



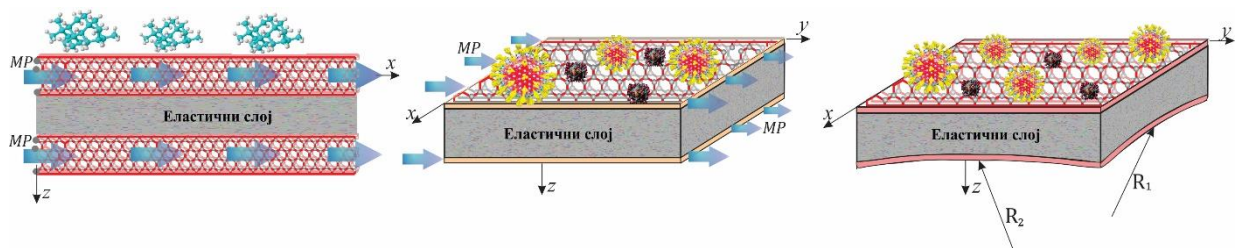
УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ  
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ



Марија Б. Стаменковић Атанасов

# СТАБИЛНОСТ И ПРИНУДНЕ ОСЦИЛАЦИЈЕ СПРЕГНУТИХ НАНО-СТРУКТУРА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА



Ниш, 2023.



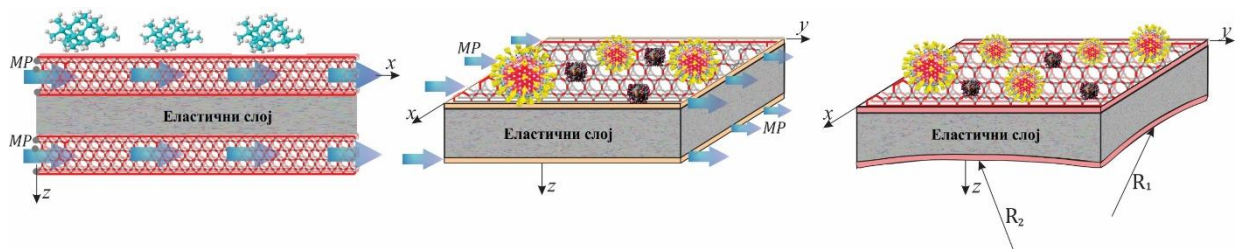
UNIVERSITY OF NIŠ  
FACULTY OF MECHANICAL  
ENGINEERING



Marija B. Stamenković Atanasov

# STABILITY AND FORCED VIBRATION OF COUPLED NANO-STRUCTURES

DOCTORAL DISSERTATION



Niš, 2023.

## Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	др Иван Р. Павловић, ванредни професор, Универзитет у Нишу, Машински факултет у Нишу
Наслов:	Стабилност и принудне осцилације спрегнутих нано-структура
Резиме:	<p>У овој докторској дисертацији изучавано је осцилаторно понашање различитих типова еластично спрегнутих нано-структура сачињених од две угљеничне нано-цеви моделиране као две нано-греде, два графенска нано-листића моделирана као две нано-плоче и комбинација нано-плоче и двострано закривљене плитке нано-љуске. Код специјалног случаја једне нано-структуре је разматрана динамика ротирајуће нано-цеви. За наведене нано-системе, применом Eringen-ове нелокалне теорије напона и Euler–Bernoulli-јеве теорије греда, теорије плоча Kirchhoff-Love и линеарне теорије плитких љуски Novozhilov-a, изведене су диференцијалне једначине које описују мала трансверзална померања еластично спрегнутих нано-структура. За решавање добијених диференцијалних једначина малих трансверзалних осцилација анализираних нано-система примењене су аналитичке и нумеричке методе. Детаљно је спроведена анализа стабилности и анализа слободних и принудних (пригушених и непригушених) осцилација еластично спрегнутих нано-структура. За посматране спрегнуте нано-структуре аналитички су одређене вредности сопствених кружних фреквенција, изведени закони малих трансверзалних померања услед дејства различитих типова спољашњег оптерећења и разматрани су критеријуми критичних сила извијања. Континуално равномерно распоређено хармонијско оптерећење, концентрисана хармонијска сила, покретна сила константног интензитета и покретна хармонијска сила су типови оптерећења за која су приказана аналитичка решења и нумеричка анализа принудних осцилација. Детаљно су анализирани различити параметари који утичу на законе промена малих трансверзалних померања горњих и доњих еламената представљених еластично спрегнутих нано-структура. То су: нелокални параметар, магнетно поље, радијус закривљења код двострано закривљене плитке нано-љуске, коефицијенти пропорционалности пригушења, различите вредности спољашњих оптерећења, радијус главчине и угаона брзина. Код анализе критичних сила извијања и законе промена малих трансверзалних померања пригушених и непригушених осцилација приказани су</p>

утицаји различитих материјалних и геометријских параметара. Изучавање оваквих нано-система има за циљ приказ смањења вредности амплитуде осциловања малих трансверзалних померања за сва посматрана спољашња оптерећења, а услед пораста интензитета магнетног поља и пораста нелокалног параметра. Упоредиване су вредности амплитуда принудних трансверзалних осцилација еластично повезане нано плоче и нано-љуске са системом представљеним од две еластично спојене нано-плоче. Показано је да је утицај закривљености нано љуске од великог значаја. Приликом ове анализе еластично спрегнутих нано-структура доказано је да горњи побуђени елемент нано-система (у овом случају нано-плоча) има мању амплитуду принудних осцилација само ако је доњи елемент закривљен (у овом случају нано-љуска). На смањење амплитуде побуђене горње нано-плоче представљеног нано-система утиче, поред смањења вредности радијуса закривљености нано-љуске и повећање вредности нелокалног параметра, повећање вредности коефицијената пропорционалности пригушења и смањење вредности принудне силе. Симулација молекуларне динамике за неке од наведених еластично спрегнутих нано-структура користиће се као потврда добијених аналитичких резултата. Резултати из овог рада су верификовани поређењем са резултатима који су публиковани у референтним научним часописима.

Научна област:	Примењена механика
Научна дисциплина:	Осцилације и стабилност нано-структура
Кључне речи:	Слободне осцилације, принудне осцилације, стабилност, нелокална теорија еластичности, спрегнуте нано-структуре, параметарска анализа, нано-греда, нано-плоча, нано-љуска
УДК:	531.36 + 539.3]:66.017 - 022.513.2 (043.3)
CERIF класификација:	P190 Математичка и општа теоријска физика, класична механика, квантна механика, релативитет, гравитација, статистичка физика
Тип лиценце Креативне заједнице:	Одабрани тип лиценце <b>CC BY-NC-ND</b>

## Data on Doctoral Dissertation

Doctoral  
Supervisor:

PhD Ivan R. Pavlović, associate professor, University of Niš,  
Faculty of Mechanical Engineering

Title:

Stability and forced vibration of coupled nano-structures

Abstract:

This doctoral dissertation studies the oscillatory behavior of different types of elastically coupled nano-structures comprising two carbon nano-tubes modeled as two nano-beams, two graphene nano-sheets modeled as two nano-plates and a combination of nano-plates and double-curved shallow nano-shells. In the special case of an one nano-structures, the dynamics of a rotating nano-tube are considered. For the mentioned nano-systems, by applying Eringen's non-local stress theory, Euler-Bernoulli's beam theory, Kirchhoff-Love's plate theory, and Novozhilov's linear theory of shallow shells, differential equations are given to describe the vibrations (small transverse displacements) of elastically coupled nano-structures. Analytical and numerical methods are applied to solve the presented differential equations of motion. The stability, free and forced vibrations (damped and undamped) of elastically coupled nano-structures are studied in detail. The dissertation also provides a detailed determination of analytical solutions of eigenfrequencies, transverse displacements due to the action of different types of external loads and critical buckling forces. Analytical solutions and numerical analysis of forced vibrations are presented for the following load types: uniformly distributed continuous harmonic load, concentrated harmonic force, and moving constant and harmonic force. Various parameters that influence the dynamic responses of the upper and lower elements of the presented elastically coupled nano-structures are analyzed in detail. These are: non-local parameter, magnetic field, radius of curvature of a doubly curved shallow nano-shell, damping proportionality coefficients, different values of external loads, hub radius and angular velocity. The investigation into the influence of various material and geometrical parameters is also included in the analyses of critical buckling forces and transverse displacements of damped and undamped vibrations. The objective of the study of these nano-systems is to show that such systems have a damping effect on the amplitudes of vibrations of the nano-system transverse displacements for all observed external loads, due to the increase in the intensity of the magnetic field and the increase in the non-local parameter. The influence of the radius of curvature of the nano-shell, which stems from the nano-plate and nano-shell with an elastically coupled system composed from the two nano-plates, is of great importance. During this analysis of

elastically coupled nano-structures, it is proved that the excited upper element of the nano-system (in this case the nano-plate) has a smaller amplitude of the transverse response vibrations only if the lower element is curved (in this case the nano-shell). In addition to being affected by the decrease in the value of the radius of curvature of the nano-shell and the increase in the value of the non-local parameter, the dynamic absorption or the decrease in the amplitude of the excited upper nano-plate of the presented nano-system is also influenced by the increase in the value of the damping proportionality coefficient and the decrease in the value of the external excitation. The simulation of molecular dynamics for some of the aforementioned elastically coupled nano-structures will be used as a confirmation of the obtained analytical results. The obtained solutions are verified with the results published in international journals.

Scientific  
Field:

Applied mechanics

Scientific  
Discipline:

Vibration and stability of nano-structures

Key Words:

Free vibrations, Forced vibrations, Stability, Nonlocal theory of elasticity, Coupled nano-structures, Parametric analysis, Nano-beam, Nano-plate, Nano-shell

UDC:

531.36 + 539.3]:66.017 - 022.513.2 (043.3)

CERIF  
Classification:

P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics

Creative  
Commons  
License Type:

Selected license type CC BY-NC-ND

## ЗАХВАЛНОСТ

*Ова докторска дисертација урађена је на Катедри за механику, Машинског факултета Универзитета у Нишу. Финансијски је подржана од стране Министарства науке, технолошког развоја и иновација Републике Србије (Уговор бр. 451-03-47/2023-01/200109).*

Прво, желим да се захвалим свом ментору др Ивану Р. Павловићу ванр. професору Катедре за механику, на разумевању, сугестијама и подршци током израде моје докторске дисертације.

Посебну захвалност дугујем свим члановима комисије, др М. Лазаревићу, ред. проф. Машинског факултета у Београду и професорима са Машинског факултета у Нишу др Г. Јаневском, др Ј. Симоновић, др И. Павловићу и др В. Стојановићу, који су својим препорукама и сугестијама допринели да коначна верзија дисертације буде боља.

Захвалност дугујем др Јулијани Симоновић, ванр. професору Катедре за механику што се темељно посветила овој докторској дисертацији и дала корисне савете. Својим научним ентузијазмом и својим коментарима је допринела да ова дисертација изгледа боље.

Желим да се захвалим професорки др Катици (Стевановић) Хедрих која ми је прва пружила прилику да се бавим научно-истраживачким радом учешћем на пројекту *“Динамика хибридних система сложених структура. Механика материјала” (2011-2019)* у Математичком институту Српске академије наука и уметности у Београду. Током учешћа на овом пројекту су започета истраживања која су део ове докторске дисертације, а остварена су у сарадњи са колегом др Данилом Карличићем и професорима са Машинског факултета, др Р. Павловићем, др П. Козићем, др Г. Јаневским, др Д. Јовановићем, др В. Стојановићем.

Свим професорима са Катедре за механику упућујем велику захвалност на стрпљењу и проналажењу одговора на моја питања.

Посебну захвалност на великој мотивацији, беспрекорном разумевању и стрпљењу дугујем свом супругу Александру и деци Мици и Алекси. Својом љубављу ову дисертацију су створили они. Захваљујем Богу што су баш они моја срећа и што ми их је даровао.

Бескрајно се захваљујем својим родитељима, мами Слађани и тати Браниславу као и брату Марјану и његовој породици на стрпљењу и разумевању како у животу тако и при изради ове докторске дисертације.

За све што јесам, могу и умем захвалност дугујем родитељима.

*Марија*

„Човек од науке не циља на израван резултат одмах. Он не очекује да ће његове напредне идеје бити одмах спремно прихваћене. Његов рад је као сађење - за будућност. Његова дужност је да постави темеље за оне који ће доћи и покаже пут. Он живи и ради и нада се.“

**Никола Тесла**



# Садржај

<b>1. Увод</b> .....	1
1.1. Општа разматрања.....	6
1.2. Eringen-ова нелокална теорија еластичности .....	12
1.3. Maxwell-ове релације .....	15
<b>2. Нелокална теорија нано-цеви, нано-плоча и нано-љуски</b> .....	18
2.1. Нелокална теорија нано-цеви заснована на Euler-Bernoulli-јевој теорији греде.....	18
2.2. Нелокална теорија еластичне ортотропне нано-плоче заснована на Kirchhoff-овој теорији плоча .....	22
2.3. Нелокална теорија еластичне ортотропне двострано закривљене плитке нано-љуске на основу Novozhilov-е линеарне теорије љуске .....	27
<b>3. Слободне и принудне осцилације спрегнутих нано-цеви</b> .....	32
3.1. Слободне осцилације спрегнутих нано-цеви.....	34
3.2. Принудне осцилације спрегнутих нано-цеви .....	40
3.2.1. Континуално равномерно распоређено хармонијско оптерећење .....	44
3.2.2. Концентрисана хармонијска сила .....	46
3.2.3. Покретна сила константног интензитета .....	48
3.2.4. Покретна хармонијска сила .....	50
3.3. Нумеричка анализа .....	52
3.3.1. Параметарска анализа.....	52
3.3.2. Анализа принудних осцилација нано-система.....	59
3.3.3. Резултати симулације молекуларне динамике.....	63
<b>4. Слободне и принудне осцилације спрегнутих нано-плоча</b> .....	66
4.1. Слободне осцилације спрегнутих нано-плоча.....	68
4.2. Принудне осцилације спрегнутих нано-плоча .....	71
4.2.1. Равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење .....	75
4.2.2. Равномерно распоређено линијско хармонијско оптерећење .....	78
4.2.3. Концентрисана хармонијска сила .....	80
4.3. Нумеричка анализа.....	82

4.3.1. Упоредна анализа.....	83
4.3.2. Анализа принудних осцилација нано-система.....	86
<b>5. Слободне и принудне осцилације спрегнуте нано-плоче и нано-љуске .....</b>	<b>93</b>
5.1. Слободне осцилације спрегнуте нано-плоче и нано-љуске .....	96
5.2. Принудне непригушене осцилације спрегнуте нано-плоче и нано-љуске .....	103
5.3. Принудне пригушене осцилације спрегнуте нано-плоче и нано-љуске .....	107
5.4. Нумеричка анализа.....	111
5.4.1. Анализа природне фреквенције осциловања нано-система .....	112
5.4.2. Анализа слободних осцилација нано-система .....	115
5.4.3. Анализа принудних осцилација нано-система.....	118
<b>6. Параметарска анализа принудних осцилација нано-носача.....</b>	<b>124</b>
6.1. Методологија решавања .....	127
6.2. Одређивање природне фреквенције .....	129
6.3. Принудне осцилације непригушеног нано-система.....	130
6.4. Принудне осцилације пригушеног нано-система .....	133
6.5. Нумеричка анализа.....	137
6.5.1. Анализа природне фреквенције.....	138
6.5.2. Анализа принудних непригушених осцилација.....	144
6.5.3. Анализа принудних пригушених осцилација.....	147
<b>7. ЗАКЉУЧАК .....</b>	<b>151</b>
 ЛИТЕРАТУРА .....	 160
 Прилог А .....	 172
Прилог Б .....	175
 БИОГРАФИЈА АУТОРА.....	 177

# 1. Увод

Значајна достигнућа заснивана на **НАНОТЕХНОЛОГИЈИ** бележе успех дуже од једне деценије. Нанотехнологија је део науке који се бави проучавањем физичких, хемијских и биолошких особина материја на молекуларном и атомском нивоу у размерама од 1-100 nm (nm-нанометар, милијардити део метра). Развојем се број иновација у областима медицине, ауто-индустрије, војне-индустрије, прехранбене-индустрије, информационе-технологије проширио због примене достигнућа нанотехнологије.

