta)\left(-\frac{2\theta^2\beta^2}{c_0} - \theta(\beta_2 + \theta\beta_3)\Delta\right) + Q_2\Delta, \\ L_3(\Delta) &= Q_1(\Delta)\left(-\frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0} - \theta(1-\theta)\beta_3\Delta\right) + Q_3\Delta. \end{aligned}$$

Kako je $L_3(\Delta) > 0$, $\Delta \in (0, \Delta_1)$, imajući u vidu (3.2.13), važi da je

$$\begin{aligned} &L_3(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}|q_{i-1-[\delta((i-1)\Delta)/\Delta]}|^2 \\ &\quad \le L_3(\Delta)B^{\Delta}|q_{-1-[\delta(0)/\Delta]}|^2 + L_3(\Delta)B^{\Delta}\sum_{i=0}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2. \end{aligned}$$

Tada (3.5.77) postaje

$$\begin{aligned} B^{k\Delta}|z_k|^2 \le |z_0|^2 &+ L_1(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}|q_i|^2 \\ &+(L_2(\Delta) + L_3(\Delta)B^{\Delta})\sum_{i=0}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \\ &+L_3(\Delta)B^{\Delta}|q_{-1-[\delta(0)/\Delta]}|^2 + M_k'. \end{aligned} \tag{3.5.78}$$

Primenom Leme 2.5 na drugi sabirak sa desne strane nejednakosti (3.5.78), sledi

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 &\le B^{n_*\Delta}\sum_{i=0}^{k-1} B^{(i-[\delta(i\Delta)/\Delta]+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \\ &\le ([(1-\eta)^{-1}] + 1)B^{n_*\Delta}\sum_{i=-n_*}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}|q_i|^2. \end{aligned} \tag{3.5.79}$$

Kako je $n_*\Delta = \tau$, (3.5.78) postaje

$$B^{k\Delta}|z_k|^2 \leq X_1 + s(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} B^{(i+1)\Delta}|q_i|^2 + M'_k, \tag{3.5.80}$$

gde je

$$\begin{aligned} X_1 &= |z_0|^2 + L_3(\Delta)B^{\Delta}|q_{-1-[\delta(0)/\Delta]}|^2 \\ &\quad +(L_2(\Delta) + L_3(\Delta)B^{\Delta})([(1-\eta)^{-1}]+1)B^{\tau}\sum_{i=-n_*}^{-1} B^{(i+1)\Delta}|\varphi(i\Delta)|^2 < \infty, \end{aligned} \tag{3.5.81}$$

i

$$s(\Delta) = L_1(\Delta) + (L_2(\Delta) + L_3(\Delta)B^{\Delta})([(1-\eta)^{-1}]+1)B^{\tau}. \tag{3.5.82}$$

Može se primetiti da je

$$\begin{aligned} s(\Delta) &= Q_1(\Delta)\left(\frac{1}{1+c_0} - B^{\tau}\frac{2\beta^2((1-\theta)^2B^{\Delta}+\theta^2)([(1-\eta)^{-1}]+1)}{c_0}\right) \\ &\quad +\Big[(Q_2 + Q_3B^{\Delta})([(1-\eta)^{-1}]+1)B^{\tau} \\ &\quad +Q_1(\Delta)\theta\Big(\beta_1 - (\beta_2 + \beta_3(\theta + (1-\theta)B^{\Delta}))([(1-\eta)^{-1}]+1)B^{\tau}\Big)\Big]\Delta \\ &= \Delta\Big\{\frac{Q_1(\Delta)}{\Delta}\left(\frac{1}{1+c_0} - B^{\tau}\frac{2\beta^2((1-\theta)^2B^{\Delta}+\theta^2)([(1-\eta)^{-1}]+1)}{c_0}\right) \\ &\quad +(Q_2 + Q_3B^{\Delta})([(1-\eta)^{-1}]+1)B^{\tau} + Z(\theta, B)\Big\}, \end{aligned}$$

pri čemu je

$$Z(\theta, B) = Q_1(\Delta)\theta\Big(\beta_1 - (\beta_2 + \beta_3(\theta + (1-\theta)B^{\Delta}))([(1-\eta)^{-1}]+1)B^{\tau}\Big).$$

Dalje, za svako $\Delta \in (0, \Delta_1)$ važi

$$Z(\theta, B) < Q_1(\Delta)\theta\Big(\beta_1 - (\beta_2 + \beta_3(\theta + (1-\theta)B))([(1-\eta)^{-1}]+1)B^{\tau}\Big).$$

Izraz $\theta + (1-\theta)B$ iz prethodne nejednakosti se posmatra kao funkcija od θ, odnosno

$$d(\theta) = \theta + (1-\theta)B, \quad B > 1, \theta \in \Big(\frac{1}{2}, 1\Big).$$

Ova funkcija je opadajuća za svako $B > 1$, pri čemu je $d(\theta) \leq \frac{1}{2}(1+B)$ za svako $\theta \in \big(\frac{1}{2}, 1\big)$. Tada je

$$Z(\theta, B) \leq Q_1(\Delta)\theta s_1(B),$$

gde je

$$s_1(B) = \beta_1 - \Big[\beta_2 + \frac{\beta_3}{2}(1+B)\Big]([(1-\eta)^{-1}]+1)B^\tau.$$

Za svako $\Delta \in (0, \Delta_1)$ važi

$$s(\Delta) \leq \Delta\Big\{\frac{Q_1(\Delta)}{\Delta}\Bigg(\frac{1}{1+c_0} - B^\tau\frac{2\beta^2((1-\theta)^2B+\theta^2)([(1-\eta)^{-1}]+1)}{c_0}\Bigg)$$
$$+(Q_2+Q_3B)([(1-\eta)^{-1}]+1)B^\tau + Q_1(\Delta)\theta s_1(B)\Big\}.$$

Očigledno, važi da je

$$s_1^{'}(B) = -\Big(\frac{\beta_3}{2}B^\tau + \Big(\beta_2 + \frac{\beta_3}{2}(1+B)\Big)\tau B^{\tau-1}\Big)([(1-\eta)^{-1}]+1) < 0.$$

Sa druge strane, može se zaključiti da je

$$s_1(1) = \beta_1 - (\beta_2+\beta_3)([(1-\eta)^{-1}]+1).$$

Na osnovu pretpostavke (3.5.64) sledi da je

$$\beta_1 > (\beta_2+\beta_3)([(1-\eta)^{-1}]+1),$$

što implicira $s_1(1) > 0$.

Imajući u vidu da jednačina (3.5.65) ima jedinstveno pozitivno rešenje $\bar{a} = \log \bar{B}$, sledi

$$s_1(e^a) = \beta_1 - \Big(\beta_2 + \frac{\beta_3}{2}(1+e^a)\Big)([(1-\eta)^{-1}]+1)e^{a\tau} > 0,$$

pri čemu je $a \in (0, \bar{a})$ i $B \in (1, \bar{B} \wedge e^{C'})$. U tom slučaju je

$$Q_1(\Delta)\theta s_1(B) < 0. \tag{3.5.83}$$

Neka je $r(\Delta) = \frac{Q_1(\Delta)}{\Delta}$, $\Delta \in (0, \Delta_1)$. Tada je $\lim_{\Delta\to 0} r(\Delta) = \log B - C' < 0$ za svako $B \in (1, \bar{B} \wedge e^{C'})$ i $r'(\Delta) = \frac{v(\Delta)}{\Delta^2}$, gde je

$$v(\Delta) = -1 + B^{-\Delta}(1 + \Delta \log B).$$

Kako je $v(0) = 0$ i $v'(\Delta) = -\Delta B^{-\Delta}\log^2 B < 0$, $\Delta \in (0, \Delta_1)$, $B \in (1, \bar{B} \wedge e^{C'})$, zaključuje se da je $v(\Delta) < 0$, $\Delta \in (0, \Delta_1)$, $B \in (1, \bar{B} \wedge e^{C'})$, što implicira $r'(\Delta) < 0$, odnosno, $r(\Delta)$ je opadajuća funkcija na intervalu $(0, \Delta_1)$ za svako $B \in (1, \bar{B} \wedge e^{C'})$.

Jasno, kako je $\log B - C' > r(\Delta)$, $\Delta \in (0, \Delta_1)$, za svako $B \in (1, \bar{B} \wedge e^{C'})$ i kako važi (3.5.83), ako se pokaže da je

$$\begin{aligned} s_2 &:= (\log B - C') \left(\frac{1}{1+c_0} - B^{\tau} \frac{2\beta^2((1-\theta)^2 B + \theta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1)}{c_0} \right) \\ &\quad + (Q_2 + Q_3 B)([(1-\eta)^{-1}] + 1) B^{\tau} \leq 0, \end{aligned}$$

tada je $s(\Delta) < 0$, za $\Delta \in (0, \Delta_1)$ i $B \in (1, \bar{B} \wedge e^{C'})$.

Dalje, $s_2 \leq 0$ ako i samo ako je

$$\begin{aligned} & s_2 - \log B \left(\frac{1}{1+c_0} - B^{\tau} \frac{2\beta^2((1-\theta)^2 B + \theta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1)}{c_0} \right) \\ & - \left(C' \frac{2\beta^2((1-\theta)^2 B + \theta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1)}{c_0} + (Q_2 + Q_3 B)([(1-\eta)^{-1}] + 1) \right) \\ & \quad \times (B^{\tau} - 1) \\ & = (Q_2 + Q_3 B)([(1-\eta)^{-1}] + 1) \\ & \quad - C' \left(\frac{1}{1+c_0} - \frac{2\beta^2((1-\theta)^2 B + \theta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1)}{c_0} \right). \end{aligned} \tag{3.5.84}$$

Ako se pokaže da je izraz na desnoj strani nejednakosti (3.5.84) nepozitivan za neko $c_0 > 0$ i $B \in (1, \bar{B} \wedge e^{C'})$, tada $s_2 \leq 0$ važi za izabrano c_0 i neko B blisko 1.

Prema tome tražena nejednakost važi ako i samo ako je

$$\begin{aligned} & C' \left(\frac{1}{1+c_0} - \frac{2\beta^2((1-\theta)^2 B + \theta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1)}{c_0} \right) \\ & > \left(\beta_2 + \theta\beta_3 + \frac{\beta_1 \beta^2}{c_0} + (1-\theta)\beta_3 B + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}(B+1) \right) ([(1-\eta)^{-1}] + 1) \\ & \Leftrightarrow C' \left(\frac{1}{(1+c_0)([(1-\eta)^{-1}] + 1)} - \frac{2\beta^2((1-\theta)^2 B + \theta^2)}{c_0} \right) \\ & > \beta_2 + \theta\beta_3 + \frac{\beta_1 \beta^2}{c_0} + (1-\theta)\beta_3 B + \frac{2\beta_1\beta^2(1-\theta)^2}{1+c_0}(B+1). \end{aligned} \tag{3.5.85}$$

Iz izraza (3.5.85) može se primetiti da je za $B \in (1, \frac{4}{3})$,

$$(1-\theta)^2 B + \theta^2 \leq (1-\theta)^2 \frac{4}{3} + \theta^2 \equiv \tilde{d}(\theta).$$

Maksimum prethodne funkcije se dostiže za $\theta = 1$, odnosno $\tilde{d}(1) = 1$. Tada, za $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$ i $B \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$, važi

$$\tilde{d}(\theta) = (1-\theta)^2 \frac{4}{3} + \theta^2 \leq 1,$$

na osnovu čega se može zaključiti da je za dokazivanje relacije (3.5.85) za svako $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, dovoljno dokazati da je

$$C'\left(\frac{1}{(1+c_0)([(1-\eta)^{-1}]+1)} - \frac{2\beta^2}{c_0}\right) > \beta_2 + \beta_3 + \frac{\beta_1\beta^2}{c_0} + \frac{\beta_3 B}{2} + \frac{\beta_1\beta^2}{2(1+c_0)}(B+1). \tag{3.5.86}$$

Bira se $c_0 = \frac{1}{2}$ i $C' = \frac{\beta_1}{3(1+c_0)} = \frac{2\beta_1}{9}$. Tada (3.5.86) postaje

$$\frac{\beta_1}{27}\left(\frac{4}{[(1-\eta)^{-1}]+1} - \beta^2(87+9B)\right) > \beta_2 + \beta_3\Big(\frac{B}{2}+1\Big). \tag{3.5.87}$$

Na osnovu uslova (3.5.63), odnosno

$$\beta^2 \in \Big(0, \frac{4}{99([(1-\eta)^{-1}]+1)}\Big),$$

sledi da je izraz pomnožen sa β_1 u (3.5.87) pozitivan za svako $B \in \Big(1, \frac{4}{3} \wedge \bar{B} \wedge e^{C'}\Big)$. Konačno, pretpostavka (3.5.64), tj.

$$\beta_1 > \frac{9([(1-\eta)^{-1}]+1)\Big(3\beta_2+5\beta_3\Big)}{4-99\beta^2([(1-\eta)^{-1}]+1)},$$

garantuje da (3.5.87) važi za svako $B \in \Big(1, \frac{4}{3} \wedge \bar{B} \wedge e^{C'}\Big)$, odakle je $s_2 \leq 0$, kao što se i zahteva.