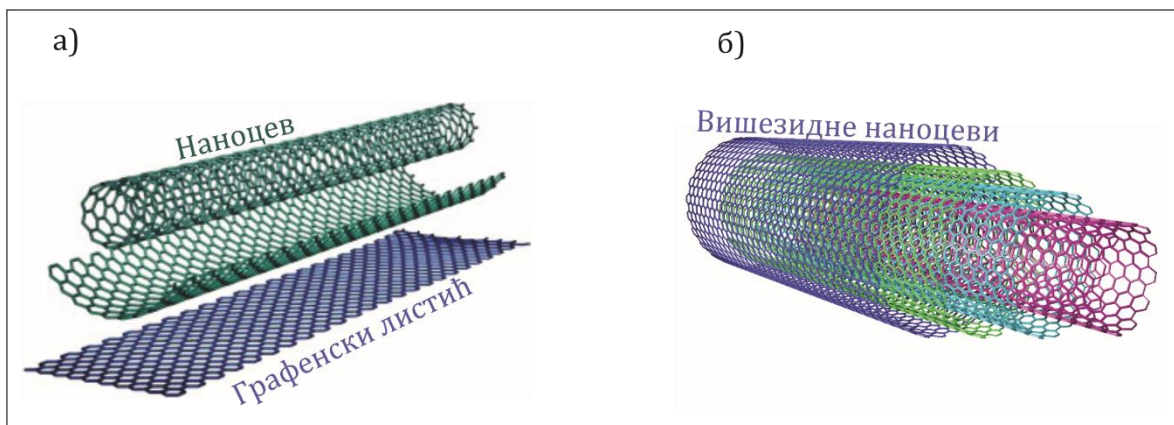
Производња наночестица (nanoparticles), нановлакна (nanofibers), наношипки (nanorods), наножица (nanowires), нанотрака (nanobelts), наноплата (nanoplates), наноцеви/наногреде (nanotubes/nanobeams) представља низ кључних структура у развоју нанотехнологије.

Уколико се нано материјали посматрају по хемијском саставу, онда се могу поделити на органске и неорганске.

- **Неоргански наноматеријали** базирају се на металним оксидима и њих не ћемо разматрати.
- **Органски материјали** су они који садрже угљеник и могу бити у облику цеви или шупље сфере и елипсоида. Угљеничне нано-цеви и угљенични нано-листићи имају механичке, термичке, електричне, оптичке и структурне особине које се могу прилагодити и контролисати на основу специфичних захтева у посебним применама.

**Угљеничне наноцеви** (carbon nanotubes-CNTs) су шупље наноструктуре које се састоје од угљеничних атома везаних један за други помоћу  $sp^2$  веза (облика хексагоналне решетке). Сачињене су од ролованих листова једнослојних атома угљеника-графена, (видети **Слику 1а**). Поред једнозидне (single-walled carbon nanotubes-SWCNT) постоје и наноцеви са више слојева. Дво и више слојни системи било да се састоје од наноцеви или наноплата могу бити повезани *van der Waals*-овим силама. Већина наноцеви са једним зидом има пречник од скоро једног нанометра, са дужином цеви која може бити више милиона пута дужа. Двозидне (double-walled carbon nanotubes-DWCNT) и вишезидне

наноцеви (multi-walled - **MWCNT**) састоје се од неколико концентрично повезаних наноцеви, пречника до 100 nm (Слика 1б). Њихова дужина може бити од неколико микрометара до неколико милиметара.



*Слика 1 Приказ роловања графенског листића у цилиндру (CNT)*

Особине угљеничних материјала су:

- механичка затезна чврстоћа им је и до 400 пута већа од челика;
- хемијски су стабилни и отпорни на било који хемијски утицај (отпорни су на корозију);
- изузетно су флексибилни;
- њихова густина је шест пута мања од густине челика и због тога су тако лаки и танки;
- имају високу топлотну проводљивост.

Поред тога што су лаки и танки они подносе вишеструко савијање и преклапање, при томе имају већу савојну крутост.

Због своје мале густине, велике чврстоће, високе топлотне проводљивости и хемијске отпорности, очекује се да ће угљенични материјали заменити претходне металне материјале и постати нова генерација материјала високе топлотне проводљивости.

Сва ова својства их чини веома привлачним за бројне примене:

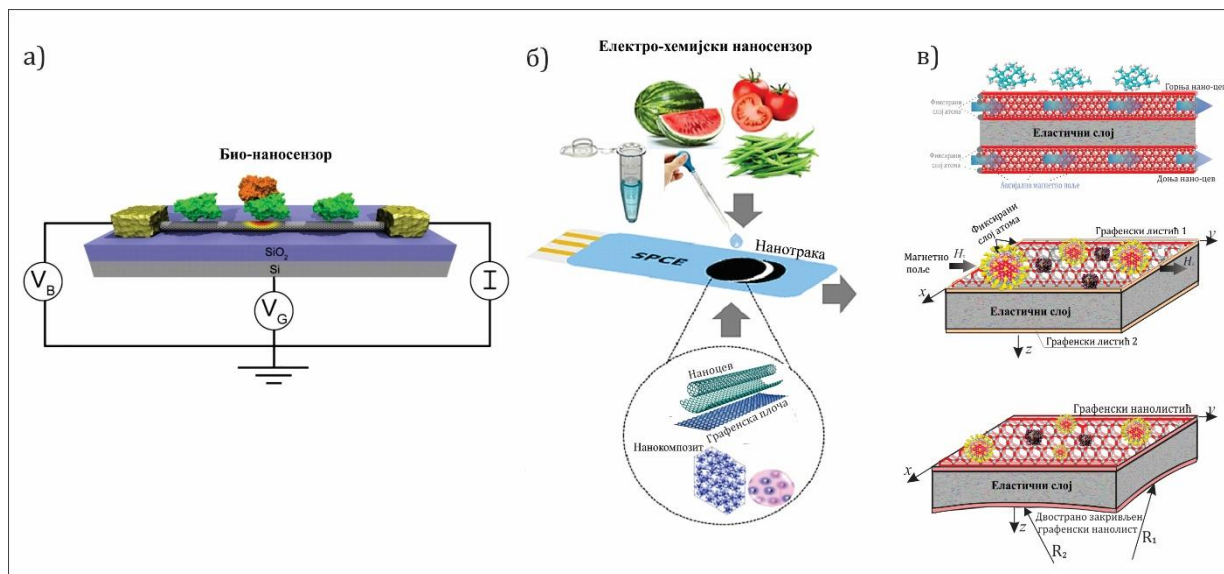
- код молекуларних сензора за детекцију биолошких или хемијских врста;
- код омогућавања ранијих откривања неуротоксичних гасова у кабинама авиона или биометрије пилота;

- код преносивих батерија, због смањене тежине, а и непажње приликом ношења јер се могу преклапати;
- код емитера електронског поља;
- ћелија за складиштење водоника;
- литијум-јонске батерије;
- катодне цеви.

Због наведених особина материјала које су веома добре, електрична својства угљеничних наноцеви и графенских листића омогућавају да се користе у многим нано-електро-механичким системима (nano-electromechanical systems - NEMS). Компоненте таквог система сачињене су од нано-материјала, односно од угљеничних нано-цеви и графенских листића. NEMS уређаји се сматрају малим конструктивним (структурним) елементима са димензијама од или испод 100 nm. Ово их разликује од микро-електро-механичких система (microelectromechanical systems-MEMS), где су структурни елементи на скали микрометарске дужине.

Нано-структуре имају широк спектар примене код нано-сензора, детектора, мини робота, оптичких нано уређаја, органских-соларних ћелија, додирних екрана, нано-антена итд.

На **Слици 2** приказано је неколико спрегнутих нано-структура које су детаљно проучаване у докторској дисертацији, као и њихова примена код нано-сензора. На **Слици 2а** је приказан биосензор, док је на **Слици 2б** дат један електро-хемијски нано-сензор чији је претварач на бази графена, а који се може сачинити од нано-цеви, нано-плоча или нано-љуски приказаних на **Слици 2в**. Једна нано-трака која је приказана на **Слици 2б** се може направити од приказаних спрегнутих нано-структура које су дате на **Слици 2в**. Све разматране нано-структуре на **Слици 2в** које су под утицајем различитих спољашњих оптерећења (разних нано-честица које су распрострањене дуж горњег нано-елемента), детаљно ће се анализирати у наставку ове докторске дисертације.



**Слика 2** Примена спрегнутих нано-структура на а) био- наносензор и б) електро-хемијски наносензор, в) разматране спрегнуте нано-структуре

Истраживања и резултати из објављених радова, који се могу наћи у литератури (*Farrera, C. u saradnici 2017, Norizan, M. N. u saradnici 2020, Shi, J. X. u saradnici 2021*), сведоче да је примена нано-структура од великог значаја са отвореним питањима испитивања физичких и хемијских особина.

Као што је већ напоменуто, нано-структуре су мали структурни елементи на нано скали, те се у овој докторској дисертацији за нано-структуре примењује угљенична нано-цев, графенски листић и двострано закривљени графенски листић. У механици се физички модел угљеничне нано-цеви може моделирати као греда, графенски листић као плоча, а двострано закривљени графенски листић као љуска. Применом одговарајућих теорија за све наведене нано-елементе, које ће се у овој докторској дисертацији представити (*Reddy, J. N., 2002, Reddy, J. N., 2004, Reddy, J. N., 2006, Rašković, D., 1965, Karličić, D. u saradnici, 2015a, Amabili M., 2008*) и применом нелокалне теорије напона (*Eringen, A. C., 1972, 1983, 2002*) могу се написати једначине којима се описује њихово осциловање и објашњава динамика. Извођења једначина малих трансферзалних осцилација деформабилних нано структура, греда, плоча и љуски представљена су у **2. Поглављу** дисертације.

У наредним поглављима (**Поглављу 3, 4, 5**) анализирају се спрегнуте нано-структуре, које се моделирају као две еластично повезане угљеничне нано-цеви, два графенска листића и спрега графенског листића и двострано закривљеног графенског

листића, (Слика 2в). Спрежући слој између нано-елемената моделира се Winkler-овим еластичним слојем, који представља међуатомске силе између два нано-елемента, попут van der Waals-ове интеракције (Ru, C. Q., 2001). Овако спрегнуте нано-структуре су изложене дејству спољашњим трансверзалним оптерећењима, која могу представити моделе, на пример, утицај капљице код анализе пестицида, (Слика 2б), или неког другог спољашњег ефекта на нано-структуре. Представљени физички модели свих спрегнутих нано-структура одговарају механичким моделима за које ће се извести једначине малих трансверзалних осцилација и наћи њихова решења.

За посматране спрегнуте нано-структуре аналитички су одређене вредности сопствених кружних фреквенција, изведени закони малих трансверзалних померања услед дејства различитих типова спољашњег оптерећења, те су разматрани критеријуми критичних сила извијања. Типови оптерећења која ће се анализирати у овој докторској дисертацији су континуално равномерно распоређено хармонијско оптерећење, концентрисана хармонијска сила, покретна сила константног интензитета и покретна хармонијска сила.

Приказаће се утицај различитих параметара, који утичу на законе промена малих трансверзалних померања горњих и доњих нано-елемената, као што су нелокални параметар, магнетно поље, радијус закривљења код двострано закривљене плитке нано-љуске и различите типове спољашњих оптерећења. Анализа ових спрегнутих нано-структура са утицајем различитих параметара може допринети побољшању пројектовања нано-електромеханичких уређаја и из тог разлога се разматра у овој докторској дисертацији.

Посебан случај једне нано-структуре, где је разматрана динамика ротирајуће нано-цеви, односно ротирајуће нано-греде је од практичног значаја, посебно када се испитује утицај спољашњег оптерећења. Такав случај је представљен у *Поглављу 6*, где се поред утицаја спољашњег трансверзалног оптерећења разматрају и утицај радијуса главчине и угаоне брзине. Оваквом анализом испитују се својства која могу наћи примену код осовина нано-мотора, тачније хибридованим нано-генераторима са различитим утицајима спољашњих оптерећења (Zhang B. и сарадници 2016, Shi, J. X. и сарадници 2021).

## 1.1. Општа разматрања

Угљеничне наноцеви (carbon nanotubes-CNTs) привукле су значајну пажњу у области нанотехнологије због својих изванредних физичких, хемијских и механичких својстава. Испитивање деформационог стања једнозидних и вишезидних угљеничних нано-цеви приказано је у радовима (*Iijima, S., 1991, Iijima, S. u сарадници 1996, Hata, K. u сарадници 2004*). Проучавање физичких својства угљеничне нано-цеви приказано је у раду (*Reich, S. u сарадници 2008*), хемијских својства у раду (*Hu, J. u сарадници 1999*), док је испитивање механичких својства извршено у раду (*Lu, J. P. 1997*). У раду (*Salvetat, J. P. u сарадници 1999*) приказана су својства наноцеви у ширем контексту науке о материјалима где експериментални резултати потврђују да угљеничне наноцеви имају високу чврстоћу, изванредну флексибилност и еластичност. Штавише, овакве карактеристике пружају им широк спектар примене при дизајнирању уређаја на наноскали, као што су биосензори (*Murmu, T. u Adhikari, S. 2012, Adhikari, S. u Chowdhury, R. 2010*), сензори масе (*Murmu, T. u Adhikari, S. 2011a, Li, C. u Chou, T. W. 2004*), наноактуатори (*Li, C., Thostenson u сарадници 2008 u Roth, S. u Baughman, R. H. 2002*), нано-електронски уређаји (*Avouris, P. u сарадници 2007*).

Испитивање механичких особина се може заснивати на експерименталним методама као што је то приказано у (*Ruoff, R. S., 2003, Dresselhaus, M. S. u сарадници 2005*). Такви експерименти су захтевни по питању цене коштања и контроле свих параметара нано-система па се ретко спроводе. Постоје и теоријски аспекти који обухватају атомистичке методе и методе механике континуума. Код атомистичких метода приказаних у радовима (*Dubay, O. u Kresse, G., 2003, Liu, Y. u сарадници 2003*), нумеричко испитивање се врши на основу семи-емпиријских метода, принципа молекуларне динамике и првог принципа квантне механике. Најефикаснији је принцип молекуларне динамике који обухвата системе са великим бројем честица атома и молекула, (*Duan, W. H. u сарадници 2007*). Ова метода изискује дуг процес прорачунавања и није погодна за примену.

Из наведених разлога, у погледу примене и једноставности све су привлачније методе механике континуума које олакшавају испитивање динамичког понашања нано-структура користећи теоријске моделе греда, плоча и љуски. Метода нелокалне механике континуума знатно је погоднија за примену и захтева мање рачунарске ресурсе потребне за обраду резултата у поређењу са симулацијама молекуларне динамике. Најчешће се у литератури проучавају својства угљеничне нано-цеви представљене као нано-греда, графенског листића представљеног као нано-плоча и закривљеног графенског листића представљеног као нано-љуска. Теорија која прати њихово изучавање је нелокална теорија еластичности, позната као Eringen-ова теорија (*Eringen, A. C., 1972, 1983, 2002; Eringen, A. C. u Edelen, D. G. B., 1972*). За разлику од класичне теорије еластичности где тензор напона у посматраној тачки зависи од тензора деформације у тој тачки, нелокална



теорија напона обухвата ефекте на малој скали где је напон у посматраној тачки функција поља деформација у свакој тачки домена.

Како би се употпунило знање о понашању нано-материјала као што су угљеничне наноцеви (carbon nanotubes-CNTs) (Bellucci, S. *u saradnici* 2007, Correa-Duarte, M. A. *u saradnici* 2005) и графенске плоче (Goerbig, M. O. *u saradnici* 2006, Arani, A. G. *u Shokravi, M. 2014*), многи истраживачи су разматрали утицај магнетног поља. У раду (Arani, A. G. *u saradnici* 2013) анализирани су трансверзалне осцилације нано-система састављеног од два спрегнута графенска листића под утицајем промене температуре и дводимензионалног магнетног поља. При решавању парцијалних диференцијалних једначина примењен је метод диференцијалних квадратура. Правац дејства магнетног поља представљен је одређеним углом у односу на странице плоче. Извршена је анализа сопствене кружне фреквенције у функцији угла магнетног поља са променом вредности нелокалног параметра. У раду (Narendar, S. *u saradnici* 2012) је приказан утицај лонгитудиналног магнетног поља на карактеристике дисперзије таласа једнозидне угљеничне нано-цеви-SWCNT уграђене у Pasternak-ов еластични слој. Примењено је да при већој вредности нелокалног параметра брзина таласа расте са повећањем вредности магнетног поља, које има занемарљив утицај на природне фреквенције система. На основу Eringen-ове нелокалне теорије еластичности, у раду (Murmu, T. *u saradnici* 2012a), аутори су изучавали трансверзалне осцилације двозидне угљеничне наноцеви-DWCNT под утицајем лонгитудиналног магнетног поља. Аналитички су одређене вредности сопствених кружних фреквенција и изведени закони малих трансверзалних померања за просто ослоњене DWCNT. Показано је да лонгитудинално магнетно поље повећава вредности сопствених кружних фреквенција DWCNT система. Утицај аксијалног магнетног поља на динамичко понашање двоструко спрегнутих једнозидних угљеничних наноцеви приказан је у раду (Murmu, T. *u saradnici* 2012b). Нано-цеви су моделиране помоћу снопа греда Euler-Bernoulli-јевог типа. Применом методе раздвајања променљивих решаван је систем од две спрегнуте парцијалне диференцијалне једначине и добијено је решење за природну фреквенцију нано-система. Такође, разматран је утицај нелокалног параметра и интензитет лонгитудиналног магнетног поља на синхрону и асинхрону фазу осцилација спрегнутих једнозидних угљеничних наноцеви. У раду (Claeysen, J. R. *u saradnici* 2013) проучаване су принудне осцилације једнозидне угљеничне нано-цеви-SWCNT моделиране помоћу нелокалне теорије Euler-Bernoulli-јевог типа греде. Користећи нелокалну теорију еластичност и Kirchhoff-ову теорију плоча, анализа принудних осцилација нано-плоча приказана је у раду (Aksencer, T. *u Aydogdu, M., 2012*). Утицај пригушења и аксијалног магнетног поља на осцилације система од више вискоеластично спрегнутих угљеничних наноцеви анализирани су у раду (Karličić, D. *u saradnici* 2014a). Проблем стохастичке стабилности више вискоеластично повезаних нано греда разматран је у раду (Pavlović, R. I. *u saradnici* 2016). У раду је детаљно проучавана стабилност оваквог система подвргнутог аксијалним стохастичким силама које су моделиране процесима белог, реалног и ограниченог шума. На основу Eringen-ове

нелокалне теорије, диференцијалне једначине нано греда су дате за Helmholtz-ов и би-Helmholtz-ов облик језгра.

Многи истраживачи су фокусирали своја истраживања на одређени проблем принудних осцилација као што је утицај покретних наночестица на нано-структурне елементе наноцеви и наноплата (*Kiani, K., Mehri, B., 2010 u Šimšek, M., 2010*). У раду (*Šimšek, M., 2011*) је представљена аналитичка анализа принудних осцилација еластично спрегнутог система моделираног од двозидних угљеничних наноцеви-DWCNT који носи покретну наночестицу. У том раду је разматран утицај нелокалног параметра, брзина покретне наночестице и утицај еластичног слоја на трансверзална померања нано-система. У раду (*Pavlović R. I. u сарадници 2019a*) су анализирани осцилације вискоеластичне нано греде под утицајем аксијалних притисних сила које поред свог константног дејства садрже и временски зависне стохастичке функције. Применом нелокалне теорије градијента вишег реда и директне методе Љапунова, у раду (*Pavlović, R. I. u сарадници 2019b*) разматрана је динамичка стабилност и нестабилност аксијално напрегнуте нано греде.

Анализа слободних осцилација ортотропних нано-плата представљена је у раду (*Malekzadeh, P. u сарадници 2011*). У раду (*Murmu, T. u Adhikari, S. 2011b*) описане су синхроне осцилације при нижим фреквенцијама и асинхроне осцилације при вишим сопственим фреквенцијама једног нано-система сачињеног од двеју спрегнутих нано-плата. Проблем слободних синхроних и асинхроних осцилација спрегнутих микро-греда при утицају промене температуре анализиран је у раду (*Atanasov, M. S. u сарадници 2017b*). Проблеми осциловања нано-плата и нано-греда под утицајем различитих параметара заузели су значајно место у теоријском истраживању код многих истраживача. Многи карактеристични нано-модел засновани су на проучавању утицаја нелокалног и многих других параметара на понашање анализираних система (*Stamenković, M. u сарадници 2016, Atanasov, M. S. u сарадници 2017 u Pavlović u сарадници 2020*). Чињенице да нелокални параметар нарочито утиче на трансверзалне осцилације нано-система сачињеног од еластично спрегнутих нано-плата, те да су сопствене фреквенције система са нелокалним параметром ниже од сопствених фреквенција система у којима утицај нелокалног параметра није узет у обзир, доказане су у раду (*Adhikari, S. u Murmu, T., 2011*). Осцилације графенског листића, као нова врста нано-сензора масе, под утицајем магнетног поља у равни су разматране у раду (*Karličić, D. u сарадници, 2015b*), при чему се дошло до закључка да спољно магнетно поље има велики утицај на осетљивост нано-сензора масе. Анализа просто ослоњене ортотропне једнослојне графенске плоче која лежи на вискоеластичној Pasternak-овој подлози и која је изложена спољним оптерећењима дата је у (*Arani, A. G. u Jalaei, M. H., 2016*). Утицаји спољашњих оптерећења при проучавању принудних осцилација правоугаоних нано-плата анализирани су у раду (*Assadi, A., 2013*).

Многи истраживачи су за повезивање два и више елемената користили еластични слој, који се апроксимира Winkler-овим моделом дискретно распоређеним слојем опруга

линеарних крутости које делују по њиховој површини. Анализа слободних и принудних осцилација два носача Euler-Bernoulli-јевог типа спрегнута Winkler-овим еластичним слојем, представљена је у радовима ([Zhang, Y. Q. u сарадници 2008a, 2008b](#), [Oniszczyk Z., 2000a](#), [Oniszczyk, Z. 2003](#)). Детаљно су описана аналитичка решења сопствених кружних фреквенција, амплитуда и облика осциловања. Приказан је и утицај крутости Winkler-овог еластичног слоја на фреквенције и амплитуде система. Рад ([Zhang, Y. Q. u сарадници 2008a](#)) послужио је за валидацију резултата у трећем поглављу ове дисертације за случај када је у једначинама занемарен нелокални параметар чиме се нелокална теорија свела на локалну. У радовима ([Janevski, G. u сарадници 2020a u 2020b](#)) разматране су слободне осцилације еластичних нано-греда Euler-Bernoulli-јевог и Тимошенковог типа под дејством термичких оптерећења и анализиране су критичне силе извијања.

У раду ([Stamenković, M. u сарадници 2016](#)) анализиране су слободне и принудне осцилације две нано-цеви спрегнуте Winkler-овим еластичним слојем. Детаљно су описана аналитичка решења сопствених фреквенција, амплитуда и облика осциловања. Спроведена је детаљна аналитичка анализа и добијени нумерички резултати који описују принудне осцилације за четири различита случаја спољашњих оптерећења: случај када делује континуално равномерно распоређено хармонијско оптерећење, случај када делује хармонијска концентрисана сила, случај када делује покретна сила константног интензитета и случај када делује покретна хармонијска сила. Испитан је утицај нелокалног параметра и лонгитудиналног магнетног поља на законе малих трансверзалних померања нано-система. Резултати утицаја притисних аксијалних сила и њихово дејство на амплитуде осциловања показали су веома добро слагање са резултатима из рада ([Zhang, Y. Q. u сарадници 2008a](#)).

У радовима ([Oniszczyk, Z., 2000b, 2004](#)) је описан проблем двеју плоча међусобно спрегнутих Winkler-овим еластичним слојем. Детаљно је приказано одређивање сопствених фреквенција, амплитуда и облика осциловања. У четвртом поглављу ове дисертације на основу Kirchhoff-ове теорије плоча ([Reddy, J. N., 2004, Reddy, J. N., 2006 u Karličić, D., 2015](#)) и Eringen-ове нелокалне теорије еластичности ([Eringen, A. C., 1972, Eringen, A. C., 2002](#)) изведене су диференцијалне једначине које описују мала трансверзална померања двеју нано-плоча међусобно повезаних Winkler-овим еластичним слојем. Радови ([Oniszczyk, Z., 2000b, 2004](#)) послужили су за валидацију резултата у четвртом поглављу када је у једначинама занемарен нелокални параметар и нелокална теорија је сведена на локалну. Такође, у овом поглављу су приказани и резултати амплитуда осциловања система који су верификовани резултатима из радова ([Oniszczyk, Z., 2000b, 2004](#)).

У раду ([Atanasov, M. S. u сарадници 2017a](#)), разматран је случај двеју нано-плоча међусобно спрегнутих Winkler-овим еластичним слојем као и утицај лонгитудиналног магнетног поља на односе амплитуда осциловања нано-система за три случаја спољашњих трансверзалних оптерећења.

Многи истраживачи су анализирали утицај кривине на сопствене фреквенције и величину амплитуда осцилација правоугаоних плитких љуски. Једно од таквих истраживања дато је у раду (*Leissa, A. W. и сарадници 1971*). Савремена истраживања, поред свега, разматрају и утицај нелокалног параметра на динамичко понашање механичких система нано-љуски.

Отворене плитке љуске имају велике радијусе закривљености у поређењу са осталим параметрима љуске. Плитке љуске могу бити двострано закривљене и у инжењерској пракси могу наћи више примена. Слободне осцилације композитног система који се састоји од спрегнуте плоче и цилиндричне љуске представљене су у (*Hwu, C. и сарадници 2017*). Свеобухватна анализа слободних осцилација двострано закривљених плитких љуски израђених од ортотропног материјала је представљена у раду (*Ghavanloo, E. и сарадници 2013*).

У циљу пројектовања још једног новог наносензора може послужити специјалан модел нано-система састављеног од нано-плоче и двострано закривљене плитке нано-љуске међусобно повезане еластичним слојем, који се апроксимира Winkler-овим моделом. Различити утицаји радијуса закривљености плитке двострано закривљене нано-љуске, величине принудне силе, промена вредности нелокалног параметра и коефицијената пропорционалности пригушења на динамично понашање механичког нано-система су детаљно анализирани у петом поглављу ове докторске дисертације. Неки од резултата приказаних у петом поглављу, приказани су у радовима (*Atanasov, M. S. и сарадници 2021* и *Atanasov, M. S. и сарадници 2022*).

Слободне осцилације једног ротирајућег конзолног нано-носача анализирани су у раду (*Pradhan, S. C. и Murmu, T. 2010*). У раду су детаљно проучавани утицаји нелокалног параметра, параметра угаоне брзине ротирања и параметра радијуса главчине на природне фреквенције система. Динамика ротирајућег нано-носача је од практичног значаја, посебно када се испитује утицај спољашњег оптерећења. Физички модел ротирајућег нано-носача важан је за нове минијатурне уређаје. Хибридизовани нано-генератор се може представити као нано-сензор где се утицај ветра може посматрати као спољашње оптерећење. Што се тиче наноструктура, утицај њихове величине важан је за њихово механичко понашање, јер су њихове димензије мале и упоредиве са молекуларним растојањима. У раду (*Atanasov, M. S. и сарадници, 2020*) анализирана је динамика ротирајућег нано-носача конзолног типа, изложеног површинском равномерно распоређеном хармонијском оптерећењу. Анализирани су случајеви принудних непригушених и пригушених осцилација нано-система. Приказани су утицаји нелокалног параметра, параметра угаоне брзине ротирања и параметра радијуса главчине на мала трансверзална померања принудних осцилација разматраног нано-носача.

Један од првих радова где је вршена анализа осциловања конзолне греде представљена је у (*Schilhansl, M. 1958*). У раду (*Diken, H., 2000*) анализирана је динамика ротирајуће Euler-Bernoulli-јеве греде где су добијене параметарске функције које повезују

померање врха греде са осталим параметрима ротације. Анализа слободних лонгитудиналних осцилација ротирајућег нано-штапа заснована на Eringen-овој нелокалној еластичности приказана је у раду (*Babaei, A. u Yang, C. X., 2018*).

Анализа осцилација ротирајуће вискоеластичне нано-цеви на вискоеластичном Pasternak-овом слоју приказана је у (*Mohammadi, M. u сарадници, 2016*). У раду (*Murmu, T. u Adhikari, S., 2010*) анализиран је модел нелокалне цеви и испитан утицај нелокалног параметра, угаоне брзине и полупречника главчине на савијање и слободне осцилације ротирајуће нано-конзоле. Показано је да ефекат нелокалног параметра има велики утицај на законе осциловања ротирајуће нано-греде. Са повећањем угаоне брзине ротације, ефекат нелокалног параметра утиче на повећање фреквенције за први мод осциловања. При вишим модовима, фреквенција се смањује са повећањем вредности нелокалног параметра.

Један од главних циљева ове докторске дисертације је испитивање утицаја различитих параметара (нано скале, магнетног поља, радијуса закривљења, коефицијената пропорционалности пригушења, различитих вредности спољашњих оптерећења, радијуса главчине и угаоне брзине) на законе промена малих трансверзалних осцилација горњих и доњих нано-елемената. Континуално равномерно распоређено хармонијско оптерећење, концентрисана хармонијска сила, покретна сила константног интензитета и покретна хармонијска сила су типови оптерећења за која ће бити дата аналитичка решења и нумеричка анализа принудних осцилација.

Спрегнути нано-системи због природе динамичке интеракције остварене помоћу еластичног слоја имају сложеније законе малих трансверзалних осцилација, и мултипликован број природних фреквенција спрегнутог система. За описивање слободних и принудних осцилација нано-система и њихову примену у нано-електромеханичким системима (НЕМС), највише се примењује теоријско истраживање развијено на основу нано-модела, који дају прву апроксимацију решења и описују динамику малих трансверзалних померања.