Na osnovu (3.5.80) se zaključuje da, za svako $\Delta \in (0, \Delta_1)$, važi

$$B^{k\Delta}|z_k|^2 \leq X_1 + M'_k. \tag{3.5.88}$$

Na osnovu Diskretne verzije teoreme o konvergenciji semi-martingala (Teoreme 1.7), sledi

$$\limsup_{k\to\infty} B^{k\Delta}|z_k|^2 \leq \limsup_{k\to\infty}(X_1 + M'_k) < \infty \;\; s.i.$$

Zamenom (3.5.88) u (3.5.76), dobija se

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+c_0} + \theta\beta_1\Delta\right) & B^{k\Delta}|q_k|^2 \\ &\leq \left(\frac{2\theta^2\beta^2}{c_0} + \theta(\beta_2+\theta\beta_3)\Delta\right) B^{k\Delta}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\ &\quad + \left(\frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0} + \theta(1-\theta)\beta_3\Delta\right) B^{k\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + X_1 + M'_k,\end{aligned} \tag{3.5.89}$$

gde je $c_0 = \frac{1}{2}$. Dakle, za svako $\gamma_1 \in \left(0, \log\left(\frac{4}{3} \wedge \bar{B}\right) \wedge C'\right)$, postoji ceo broj k_1, tako da za svaki ceo broj $k_2 > k_1$, važi

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1+c_0} + \theta\beta_1\Delta\right) \sup_{k_1 \le k \le k_2} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 \\
&\quad \le \left(\frac{2\theta^2\beta^2}{c_0} + \theta(\beta_2 + \theta\beta_3)\Delta\right) \sup_{k_1 \le k \le k_2} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\qquad + \left(\frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0} + \theta(1-\theta)\beta_3\Delta\right) \sup_{k_1 \le k \le k_2} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\qquad + \sup_{k_1 \le k \le k_2} (X_1 + M'_k) \\
&\quad \le \left(\frac{2\theta^2\beta^2}{c_0} + \theta(\beta_2 + \theta\beta_3)\Delta\right) e^{\gamma_1\tau} \sup_{k_1 \le k \le k_2} e^{\gamma_1(k-[\delta(k\Delta)/\Delta])\Delta}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&\qquad + \left(\frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0} + \theta(1-\theta)\beta_3\Delta\right) e^{\gamma_1(\tau+1)} \\
&\qquad \times \sup_{k_1 \le k \le k_2} e^{\gamma_1(k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta])\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + \sup_{k_1 \le k \le k_2} (X_1 + M'_k) \\
&\quad \le \left(\frac{2\theta^2\beta^2}{c_0} + \theta(\beta_2 + \theta\beta_3)\Delta\right) \\
&\qquad \times \left(e^{\gamma_1\tau} \sup_{k_1 - n_* \le k \le k_1} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 + e^{\gamma_1\tau} \sup_{k_1 \le k \le k_2} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2\right) \\
&\qquad + \left(\frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0} + \theta(1-\theta)\beta_3\Delta\right) \\
&\qquad \times \left(e^{\gamma_1(\tau+1)} \sup_{k_1 - n_* - 1 \le k \le k_1} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 + e^{\gamma_1(\tau+1)} \sup_{k_1 \le k \le k_2} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2\right) \\
&\qquad + \sup_{k_1 \le k \le k_2} (X_1 + M'_k),
\end{aligned}$$

tada je, za $c_0 = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
&H_1 \sup_{k_1 \le k \le k_2} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 \\
&\quad \le \left(4\theta^2\beta^2 + \theta(\beta_2 + \theta\beta_3)\Delta\right) e^{\gamma_1\tau} \sup_{k_1 - n_* \le k \le k_1} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 \\
&\qquad + \left(4(1-\theta)^2\beta^2 + \theta(1-\theta)\beta_3\Delta\right) e^{\gamma_1(\tau+1)} \sup_{k_1 - n_* - 1 \le k \le k_1} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 \\
&\qquad + \sup_{k_1 \le k \le k_2} (X_1 + M'_k), \qquad (3.5.90)
\end{aligned}$$

gde je

$$H_1 = \frac{2}{3} + \theta\beta_1\Delta - \left(4\theta^2\beta^2 + \theta(\beta_2 + \theta\beta_3)\Delta\right) e^{\gamma_1\tau}$$

$$
\begin{aligned}
&-\Big(4(1-\theta)^2\beta^2 + \theta(1-\theta)\beta_3\Delta\Big)\, e^{\gamma_1(\tau+1)} \\
&> \frac{2}{3} - 4\beta^2(\theta^2 + (1-\theta)^2)e^{\gamma_1(\tau+1)} + \theta\Delta\Big[\beta_1 - (\beta_2+\beta_3)\, e^{\gamma_1(\tau+1)}\Big] \\
&> \frac{2}{3} - \beta^2 e^{\gamma_1(\tau+1)} + \theta\Delta\Big[\beta_1 - (\beta_2+\beta_3)\, e^{\gamma_1(\tau+1)}\Big].
\end{aligned}
$$

Na osnovu (3.5.63) i (3.5.64), za svako

$$\gamma_1 \in \Big(0, \frac{1}{\tau+1}\log\left([(1-\eta)^{-1}]+1\right) \wedge \log(\frac{4}{3} \wedge \bar{B}) \wedge C'\Big)$$

i svako $\Delta \in (0, \Delta_1)$, važi da je

$$H_1 > \frac{2}{3} - \beta^2([(1-\eta)^{-1}]+1) + \theta\Delta\Big[\beta_1 - (\beta_2+\beta_3)\left([(1-\eta)^{-1}]+1\right)\Big] > 0.$$

Dalje, iz (3.5.90) sledi

$$
\begin{aligned}
&\sup_{k_1 \le k \le k_2} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 \\
&\le \frac{1}{H_1}\Big[\Big(4\theta^2\beta^2 + \theta(\beta_2+\theta\beta_3)\Delta\Big)\, e^{\gamma_1\tau} \sup_{k_1-n_*\le k\le k_1} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 \\
&+ \Big(4(1-\theta)^2\beta^2 + \theta(1-\theta)\beta_3\Delta\Big)\, e^{\gamma_1(\tau+1)} \sup_{k_1-n_*-1\le k\le k_1} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 + \sup_{k_1\le k\le k_2}(X_1+M_k')\Big].
\end{aligned}
\tag{3.5.91}
$$

Kada $k_2 \to +\infty$ u (3.5.91), važi

$$
\begin{aligned}
&\sup_{k_1 \le k \le \infty} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 \\
&\le \frac{1}{H_1}\Bigg[\Big(4\theta^2\beta^2 + \theta(\beta_2+\theta\beta_3)\Delta\Big)\, e^{\gamma_1\tau} \sup_{k_1-n_*\le k\le k_1} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 \\
&+ \Big(4(1-\theta)^2\beta^2 + \theta(1-\theta)\beta_3\Delta\Big)\, e^{\gamma_1(\tau+1)} \sup_{k_1-n_*-1\le k\le k_1} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 + \sup_{k_1\le k\le k_2}(X_1+M_k')\Bigg] \\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

što implicira

$$\limsup_{k\to\infty} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 < \infty,$$

za svako $\gamma_1 \in \Big(0, \frac{1}{\tau+1}\log\left([(1-\eta)^{-1}]+1\right) \wedge \log\Big(\frac{4}{3} \wedge \bar{B}\Big) \wedge C'\Big)$ i $\Delta \in (0, \Delta_1)$.

Tada na osnovu (3.5.89) sledi

$$\limsup_{k\to\infty} e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2 \le \frac{\sup_{k_1\le k\le k_2}(X_1+M_k')}{H_1}.$$

Odatle je

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log(e^{\gamma_1 k\Delta}|q_k|^2)}{k\Delta} = 0,$$

tako da je

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log|q_k|}{k\Delta} \leq -\frac{\gamma_1}{2},$$

za svako $\gamma_1 \in \Big(0, \frac{1}{\tau+1}\log\left([(1-\eta)^{-1}]+1\right) \wedge \log(\frac{4}{3} \wedge \bar{B}) \wedge C'\Big)$ i svako $\Delta \in (0, \Delta_1)$. $\diamondsuit$

Napomena 3.1 *U dokazu prethodne teoreme, uslovi Leme 3.2 nisu ekplicitno primenjivani. Ti uslovi garantuju egzistenciju i jedinstvenost θ-Euler-Maruyaminog aproksimativnog rešenja.*

3.6 Deterministički slučaj

U ovom poglavlju su prikazani komentari i zaključci koji se zasnivaju na rezultatima iz prethodnog poglavlja, a tiču se determinističkog slučaja. U tom smislu se razmatra slučaj kada je koeficijent difuzije g identički jednak nuli.

Razmatra se sledeća neutralna diferencijalna jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem

$$d[x(t) - u(x(t-\delta(t)), t)] = f(x(t), x(t-\delta(t)), t)dt, \quad t \geq 0, \tag{3.6.92}$$

koja zadovoljava početni uslov

$$x_0 = \varphi = \{\varphi(t) : t \in [-\tau, 0]\} \in C^b([-\tau, 0]; R^d), \tag{3.6.93}$$

pri čemu su funkcije

$$f : R^d \times R^d \times R_+ \to R^d,\ u : R^d \times R_+ \to R^d$$

Borel-merljive i $x(t) = (x_1(t), ..., x_d(t))^T$, $t \geq 0$.

Neka važe pretpostavke $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6$. Umesto $\mathcal{A}_7$, uvodi se pretpostavka $\mathcal{A}_7'$ koja je prilagođena determinističkom slučaju.

$\mathcal{A}_7'$: Neka su β_1, β_2 i β_3 pozitivne konstante pri čemu je $\beta_1 > \frac{\beta_2+\beta_3}{1-\bar{\delta}} > 0$, tako da za svako $x, y, z \in R^d$ i svako $t \geq 0$, važi

$$2(x - u(z,t))^T f(x, y, t) \leq -\beta_1|x|^2 + \beta_2|y|^2 + \beta_3|z|^2. \tag{3.6.94}$$

Na sličan način kao u prethodnom poglavlju, može se zaključiti da prethodni uslov i pretpostavke $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_5$, zajedno sa lokalnim Lipschitzovim uslovom za funkciju f i pretpostavkom $f(0,0,t) = 0$, $t \geq 0$, garantuju egzistenciju i jedinstvenost rešenja jednačine (3.6.92), koje je eksponencijano stabilno.

Kako bi θ-Eulerova metoda, $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, koja odgovara jednačini (3.6.92), bila dobro definisana, koeficijent f bi trebalo da zadovoljava uslov $\mathcal{C}_1$.

Razmatra se autonomna verzija početne jednačine (3.6.92), tj.

$$x(t) = \varphi(0) + u(x(t-\delta(t))) - u(x(-\delta(0))) + \int_0^t f(x(s), x(s-\delta(s)))ds, \tag{3.6.95}$$

za $t \geq 0$ i početnim uslovom $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-\tau, 0]$.

Umesto pretpostavki $\mathcal{A}_2$,$\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_6$, $\mathcal{A}_7'$ i $\mathcal{C}_1$, važe njihove autonomne verzije.

Diskretno θ-Eulerovo aproksimativno rešenje q jednačine (3.6.95) definisano je na sledeći način

$$q_k = \varphi(k\Delta), \;\; k = -n_*, -n_* + 1, ..., 0, \tag{3.6.96}$$

dok je, za $k \in \{0, 1, 2, ...\}$,

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= q_k + \theta u(q_{k+1-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]}) + (1-\theta)u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) \\ &\quad -\theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) \\ &\quad +\theta f(q_{k+1}, q_{k+1-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]})\Delta + (1-\theta)f(q_k, q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})\Delta. \end{aligned} \tag{3.6.97}$$

Egzistencija i jedinstvenost θ-Eulerovog aproksimativnog rešenja jednačine (3.6.97) sledi na osnovu Leme 3.2.

Sledećom teoremom je predstavljen glavni rezultat ovog poglavlja.

Teorema 3.4 *Neka važe pretpostavke Leme 3.2 i hipoteze $\mathcal{A}_2$,$\mathcal{A}_5$, $\mathcal{A}_6$ i $\mathcal{A}_7'$. Pored toga, neka je*

$$\beta^2 \in \Big(0, \frac{4}{99([(1-\eta)^{-1}]+1)}\Big), \tag{3.6.98}$$

$$\beta_1 > \frac{9([(1-\eta)^{-1}]+1)\Big(3\beta_2 + 5\beta_3\Big)}{4 - 99\beta^2([(1-\eta)^{-1}]+1)}. \tag{3.6.99}$$

Ako je $\bar{a}$ jedinstveno pozitivno rešenje jednačine

$$\beta_1 - \Big(\beta_2 + \frac{\beta_3}{2}(1+e^{\bar{a}})\Big)([(1-\eta)^{-1}]+1)e^{\bar{a}\tau} = 0, \tag{3.6.100}$$

tada, postoji $\Delta_1 = \frac{2\theta-1}{C'\theta^2}\Big(1 - \frac{2C'(1+c_0)}{\beta_1}\Big) \wedge \frac{1}{\mu_1+\mu_2}\Big(\frac{1}{\theta} - \beta\Big) \wedge 1$, gde su c_0 i C' konstante za koje važi $c_0 > 0, 0 < C' < \frac{\beta_1}{2(1+c_0)}$ i $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, tako da je, za svako $\Delta \in (0, \Delta_1)$, θ-Eulerovo aproksimativno rešenje (3.6.97) asimptotski eksponencijalno stabilno.

Dokaz Teoreme 3.4 je izostavljen jer je analogan dokazu Teoreme 3.3 za $g(x,y,t) \equiv 0$, za svako $x, y \in R^d$ i svako $t \geq 0$.

3.7 Numeričke simulacije

Sledeći primer ilustruje skoro izvesnu eksponencijalnu stabilnost θ-Euler-Maruyaminog rešenja jednačine koja je razmatrana u Poglavlju 3.5. Naime, simulirane su trajektorije θ-Euler-Maruyaminog rešenja kada je $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, kao i trajektorije količnika $\frac{\log|q_k|}{k\Delta}$, $k = 1, ..., 5\,000$, za korak $\Delta = 0.01$, pri čemu su dobijeni rezultati u skladu sa prethodnim teorijskim rezultatima.

Primer 3.2 *Posmatra se sledeća skalarna neutralna stohastička diferencijalna jednačina*

$$\begin{aligned} d[x(t) - \frac{1}{50}\sin x(t-\delta(t))] \\ = (-x(t) - x^3(t))dt + \frac{1}{5}\frac{x(t-\delta(t))}{1+x^2(t-\delta(t))}\cos x(t)dw(t), \quad t \in [0, 50], \end{aligned}$$

sa početnim uslovom $\varphi(t) = 1$, $t \in [-\tau, 0]$, *gde je* $\tau = 0.5$ *i* $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R)$.

Funkcija $u(x) = \frac{1}{50}\sin x$, $x \in R$ *zadovoljava pretpostavku* $\mathcal{A}_2$ *za* $\beta = \frac{1}{50}$. *Neka je funkcija kašnjenja oblika* $\delta(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin t$, $t \in [0, 50]$. *Tada je*

$$\delta'(t) = -\frac{1}{4}\cos t \leq \frac{1}{4} = \bar{\delta}$$

i

$$|\delta(t) - \delta(s)| \leq \frac{1}{4}|t - s|, \quad t, s \in [0, 50],$$

i zadovoljene su pretpostavke $\mathcal{A}_5$ *i* $\mathcal{A}_6$ *za* $\eta = \frac{1}{4}$. *U cilju provere da li važi pretpostavka* $\mathcal{A}_7$, *potrebno je uočiti da je*

$$\begin{aligned} &2(x - u(z))f(x, y) + |g(x, y)|^2 \\ &= -2x^4 + \frac{1}{25}x^3\sin z - 2x^2 + \frac{1}{25}x\sin z + \frac{1}{25}\frac{y^2}{(1+y^2)^2}\cos^2 x \\ &\leq -2x^4 + \frac{1}{50}x^4 + \frac{1}{50}x^2 - 2x^2 + \frac{1}{50}x^2 + \frac{1}{50}z^2 + \frac{1}{25}y^2 \\ &\leq -\frac{98}{50}x^2 + \frac{1}{25}y^2 + \frac{1}{50}z^2, \end{aligned}$$

odnosno, $\beta_1 = \frac{98}{50}$, $\beta_2 = \frac{1}{25}$ *i* $\beta_3 = \frac{1}{50}$. *Pored toga, važi da je*

$$\frac{\beta_2 + \beta_3}{1 - \bar{\delta}} = \frac{2}{25} < \frac{98}{50} = \beta_1.$$

Kako je, za svako $x_1, x_2, y \in R^d$,

$$\begin{aligned} \langle x_1 - x_2, f(x_1, y) - f(x_2, y)\rangle &= -(x_1 - x_2)^2(1 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \\ &\leq \mu_1|x_1 - x_2|^2, \\ \langle x_1 - x_2, f(y, x_1) - f(y, x_2)\rangle &\leq \mu_1|x_1 - x_2|^2, \end{aligned}$$

zaključuje se da važi pretpostavka $\mathcal{C}_1$ *za svako pozitivno* μ_1 *i* μ_2. *Bira se* $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{5}$, *tako da je* $\theta((\mu_1 + \mu_2)\Delta + \beta) < 1$ *za svako* $\Delta \in (0,1)$ *i svako* $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$. *Tada se, na osnovu Leme 3.2, zaključuje da odgovarajuće* θ*-Euler-Maruyamine aproksimativne jednačine imaju jedinstvena rešenja. Imajući u vidu (3.2.15), za* $\theta = \frac{3}{4}$, *sledi da je* $q_k = \varphi(k\Delta)$, $k = -n_*, -n_* + 1, ..., 0$, *dok je, za* $k = 0, 1, 2, ...$,

$$\begin{aligned} q_{k+1} = q_k &+ \frac{3}{200} \sin q_{k+1-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]} - \frac{1}{100} \sin q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]} \\ &- \frac{1}{200} \sin q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]} - \frac{3}{4} q_{k+1}^3 \Delta - \frac{3}{4} q_{k+1} \Delta - \frac{1}{4} q_k^3 \Delta - \frac{1}{4} q_k \Delta \\ &+ \frac{1}{5} \frac{q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}}{1 + q^2_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}} \cos q_k \Delta w_k. \end{aligned} \tag{3.7.101}$$

Prateći dokaz Teoreme 3.3, primećuje se da iz (3.5.72), s obzirom na to da je $C' = \frac{2\beta_1}{9}$, *sledi da je* $\Delta_1 = \frac{100}{147}$. *Dakle, biće pokazana skoro izvesna eksponencijalna stabilnost rešenja jednačine (3.7.101) za svako* $\Delta \in (0, \Delta_1)$.

Kako je

$$\frac{4}{99([(1-\eta)^{-1}] + 1)} = \frac{2}{99},$$

važi pretpostavka (3.5.63).

Dalje, kako je

$$\frac{98}{50} = \beta_1 > \frac{9([(1-\eta)^{-1}] + 1)(3\beta_2 + 5\beta_3)}{4 - 99\beta^2([(1-\eta)^{-1}] + 1)} = 1.0099,$$

može se zaključiti da je uslov (3.5.64) zadovoljen.

Tada na osnovu Teoreme 3.3, za $\gamma_1 \in \Big(0, \frac{1}{\tau+1} \log\left([(1-\eta)^{-1}]+1\right) \wedge \log(\frac{4}{3} \wedge \bar{B}) \wedge C'\Big)$, *sledi*

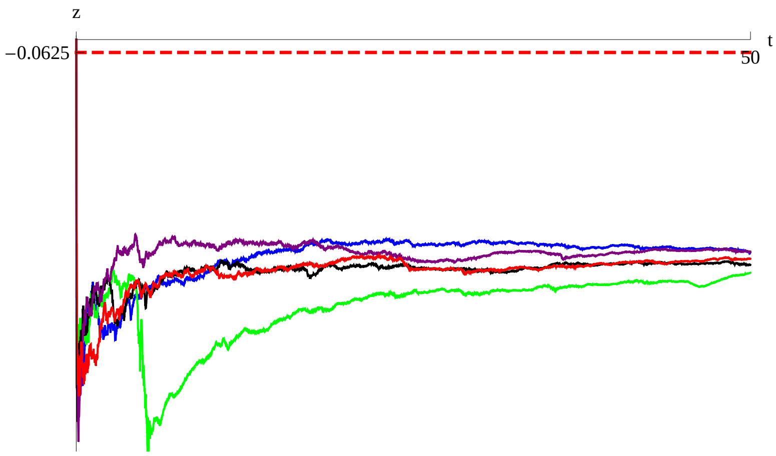
$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log|q_k|}{k\Delta} \leq -\frac{\gamma_1}{2} \;\; s.i,$$

gde je $\bar{B} = \log \bar{a}$, *dok* $\bar{a}$ *je jedinstveno pozitivno rešenje jednačine (3.5.65). Direktnim izračunavanjem se dobija da je*

$$\frac{1}{\tau+1} \log\left([(1-\eta)^{-1}] + 1\right) = 0.2007, \quad C' = \frac{2\beta_1}{9} = 0.4355, \quad \bar{B} = 18.0603,$$

pri čemu je $\log(\frac{4}{3} \wedge \bar{B}) = 0.1249$. *Dakle, Teorema 3.3 važi za* $\gamma_1 \in (0, 0.1249)$.

U cilju ilustracije skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti θ*-Euler-Maruyaminog rešenja, dato je nekoliko trajektorija količnika* $\frac{\log|q_k|}{k\Delta}$ *u odnosu na pravu* $z = -0.0625$, *što se može videti na Slici 3.3.*



Slika 3.3: Trajektorije količnika $\frac{\log|q_k|}{k\Delta}$ u poređenju sa pravom $z = -0.0625$, za $\Delta = 0.01$

3.8 O skoro izvesnoj eksponencijalnoj stabilnosti θ-Euler-Maruyaminog rešenja za $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$

U ovom poglavlju se razmatra skoro izvesna asimptotska eksponencijalna stabilnost diskretnog θ-Euler-Maruyaminog aproksimativnog rešenja za neutralne stohastičke diferencijalne jednačine sa vremenski-zavisnim kašnjenjem, za $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$. Treba naglasiti da se zahteva uslov linearnog rasta za koeficijent prenosa f. Predstavljen je i primer koji ilustruje teoriju koja se razmatra u ovom poglavlju.

Sledećom teoremom dokazana je skoro izvesna asimptotska eksponencijalna stabilnost diskretnog θ-Euler-Maruyaminog rešenja koje je definisano u (3.5.61).

Teorema 3.5 *Neka su zadovoljeni uslovi Leme 3.2 kao i hipoteze $\mathcal{A}_1$,$\mathcal{A}_2$,$\mathcal{A}_4$–$\mathcal{A}_6$ i neka je*

$$\beta^2 \in \Big(0, \frac{1}{4(9(1-\theta)^2+\theta^2+3)([(1-\eta)^{-1}]+1)} \wedge 1\Big), \tag{3.8.102}$$

$$\alpha_1 > \frac{12([(1-\eta)^{-1}]+1)}{1-4\beta^2([(1-\eta)^{-1}]+1)(9(1-\theta)^2+\theta^2+3)} \Big(\alpha_2 + K\left(\frac{1}{[(1-\eta)^{-1}]+1}+1\right) + 5(1-\theta)^2\beta^2\Big), \tag{3.8.103}$$

$$\alpha_1\theta - \theta^2 K - (\alpha_2\theta + \theta^2 K + 4\beta^2(1-\theta)^2)([(1-\eta)^{-1}]+1) > 0. \tag{3.8.104}$$

Ako je $\bar{\varepsilon}$ jedinstveno pozitivno rešenje jednačine

$$\alpha_1\theta - \theta^2 K - (\alpha_2\theta + \theta^2 K + 2\beta^2(1-\theta)^2(e^{\bar{\varepsilon}}+1))([(1-\eta)^{-1}]+1)e^{\bar{\varepsilon}\tau} = 0, \tag{3.8.105}$$

tada postoji $\Delta^* \in (0,1]$ tako da je za svako $\Delta \in (0,\Delta^*)$ i svako $\theta \in (\frac{1}{2},1)$, θ-Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje (3.5.61) skoro izvesno asimptotski eksponencijalno stabilno.