## 1.2. Eringen-ова нелокална теорија еластичности

Код класичне (локалне) теорије еластичности стање напона и деформација у тачки неког посматраног еластичног тела зависе од спољашњег оптерећења, облика профила и врсте материјала, док се конститутивна релација везе напона и деформација у посматраној тачки формира по Ноок-овом закону као идеално линеарна. Дакле, стања Напона и деформација зависе од спољашњег оптерећења, облика профила и врсте материјала, али веза између њих је директно линеарно пропорционална у условима идеалне еластичности при напонима мањим од напона на граници еластичности. Код нелокалне теорије еластичности, стање напона у некој тачки домена је дефинисано као функција стања деформација не само у тој тачки, већ као функција стања деформација у свим тачкама посматраног домена.

На основу ове претпоставке, Еринген је у својим радовим ([Eringen, A. C., 1972, 1983, 2002](#)) дао интегрални облик конститутивне једначине за нелокални еластични тензор напона.

Утицај на вредност напона у свим тачкама домена регулише се функцијом слабљења (attenuation function) или такозваном функцијом језгра која је обрнуто пропорционална растојању између референтне тачке  $\mathbf{x}$  и суседне тачке  $\mathbf{x}'$  и садржи информације о нелокалном параметру.

Сходно томе, за чврсто тело запремине  $V$ , конститутивни однос између стања напона и деформација је представљен у облику

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \iiint_V \tilde{\varphi}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \kappa) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}'), \forall \mathbf{x} \in V, \quad (1.2.1)$$

где је узета целокупна запремина  $V$  еластичног тела.

У релацији (1.2.1) фигуришу следећи чланови

- $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$  је тензор стања напона,
- $\tilde{\varphi}$  је функција језгра или функција слабљења (attenuation function)
- $C_{ijkl}$  је тензор еластичности,
- $\varepsilon_{kl}$  је тензор стања деформација,

- $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  је растојање изражено Еуклидском нормом,
- $\kappa$  је материјални (нелокални) параметар који се одређује методом молекуларне динамике (MD) или експериментално.

Подинтегрална функција  $\tilde{\varphi}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \kappa)$  представља нелокални модул који означава функцију језгра преко које се нелокални утицаји у посматраној тачки  $\mathbf{x}$ , изазвани локалним деформацијама у тачки  $\mathbf{x}'$  директно уводе у конститутивне релације. Нелокални модул има максималну вредност када је  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ . Вредност нелокалног модула опада када се величина  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  повећава.

Материјални параметар  $\kappa$  се може представити изразом

$$\kappa = \frac{e_0 \tilde{a}}{l_e}, \quad (1.2.2)$$

где је  $e_0$  материјална константа која зависи од врсте нано-материјала,  $\tilde{a}$  је унутрашња карактеристична дужина (растојање између угљеничних веза -два атома угљеника, параметар кристалне решетке, дужина грануле), док је  $l_e$  спољашња карактеристична дужина (димензија нано-цеви, таласна дужина, дужина прслине).

Нелокални модул  $\tilde{\varphi}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \kappa)$  се може представити преко Green-ове функције линеарног оператора у облику

$$\mathcal{L}\tilde{\varphi}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|), \quad (1.2.3)$$

на основу које се знатно упрошћава конститутивна интегрална релација. У изразу (1.2.3) диференцијални оператор представљен је са  $\mathcal{L}$ , док је  $\delta$  Dirac-ова делта функција.

Уношењем линеарног диференцијалног оператора у једначину (1.2.1) добија се

$$\mathcal{L}\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (1.2.4)$$

Еринген је поставио линеарни диференцијални оператор у следећем облику

$$\mathcal{L} = 1 - (e_0 \tilde{a})^2 \nabla^2, \quad (1.2.5)$$

где је  $\nabla^2$  Laplace-ов оператор.



Линеарни диференцијални оператор  $\mathcal{L}$  може имати различиту форму за сваки појединачни случај функције  $\tilde{\varphi}$ . Еринген га је представио изразом (1.2.5).

Користећи изразе (1.2.4) и (1.2.5) и тензор еластичности четвртог реда, приказаног у радовима (*Eringen, A. C., 1972, Eringen, A. C., 2002, Reddy, J. N., 2007, Reddy, J. N., u Pang, S. D., 2008*), Eringen-ова нелокална конститутивна релација између стања напона и деформација се може написати у облику

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1.2.6)$$

где је уведен нелокални параметар  $(e_0 \tilde{a})$  који описује утицај унутрашње карактеристичне нано дужине при статичкој и динамичкој анализи нано-структура.

На основу израза (1.2.6) се може написати конститутивна релација за једно-димензионе структуре у облику

$$\sigma_{xx} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx}, \quad (1.2.7)$$

$$\tau_{xz} - (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} = G \gamma_{xz}, \quad (1.2.8)$$

где је  $E$  Young-ов модул еластичности и  $G$  модул (смицања) клизања.

Такође, применом релације (1.2.6) се може написати и конститутивна релација за дво-димензионе хомогене и изотропне нано-структуре у облику

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \nabla^2) \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1 - \nu^2} & \frac{\nu E}{1 - \nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1 - \nu^2} & \frac{E}{1 - \nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1.2.9)$$

где је  $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $\nu$  је Poisson-ов коефицијент нано-материјала,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  су нормални напони и деформације у правцима  $x$  и  $y$  оса,  $\tau_{xy}$  је тангенцијални напон и  $\gamma_{xy}$  је угао клизања у равни  $Oxy$ .

Слично, конститутивна релација за ортотропне дво-димензионе нано-структуре има облик



$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{12}E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (1.2.10)$$

где су  $E_x$  и  $E_y$  Young-ови модули еластичности материјала у два ортогонална правца (правци  $x$  и  $y$ ) или две међусобно управне равни ортотропног материјала;  $\nu_{xy}$  и  $\nu_{yx}$  су Poisson-ови коефицијенти који карактеришу попречне контракције правца  $x$  у односу на правац  $y$  и обрнуто и  $G_{xy}$  је модул смицања.

Приказана нелокална теорија, коју је увео Еринген ([Eringen, A. C., 1983, 1972](#); [Eringen, A. C. u Edelen, D. G. B., 1972](#)) показала је да се за одређену класу функције језгра, нелокална интегрална конститутивна једначина може трансформисати у диференцијални облик и много је лакша за коришћење од интегралне. У раду ([Fernández-Sáez, J. u сараници, 2016](#)) су приказане разлике између оригиналних нелокалних интегралних Eringen-ових модела и његових диференцијалних пандана, са различитим условима ослањања, који се обично сматрају потпуно еквивалентним.

Доказано је да се за просто ослоњен носач добијени резултати подударају применом обе формулације, било да се користи нелокална интегрална или нелокална диференцијална конститутивна једначина.

### 1.3. Maxwell-ове релације

У анализи спрегнутих нано-система који ће бити анализирани у наредним поглављима, укључен је утицај лонгитудиналног магнетног поља које се простире дуж аксијалног правца нано-структуре.

На основу радова ([Narendar, S. u сарадници 2012](#) и [Murthi, T. u сарадници 2012a](#) и [2012b](#)), једначина која повезује густину струје  $\mathbf{J}$ , вектор дистрибуције магнетног поља  $\mathbf{h}$ , вектор јачине електричног поља  $\mathbf{e}$  и магнетне пермеабилности  $\tilde{\eta}$ , представљена је Maxwell-овим изразима ([Kraus, J. 1984](#)) у следећем облику

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{h}, \quad \nabla \times \mathbf{e} = -\tilde{\eta} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{h} = 0. \quad (1.3.1)$$

Вектор дистрибуције магнетног поља  $\mathbf{h}$  и вектор јачине електричног поља  $\mathbf{e}$  дефинисани су на следећи начин

$$\mathbf{h} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{H}), \quad \mathbf{e} = -\tilde{\eta} \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right), \quad (1.3.2)$$

где је

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$  Hamilton-ов оператор док су  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}$  и  $\mathbf{k})$  јединични вектори,

$\mathbf{U} = (x, y, z)$  је вектор положаја и

$\mathbf{H} = (H_x, 0, 0)$  је вектор лонгитудиналног магнетног поља.

У овом раду је потребно напоменути да се лонгитудинално магнетно поље простира само у аксијалном правцу нано-структура. На основу тога вектор дистрибуције магнетног поља се може написати у следећем облику

$$\mathbf{h} = -H_x \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \mathbf{i} + H_x \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{j} + H_x \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{k}. \quad (1.3.3)$$

Заменом израза (1.3.3) у израз за густину струје (1.3.1), следи

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{h} = & H_x \left( -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{i} - H_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} \\ & + H_x \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Вектор Lorentz-ове силе изазване лонгитудиналним магнетним пољем  $\mathbf{H}$  и густином струје  $\mathbf{J}$  дат је релацијом

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} = \eta (\mathbf{J} \times \mathbf{H}), \quad (1.3.5)$$

где су  $f_x, f_y$  и  $f_z$  компоненте Lorentz-ове силе у правцима координатних оса  $x, y$  и  $z$

$$f_x = 0, \quad (1.3.6)$$

$$f_y = \tilde{\eta} H_x^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right), \quad (1.3.7)$$

$$f_z = \tilde{\eta} H_x^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right). \quad (1.3.8)$$

За нано-греду узима се у обзир само померање  $w$  у правцу осе  $z$ . Претпостављамо да су померања  $u$  и  $v$  у правцу координатних оса  $x$  и  $y$  једнака нули, па је тада компонента Lorentz-ове силе у правцу  $z$  - осе

$$f_z = \tilde{\eta} H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (1.3.9)$$

Коначно, могуће је написати силу која делује по јединици површине дуж нано-структуре

$$\tilde{q}(x, t) = \int_A f_z dA = \tilde{\eta} A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (1.3.10)$$

## 2. Нелокална теорија нано-цеви, нано-плоча и нано-љуски

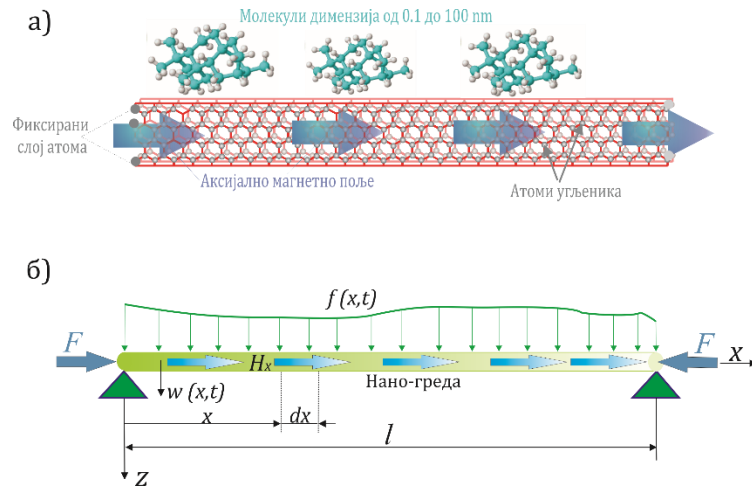
У овом поглављу биће представљени физички и њима еквивалентни модели са гледишта теорије механике. На основу закона, важећих претпоставки, као и заснованости на познатим теоријама, биће изведене једначине које описују мале трансверзалне осцилације једне нано-греде, нано-плоче и нано љуске.

### 2.1. Нелокална теорија нано-цеви заснована на Euler-Bernoulli-јевој теорији греде

На основу молекуларно динамичких симулација и нелокалног модела угљеничне наноцеви, у раду (*Ansari, R. и сарадници, 2012a*) показано је да се фиксирани слој атома угљеника, у случају угљеничне наноцеви, може представити граничним условима просто ослоњене наногреде. Физички модел представљен као угљенична нано-цев, чији су крајњи гранични слојеви атома фиксирани, дат је на **Слици 2.1.1a**. Такав физички модел еквивалентан је са гледишта теорије механике једном механичком моделу представљеног као Euler-Bernoulli-јева греда, (**Слика 2.1.1b**).

Диференцијалне једначине малих трансверзалних осцилација угљеничне нано-цеви изведене су на основу Нелокалне теорије напона и Euler-Bernoulli-јеве теорије греда.

Euler-Bernoulli-јева нано-греда је под дејством аксијалне силе притиска  $F$  у правцу осе  $x$  и произвољно распоређеним трансверзалним континуалним оптерећењем  $f(x, t)$  у правцу осе  $z$  (у попречном правцу у односу на осу  $x$ ). Површина попречног пресека нано греде је означена са  $A$ , Young-ов модул еластичности са  $E$  и густина са  $\rho$ . Утицај Lorentz-ове магнетне силе је такође укључен и узрокован је аксијалним магнетним пољем које делује у смеру осе  $x$ , као што је приказано на **Слици 2.1.1**.



**Слика 2.1.1** Нелокални модел нано-цевчи изложене дејству аксијалног магнетног поља и дејству трансверзалног оптерећења; (а) Физички модел представљен као угљенична нано-цев чији су крајњи гранични слојеви атома фиксирани и (б) Механички модел представљен као нано-греда

Код Euler-Bernoulli-јеве теорије греда важе следеће претпоставке, (видети [Reddy, J. N., 2002](#)):

- нема деформације у правцу осе  $z$  (у правцу дебљине греде), тј. попречни пресек греде остаје непромењен након деформације,
- нема закривљења попречних пресека,
- попречни пресеци греде остају управни на аксијалну осу у току и након деформација,
- занемарени су утицаји инерција ротације попречних пресека,
- занемарен је утицај деформације смицања.

Компоненте померања  $\bar{u}_x(x, y, t)$ ,  $\bar{v}_y(x, y, t)$  и  $\bar{w}_z(x, y, t)$  дуж оса  $x, y, z$  могу се приказати у следећем облику

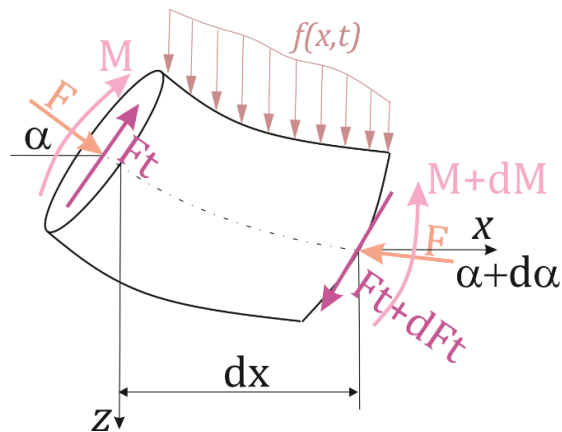
$$\bar{u}_x = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad \bar{v}_y = 0, \quad \bar{w}_z = w(x, t). \quad (2.1.1)$$

Компоненте деформације нано-греде имају облик

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = 0, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{zy} = 0, \quad (2.1.2)$$

при чему су  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  и  $\varepsilon_{zz}$  нормалне деформације-дилатације, док су  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{zy}$  деформације смицања-клизања.

Ако би посматрали један елементарни део нано-греде приказан на **Слици 2.1.2**, са леве стране делују аксијална сила  $F$ , трансверзална сила  $F_t$  и момент савијања  $M$ , док са десне стране делују аксијална сила  $F$ , трансверзална сила  $F_t + dF_t$  и момент савијања  $M + dM$ , увећан за инфинитезимални део или бесконачно малу величину  $dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$ . Све три величине зависе од координате  $x$  и могу бити променљиве. На **Слици 2.1.2** угао обртања попречног пресека је означен са  $\alpha$  и  $\alpha + d\alpha$ . Маса елементарног дела нано-греде је означена са  $dm = \rho A dx$ .