Dokaz. Na osnovu (3.2.15) sledi da je

$$\begin{aligned}
|z_{k+1}|^2 = |z_k|^2 &+ [2(q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^T f_k \\
&+|g_k|^2 + (1-2\theta)|f_k|^2\Delta]\Delta + m_k, \\
= |z_k|^2 &+ [2(q_k - u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^T f_k + |g_k|^2 + (1-2\theta)|f_k|^2\Delta]\Delta \\
&+2(1-\theta)(u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}))^T f_k\Delta + m_k,
\end{aligned} \tag{3.8.106}$$

pri čemu je

$$m_k = |g_k\Delta w_k|^2 - |g_k|^2\Delta + 2(z_k + f_k\Delta)^T g_k\Delta w_k. \tag{3.8.107}$$

Za $c_0 > 0$ takvo da je $0 < C < \frac{\alpha_1}{2(1+c_0)}$, važi

$$\begin{aligned}
&(2\theta-1)|f_k|^2\Delta - C|z_k|^2 \\
&\quad= [(2\theta-1)\Delta - C\theta^2\Delta^2]|f_k|^2 \\
&\quad\quad+2C\theta\Delta(q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^T f_k \\
&\quad\quad-C|q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 \\
&\quad= a|f_k + b(q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 \\
&\quad\quad-(ab^2+C)|q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2,
\end{aligned} \tag{3.8.108}$$

pri čemu je $a = (2\theta-1)\Delta - C\theta^2\Delta^2$ i $b = \frac{C\theta\Delta}{a}$.

Za $\theta \in (\frac{1}{2},1)$ se može naći dovoljno malo Δ^* tako da, za svako $\Delta \in (0,\Delta^*)$, sledi da je $a > 0$ i $-(ab^2+C) \geq -\frac{\alpha_1}{2(1+c_0)}$, odnosno,

$$\Delta^* = \frac{2\theta-1}{C\theta^2}\Big(1 - \frac{2C(1+c_0)}{\alpha_1}\Big). \tag{3.8.109}$$

Na osnovu nejednakosti (1.9.54), uslova (3.1.4) i (3.1.5) iz pretpostavke $\mathcal{A}_2$, za svako $\Delta \in (0,\Delta^*)$, važi

$$\begin{aligned}
&(2\theta-1)|f_k|^2\Delta - C|z_k|^2 \\
&\geq -\frac{\alpha_1}{2(1+c_0)}|q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 \\
&= -\frac{\alpha_1}{2(1+c_0)}|q_k - u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) + (1-\theta)u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq -\frac{\alpha_1}{1+c_0}|q_k-u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2-\frac{\alpha_1}{1+c_0}|(1-\theta)(u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})-u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2\\
&\geq -\alpha_1|q_k|^2+\alpha_2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2-\left(\frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2+\alpha_2\right)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\\
&-\frac{\alpha_1}{1+c_0}(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}-q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2. \qquad (3.8.110)
\end{aligned}
$$

Primenom pretpostavke $\mathcal{A}_4$, ocena (3.8.110) postaje

$$
\begin{aligned}
&(2\theta-1)|f_k|^2\Delta-C|z_k|^2\\
&\quad\geq 2(q_k-u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^Tf_k+|g_k|^2-\left(\frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2+\alpha_2\right)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\\
&\qquad-\frac{\alpha_1}{1+c_0}(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}-q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2. \qquad (3.8.111)
\end{aligned}
$$

Tada važi da je

$$
\begin{aligned}
&2(q_k-u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^Tf_k+|g_k|^2+(1-2\theta)|f_k|^2\Delta\\
&\quad\leq -C|z_k|^2+\left(\frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2+\alpha_2\right)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\\
&\qquad+\frac{\alpha_1}{1+c_0}(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}-q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2. \qquad (3.8.112)
\end{aligned}
$$

Zamenom (3.8.112) u (3.8.106) i primenom pretpostavke $\mathcal{A}_1$, sledi

$$
\begin{aligned}
|z_{k+1}|^2 &\leq |z_k|^2-C\Delta|z_k|^2+\left(\frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2+\alpha_2\right)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta\\
&+\frac{\alpha_1}{1+c_0}(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}-q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta\\
&+2(1-\theta)(u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})-u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}))^Tf_k\Delta+m_k\\
&\leq |z_k|^2-C\Delta|z_k|^2+\left(\frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2+\alpha_2\right)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta\\
&+\frac{2\alpha_1}{1+c_0}(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta+\frac{2\alpha_1}{1+c_0}(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta\\
&+2(1-\theta)\beta|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}-q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}||f_k|\Delta+m_k\\
&\leq |z_k|^2-C\Delta|z_k|^2+\left(\frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2+\alpha_2+\frac{2\alpha_1}{1+c_0}(1-\theta)^2\beta^2\right)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta\\
&+\frac{2\alpha_1}{1+c_0}(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta\\
&+(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}-q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta+|f_k|^2\Delta+m_k\\
&\leq |z_k|^2-C\Delta|z_k|^2+\left(\frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2+\alpha_2+\frac{2\alpha_1}{1+c_0}(1-\theta)^2\beta^2\right)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta\\
&+\frac{2\alpha_1}{1+c_0}(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta+2(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta + K|q_k|^2\Delta + K|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta + m_k \\
&= |z_k|^2 - C\Delta|z_k|^2 + \left[\frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2 + \alpha_2 + K + \left(\frac{2\alpha_1}{1+c_0}+2\right)(1-\theta)^2\beta^2\right]|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta \\
&+ \left(\frac{2\alpha_1}{1+c_0}+2\right)(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta + K|q_k|^2\Delta + m_k. \qquad (3.8.113)
\end{aligned}
$$

Tada za proizvoljnu konstantu $A > 1$ važi da je

$$
\begin{aligned}
&A^{(k+1)\Delta}|z_{k+1}|^2 - A^{k\Delta}|z_k|^2 \\
&\leq A^{(k+1)\Delta}\Bigg[|z_k|^2(1-C\Delta) + \left[\frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2+\alpha_2+K+\left(\frac{2\alpha_1}{1+c_0}+2\right)(1-\theta)^2\beta^2\right]|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta \\
&+ \left(\frac{2\alpha_1}{1+c_0}+2\right)(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta + K|q_k|^2\Delta + m_k\Bigg] - A^{k\Delta}|z_k|^2 \\
&= A^{(k+1)\Delta}|z_k|^2(1-C\Delta-A^{-\Delta}) \\
&+A^{(k+1)\Delta}\left[\frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2 + \alpha_2 + K + \left(\frac{2\alpha_1}{1+c_0}+2\right)(1-\theta)^2\beta^2\right]|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\Delta \\
&+A^{(k+1)\Delta}\left(\frac{2\alpha_1}{1+c_0}+2\right)(1-\theta)^2\beta^2|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\Delta \\
&+A^{(k+1)\Delta}K|q_k|^2\Delta + A^{(k+1)\Delta}m_k. \qquad (3.8.114)
\end{aligned}
$$

Zbog pojednostavljenja se uvode oznake

$$
\begin{aligned}
R_1(\Delta) &= 1 - C\Delta - A^{-\Delta}, \\
R_2 &= \frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2 + \alpha_2 + K + \left(\frac{2\alpha_1}{1+c_0}+2\right)(1-\theta)^2\beta^2, \\
R_3 &= \left(\frac{2\alpha_1}{1+c_0}+2\right)(1-\theta)^2\beta^2.
\end{aligned}
$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
A^{k\Delta}|z_k|^2 &\leq |z_0|^2 + R_1(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|z_i|^2 + R_2\Delta\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \\
&+R_3\Delta\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|q_{i-1-[\delta((i-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + K\Delta\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2 + M_k, \qquad (3.8.115)
\end{aligned}
$$

gde je

$$
M_k = \sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}m_i
$$

lokalni martingal i $M_0 = 0$.

Na osnovu definicije z_k, uslova (3.1.7) i nejednakosti (1.9.54), za svako $c_0 > 0$, sledi

$$\begin{aligned}
|z_k|^2 \geq\ & |q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 \\
& -2\theta\Delta(q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^T f_k \\
=\ & |q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 \\
& -2\theta\Delta(q_k - u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}))^T f_k - 2\theta(1-\theta)\Delta(u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) \\
& -u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}))^T f_k \\
\geq\ & |q_k - (1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) - \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 + \alpha_1\theta\Delta|q_k|^2 \\
& -\alpha_2\theta\Delta|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
& -(1-\theta)^2\Delta|u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}) - u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]})|^2 - \theta^2\Delta|f_k|^2 \\
\geq\ & \frac{1}{1+c_0}|q_k|^2 - \frac{1}{c_0}|(1-\theta)u(q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}) + \theta u(q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]})|^2 + \alpha_1\theta\Delta|q_k|^2 \\
& -\alpha_2\theta\Delta|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 - (1-\theta)^2\beta^2\Delta|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]} - q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 \\
& -\theta^2K\Delta(|q_k|^2 + |q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2) \\
\geq\ & \frac{1}{1+c_0}|q_k|^2 - \frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 - \frac{2\theta^2\beta^2}{c_0}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
& +\alpha_1\theta\Delta|q_k|^2 - \alpha_2\theta\Delta|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
& -(1-\theta)^2\beta^2\Delta(2|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 + 2|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2) \\
& -\theta^2K\Delta(|q_k|^2 + |q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2) \\
=\ & \Big(\frac{1}{1+c_0} + \alpha_1\theta\Delta - \theta^2K\Delta\Big)|q_k|^2 \\
& +\Big(-\frac{2\theta^2\beta^2}{c_0} - \alpha_2\theta\Delta - 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta - \theta^2K\Delta\Big)|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2 \\
& +\left(-\frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0} - 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta\right)|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2. \qquad (3.8.116)
\end{aligned}$$

Može se primetiti da je $R_1(0) = 0$ i $R_1^{'}(\Delta) = -C + A^{-\Delta}\log A$. Dakle, pretpostavlja se da je $1 < A < e^C$, tako da je $R_1^{'}(\Delta) < 0$, $\Delta \in (0, \Delta^*)$, što implicira $R_1(\Delta) < 0$, $\Delta \in (0, \Delta^*)$. Tada, zamenom (3.8.116) u (3.8.115), za svako $\Delta \in (0, \Delta^*)$, sledi da je

$$\begin{aligned}
A^{k\Delta}|z_k|^2 \leq |z_0|^2 + K_1(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2 + K_2(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \\
+K_3(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1}A^{(i+1)\Delta}|q_{i-1-[\delta((i-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + M_k, \qquad (3.8.117)
\end{aligned}$$

gde je

$$K_1(\Delta) = R_1(\Delta)\Big(\frac{1}{1+c_0} + \alpha_1\theta\Delta - \theta^2K\Delta\Big) + K\Delta,$$

$$K_2(\Delta) = R_1(\Delta)\left(-\frac{2\theta^2\beta^2}{c_0} - \alpha_2\theta\Delta - 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta - \theta^2 K\Delta\right) + R_2\Delta,$$
$$K_3(\Delta) = R_1(\Delta)\left(-\frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0} - 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta\right) + R_3\Delta.$$

Kako je $K_3(\Delta) > 0$, $\Delta \in (0, \Delta^*)$, imajući u vidu (3.2.13), dobija se

$$\begin{aligned} K_3(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-1-[\delta((i-1)\Delta)/\Delta]}|^2 \\ \leq K_3(\Delta)A^{\Delta}|q_{-1-[\delta(0)/\Delta]}|^2 + K_3(\Delta)A^{\Delta}\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2. \end{aligned} \tag{3.8.118}$$

Tada (3.8.117) postaje

$$\begin{aligned} A^{k\Delta}|z_k|^2 \leq |z_0|^2 + K_1(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2 \\ +(K_2(\Delta) + K_3(\Delta)A^{\Delta})\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \\ +K_3(\Delta)A^{\Delta}|q_{-1-[\delta(0)/\Delta]}|^2 + M_k. \end{aligned} \tag{3.8.119}$$

Primenom Leme 2.5 na drugu sumu s desne strane nejednakosti (3.8.119), sledi

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \leq A^{n_*\Delta}\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i-[\delta(i\Delta)/\Delta]+1)\Delta}|q_{i-[\delta(i\Delta)/\Delta]}|^2 \\ \leq ([(1-\eta)^{-1}] + 1)A^{n_*\Delta}\sum_{i=-n_*}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2. \end{aligned} \tag{3.8.120}$$

Kako je $n_*\Delta = \tau$, (3.8.119) postaje

$$A^{k\Delta}|z_k|^2 \leq X + h(\Delta)\sum_{i=0}^{k-1} A^{(i+1)\Delta}|q_i|^2 + M_k, \tag{3.8.121}$$

gde je

$$\begin{aligned} X = |z_0|^2 + K_3(\Delta)A^{\Delta}|q_{-1-[\delta(0)/\Delta]}|^2 \\ +(K_2(\Delta) + K_3(\Delta)A^{\Delta})([(1-\eta)^{-1}] + 1)A^{\tau}\sum_{i=-n_*}^{-1} A^{(i+1)\Delta}|\varphi(i\Delta)|^2 < \infty, \end{aligned} \tag{3.8.122}$$

i

$$h(\Delta) = K_1(\Delta) + (K_2(\Delta) + K_3(\Delta)A^{\Delta})([(1-\eta)^{-1}] + 1)A^{\tau}. \tag{3.8.123}$$

Može se primetiti da je

$$
\begin{aligned}
&h(\Delta)\\
&= R_1(\Delta)\left(\frac{1}{1+c_0} - A^{\tau}\frac{2\beta^2((1-\theta)^2A^{\Delta}+\theta^2)([(1-\eta)^{-1}]+1)}{c_0}\right)\\
&\quad+\Big[K+(R_2+R_3A^{\Delta})([(1-\eta)^{-1}]+1)A^{\tau}\\
&\quad+R_1(\Delta)(\alpha_1\theta-\theta^2K-(\alpha_2\theta+\theta^2K+2\beta^2(1-\theta)^2(A^{\Delta}+1))([(1-\eta)^{-1}]+1)A^{\tau})\Big]\Delta\\
&= \Delta\Big\{\frac{R_1(\Delta)}{\Delta}\left(\frac{1}{1+c_0} - A^{\tau}\frac{2\beta^2((1-\theta)^2A^{\Delta}+\theta^2)([(1-\eta)^{-1}]+1)}{c_0}\right)\\
&\quad+K+(R_2+R_3A^{\Delta})([(1-\eta)^{-1}]+1)A^{\tau}+R_1(\Delta)\\
&\quad\times[\alpha_1\theta-\theta^2K-(\alpha_2\theta+\theta^2K+2\beta^2(1-\theta)^2(A^{\Delta}+1))([(1-\eta)^{-1}]+1)A^{\tau}]\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.8.124}
$$

Tada, za svako $\Delta\in(0,\Delta^*)$, važi

$$
\begin{aligned}
h(\Delta)\le \Delta\Big\{&\frac{R_1(\Delta)}{\Delta}\left(\frac{1}{1+c_0} - A^{\tau}\frac{2\beta^2((1-\theta)^2A+\theta^2)([(1-\eta)^{-1}]+1)}{c_0}\right)\\
&+K+(R_2+R_3A)([(1-\eta)^{-1}]+1)A^{\tau}+R_1(\Delta)h_1(A)\Big\},
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$
h_1(A)=\alpha_1\theta-\theta^2K-(\alpha_2\theta+\theta^2K+2\beta^2(1-\theta)^2(A+1))([(1-\eta)^{-1}]+1)A^{\tau}. \tag{3.8.125}
$$

Očigledno, važi da je

$$
\begin{aligned}
&h_1'(A)\\
&=[-(\alpha_2\theta+\theta^2K+2\beta^2(1-\theta)^2(A+1))\tau A^{\tau-1}-2\beta^2(1-\theta)^2A^{\tau}]([(1-\eta)^{-1}]+1)<0.
\end{aligned}
$$

Sa druge strane, može se zaključiti da je

$$
h_1(1)=\alpha_1\theta-\theta^2K-(\alpha_2\theta+\theta^2K+4\beta^2(1-\theta)^2)([(1-\eta)^{-1}]+1).
$$

Na osnovu pretpostavke (3.8.104), sledi da je $h_1(1)>0$. Imajući u vidu da jednačina (3.8.105) ima jedinstveno pozitivno rešenje $\bar\varepsilon=\log\bar A$, sledi

$$
h_1(e^{\varepsilon})=\alpha_1\theta-\theta^2K-(\alpha_2\theta+\theta^2K+2\beta^2(1-\theta)^2(e^{\varepsilon}+1))([(1-\eta)^{-1}]+1)e^{\varepsilon\tau}>0,
$$

za svako $\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon)$ i $A\in(1,\bar A\wedge e^C)$.

Neka je $a(\Delta)=\frac{R_1(\Delta)}{\Delta}$, $\Delta\in(0,\Delta^*)$. Tada je $\lim_{\Delta\to0}a(\Delta)=\log A-C<0$ za svako $A\in(1,\bar A\wedge e^C)$ i $a'(\Delta)=\frac{b(\Delta)}{\Delta^2}$, gde je

$$
b(\Delta)=-1+A^{-\Delta}(1+\Delta\log A).
$$

Kako je $b(0) = 0$ i $b'(\Delta) = -\Delta A^{-\Delta}\log^2 A < 0$, $\Delta \in (0, \Delta^*)$, $A \in (1, \bar{A} \wedge e^C)$, zaključuje se da je $b(\Delta) < 0$, $\Delta \in (0, \Delta^*)$, $A \in (1, \bar{A} \wedge e^C)$, što implicira $a'(\Delta) < 0$, odnosno, da je $a(\Delta)$ opadajuća funkcija na intervalu $(0, \Delta^*)$ za svako $A \in (1, \bar{A} \wedge e^C)$. Imajući u vidu da je $\log A - C > a(\Delta)$, $\Delta \in (0, \Delta^*)$, za svako $A \in (1, \bar{A} \wedge e^C)$, ako se pokaže da je

$$\begin{aligned} h_2 := (\log A - C)\left(\frac{1}{1+c_0} - A^\tau \frac{2\beta^2((1-\theta)^2 A + \theta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1)}{c_0}\right) \\ +K + (R_2 + R_3 A)([(1-\eta)^{-1}] + 1)A^\tau \le 0, \end{aligned} \tag{3.8.126}$$

tada je $h(\Delta) < 0$, za $\Delta \in (0, \Delta^*)$ i $A \in (1, \bar{A} \wedge e^C)$.

Dalje, ako je

$$\begin{aligned} & h_2 - \log A\left(\frac{1}{1+c_0} - A^\tau \frac{2\beta^2((1-\theta)^2 A + \theta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1)}{c_0}\right) \\ & -\left(C\frac{2\beta^2((1-\theta)^2 A + \theta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1)}{c_0} + (R_2 + R_3 A)([(1-\eta)^{-1}] + 1)\right)(A^\tau - 1) \\ & = K + (R_2 + R_3 A)([(1-\eta)^{-1}] + 1) \\ & -C\left(\frac{1}{1+c_0} - \frac{2\beta^2((1-\theta)^2 A + \theta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1)}{c_0}\right) < 0, \end{aligned} \tag{3.8.127}$$

za proizvoljno $c_0 > 0$ i $A \in (1, \bar{A} \wedge e^C)$, tada je $h_2 \le 0$ za izabrano c_0 i neko A blisko 1.

Može se primetiti da je

$$\begin{aligned} & C\left(\frac{1}{1+c_0} - \frac{2\beta^2((1-\theta)^2 A + \theta^2)([(1-\eta)^{-1}] + 1)}{c_0}\right) \\ & > K + \left(\frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2 + \alpha_2 + K + \left(\frac{2\alpha_1}{1+c_0} + 2\right)(1-\theta)^2\beta^2(A+1)\right)([(1-\eta)^{-1}] + 1) \\ & \Leftrightarrow C\left(\frac{1}{(1+c_0)([(1-\eta)^{-1}] + 1)} - \frac{2\beta^2((1-\theta)^2 A + \theta^2)}{c_0}\right) \\ & > \frac{K}{[(1-\eta)^{-1}] + 1} + \frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2 + \alpha_2 + K + \left(\frac{2\alpha_1}{1+c_0} + 2\right)(1-\theta)^2\beta^2(A+1) \\ & \Leftrightarrow C\left(\frac{1}{(1+c_0)([(1-\eta)^{-1}] + 1)} - \frac{2\beta^2((1-\theta)^2 A + \theta^2)}{c_0}\right) \\ & -\frac{\alpha_1}{c_0}\beta^2 - \frac{2\alpha_1}{1+c_0}(1-\theta)^2\beta^2(A+1) \\ & > \alpha_2 + K\left(\frac{1}{[(1-\eta)^{-1}] + 1} + 1\right) + 2(1-\theta)^2\beta^2(A+1). \end{aligned} \tag{3.8.128}$$

Neka je $c_0 = 1$ i $C = \frac{\alpha_1}{3(1+c_0)} = \frac{\alpha_1}{6}$. Na osnovu izraza (3.8.128), treba pokazati da za odgovarajući izbor konstante A, važi da je

$$\alpha_1 \left(\frac{1}{12([(1-\eta)^{-1}]+1)} - \frac{2\beta^2((1-\theta)^2 A + \theta^2)}{6} - \beta^2 - (1-\theta)^2\beta^2(A+1) \right)$$
$$> \alpha_2 + K\left(\frac{1}{[(1-\eta)^{-1}]+1} + 1 \right) + 2(1-\theta)^2\beta^2(A+1). \tag{3.8.129}$$

Primenom uslova (3.8.102), odnosno,

$$\beta^2 \in \Big(0, \frac{1}{4(9(1-\theta)^2+\theta^2+3)([(1-\eta)^{-1}]+1)} \wedge 1\Big),$$

može se zaključiti da je izraz pomnožen sa α_1 u (3.8.129) pozitivan za svako $A \in \left(1, \frac{3}{2} \wedge \bar{A} \wedge e^C\right)$. Nadalje, pretpostavka (3.8.103) garantuje da (3.8.129) važi za svako $A \in \left(1, \frac{3}{2} \wedge \bar{A} \wedge e^C\right)$, što implicira $h_2 \le 0$, kao što se i zahteva.