**Слика 2.1.2** Елементарни део нано-греде

Применом другог Newton-овог закона малих трансверзалних осцилација на елементарни део нано-греде добија се

$$\sum F_z = dm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial F_t}{\partial x} - F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.1.3)$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow F_t dx + M - (M + dM) = 0, \quad (2.1.4)$$

при чему су трансверзална сила и резултујући момент савијања

$$F_t = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad (2.1.5)$$

$$M = \int_A z \sigma_{xx} dA. \quad (2.1.6)$$

Множењем релације (1.2.7) са  $zdA$  и интегралњем по површини попречног пресека нано-греде  $A$ , узимајући у обзир релацију за резултујући момент савијања (2.1.6) добија се

$$M - (e_0\tilde{\alpha})^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2.1.7)$$

где је  $I = \int_A z^2 dA$  аксијални момент инерције површине попречног пресека.

Диференцирањем једначине (2.1.7) два пута по  $x$ , добија се

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - (e_0\tilde{\alpha})^2 \frac{\partial^4 M}{\partial x^4} = -EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}. \quad (2.1.8)$$

Заменом (2.1.5) у (2.1.3) добија се

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - f(x, t). \quad (2.1.9)$$

Када релације (2.1.9) и (2.1.7) заменимо у (2.1.8) добија се парцијална диференцијална једначина математичког модела помоћу које се описују мале трансверзалне осцилације нано-греде у облику

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - f(x, t) = (e_0\tilde{\alpha})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - f(x, t) \right]. \quad (2.1.10)$$

Гранични услови за просто ослоњену Euler-Bernoulli-јеву нано-греду, применом нелокалне теорије еластичности, једнаки су граничним условима Euler-Bernoulli-јевог модела просто ослоњене греде заснованог на класичној теорији еластичности ([Lu, P. и сарадници, 2006](#))

$$\text{за } x = 0 \quad w(0, t) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0, \quad (2.1.11)$$

$$\text{за } x = L \quad w(L, t) = 0, \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, t) = 0. \quad (2.1.12)$$

## 2.2. Нелокална теорија еластичне ортотропне нано-плоче заснована на Kirchhoff-овој теорији плоча

На основу молекуларно динамичких симулација и нелокалног модела графенског листића, у раду ([Ansari, R. u сарадници, 2010](#)) показано је да се фиксирани слој атома угљеника, у случају графенског листића, може представити граничним условима просто ослоњене нано-плоче. Физички модел представљен као графенски листић, чији су крајњи гранични слојеви атома фиксирани, дат је на **Слици 2.2.1а**. Такав физички модел еквивалентан је са гледишта теорије механике једном механичком моделу представљеног као Kirchhoff-ова плоча, (**Слика 2.2.1б**).

Диференцијалне једначине малих трансверзалних осцилација угљеничне нано-плоче одредићемо на основу Eringen-ове нелокалне теорије напона и Kirchhoff-ове теорије плоча.

Нано-плоча је изложена дејству произвољно распоређеног трансверзалног оптерећења  $f(x, y, t)$  у правцу осе  $z$ . Нано-плоча има дужину  $a$ , ширину  $b$  и дебљину  $h$  која је једнака дебљини једног атома. Површина попречног пресека нано плоче је означена са  $A$ , Young-ов модул еластичности са  $E$  и густина материјала нано-плоче са  $\rho$ .

На основу Kirchhoff-ове теорије плоча ([Reddy, J. N., 2004](#), [Reddy, J. N., 2006](#), [Rašković, D., 1965 u Karličić, D. u сарадници, 2015a](#)), компоненте померања  $\bar{u}_x(x, y, z, t)$ ,  $\bar{v}_y(x, y, z, t)$ ,  $\bar{w}_z(x, y, z, t)$ , произвољне тачке средње површи нано-плоче дуж оса  $x$ ,  $y$ ,  $z$  могу се написати у следећем облику

$$\bar{u}_x = u(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x}, \quad \bar{v}_y = v(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y}, \quad \bar{w}_z = w(x, y, t). \quad (2.2.1)$$

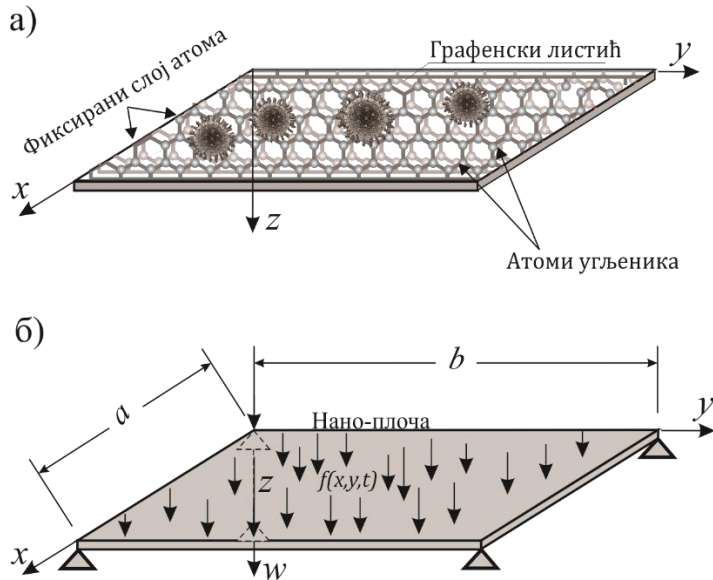
Компоненте деформације нано-плоче дате су у следећем облику

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.2.2)$$

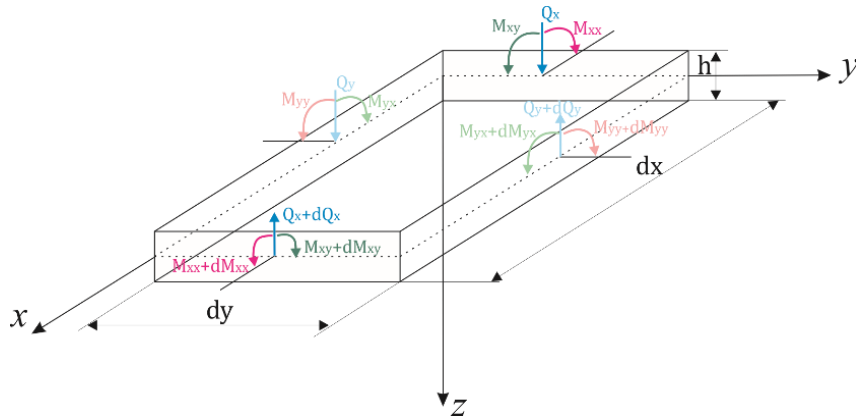
Ако је са  $\rho$  означена густина материјала нано-плоче, а са  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  убрзање у правцу осе  $z$ , једначина равнотеже пројекција сила у  $z$  правцу има облик



$$\sum F_z = dm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + f(x, y, t) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.2.3)$$



**Слика 2.2.1** Нелокални модел нано-плоче изложене дејству аксијалног магнетног поља и дејству трансверзалног оптерећења. (а) Физички модел представљен као једнослојна графенска плоча, ( б) Механички модел представљен као нано-плоча



**Слика 2.2.2** Елементарни део нано-плоче

На основу другог Newton-овог закона могу се написати једначине равнотеже момената за осе  $x$  и  $y$  приказаног елементарног дела плоче на **Слици 2.2.2**

$$\sum M_x = 0 \rightarrow \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x, \quad (2.2.4)$$

$$\sum M_y = 0 \rightarrow \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = Q_y, \quad (2.2.5)$$

где су  $Q_x$  и  $Q_y$  трансверзалне смичуће силе, а  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  и  $M_{xy}$  су моменти савијања и увијања, дефинисани као

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \quad \text{и} \quad (M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) z dz. \quad (2.2.6)$$

Диференцирањем једначине (2.2.4) по  $x$  и једначине (2.2.5) по  $y$ , добијају се  $\frac{\partial Q_x}{\partial x}$  и  $\frac{\partial Q_y}{\partial y}$ . Заменом претходног израза у једначину (2.2.3), једначина равнотеже пројекција сила у  $z$  правцу је у облику

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + f(x, y, t) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.2.7)$$

За извођење диференцијалне једначине осциловања нано-плоче користимо нелокалну конститутивну релацију између напона и деформације једне ортотропне нано-плоче изражене у облику (1.2.10). На основу ове релације нелокални нормални  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  и тангенцијални напон  $\tau_{xy}$  имају облик

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) \sigma_{xx} = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu_{xy} E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} \varepsilon_{yy}, \quad (2.2.8)$$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) \sigma_{yy} = \frac{\nu_{xy} E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} \varepsilon_{xx} + \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} \varepsilon_{yy}, \quad (2.2.9)$$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) \tau_{xy} = G_{xy} \gamma_{xy}. \quad (2.2.10)$$

За ототропне нано-плоче константе  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yx}$  и  $G_{xy}$  су дефинисане код дво-димензионе нано-структуре у изразу (1.2.10).

Компоненте унутрашњих сила и момената торзије добијају се тако што се леве и десне стране једначина (2.2.8-2.2.10) интеграле по дебљини плоче  $h$ .

Изрази за унутрашње силе формулисани су на следећи начин

$$\{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}) dz. \quad (2.2.11)$$

Интегралне једначине (2.2.8-2.2.10) и узимајући у обзир израз (2.2.11), добијају се нормалне силе  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  и смичућа сила  $N_{xy}$  у следећем облику

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) N_{xx} = A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.2.12)$$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) N_{yy} = A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.2.13)$$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) N_{xy} = A_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (2.2.14)$$

Након интеграције једначина (2.2.8-2.2.10) и узимајући у обзир израз (2.2.6), добијају се моменти савијања  $M_{xx}$  и  $M_{yy}$  и момент торзије  $M_{xy}$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) M_{xx} = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (2.2.15)$$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) M_{yy} = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (2.2.16)$$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) M_{xy} = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.2.17)$$

У једначинама (2.2.12 – 2.2.14) и (2.2.15 – 2.2.17) уведене су ознаке за аксијалну крутост  $A_{ij}$  и савојну крутост  $D_{ij}$

$$A_{11} = \frac{E_x h}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}; \quad A_{12} = \frac{\nu_{xy} E_y h}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}; \quad A_{22} = \frac{E_y h}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}; \quad A_{66} = G_{xy} h; \quad (2.2.18)$$

$$D_{11} = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}; \quad D_{12} = \frac{\nu_{xy} E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} = \frac{\nu_{yx} E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})};$$

$$D_{22} = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}; \quad D_{66} = \frac{G_{xy} h^3}{12}. \quad (2.2.19)$$

На основу израза за унутрашње силе (2.2.12 – 2.2.14) се може уочити да у њима фигуришу само компоненте померања у равни плоче  $u$  и  $v$ .

На основу израза момената савијања и момента торзије (2.2.15 – 2.2.17) се може уочити да у њима фигуришу само компоненте померања у  $w$  правцу.

Једначине равнотеже елементарног дела плоче представљене су преко пројекција сила у  $x$ ,  $y$  и  $z$  правцу

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.2.20)$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (2.2.21)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.2.22)$$

где је  $q(x, y, t)$  спољашње оптерећење проузроковано трансверзалном силом  $f$

$$q(x, y, t) = f(x, y, t). \quad (2.2.23)$$

Заменом израза (2.2.12 – 2.2.14) и (2.2.15 – 2.2.17) у једначине (2.2.20-2.2.22), диференцијалне једначине које описују померања у равни  $x$   $Oy$  и трансверзално померање у правцу осе  $z$  нано-плоче подвргнуте спољашњим оптерећењем  $f(x, y, t)$ , имају облик

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad (2.2.24)$$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad (2.2.25)$$

$$\begin{aligned} & \rho(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &= - \left( D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + f(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta). \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

У наставку ће се разматрати просто ослоњене нано-плоче, тј. када су угиби и моменти савијања једнаки нули у ослоњцима као на **Слици 2.2.16**. Математичка формулација граничних услова просто ослоњене нано-плоче дата је следећим релацијама

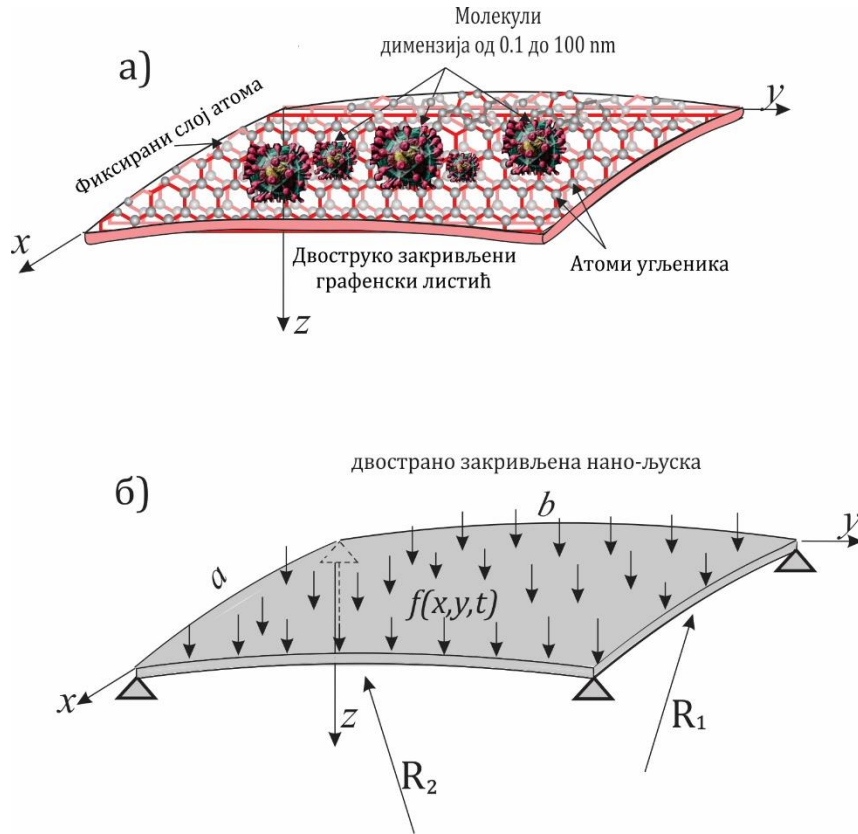
$$w(x, 0, t) = w(x, b, t) = 0, \quad w(0, y, t) = w(a, y, t) = 0, \quad (2.2.27)$$

$$M_{xx}(0, y, t) = M_{xx}(a, y, t) = 0, \quad M_{yy}(x, 0, t) = M_{yy}(x, b, t) = 0. \quad (2.2.28)$$

### **2.3. Нелокална теорија еластичне ортотропне двострано закривљене плитке нано-љуске на основу Novozhilov-е линеарне теорије љуске**

Физички модел представљен као двострано закривљени графенски једнослојни нано-листић, чији су крајњи гранични слојеви атома фиксирани, дат је на **Слици 2.3.1а**. Такав физички модел еквивалентан је са гледишта теорије механике једном механичком моделу просто ослоњене двострано закривљене плитке нано-љуске представљене Novozhilov-ом љуском, (**Слику 2.3.1б**).

Диференцијалне једначине малих трансверзалних осцилација угљеничне нано-љуске одређене су на основу Eringen-ове нелокалне теорије напона ([Eringen, A. C., 1972](#), [Eringen, A. C., 2002](#)) и Novozhilov-е линеарне теорије љуске ([Amabili, M., 2008](#)). Двострано закривљена нано-љуска има дужину  $a$ , ширину  $b$  и дебљину  $h$  која је једнака дебљини једног атома, док је густина материјала нано-љуске означена са  $\rho$ .



**Слика 2.3.1** Нелокални модел двострано закривљене нано-љуске (а) Физички модел представљен као двострано закривљени угљенични једнослојни листић, (б) Механички модел

Користећи Novozhilov-у линеарну теорију љуске (Amabili, M., 2008), компоненте напрезања у произвољној тачки двострано закривљене плитке нано-љуске односе се на напрезања средње површи  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ ,  $\gamma_{xy}$ , промене у закривљености и торзије средње површи  $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$ , и  $k_{xy}$

$$\varepsilon_{xx} = e_{xx} + zk_{xx}, \quad \varepsilon_{yy} = e_{yy} + zk_{yy}, \quad \gamma_{xy} = e_{xy} + zk_{xy}, \quad (2.3.1)$$

где су

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.3.2)$$

$$c = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.3.3)$$

$$\begin{aligned}
k_{xx} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial u}{\partial x}, \\
k_{yy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial u}{\partial x}, \\
k_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2c \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right),
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Нелокална конститутивна релација између напона и деформације дефинисана је изразом (1.2.10). Код нано-љуски се може приказати у следећем облику

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{xy}E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} + zk_{xx} \\ e_{yy} + zk_{yy} \\ e_{xy} + zk_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{2.3.5}$$

Из једначине (2.3.5), нелокални нормални напони  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  и нелокални тангенцијални напон  $\tau_{xy}$  могу се написати у облику

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) \sigma_{xx} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (e_{xx} + zk_{xx}) + \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (e_{yy} + zk_{yy}), \tag{2.3.6}$$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) \sigma_{yy} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (e_{xx} + zk_{xx}) + \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (e_{yy} + zk_{yy}), \tag{2.3.7}$$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) \tau_{xy} = G_{12} (e_{xy} + zk_{xy}). \tag{2.3.8}$$

Интеграљењем једначина (2.3.6 – 2.3.8), имајући у обзир израз (2.2.12), добија се да су нормалне силе  $N_{xx}$ ,  $N_{yy}$  и смичућа сила  $N_{xy}$  облика

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) N_{xx} = A_{11} e_{xx} + A_{12} e_{yy}, \tag{2.3.9}$$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) N_{yy} = A_{12} e_{xx} + A_{22} e_{yy}, \tag{2.3.10}$$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) N_{xy} = A_{66} e_{xy}. \tag{2.3.11}$$

На исти начин, након интеграције једначина (2.3.6-2.3.8) и коришћењем израза (2.2.13), добијају се моменти савијања  $M_{xx}$  и  $M_{yy}$  и момент торзије  $M_{xy}$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) M_{xx} = D_{11} k_{xx} + D_{12} k_{yy}, \quad (2.3.12)$$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) M_{yy} = D_{12} k_{xx} + D_{22} k_{yy}, \quad (2.3.13)$$

$$(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) M_{xy} = 2D_{66} k_{xy}. \quad (2.3.14)$$

У једначинама (2.3.9 – 2.3.11) и (2.3.12 – 2.3.14) уведене су ознаке за аксијалну крутост  $A_{ij}$  и савојну крутост  $D_{ij}$  дефинисане изразима (2.2.12) и (2.2.14).

У једначинама (2.3.9 – 2.3.11) и (2.3.12 – 2.3.14) уочава се да фигуришу компоненте померања у сва три правца  $u$ ,  $v$  и  $w$ .

Једначине равнотеже елементарног дела љуске записују се преко пројекције сила у  $(x, y$  и  $z)$  правцу.

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + c \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.3.15)$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - c \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{R_2} \left( \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (2.3.16)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \left( \frac{N_{xx}}{R_1} + \frac{N_{yy}}{R_2} \right) + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2.3.17)$$

Заменом израза (2.3.9 – 2.3.11) и (2.3.12 – 2.3.14) у изразе (2.3.15 – 2.3.17), добијају се једначине осциловања нано-љуске у следећем облику

$$\begin{aligned} (1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left( A_{11} + \frac{D_{11}}{R_1^2} + \frac{D_{12}}{R_1 R_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( A_{66} + 2c \left( c + \frac{1}{R_1} \right) D_{66} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &+ \left( A_{12} + A_{66} - 2c \left( c + \frac{1}{R_1} \right) D_{66} + \frac{D_{11}}{R_1^2} + \frac{D_{12}}{R_1 R_2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ &+ \left( \frac{A_{11}}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2} + \frac{D_{11} + D_{12}}{R_1^2 R_2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \left( 2 \left( c + \frac{1}{R_1} \right) D_{66} + \frac{D_{12}}{R_1} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{D_{11}}{R_1} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \end{aligned} \quad (2.3.18)$$



$$\begin{aligned}
(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \left( A_{12} + A_{66} + 2c \left( \frac{1}{R_2} - c \right) D_{66} + \frac{D_{22}}{R_2^2} + \frac{D_{12}}{R_1 R_2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
&+ \left( A_{66} + 2c \left( \frac{1}{R_2} - c \right) D_{66} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left( A_{22} + \frac{D_{22}}{R_2^2} + \frac{D_{12}}{R_1 R_2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
&+ \left( \frac{A_{12}}{R_1} + \frac{A_{22}}{R_2} + \frac{D_{22} + D_{12}}{R_1 R_2^2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} - \left( 2 \left( \frac{1}{R_2} - c \right) D_{66} + \frac{D_{12}}{R_2} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{D_{22}}{R_2} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}, \quad (2.3.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 - (e_0 \tilde{a})^2 \Delta) \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\
&- \left( \frac{A_{11}}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( 4cD_{66} + \frac{D_{12}}{R_1} + \frac{D_{22}}{R_2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \left( \frac{D_{11}}{R_1} + \frac{D_{12}}{R_2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\
&- \left( \frac{A_{22}}{R_2} + \frac{A_{12}}{R_1} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{D_{11}}{R_1} + \frac{D_{12}}{R_2} - 4cD_{66} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \left( \frac{D_{12}}{R_1} + \frac{D_{22}}{R_2} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\
&+ \left( \frac{D_{11} + D_{12}}{R_1 R_2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left( \frac{D_{22} + D_{12}}{R_1 R_2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{A_{11}}{R_1^2} + 2 \frac{A_{12}}{R_1 R_2} + \frac{A_{22}}{R_2^2} \right) w. \quad (2.3.20)
\end{aligned}$$

Једначине (2.3.18 – 2.3.20) дате су у раду ([Ghavanloo, E., and Fazelzadeh, S. A., 2013](#)) где је разматрана Градијентна теорија напона.

### 3. Слободне и принудне осцилације спрегнутих нано-цеви

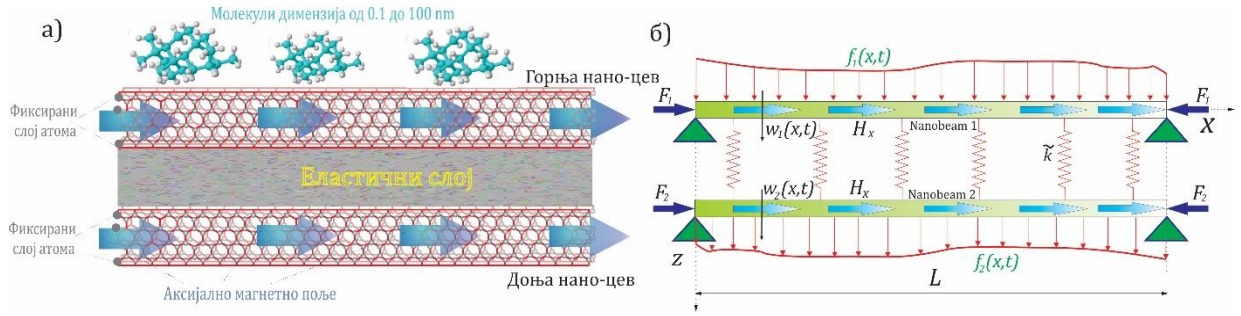
У овом поглављу приказана је анализа слободних и принудних осцилација еластично спрегнутих нано-цеви (нано-греда). Две нано-греде су просто ослоњене и међусобно повезане еластичним слојем, који се апроксимира Winkler-овим моделом дискретно распоређених опруга линеарних крутости  $\tilde{k}$  које делују по дужини греде  $L$ .

Физички модел на **Слици 3.1а** је представљен помоћу две еластично повезане угљеничне нано-цеви које имају фиксирани крајње граничне слојеве атома (*Ansari, R. u сарадници, 2012а*). Спрега између горње и доње нано-цеви остварена је Winkler-овим еластичним слојем и представља се међуатомским силама између две нано-цеви, попут van der Waals-ове интеракције (*Ru, C. Q., 2001*).

У циљу анализе малих трансверзалних померања средње равни оба нано-елемената, нано-греде су подвргнуте дејству произвољно распоређеним трансверзалним континуалним оптерећењима  $f_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$  у смеру осе  $z$ , где је са 1 означена горња и са 2 доња нано-греда, **Слика 3.1**.

Да би се испитали критеријуми на извијање и извршила анализа еластичне стабилности (стању пре појаве извијених геометријских облика напрегнутог нано-носача) посматраног система нано греда, греде су изложене дејству притисних аксијалних сила  $F_1$  и  $F_2$ , **Слика 3.1**. Утицај Lorentz-ове магнетне силе је такође укључен и узрокован је аксијалним магнетним пољем које делује у смеру осе  $x$ , као што је приказано на **Слици 3.1**. Принудне осцилације спрегнутог система анализираће се помоћу добијених закона малих принудних трансверзалних осцилација при чему су разматрани случајеви дејства различитих облика спољашњег трансверзалног периодичког или константног оптерећења.

Трансверзална померања горње и доње нано-греде означена су са  $w_1(x, t)$  и  $w_2(x, t)$ . Ради поједностављења, у даљем раду претпостављамо да су обе нано-греде идентичне по питању геометријских и физичких својстава. Површина попречног пресека код обе нано-греде је означена са  $A$ , Young-ов модул еластичности  $E$ , густина  $\rho$  и дужина  $L$ .



**Слика 3.1** Две угљеничне нано-цеве повезане Winkler-овим еластичним слојем и изложене дејству аксијалних и трансверзалних сила, као и магнетног поља; (а) Физички модел представљен помоћу угљеничне нано-цеви чији су крајњи гранични слојеви атома фиксирани и (б) Механички модел представљен помоћу двеју нано-греда

На основу Euler-Bernoulli-јеве теорије греде (Reddy, J. N., 2002, Kozić, P. u сарадници, 2014) из **Поглавља 2.1** и Eringen-ове нелокалне теорије еластичности (Eringen, A. C., 1972, Eringen, A. C., 2002) из **Поглавља 1.2**, изведене су диференцијалне једначине које описују осциловање двеју нано-греда међусобно повезаних Winkler-овим еластичним слојем (Слика 3.1.)

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - f_1 + \tilde{k}(w_1 - w_2) + F_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \tilde{\eta} A H_x^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - f_1 + \tilde{k}(w_1 - w_2) + F_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \tilde{\eta} A H_x^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - f_2 - \tilde{k}(w_1 - w_2) + F_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \tilde{\eta} A H_x^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} \\ & = (e_0 \tilde{a})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - f_2 - \tilde{k}(w_1 - w_2) + F_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \tilde{\eta} A H_x^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

Све величине из једначина (3.1) и (3.2) ће се у даљем раду бездимензионисати, те се вредности за амплитуде осциловања из рада (Zhang, Y. Q. u сарадници 2008a) могу упоредити са добијеним резултатима анализе, када се код оваквог нано-система занемари утицај магнетног поља и нелокалног параметра. Сви параметри описани су у **Поглављима 1.2, 1.3 и 2.1.**

Гранични услови на крајевима носача код просто ослоњених угљеничних нано-цеви дужина  $L$ , применом нелокалне теорије еластичности, једнаки су граничним условима Euler-Bernoulli-јевог модела просто ослоњених греда заснованих на класичној теорији

$$\text{за } x = 0 \quad w_i(0, t) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}(0, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.3)$$

$$\text{за } x = L \quad w_i(L, t) = 0, \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}(L, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.4)$$

Са  $i = 1$  означена је горња нано-цев, док је са  $i = 2$  означена доња нано-цев.

### 3.1. Слободне осцилације спрегнутих нано-цеви

Резултати добијени класичном локалном и нелокалном теоријом могу се упоредити у случају када су дати у бездимензионом облику. Из тог разлога, а и због поједностављења јеначина (3.1) и (3.2), уведени су следећи бездимензиони параметри

$$\eta^2 = \frac{(e_0 \bar{a})^2}{L^2}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = t \frac{c}{L^2}, \quad c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

$$\bar{F}_i = \frac{L^2 F_i}{EI}, \quad K = \frac{\tilde{k} L^4}{EI}, \quad MP = \frac{L^2}{EI} \tilde{\eta} A H_x^2, \quad \bar{w}_i = \frac{w_i}{L}, \quad i = 1, 2, \quad (3.1.1)$$

где

$\xi$  је бездимензиона аксијална координата и  $\tau$  је бездимензионо време,  $c$  је константа,  $\eta$  је бездимензиони нелокални параметар,  $\bar{F}_i, i = 1, 2$  су бездимензионе аксијалне силе,  $MP$  је параметар магнетног поља и  $K$  је бездимензиона крутост опруге.

Заменом бездимензионих параметара (3.1.1) у јеначине (3.1) и (3.2), хомогене диференцијалне јеначине којима се описују мала трансверзална померања слободних

осцилација двеју нано-цеви међусобно спрегнуте Winkler-овим еластичним слојем добијају следећи облик

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) + (\bar{F}_1 - MP) \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \xi^2} \\ & + \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \xi^4} - \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) + (\bar{F}_1 - MP) \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \xi^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} - K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) + (\bar{F}_2 - MP) \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \xi^2} \\ & + \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \xi^4} - \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} - K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) + (\bar{F}_2 - MP) \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \xi^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Решења парцијалних диференцијалних једначина (3.1.2) и (3.1.3), применом методе Bernoulli-јевих партикуларних интеграла се претпостављају у облику производа функција

$$\bar{w}_1(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) T_{1n}(\tau), \quad (3.1.4)$$

$$\bar{w}_2(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) T_{2n}(\tau), \quad (3.1.5)$$

где су са  $T_{1n}(\tau)$  и  $T_{2n}(\tau)$  означене непознате бездимензионе временске функције, са  $X_n(\xi)$  су означене сопствене (карактеристичне) функције (облици сопствених функција) које се одређују из граничних услова ([Rašković, D. 1965](#)), те код просто ослоњене нано-греде оне добијају облик

$$X_n(\xi) = \sin(k_n \xi), \quad k_n = n\pi, \quad (3.1.6)$$

којих има  $n = 1, 2, 3, \dots$  колико и облика осциловања просто ослоњене нано-цеви.

Заменом решења (3.1.4) и (3.1.5) у једначине (3.1.2) и (3.1.3), добија се

$$\ddot{T}_{1n} + \left[ K - (\bar{F}_1 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} \right] T_{1n} - K T_{2n} = 0, \quad (3.1.7)$$

$$\ddot{T}_{2n} + \left[ K - (\bar{F}_2 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} \right] T_{2n} - K T_{1n} = 0. \quad (3.1.8)$$

Решења временских бездимензионих функција могу се претпоставити као

$$T_{1n} = C_n e^{j\omega_n \tau}, \quad T_{2n} = D_n e^{j\omega_n \tau}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (3.1.9)$$

где је  $\omega_n$  сопствена фреквенција  $n$ - тог мода осциловања,  $C_n$  и  $D_n$  су амплитуде временских облика осциловања.