Na osnovu (3.8.121), za svako $\Delta \in (0, \Delta^*)$, zaključuje se da je

$$A^{k\Delta}|z_k|^2 \le X + M_k. \tag{3.8.130}$$

Na osnovu Diskretne verzije teoreme o konvergenciji semi-martingala (Teoreme 1.7), sledi

$$\limsup_{k\to\infty} A^{k\Delta}|z_k|^2 \le \limsup_{k\to\infty}(X+M_k) < \infty \ \ s.i.$$

Zamenom (3.8.130) u (3.8.116), dobija se

$$\left(\frac{1}{1+c_0} + \alpha_1\theta\Delta - \theta^2 K\Delta\right) A^{k\Delta}|q_k|^2$$
$$\le \left(\frac{2\theta^2\beta^2}{c_0} + \alpha_2\theta\Delta + 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta + \theta^2 K\Delta\right) A^{k\Delta}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2$$
$$+ \left(\frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0} + 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta\right) A^{k\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2 + X + M_k. \tag{3.8.131}$$

Dakle, za svako $\gamma \in \left(0, \log\left(\frac{3}{2} \wedge \bar{A}\right) \wedge C\right)$, postoji ceo broj k_1, tako da za svaki ceo broj $k_2 > k_1$, važi

$$\left(\frac{1}{1+c_0} + \alpha_1\theta\Delta - \theta^2 K\Delta\right) \sup_{k_1\le k\le k_2} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2$$
$$\le \left(\frac{2\theta^2\beta^2}{c_0} + \alpha_2\theta\Delta + 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta + \theta^2 K\Delta\right) \sup_{k_1\le k\le k_2} e^{\gamma k\Delta}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0}+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta\right)\sup_{k_1\le k\le k_2} e^{\gamma k\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2+X+M_k\\
&\le\left(\frac{2\theta^2\beta^2}{c_0}+\alpha_2\theta\Delta+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta+\theta^2K\Delta\right)e^{\gamma\tau}\sup_{k_1\le k\le k_2} e^{\gamma(k-[\delta(k\Delta)/\Delta])\Delta}|q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}|^2\\
&+\left(\frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0}+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta\right)e^{\gamma(\tau+1)}\sup_{k_1\le k\le k_2} e^{\gamma(k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta])\Delta}|q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]}|^2\\
&+X+M_k\\
&\le\left(\frac{2\theta^2\beta^2}{c_0}+\alpha_2\theta\Delta+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta+\theta^2K\Delta\right)\\
&\quad\times\left(e^{\gamma\tau}\sup_{k_1-n_*\le k\le k_1} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2+e^{\gamma\tau}\sup_{k_1\le k\le k_2} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2\right)\\
&+\left(\frac{2(1-\theta)^2\beta^2}{c_0}+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta\right)\\
&\quad\times\left(e^{\gamma(\tau+1)}\sup_{k_1-n_*-1\le k\le k_1} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2+e^{\gamma(\tau+1)}\sup_{k_1\le k\le k_2} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2\right)+X+M_k,
\end{aligned}
$$

tako da je, za $c_0 = 1$,

$$
\begin{aligned}
&H\sup_{k_1\le k\le k_2} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 && (3.8.132)\\
&\quad\le\left(2\theta^2\beta^2+\alpha_2\theta\Delta+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta+\theta^2K\Delta\right)e^{\gamma\tau}\sup_{k_1-n_*\le k\le k_1} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2\\
&\quad+\left(2(1-\theta)^2\beta^2+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta\right)e^{\gamma(\tau+1)}\sup_{k_1-n_*-1\le k\le k_1} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2+X+M_k, && (3.8.133)
\end{aligned}
$$

pri čemu je

$$
\begin{aligned}
H&=\frac{1}{2}+\alpha_1\theta\Delta-\theta^2K\Delta-\left(2\theta^2\beta^2+\alpha_2\theta\Delta+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta+\theta^2K\Delta\right)e^{\gamma\tau}\\
&\quad-\left(2(1-\theta)^2\beta^2+2(1-\theta)^2\beta^2\Delta\right)e^{\gamma(\tau+1)}\\
&>\frac{1}{2}-2\beta^2(\theta^2+(1-\theta)^2)e^{\gamma(\tau+1)}\\
&\quad+\Delta\Big[\alpha_1\theta-\theta^2K-\left(\alpha_2\theta+4(1-\theta)^2\beta^2+\theta^2K\right)e^{\gamma(\tau+1)}\Big]. \qquad (3.8.134)
\end{aligned}
$$

Tada, za svako $\gamma \in \left(0, \frac{1}{\tau+1}\log\left([(1-\eta)^{-1}]+1\right) \wedge \log(\frac{3}{2}\wedge \bar{A}) \wedge C\right)$ i svako $\Delta \in (0, \Delta^*)$, na osnovu (3.5.91) sledi da je

$$
\begin{aligned}
H&>\frac{1}{2}-2\beta^2(\theta^2+(1-\theta)^2)([(1-\eta)^{-1}]+1)\\
&\quad+\Delta\Big[\alpha_1\theta-\theta^2K-\left(\alpha_2\theta+4(1-\theta)^2\beta^2+\theta^2K\right)([(1-\eta)^{-1}]+1)\Big].
\end{aligned}
$$

Imajući u vidu prethodnu nejednakost, na osnovu (3.8.102) i (3.8.104) sledi da je $H > 0$, tako da (3.8.133) implicira

$$\begin{aligned}
&\sup_{k_1 \leq k \leq k_2} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 \\
&\leq \frac{1}{H}\Bigg[\Big(2\theta^2\beta^2 + \alpha_2\theta\Delta + 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta + \theta^2K\Delta\Big)\, e^{\gamma\tau} \sup_{k_1-n_*\leq k\leq k_1} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 \\
&\quad + \Big(2(1-\theta)^2\beta^2 + 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta\Big)e^{\gamma(\tau+1)} \sup_{k_1-n_*-1\leq k\leq k_1} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 + X + M_k\Bigg]
\end{aligned} \tag{3.8.135}$$

Kada $k_2 \to +\infty$ u (3.8.135), važi

$$\begin{aligned}
&\sup_{k_1 \leq k \leq \infty} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 \\
&\leq \frac{1}{H}\Bigg[\Big(2\theta^2\beta^2 + \alpha_2\theta\Delta + 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta + \theta^2K\Delta\Big)\, e^{\gamma\tau} \sup_{k_1-n_*\leq k\leq k_1} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 \\
&\quad + \Big(2(1-\theta)^2\beta^2 + 2(1-\theta)^2\beta^2\Delta\Big)\, e^{\gamma(\tau+1)} \sup_{k_1-n_*-1\leq k\leq k_1} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 + X + M_k\Bigg] < \infty,
\end{aligned}$$

što implicira

$$\limsup_{k\to\infty} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 < \infty,$$

za svako $\gamma \in \Big(0, \frac{1}{\tau+1}\log\left([(1-\eta)^{-1}] + 1\right) \wedge \log(\frac{3}{2} \wedge \bar{A}) \wedge C\Big)$ i $\Delta \in (0, \Delta^*)$. Tada iz (3.8.131) sledi

$$\limsup_{k\to\infty} e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2 \leq \frac{X + M_k}{H}.$$

Odatle je

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log(e^{\gamma k\Delta}|q_k|^2)}{k\Delta} = 0,$$

tako da je

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log|q_k|}{k\Delta} \leq -\frac{\gamma}{2},$$

za svako $\gamma \in \Big(0, \frac{1}{\tau+1}\log\left([(1-\eta)^{-1}] + 1\right) \wedge \log(\frac{3}{2} \wedge \bar{A}) \wedge C\Big)$ i svako $\Delta \in (0, \Delta^*)$. $\diamondsuit$

Napomena 3.2 *U dokazu prethodne teoreme, uslovi Leme 3.2 nisu eksplicitno primenjeni. Ti uslovi garantuju egzistenciju i jedinstvenost rešenja koje se razmatra.*

Sledeći primer ilustruje skoro izvesnu eksponencijalnu stabilnost θ-Euler-Maruyaminog rešenja kada je $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Primer 3.3 *Razmatra se sledeća skalarna neutralna stohastička diferencijalna jednačina*

$$d[x(t) - \frac{1}{50}\sin x(t-\delta(t))] = -\frac{1}{48}x(t)dt + \frac{1}{20\sqrt{6}}\frac{x(t-\delta(t))}{1+x^2(t-\delta(t))}\cos x(t)dw(t) \tag{3.8.136}$$

za $t \in [0, 50]$, *sa početnim uslovom* $\varphi(t) = 1$, $t \in [-\tau, 0]$, *tako da je* $\tau = 0.5$ *i* $\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R)$. *Koeficijent prenosa* $f(x, y) = -\frac{1}{48}x$ *zadovoljava uslov linearnog rasta* $\mathcal{A}_1$ *za* $K = \frac{1}{48^2}$, *pri čemu funkcija* $u(x) = \frac{1}{50}\sin x$, $x \in R$ *zadovoljava pretpostavku* $\mathcal{A}_2$ *za* $\beta = \frac{1}{50}$. *Neka je funkcija kašnjenja oblika* $\delta(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin t$, $t \in [0, 50]$. *Tada je*

$$\delta'(t) = -\frac{1}{4}\cos t \leq \frac{1}{4} = \bar{\delta}$$

i

$$|\delta(t) - \delta(s)| \leq \frac{1}{4}|t - s|, \quad t, s \in [0, 50],$$

pri čemu su pretpostavke $\mathcal{A}_3$ *i* $\mathcal{A}_4$ *zadovoljene za* $\eta = \frac{1}{4}$. *U cilju provere da li važi uslov* $\mathcal{A}_5$, *može se uočiti da je*

$$\begin{aligned}
2(x - u(y))f(x, y) + |g(x, y)|^2 &= -\frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{1\,200}x\sin y + \frac{1}{2\,400}\frac{y^2}{(1+y^2)^2}\cos^2 x \\
&\leq -\frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{2\,400}x^2 + \frac{1}{2\,400}y^2 + \frac{1}{2\,400}y^2 \\
&\leq -\frac{33}{800}x^2 + \frac{1}{1\,200}y^2,
\end{aligned}$$

odnosno, $\alpha_1 = \frac{33}{800}$ *i* $\alpha_2 = \frac{1}{1\,200}$. *Pored toga, važi da je*

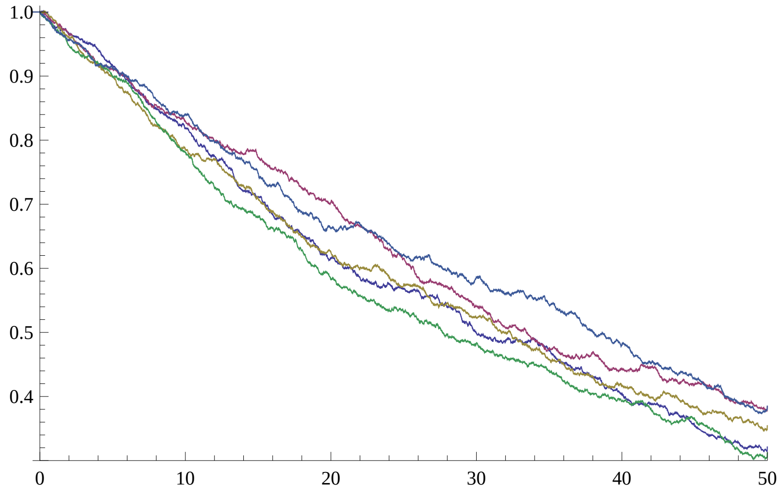
$$\frac{\alpha_2}{1 - \bar{\delta}} = \frac{1}{900} < \frac{33}{800} = \alpha_1.$$

Kako važi pretpostavka $\mathcal{C}_1$ *za svaki izbor pozitivnih konstanata* μ_1 *i* μ_2, *neka je* $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{5}$, *tako da je* $\theta((\mu_1 + \mu_2)\Delta + \beta) < 1$ *za svako* $\Delta \in (0, 1)$. *Tada se, na osnovu Leme 3.2, zaključuje da odgovarajuće* θ*-Euler-Maruyamine aproksimativne jednačine imaju jedinstvena rešenja. Imajući u vidu (3.5.61), za* $\theta = \frac{3}{4}$, *sledi da je* $q_k = \varphi(k\Delta)$, $k = -n_*, -n_* + 1, ..., 0$, *dok je, za* $k = 0, 1, 2, ...,$

$$\begin{aligned}
q_{k+1} = q_k &+ \frac{3}{200}\sin q_{k+1-[\delta((k+1)\Delta)/\Delta]} - \frac{1}{100}\sin q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]} \\
&- \frac{1}{200}\sin q_{k-1-[\delta((k-1)\Delta)/\Delta]} - \frac{1}{64}q_{k+1}\Delta - \frac{1}{192}q_k\Delta \\
&+ \frac{1}{20\sqrt{6}}\frac{q_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}}{1 + q^2_{k-[\delta(k\Delta)/\Delta]}}\cos q_k \Delta w_k.
\end{aligned} \tag{3.8.137}$$

Prateći dokaz Teoreme 3.5 na osnovu (3.8.109), s obzirom na to da je $C = \frac{\alpha_1}{6}$, *sledi da je* $\Delta^* = 1$. *Dakle, za svako* $\Delta \in (0, \Delta^*)$ *ispituju se uslovi stabilnosti jednačine (3.8.137).*

Na Slici 3.4 je predstavljeno nekoliko trajektorija rešenja jednačine (3.8.137) sa korakom $\Delta = 0.01$.