Заменом решења (3.1.9) у једначине (3.1.7) и (3.1.8), добија се

$$\left[ K - (\bar{F}_1 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - \omega_n^2 \right] C_n - K D_n = 0, \quad (3.1.10)$$

$$-K C_n + \left[ K - (\bar{F}_2 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - \omega_n^2 \right] D_n = 0. \quad (3.1.11)$$

Систем једначина (3.1.10) и (3.1.11) има решење различито од тривијалног само ако је детерминанта тог система једнака нули

$$\begin{bmatrix} K - (\bar{F}_1 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - \omega_n^2 & -K \\ -K & K - (\bar{F}_2 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - \omega_n^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.1.12)$$

Развијањем детерминанте (3.1.12) добија се фреквентна једначина у облику

$$\begin{aligned} & \omega_n^4 - \omega_n^2 \left[ 2K - \bar{F}_1 k_n^2 - \bar{F}_2 k_n^2 + 2MPk_n^2 + 2 \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} \right] \\ & + \left[ K - (\bar{F}_1 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} \right] \left[ K - (\bar{F}_2 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} \right] - K^2 = 0. \quad (3.1.13) \end{aligned}$$

Решавањем фреквентне једначине (3.1.13) добијају се два решења за квадрате сопствених фреквенција помоћу којих се могу одредити нетривијане вредности за  $C_n$  и  $D_n$ ,

$$\omega_{nI}^2 = \frac{1}{2} \left[ b - \sqrt{b^2 - 4c} \right], \quad (3.1.14)$$

$$\omega_{nII}^2 = \frac{1}{2} \left[ b + \sqrt{b^2 - 4c} \right], \quad (3.1.15)$$

при чему су  $\omega_{nI}^2$  квадрати нижих, а  $\omega_{nII}^2$  квадрати виших природних фреквенција разматраног нано-система, где су

$$b = \left[ 2K - \bar{F}_1 k_n^2 - \bar{F}_2 k_n^2 + 2MPk_n^2 + 2 \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} \right], \quad (3.1.16)$$

$$c = \left[ K - (\bar{F}_1 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} \right] \left[ K - (\bar{F}_2 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} \right] - K^2. \quad (3.1.17)$$

Мультипликовани број природних фреквенција којих у спрегнутом систему има четири зависе и од параметра нано скале  $\eta$ , магнетног поља  $MP$ , коефицијента еластичног спрежућег слоја  $K$  и аксијалних сила  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ .

За сваку од природних фреквенција приказан је одговарајући однос амплитуда осциловања преко кофактора фреквентне детерминанте (3.1.12)

$$\alpha_{nk} = \frac{D_{nk}}{C_{nk}} = \frac{K - (\bar{F}_1 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - \omega_{nk}^2}{K} = \frac{K}{K - (\bar{F}_2 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - \omega_{nk}^2},$$

$$k = I, II. \quad (3.1.18)$$

Заменом квадрата за ниже и више природне фреквенције посматраног система из израза (3.1.14) и (3.1.15) у једначину (3.1.18), добија се

$$\alpha_{nI} = \frac{K - (\bar{F}_1 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - \omega_{nI}^2}{K} = \frac{K}{K - (\bar{F}_2 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - \omega_{nI}^2}, \quad (3.1.19)$$

$$\alpha_{nII} = \frac{K - (\bar{F}_1 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - \omega_{nII}^2}{K} = \frac{K}{K - (\bar{F}_2 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - \omega_{nII}^2}. \quad (3.1.20)$$

Када би се у једначинама (3.1.14 и 3.1.15) и (3.1.19 и 3.1.20) занемарио нелокални параметар  $\eta$  и параметар магнетног поља  $MP$ , фреквентна и амплитудна једначина би се свеле на једначине модела у коме се не разматрају наведени утицаји, које су дате у раду (Zhang, Y. Q. и сарадници 2008a).

Да би се прорачун поједноставио, а и утицај аксијалних притисних сила упоредио са резултатима из рада (Zhang, Y. Q. и сарадници 2008a) уводи се зависност аксијалних оптерећења,  $\bar{F}_1$  које делује на горњу нано-цев и  $\bar{F}_2$  које делује на доњу нано-цев, помоћу параметра  $\chi$

$$\bar{F}_2 = \chi \bar{F}_1, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad (3.1.21)$$

онда се природна фреквенција система може представити у следећем облику

$$\bar{\omega}_{nk}^2 = \frac{1}{2} \left[ \tilde{b} \mp \sqrt{\tilde{b}^2 - 4\tilde{c}} \right], \quad k = I, II, \quad (3.1.22)$$

где је сада

$$\tilde{b} = 2K - (\chi + 1)\bar{F}_1 k_n^2 + 2MPk_n^2 + 2\frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2}, \quad (3.1.23)$$

$$\tilde{c} = \left[ K - (\bar{F}_1 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} \right] \left[ K - (\chi\bar{F}_1 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} \right] - K^2 = 0. \quad (3.1.24)$$

Заменом израза (3.1.22) у једначине (3.1.19) и (3.1.20) добија се нови израз за однос амплитуда нано-система

$$\bar{\alpha}_{nk} = \frac{K - (\bar{F}_1 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - \bar{\omega}_{nk}^2}{K}, \quad k = I, II. \quad (3.1.25)$$

Занемаривањем аксијалних сила, добија се

$$(\bar{\omega}_{nI}^0)^2 = \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} + k_n^2 MP, \quad (3.1.26)$$

$$(\bar{\omega}_{nII}^0)^2 = 2K + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} + k_n^2 MP \quad (3.1.27)$$

и

$$\bar{\alpha}_{nI}^0 = 1, \quad \bar{\alpha}_{nII}^0 = -1. \quad (3.1.28)$$



Да би се приказали утицаји аксијалних сила притиска и магнетног поља на амплитуде стационарног стања осциловања  $A_{nI}$  и  $A_{nII}$  нано-система, потребно је дефинисати однос амплитуда осциловања при силама мањим од критичних сила извијања које је потребно одредити

$$\psi_1 = \frac{A_{nI}}{A_{nI}^0}, \quad \psi_2 = \frac{A_{nII}}{A_{nII}^0}, \quad (3.1.29)$$

где су  $A_{nI}^0$  и  $A_{nII}^0$  амплитуде осциловања еластично спрегнутих нано-цеви, без аксијалног напрезања на притисак.

Анализа амплитуда осциловања је дефинисана преко односа (3.1.29) као и у раду ([Zhang, Y. Q. и сарадници 2008а](#)) и омогућава нам лакше поређење добијених резултата када се занемаре утицаји нелокалног параметра и параметра магнетног поља.

Однос аксијалне силе притиска и критичне силе извијања је

$$p = \frac{\bar{F}}{P_{cr}}, \quad (3.1.30)$$

где је

$$P_{cr} = \frac{1}{1 + \eta^2 \pi^2} EI \frac{\pi^2}{L^2}, \quad (3.1.31)$$

$$\bar{F} = \frac{k_n^2}{1 + \eta^2 k_n^2}. \quad (3.1.32)$$

Критично оптерећење извијања  $P_{cr}$  је најмање оптерећење (за  $n=1$ ) при коме нано-града губи геометријску стабилност при извијању услед дејства аксијалних сила (сила притиска).

Ако се у израз (3.1.31) занемари нелокални параметар, тј. за  $\eta = 0$ , добија се

$$P_{cr} = EI \frac{\pi^2}{L^2}, \quad (3.1.33)$$

које представља критично оптерећење Euler-овог носача и које подразумева најмање оптерећење при којем један носач губи геометријску стабилност при извијању услед дејства аксијалних сила притиска, (*Zhang, Y. Q. u сарадници 2008a*).

Резултати добијени нелокалном теоријом могу се упоредити са резултатима добијеним класичном теоријом континуума ако се представе у бездимензионом облику. Пошто су на овакав начин изражене амплитуде осциловања, вредности односа амплитуда осциловања  $\psi_1$  и  $\psi_2$  се могу упоредити са резултатима добијеним у раду (*Zhang, Y. Q. u сарадници 2008a*).

### 3.2. Принудне осцилације спрегнутих нано-цеви

Једначине (3.1) и (3.2) у бездимензионом облику се могу написати

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) + (\bar{F}_1 - MP) \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \xi^2} \\ & + \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \xi^4} - \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) + (\bar{F}_1 - MP) \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \xi^2} \right] = \bar{f}_1 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_1}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} - K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) + (\bar{F}_2 - MP) \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \xi^2} \\ & + \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \xi^4} - \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} - K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) + (\bar{F}_2 - MP) \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \xi^2} \right] = \bar{f}_2 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

где је

$$\bar{f}_i = \frac{L^3}{EI} f_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.2.3)$$

Решења нехомогених диференцијалних једначина (3.2.1) и (3.2.2) могу се представити у облику

$$\bar{w}_1(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) \sum_{k=I}^{II} S_{nk}(\tau), \quad (3.2.4)$$

$$\bar{w}_2(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) \sum_{k=I}^{II} \alpha_{nk} S_{nk}(\tau), \quad (3.2.5)$$

где су са  $S_{nk}(\tau)$ ,  $k = I, II$  означене непознате бездимензионе временске функције које одговарају сопственим фреквенцијама  $\omega_{nk}$ ,  $k = I, II$  и  $\alpha_{nk}$  су односи амплитуда осциловања који одговарају сопственим фреквенцијама  $\omega_{nk}$ , представљени изразима (3.1.19 и 3.1.20).

Заменом решења (3.2.4) и (3.2.5) у једначине (3.2.1) и (3.2.2) добија се следећи систем нехомогених парцијалних диференцијалних једначина у облику

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \sum_{k=I}^{II} \left[ \ddot{S}_{nk} + \left( K - (\bar{F}_1 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - K\alpha_{nk} \right) S_{nk} \right] (1 + \eta^2 k_n^2) = \bar{f}_1 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_1}{\partial \xi^2}, \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sum_{k=I}^{II} \left[ \ddot{S}_{nk} + \left( K - (\bar{F}_2 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - K\alpha_{nk}^{-1} \right) S_{nk} \right] (1 + \eta^2 k_n^2) \alpha_{nk} \\ = \bar{f}_2 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Множењем једначина (3.2.6) и (3.2.7) са функцијом основних облика осциловања  $X_m(\xi)$ , интегралњем и коришћењем услова ортогоналности

$$\int_0^1 X_m(\xi) X_n(\xi) d\xi = \int_0^1 \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\xi) d\xi = \beta \delta_{mn}, = \int_0^1 X_n^2(\xi) d\xi = \frac{1}{2}, \quad (3.2.8)$$

где је  $\delta_{mn}$  Кронескер-ова делта функција, добија се

$$\sum_{k=I}^{II} \left[ \ddot{S}_{nk} + \left( K - (\bar{F}_1 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - K\alpha_{nk} \right) S_{nk} \right] = 2M \int_0^1 \left( \bar{f}_1 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_1}{\partial \xi^2} \right) X_n(\xi) d\xi, \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=I}^{II} \left[ \ddot{S}_{nk} + \left( K - (\bar{F}_2 - MP)k_n^2 + \frac{k_n^4}{1 + \eta^2 k_n^2} - K\alpha_{nk}^{-1} \right) S_{nk} \right] \alpha_{nk} \\ = 2M \int_0^1 \left( \bar{f}_2 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial \xi^2} \right) X_n(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

где је уведено

$$M = \frac{1}{1 + \eta^2 k_n^2}. \quad (3.2.11)$$

Комбиновањем једначина (3.1.19) и (3.1.20) са (3.2.9) и (3.2.10) добија се систем једначина у облику

$$\sum_{k=I}^{II} [\ddot{S}_{nk} + \omega_{nk}^2 S_{nk}] = 2M \int_0^1 \left( \bar{f}_1 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_1}{\partial \xi^2} \right) X_n(\xi) d\xi, \quad (3.2.12)$$

$$\sum_{k=I}^{II} [\ddot{S}_{nk} + \omega_{nk}^2 S_{nk}] \alpha_{nk} = 2M \int_0^1 \left( \bar{f}_2 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial \xi^2} \right) X_n(\xi) d\xi. \quad (3.2.13)$$

Једначине (3.2.12) и (3.2.13) се могу написати као

$$\ddot{S}_{nk} + \omega_{nk}^2 S_{nk} = R_{nk}(\tau), \quad k = I, II, \quad (3.2.14)$$

где је

$$R_{nI} = 2M \frac{1}{\alpha_{nII} - \alpha_{nI}} \int_0^1 \left[ \alpha_{nII} \left( \bar{f}_1 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_1}{\partial \xi^2} \right) - \left( \bar{f}_2 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial \xi^2} \right) \right] X_n(\xi) d\xi, \quad (3.2.15)$$

$$R_{nII} = 2M \frac{1}{\alpha_{nI} - \alpha_{nII}} \int_0^1 \left[ \alpha_{nI} \left( \bar{f}_1 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_1}{\partial \xi^2} \right) - \left( \bar{f}_2 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_2}{\partial \xi^2} \right) \right] X_n(\xi) d\xi. \quad (3.2.16)$$

Решење једначине (3.2.14) је

$$S_{nk}(\tau) = \frac{1}{\omega_{nk}} \int_0^\tau R_{nk}(s) \sin[\omega_{nk}(\tau - s)] ds, \quad k = I, II. \quad (3.2.17)$$

Заменом израза (3.2.17) у (3.2.4) и (3.2.5), добија се

$$\bar{w}_1(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\xi) \sum_{k=1}^{\Pi} \frac{1}{\omega_{nk}} \int_0^{\tau} R_{nk}(s) \sin[\omega_{nk}(\tau - s)] ds, \quad (3.2.18)$$

$$\bar{w}_2(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\xi) \sum_{k=1}^{\Pi} \alpha_{nk} \frac{1}{\omega_{nk}} \int_0^{\tau} R_{nk}(s) \sin[\omega_{nk}(\tau - s)] ds. \quad (3.2.19)$$

Решења (3.2.18) и (3.2.19) могу се користити за проналажење малих трансверзалних померања средње равни овог нано-система за произвољно спољашње трансверзално оптерећење. Ради једноставности, у даљем разматрању претпоставља се да је само прва нано-цев под дејством спољашњег оптерећења. Односно  $\bar{f}_1(\xi, \tau) \neq 0$  и  $\bar{f}_2(\xi, \tau) = 0$ , тада се једначине (3.2.15) и (3.2.16) своде на

$$R_{nI} = 2M \frac{\alpha_{nII}}{\alpha_{nII} - \alpha_{nI}} \int_0^1 \left( \bar{f}_1 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_1}{\partial \xi^2} \right) \sin(n\pi\xi) d\xi, \quad (3.2.20)$$

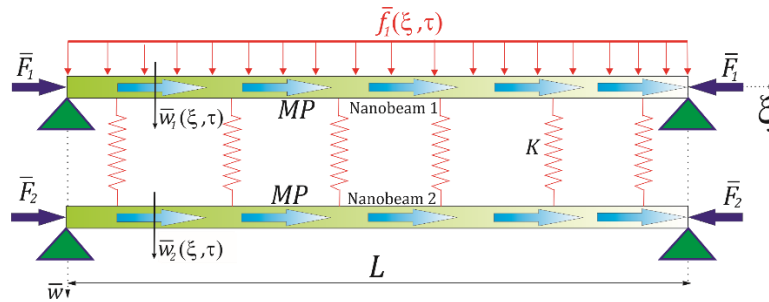
$$R_{nII} = 2M \frac{\alpha_{nI}}{\alpha_{nI} - \alpha_{nII}} \int_0^1 \left( \bar{f}_1 - \eta^2 \frac{\partial^2 \bar{f}_1}{\partial \xi^2} \right) \sin(n\pi\xi) d\xi. \quad (3.2.21)$$

У даљем раду извршиће се анализа принудних осцилација за четири различита случаја спољашњих оптерећења (*Zhang, Y. Q. и сарадници 2008a, Stamenković, M. и сарадници 2016*):

- случај када делује континуално равномерно распоређено хармонијско оптерећење,
- случај када делује концентрисана хармонијска сила,
- случај када делује покретна сила константног интензитета и
- случај када делује покретна хармонијска сила.