Slika 3.4: Trajektorije θ-Euler-Maruyaminog rešenja za $\Delta = 0.01$

Kako je

$$\frac{1}{4(9(1-\theta)^2+\theta^2+3)([(1-\eta)^{-1}]+1)} \wedge 1 = \frac{1}{33},$$

sledi da važi uslov (3.8.102). Pored toga važi da je

$$\frac{33}{800} = \alpha_1 > \frac{12([(1-\eta)^{-1}]+1)}{1-4\beta^2(9(1-\theta)^2+\theta^2+3)([(1-\eta)^{-1}]+1)} \times\Big(\alpha_2 + K\left(\frac{1}{[(1-\eta)^{-1}]+1}+1\right) + 5(1-\theta)^2\beta^2\Big) = 0.03914,$$

što znači da je uslov (3.8.103) ispunjen. Konačno,

$$\alpha_1\theta - \theta^2 K - (\alpha_2\theta + \theta^2 K + 4\beta^2(1-\theta)^2)([(1-\eta)^{-1}]+1) = 0.0287,$$

odnosno, uslov (3.8.104) je ispunjen.

Na osnovu Teoreme 3.5, za $\gamma \in \Big(0, \frac{1}{\tau+1}\log\left([(1-\eta)^{-1}]+1\right) \wedge \log(\frac{3}{2} \wedge \bar{A}) \wedge C\Big)$, *sledi da je*

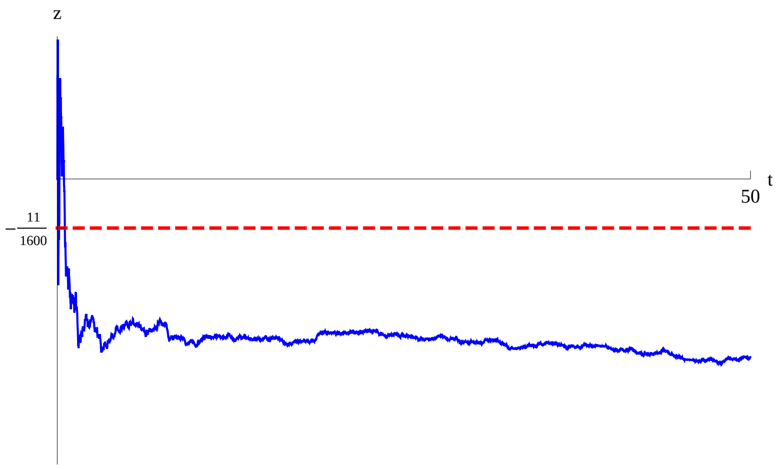
$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\log|q_k|}{k\Delta} \le -\frac{\gamma}{2} \ s.i,$$

pri čemu je $\bar{A} = \log \bar{\varepsilon}$, dok je $\bar{\varepsilon}$ jedinstveno rešenje jednačine (3.8.105). Direktnim izračunavanjem se dobija

$$\frac{1}{\tau+1}\log\left([(1-\eta)^{-1}]+1\right) = 0.4621 \quad C = \frac{\alpha_1}{6} = \frac{11}{1\,600}, \quad \bar{A} = 34.1444,$$

tako da Teorema 3.5 važi za $\gamma \in \left(0, \frac{11}{1\,600}\right)$.

U cilju ilustracije skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti θ-Euler-Maruyaminog rešenja, predstavljene su trajektorije količnika $\frac{\log|q_k|}{k\Delta}$ u odnosu na pravu $z = -\frac{11}{1\,600}$, što se može videti na Slici 3.5.



Slika 3.5: Trajektorije količnika $\frac{\log|q_k|}{k\Delta}$ u odnosu na pravu $z = -\frac{11}{1\,600}$

Zaključak

U ovoj disertaciji su razmatrane numeričke aproksimacije rešenja neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova. Pritom su proučavane Euler-Maruyamina metoda, backward Eulerova metoda i θ-Euler-Maruyamina metoda. Određeni su dovoljni uslovi konvergencije u verovatnoći niza Euler-Maruyaminih i backward Eulerovih rešenja ka tačnom rešenju neutralnih stohastičkih diferencijalnih jednačina sa vremenski-zavisnim kašnjenjem i prelazima Markova. Pored toga su određeni i dovoljni uslovi pod kojima ova rešenja nasleđuju od tačnog rešenja osobinu skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti. Takođe su, posebno za $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ i $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, razmatrani dovoljni uslovi pod kojima tačno i θ-Euler-Maruyamino aproksimativno rešenje imaju osobinu skoro izvesne eksponencijalne stabilnosti. U svrhu dobijanja navedenih rezultata su primenjivani, u nekim situacijama, uslov linearnog rasta, dok su u drugim situacijama primenjivani uslovi nelinearnog rasta i to dve verzije uopštenih uslova Khasminskiiog.

Rezultati ovog rada bi se na odgovarajući način mogli proširiti na različite klase stohastičkih diferencijalnih jednačina. Pored toga mogli bi se uvesti drugačiji uslovi pod kojima aproksimativna rešenja konvergiraju ka tačnom rešenju i pritom imaju osobinu stabilnosti odgovarajuće vrste. Takođe mogući pravci daljih istrazivanja bi se mogli odnositi na proučavanje nekih drughih numeričkih metoda aproksimacije.

Summary

In this dissertation numerical approximations of solutions to neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and Markovian switching are considered. Euler-Maruyama, backward Euler and θ- Euler-Maruyama methods are studied. Sufficient conditions for convergence in probability of the sequences of Euler-Maruyama and backward Euler solutions to the exact solution of neutral stochastic differential equations with time-dependent delay and Markovian switching are determined. Moreover, conditions under which these solutions inherit from the exact solution almost sure exponential stability property. Beside that, for $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$ and $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, the sufficient conditions under which both the exact and θ- Euler-Maruyama approximate solutions share the almost sure exponential stability property. In order to obtain the previously mentioned results, in some situations, the linear growth condition is applied, while in other situations certain nonlinear growth conditions, precisely generalized Khasminskii-type conditions, are used.

The results of this dissertation could be extended appropriately to different classes of stochastic differential equations. Moreover, some different conditions under which the approximate solutions converge to the exact solution and have the same stability property can be applied. Beside that, possible directions for further research could be related to the studying of some other approximate methods.

Literatura

[1] L. Arnold, *Stochastic Differential Equations, Theory and Applications*, J. Wiley & Sons, New York, 1974.

[2] L. Arnold, W. Kleimann *Qualitative theory of stochastic systems*, Probab. Anal. & Rel. Topics, ed. A. Barucha-Reid, Academic Press, NY, 3 (1981).

[3] G.K. Basak, A. Bisi, M.K. Ghosh, *Stability of a Random Diffusion with Linear Drift*, J. Math. Anal. Appl. (1996) 604–622.

[4] M. Berger, V. Mizel, *Volterra equations with Ito integrals I*, J. Integral Equations, 2 (1980) 187-245.

[5] M. Berger, V. Mizel, *Volterra equations with Itô integrals II*, J. Integral Equations, 4 (1980) 319-337.

[6] D. Burkholder, B. Davis, R. Gundy, *Integral inequalities for convex functions of operators on martingales*, Proc. 6th Berkley Symp. Math. Statis. Prob., Berkley, Univ. of California Press, 2 (1972) 223–240.

[7] H. Cramer, *On the theory of random processes*, Ann. Math., 41 (1940) 215–230.

[8] C. Dellacherie, *Capacites et processus stochastiques*, Berlin, Springer Verlag, 1972.

[9] C. Dolean–Dade, P. Meyer, *Integrales stochastiques par rapport aux martingales localcs*, Lect. Notes Math., 124 (1970) 77–107.

[10] J.L. Doob, *Stochastic processes*, John Wiley, New York, 1953.

[11] A. Friedman, *Stochastic Differential Equations and Applications, Vol. 1,2*, Academic Press, New York, 1976.

[12] I.I. Gikhman, *Certain differential equations with random functions*, Ukr. Math. J., 2(3) (1950) 45–69. (In Russian)

[13] I.I. Gikhman, *On the theory of differential equations of random processes*, Ukr. Math. J., 2(4) (1950) 37–63. (In Russian)

[14] I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, *Introduction to the theory of random processes*, Dover Publications, Inc., New York, 1996.

[15] I.I. Gikhman, A.V. Skorokhod, *Stochastic Differential Equations and Their Applications*, Naukova Dumka, Kiev, 1982. (In Russian)

[16] R.Z. Has'minskii, *Stochastic Stability of Differential Equations*, Sijthoof & Noordhoof, Aplohen aan der Rijn, The Nederlands, 1980.

[17] D.J. Higham, X. Mao, A.M. Stuart, *Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential*, SIAM J. Numer. Amal. Vol.40, No.3 1041–1063.

[18] D.J. Higham, X. Mao, A.M. Stuart, *Exponential mean-square stability of numerical solutions to stochastic differential equations*, LMS J. Comput. Math. 6 (2003) 297–313.

[19] D.J. Higham, P.E. Kloeden, *Numerical methods for nonlinear stochastic differential equations with jumps*, Numer. Math 101 (2005) 101–119.

[20] L. Hu, X. Mao, Y. Shen, *Stability and boundedness of nonlinear hybrid stochastic differential delay equations*, Systems and Control Letters 62 (2013) 178–187.

[21] J. Hu, Z. Xu, *Exponential Stability of Neutral Stochastic Functional Differential Equations with Two-Time-Scale Markovian Switching*, Mathematical Problems in Engineering Vol. 2014 (2014), Article ID 907982, http://dx.doi.org/10.1155/2014/907982.

[22] K. Itô, *Stochastic integrals*, Proc. Imperial Acad. Tokyo, 20 (1944) 519–524.

[23] K. Itô, *On a stochastic integral equation*, Proc. Imperial Acad. Tokyo, 22 (1946) 32–35.

[24] K. Itô, *On stochastic differential equations*, Memorial Math. Society, 4 (1951) 1–51.

[25] K. Itô, *On a Formula Concerning Stochastic Differentials*, Nagoya Math. J. 3 (1951) 55–65.

[26] K. Itô, *On a formula of stochastic differentials*, Matematika, Sbornik prevodov inost. statei 3 (1959) 131–141.

[27] N. Jacob, Y. Wang, C. Yuan, *Stochastic differential delay equations with jumps, under nonlinear growth condition*, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastics Processes 81 (2009) 571-588.

[28] S. Janković, *Introduction to the theory of the Itô-type stochastic integrals and stochastic differential equations, Topics from Mathematics and Mechanics*, Math. Inst. SANU, Belgrade, (1998) 105–139.

[29] S. Janković, M. Jovanović, *Generalized stochastic perturbation-depending differential equations*, Stochastic Analysis and Appl., 20 (6) (2002) 1281–1307.

[30] S. Janković, M. Jovanović, *Analytic approximations of solutions to stochastic differential equations*, Faculty of Science and Mathematics, University of Niš, 2008.

[31] M. Jovanović, S. Janković, *On perturbed nonlinear Itô type stochastic integrodifferential equations*, J. Math. Anal. Appl., 269 (2002) 301–316.

[32] M. Jovanović, S. Janković, *Neutral stochastic functional differential equations with additive pertubations*, Appl. Math. Comput. 213, (2009) 370–379.

[33] S. Janković, M. Obradović, *Pth mean asymptotic stability and integrability of Itô–Volterra integrodifferential equations*, Filomat 23:3 (2009), 181–197.

[34] P.E. Kloeden, E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Velag, Berlin, 1997.

[35] R.Z. Khasminskii, *Necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of linear stochastic systems*, Theory Probability App. 12, (1967) 144–147.

[36] R.Z. Khasminskii, *Stability of Systems of Differential Equations with Random Cofficients*, Nauka, Moscow, 1969.

[37] R.Z. Khasminskii and V.B. Kolmanovskii, *Stability of delay stochastic equations*, Theory Probab. & Math. Stat., Kiev 2 (1970) 111–120.

[38] V.B. Kolmanovskii, *On the stability of stochastic systems with delay*, Problemy Peredachi Informatsii 5 (4) (1960) 59–67. (In Rissian)

[39] V.B. Kolmanovskii, V.R. Nosov, *Stability and Periodic Modes of Control Systems with Artereffect*, Nauka, Moscow, 1981.

[40] A.N. Kolmogorov, *Basic notions in probability theory*, ONTI, 1936. (in Russian)

[41] A.N. Kolmogorov, *Analytic methods in probability theory*, Uspehi Matem. Nauk, (1938) 5–41. (in Russian)

[42] G. Lan, C. Yuan, *Exponential stability of the exact solutions and θ–EM approximations to neutral SDDEs with Markov switching*, J. Comput. Appl. Math. 285, (2015) 230-242.

[43] R. S. Liptzer, A. N. Shiryaev, *Theory of Martingales*, Kluwer Academic Publisher, 1989.

[44] R. S. Liptzer, A. N. Shiryaev, *Statistics of Random Processes I,II*, Springer, New York, 1977.

[45] K. Liu, X. Xia, *On the exponential stability in mean square of neutral stochastic functional differential equations*, Systems Control Lett., 37 (1999) 207–215.

[46] M. Loève, *Probability Theory*, New York: D. Van Nostrand Company, 1963.

[47] Q. Luo, X. Mao, Y. Shen, *New criteria on exponential stability of neutral stochastic differential delay equations*, Systems and Control Letters 55, (2006) 826–834.

[48] J. Mališić, *Slučajni procesi, teorija i primene*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.

[49] X. Mao, *Stability of stochastics differential equations with respect to semimartingales*, Longman Scientific & Tehnical, 1991.

[50] X. Mao, *Exponential Stability of Stochastic Differential Equations*, Marcel Dekker, 1994.

[51] X. Mao, *Razumikhin–type theorems on exponential stability of neutral stochastic functional differential equations*, SIAM J. Math. Anal., 28 (1997) 389-401.

[52] X. Mao, *Stochastics Differential Equations and their Applications*, Horwood Publishing Limited (1997).

[53] X. Mao, *Stability of stochastic differential equations with Markovian switching*, Stochastic Processes and their Applications 79 (1999) 45-67.

[54] X. Mao, *Asymptotic properties of neutral stochastic differential delay equations*, Stochastics and Stochastics Reports 68 (2000) 273–295.

[55] X. Mao, *Numerical solutions of stochastic differential delay equations under the generalized Khasminskii–type conditions*, Appl. Math. Comput. 217 (2011) 5512–5524.

[56] X. Mao, M. J. Rassias, *Khasminskii-type theorems for stochastic differential delay equations*, Stochastic analysis and applications, (2005) 1045–1069.

[57] X. Mao, L. Szpruch, *Strong convergence and stability of implicit numerical methods for stochastics differential equations with non–globally Lipschitz continuous coefficients*, J. Comput. Appl. Math. 238, (2013) 14–28.

[58] X. Mao, A. Matasov, A. B. Piunovskiy, *Stochastic differential delay equation with Markovian Switching*, Bernoulli 6 (2000) 73–90.

[59] X. Mao, C. Yuan, *Stochastic Differential Equations with Markovian Switching*, Imperical college press, 2006.

[60] P.A. Meyer, *A decomposition theorem for supermartingales*, Ilinois J. Math., 2 (1962) 193–205.

[61] P.A. Meyer, *Decomposition of supermartingales; the uniqueness theorem*, Ilinois J. Math., 7 (1963) 1–17.

[62] P.A. Meyer, *Probability and Potentials*, Blaisdell, Waltham, 1966.

[63] P.A. Meyer, *Un cours sur les intégrales stochastic*, Lecture Notes in Math., 511 (1976) 245–398.

[64] J. Milnor, *Analytic proofs of the "hairy ball theorem" and the Brouwer fixed–point theorem*, Amer. Math. Monthly 85, no. 7, (1978) 521–524.

[65] M. Milošević, *Highly nonlinear neutral stochastic differential equations with time–dependent delay and the Euler–Maruyama method*, Mathematical and Computer Modelling 54, (2011) 2235–2251.

[66] M. Milošević, *Almost sure exponential stability of solutions to highly nonlinear neutral stochastics differential equations with time-dependent delay and Euler–Maruyama approximation*, Mathematical and Computer Modelling 57, (2013) 887–899.

[67] M. Milošević, *Implicit numerical methods for highly nonlinear neutral stochastics differential equations with time–dependent delay*, Appl. Math. and Comput. 244, (2014) 741–760.

[68] M. Milošević, M. Jovanović, S. Janković, *An approximate method via Taylor series for stochastic differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 363, 128–137 (2010)

[69] M. Milošević, M. Jovanović, *An application of Taylor series in the approximation of solutions to stochastic differential equations with time–dependent delay*, J. Comput. Appl. Math. 235, (2011) 4439–4451.

[70] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink, *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*, Kluwer Acadenic Publishers, 1991.

[71] M.G. Murge, B.G. Pachpatte, *On generalized Itô type stochastic integral equation*, Yokohama Mathematical Journal Vol. 34, 1986.

[72] M.G. Murge, B.G. Pachpatte, *Successive approximations for solutions of second order stochastic integrodifferential equations of Itô type*, Indian J. pure appl. Math., 21(3):260-274, March 1990.

[73] M. Obradović, M. Milošević, *Stability of a class of neutral stochastic differential equations with unbounded delay and Markovian switching and the Euler-Maruyama method* J. Comput. Appl. Math. 309 (2017) 244–266.

[74] M. Obradović, M. Milošević, *Almost sure exonential stability of θ–Euler-Maruyama method for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay when $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$*, Filomat 31:18 (2017) 5629–5645.

[75] M. Obradović, M. Milošević, *Almost sure exponential stability of θ–Euler-Maruyama method, when $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay under nonlinear growth conditions*, Calcolo 56:9 (2019).

[76] M. Obradović, M. Milošević, *A note on the almost sure exponential stability of the θ–Euler–Maruyama approximation for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay when $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$*, (u pripremi).

[77] M. Obradović, *Implicit numerical methods for neutral stochastic differential equations with unbounded delay and Markovian switching*, Applied Mathematics and Computation 347 (2019) 664-687.

[78] C.A. Rogers, *A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed-point theorem*, Amer. Math. Monthly 87, no. 7, (1980) 525–527.

[79] A.N. Shiryaev, *Probability*, Springer, Berlin (1996).

[80] E.E. Sluickii, *Sur les fonctions éventelles continues intégrables et dérivables dans le sens stochastique*, Comptes Rendus Acad. Sci., 187 (1928) 370–372.

[81] J. Stoyanov, *Stochastic Processes*, Nauka, Sofia, 1978 (in Bulgarian).

[82] N. Wiener, *Differential spaces*, J. Math. Phys., 2 (1923) 131–174.

[83] N. Wiener, *The homogeneous chaos*, Amer. J. Math., 60 (1930) 897–936.

[84] E. Wong, *Stochastic Processes in Information and Dynamical systems*, McGraw Hill, New York, 1971.

[85] F. Wu, X. Mao, L. Szpruch, *Almost sure exonential stability of numerical solutions for stochastic delay differential equations*, Numer. Math. 115, (2010) 681–697.

[86] M. Xue, S. Zhou, S. Hu, *Stability of nonlinear neutral stochastic functional differential equations*, J. Appl. Math. Volume 2010, Article ID 425762, 26 pages doi:10.1155/2010/425762

[87] C. Yuan, W. Glover, *Approximate solutions of stochastic differential delay equations with Markovian switching*, J. Comput. Appl. Math. 194 (2006) 207-226.

[88] C. Yuan, X. Mao, *Robust stability and controllability of stochastic differential delay equations with Markovian switching*, Automatica 40 (2004) 343–354.

[89] C. Yuan, X. Mao, *Convergence of the EulerMaruyama method for stochastic differential equations with Markovian switching*, Mathematics and Computers in Simulation 64 (2004) 223-235.

[90] Z. Yu, *Almost surely asimptotic stability of exact and numerical solutions for neutral stochastic pantograph equations*, Abstract and Applied Analysis (2011) doi:10.1155/2011/14079.

[91] X. Zong, F. Wu, C. Huang, *Theta schemes for SDDEs with non–globally Lipschitz continuous coefficients*, J. Comput. Appl. Math. 278 (2015) 258-277.

[92] X. Zong, F. Wu, C. Huang, *Exponential mean square stability of the theta approximations for neutral stochastic differential delay equations*, J. Comput. Appl. Math. 286 (2015) 172-185.

Biografija

Maja Obradović je rođena 5. jula 1980. godine u Skoplju, Republika Makedonija. Prva četiri razreda osnovnog obrazovanja je završila u Skoplju. Nastavila je školovanje u Nišu, u osnovnoj školi ,,Radoje Domanović", koju je završila sa odličnim uspehom. Nakon toga, završila je Gimnaziju ,,Bora Stanković" u Nišu sa odličnim uspehom.

Osnovne studije je upisala školske 1998/99. godine, na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Nišu, na Odseku za matematiku i informatiku, na smeru Teorijska matematika i primena, koje je završila 2004. godine sa prosečnom ocenom 8,14.

Magistarske studije je upisala školske 2004/05. godine na Odseku za matematiku i informatiku, na smeru Stohastika sa primenama. Položila je sve ispite predviđene planom i programom magistarskih studija sa prosečnom ocenom 9,34. Magistarsku tezu pod naslovom ,,L^p-stabilnost i integrabilnost Volterinih stohastičkih integro-diferencijalnih jednačina", pod mentorstvom prof. dr Svetlane Janković je uspešno odbranila 2009. godine i time stekla akademsko zvanje magistar matematičkih nauka.

Doktorske studije je upisala školske 2009/2010. godine gde je položila preostale ispite sa ocenom 10.

Od 2004. do marta 2006. godine je radila kao profesor matematike u srednjoj školi.

U martu 2006. je izabrana u zvanje istraživača pripravnika na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu. U zvanje istraživača saradnika je izabrana 2009. godine i pritom je u periodu od marta 2006. do januara 2010. godine učestvovala u realizaciji projekta Ministarstva nauke i zaštite životne sredine pod nazivom ,,Teorija operatora, stohastička analiza i primene".

Od 2010. godine je radila u srednjim školama kao profesor matematike, a od 2013. godine radi u Gimnaziji ,,9.maj" u Nišu kao profesor matematike i profesor računarstva i informatike.

Majka je dvoje dece školskog uzrasta.

Bibliografija

Maja Obradović je objavila četiri naučna rada koji sadrže rezultate istraživanja u okviru doktorske disertacije. Od toga su dva rada u časopisima kategorije M21a, jedan kategorije M21, a jedan kategorije M22.

- M. Obradović, M. Milošević, *Almost sure exponential stability of θ–Euler-Maruyama method, when $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, for neutral stochastic differential equations with time–dependent delay under nonlinear growth conditions*, Calcolo 56:9 (2019).

- M. Obradović, *Implicit numerical methods for neutral stochastic differential equations with unbounded delay and Markovian switching*, Applied Mathematics and Computation 347 (2019) 664-687.

- M. Obradović, M. Milošević, *Almost sure exonential stability of θ–Euler-Maruyama method for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay when $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$*, Filomat 31:18 (2017) 5629–5645.

- M. Obradović, M. Milošević, *Stability of a class of neutral stochastic differential equations with unbounded delay and Markovian switching and the Euler-Maruyama method* J. Comput. Appl. Math. 309 (2017) 244–266.

Deo doktorske disertacije je i jedan naučni rad koji je u pripremi.

- M. Obradović, M. Milošević, *A note on the almost sure exponential stability of the θ-Euler-Maruyama approximation for neutral stochastic differential equations with time-dependent delay when $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$.*

Pored ovih radova, Maja Obradović je u koautorstvu objavila rad koji je deo magistarske teze.

- S. Jankovic, M. Obradovic, *Pth Mean Asymptotic Stability and Integrability of Itô-Volterra Integrodifferential Equations*, Filomat 23:3 (2009), 181-197.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

НУМЕРИЧКЕ АПРОКСИМАЦИЈЕ РЕШЕЊА НЕУТРАЛНИХ СТОХАСТИЧКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА СА ВРЕМЕНСКИ-ЗАВИСНИМ КАШЊЕЊЕМ

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 28.06.2019.

Потпис аутора дисертације:

Маја Обрадовић

Маја С. Обрадовић

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

НУМЕРИЧКЕ АПРОКСИМАЦИЈЕ РЕШЕЊА НЕУТРАЛНИХ СТОХАСТИЧКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА СА ВРЕМЕНСКИ-ЗАВИСНИМ КАШЊЕЊЕМ

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 28.06.2019.

Потпис аутора дисертације:

Маја Обрадовић

Маја С. Обрадовић

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

НУМЕРИЧКЕ АПРОКСИМАЦИЈЕ РЕШЕЊА НЕУТРАЛНИХ СТОХАСТИЧКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА СА ВРЕМЕНСКИ-ЗАВИСНИМ КАШЊЕЊЕМ

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 28.06.2019.

Потпис аутора дисертације:

Маја Обрадовић

Маја С. Обрадовић