### 3.2.1. Континуално равномерно распоређено хармонијско оптерећење

Континуално равномерно распоређено хармонијско оптерећење које делује на горњу нано-цев представљеног нано-система приказано је на **Слици 3.2.1.1**.



**Слика 3.2.1.1** Нано-систем сачињен од две нано-цеви међусобно повезане Winkler-овим еластичним слојем, при чему је горња нано-цев подвргнута дејству континуално равномерно распоређеног оптерећења

Континуално равномерно распоређено хармонијско оптерећење се може представити на следећи начин

$$\bar{f}_1(\xi, \tau) = q \sin(\Omega \tau), \quad (3.2.1.1)$$

где је  $q$  магнитуда, а  $\Omega$  фреквенција постојећег хармонијског оптерећења.

Заменом (3.2.1.1) у изразе (3.2.20) и (3.2.21), добија се

$$R_{nI} = 4Mq \frac{\alpha_{nII}}{n\pi(\alpha_{nII} - \alpha_{nI})} \sin(\Omega s), \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.2.1.2)$$

$$R_{nII} = 4Mq \frac{\alpha_{nI}}{n\pi(\alpha_{nI} - \alpha_{nII})} \sin(\Omega s), \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.2.1.3)$$

Увођењем израза (3.2.1.2) и (3.2.1.3) у (3.2.18) и (3.2.19), представљена су решења нано-система који је под дејством континуалног равномерно распоређеног хармонијског оптерећења

$$\bar{w}_1(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\xi) \left[ A_{nI} \sin(\Omega\tau) + \sum_{k=I}^{II} B_{nk} \sin(\omega_{nk}\tau) \right], \quad (3.2.1.4)$$

$$\bar{w}_2(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\xi) \left[ A_{nII} \sin(\Omega\tau) + \sum_{k=I}^{II} \alpha_{nk} B_{nk} \sin(\omega_{nk}\tau) \right], \quad k = I, II. \quad (3.2.1.5)$$

где су

$$A_{nI} = \lambda_1 \left[ \frac{\alpha_{nII}}{(\omega_{nI}^2 - \Omega^2)} - \frac{\alpha_{nI}}{(\omega_{nII}^2 - \Omega^2)} \right], \quad (3.2.1.6)$$

$$A_{nII} = \lambda_1 \alpha_{nI} \alpha_{nII} \left[ \frac{1}{(\omega_{nI}^2 - \Omega^2)} - \frac{1}{(\omega_{nII}^2 - \Omega^2)} \right], \quad (3.2.1.7)$$

$$B_{nI} = -\lambda_1 \Omega \alpha_{nII} \frac{1}{\omega_{nI}} \frac{1}{(\omega_{nI}^2 - \Omega^2)}, \quad (3.2.1.8)$$

$$B_{nII} = \lambda_1 \Omega \alpha_{nI} \frac{1}{\omega_{nII}} \frac{1}{(\omega_{nII}^2 - \Omega^2)}, \quad (3.2.1.9)$$

$$\lambda_1 = \frac{4Mq}{n\pi(\alpha_{nII} - \alpha_{nI})} \quad \text{и} \quad M = \frac{1}{1 + \eta^2 k_n^2}. \quad (3.2.1.10)$$

Једначине (3.2.1.4) и (3.2.1.5) имају по два члана. Први члан, који садржи  $\sin(\Omega\tau)$  представља принудне осцилације услед дејства принудне силе, док други члан који укључује  $\sin(\omega_{nk}\tau)$  означава слободне (сопствене) осцилације анализираниог нано-система. После дужег времена нестаће слободне (сопствене) осцилације, па се принудне осцилације представљеног нано-система могу изразити помоћу

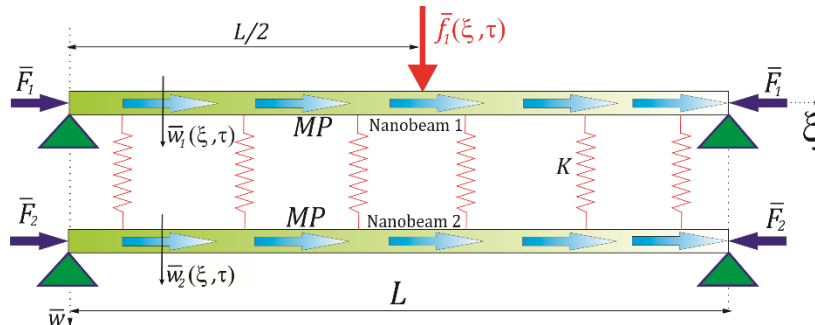
$$\bar{w}_1(\xi, \tau) = \sin(\Omega\tau) \sum_{n=1}^{\infty} A_{nI} \sin(n\pi\xi), \quad (3.2.1.11)$$

$$\bar{w}_2(\xi, \tau) = \sin(\Omega\tau) \sum_{n=1}^{\infty} A_{nII} \sin(n\pi\xi), \quad (3.2.1.12)$$

где су са  $A_{nI}$  и  $A_{nII}$  означене амплитуде осциловања стационарног стања горње и доње нано-цеви.

### 3.2.2. Концентрисана хармонијска сила

Дејство концентрисане хармонијске силе по средини горње нано-цеви представљеног нано-система приказано је на **Слици 3.2.2.1**.



**Слика 3.2.2.1** Нано-систем сачињен од две нано-цеви међусобно спрегнуте Winkler-овим еластичним слојем при чему је горња нано-цев подвргнута дејству концентрисане хармонијске силе по средини нано-цеви

Концентрисана хармонијска сила се може представити на следећи начин

$$\bar{f}_1(\xi, \tau) = q \sin(\Omega\tau) \delta\left(\xi - \frac{1}{2}\right), \quad (3.2.2.1)$$



где је  $q$  магнитуда и  $\Omega$  фреквенција концентрисане хармонијске силе, а  $\delta(\xi)$  Dirac-ова delta функција.

Увођењем хармонијске силе (3.2.2.1) у изразе (3.2.20) и (3.2.21), добија се

$$R_{nI} = 2Mq \frac{\alpha_{nII}}{\alpha_{nII} - \alpha_{nI}} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(\Omega\tau) [1 + \eta^2 k_n^2], \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.2.2.2)$$

$$R_{nII} = 2Mq \frac{\alpha_{nI}}{\alpha_{nI} - \alpha_{nII}} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(\Omega\tau) [1 + \eta^2 k_n^2], \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.2.2.3)$$

Увођењем израза (3.2.2.2) и (3.2.2.3) у (3.2.18) и (3.2.19), одређују се решења нано-система који је изложен дејству концентрисане хармонијске силе по средини горње нано-цеви

$$\bar{w}_1(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\xi) \left[ A_{nI} \sin(\Omega\tau) + \sum_{k=I}^{II} B_{nk} \sin(\omega_{nk}\tau) \right], \quad (3.2.2.4)$$

$$\bar{w}_2(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\xi) \left[ A_{nII} \sin(\Omega\tau) + \sum_{k=I}^{II} \alpha_{nk} B_{nk} \sin(\omega_{nk}\tau) \right], \quad (3.2.2.5)$$

где је

$$A_{nI} = \lambda_2 \left[ \frac{\alpha_{nII}}{(\omega_{nI}^2 - \Omega^2)} - \frac{\alpha_{nI}}{(\omega_{nII}^2 - \Omega^2)} \right], \quad (3.2.2.6)$$

$$A_{nII} = \lambda_2 \alpha_{nI} \alpha_{nII} \left[ \frac{1}{(\omega_{nI}^2 - \Omega^2)} - \frac{1}{(\omega_{nII}^2 - \Omega^2)} \right], \quad (3.2.2.7)$$

$$B_{nI} = -\lambda_2 \Omega \alpha_{nII} \frac{1}{\omega_{nI}} \frac{1}{(\omega_{nI}^2 - \Omega^2)}, \quad (3.2.2.8)$$

$$B_{nII} = \lambda_2 \Omega \alpha_{nI} \frac{1}{\omega_{nII}} \frac{1}{(\omega_{nII}^2 - \Omega^2)}, \quad (3.2.2.9)$$

$$\lambda_2 = \frac{2qM(1 + n^2\pi^2\eta^2)}{(\alpha_{nII} - \alpha_{nI})} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{2q}{(\alpha_{nII} - \alpha_{nI})} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad M = \frac{1}{1 + \eta^2 k_n^2} \quad (3.2.2.10)$$

Као у опису код претходог случаја, примећује се да се једначине (3.2.2.4) и (3.2.2.5) састоје из два члана. Први који садржи  $\sin(\Omega\tau)$  представља принудне осцилације услед дејства принудне силе, док други члан који укључује  $\sin(\omega_{nk}\tau)$  означава слободне (сопствене) осцилације анализираних нано-система. Принудне осцилације представљеног нано-система се могу изразити помоћу (3.2.1.11) и (3.2.1.12), имајући у виду изразе (3.2.2.6), (3.2.2.7) и (3.2.2.10).

### 3.2.3. Покретна сила константног интензитета

Дејство покретне силе константног интензитета на горњу нано-цев представљеног нано-система је приказано на **Слици 3.2.3.1**.

Покретна сила константног интензитета представљена је у следећем облику

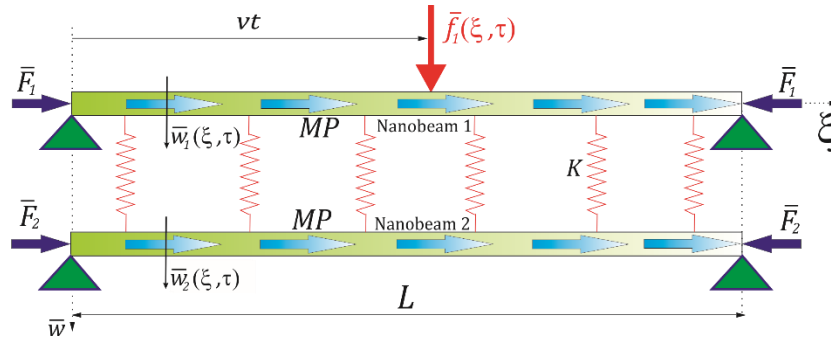
$$\bar{f}_1(\xi, \tau) = F\delta(\xi - v\tau), \quad (3.2.3.1)$$

где је  $F$  магнитуда силе константног интензитета и  $\delta(\xi)$  Dirac-ова delta функција.

Увођењем покретне силе константног интензитета (3.2.3.1) у изразе (3.2.20) и (3.2.21), добија се

$$R_{nI} = 2MF \frac{\alpha_{nII}}{\alpha_{nII} - \alpha_{nI}} \sin(n\pi v\tau)[1 + \eta^2 k_n^2], \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.2.3.2)$$

$$R_{nII} = 2MF \frac{\alpha_{nI}}{\alpha_{nI} - \alpha_{nII}} \sin(n\pi v\tau)[1 + \eta^2 k_n^2], \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.2.3.3)$$



**Слика 3.2.3.1** Нано-систем сачињен од две нано-цеве које су међусобно спрегнуте Winkler-овим еластичним слојем, при чему је горња нано-цев подвргнута дејству покретне силе константног интензитета

Увођењем израза (3.2.3.2) и (3.2.3.3) у (3.2.18) и (3.2.19), добијена су решења нано-система који је изложен дејству покретне силе константног интензитета

$$\bar{w}_1(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\xi) \left[ A_{nI} \sin(\Omega_n \tau) + \sum_{k=I}^{II} B_{nk} \sin(\omega_{nk} \tau) \right], \quad (3.2.3.4)$$

$$\bar{w}_2(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\xi) \left[ A_{nII} \sin(\Omega_n \tau) + \sum_{k=I}^{II} \alpha_{nk} B_{nk} \sin(\omega_{nk} \tau) \right], \quad (3.2.3.5)$$

где је

$$A_{nI} = \lambda_3 \left[ \frac{\alpha_{nII}}{\omega_{nI}^2 - \Omega_n^2} - \frac{\alpha_{nI}}{\omega_{nII}^2 - \Omega_n^2} \right], \quad (3.2.3.6)$$

$$A_{nII} = \lambda_3 \alpha_{nI} \alpha_{nII} \left[ \frac{1}{\omega_{nI}^2 - \Omega_n^2} - \frac{1}{\omega_{nII}^2 - \Omega_n^2} \right], \quad (3.2.3.7)$$

$$B_{nI} = -\lambda_3 \Omega_n \alpha_{nII} \frac{1}{\omega_{nI}} \frac{1}{(\omega_{nI}^2 - \Omega_n^2)}, \quad (3.2.3.8)$$

$$B_{nII} = \lambda_3 \Omega_n \alpha_{nI} \frac{1}{\omega_{nII}} \frac{1}{(\omega_{nII}^2 - \Omega_n^2)}, \quad (3.2.3.9)$$

$$\lambda_3 = \frac{2FM(1 + \eta^2 k_n^2)}{(\alpha_{nII} - \alpha_{nI})} = \frac{2F}{(\alpha_{nII} - \alpha_{nI})}, \quad \Omega_n = n\pi v = k_n v, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.2.3.10)$$

Претпостављајући да имамо само принудне осцилације, решења нано-система који је изложен дејству покретне силе константног интензитета, могу се представити помоћу (3.2.1.11) и (3.2.1.12), имајући у виду изразе (3.2.3.6), (3.2.2.7) и (3.2.3.10).

### 3.2.4. Покретна хармонијска сила

За анализу принудних осцилација представљеног нано-система услед дејства покретне хармонијске силе дате у облику

$$\bar{f}_1(\xi, \tau) = F \sin(\Omega\tau) \delta(\xi - v\tau), \quad (3.2.4.1)$$

може се посматрати иста **Слика 3.2.3.1**, где је  $F$  магнитуда покретне хармонијске силе,  $\Omega$  фреквенција покретне хармонијске силе и  $\delta(\xi)$  Dirac-ова delta функција.

Увођењем покретне хармонијске силе (3.2.4.1) у изразе (3.2.2.0) и (3.2.2.1), добија се

$$R_{nI} = 2MF \frac{\alpha_{nII}}{\alpha_{nII} - \alpha_{nI}} \sin(\Omega\tau) \sin(n\pi v\tau) [1 + \eta^2 k_n^2], \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.2.4.2)$$

$$R_{nII} = 2MF \frac{\alpha_{nI}}{\alpha_{nI} - \alpha_{nII}} \sin(\Omega\tau) \sin(n\pi v\tau) [1 + \eta^2 k_n^2], \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (3.2.4.3)$$

Увођењем израза (3.2.4.2) и (3.2.4.3) у (3.2.1.8) и (3.2.1.9), добијена су решења нано-система који је изложен дејству покретне хармонијске силе у облику

$$\bar{w}_1(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\xi) \left[ A_{nI} \sin(\Omega_n\tau) \sin(\Omega\tau) + B_{nI} \cos(\Omega_n\tau) \cos(\Omega\tau) + \sum_{k=I}^{II} C_{nk} \cos(\omega_{nk}\tau) \right], \quad (3.2.4.4)$$

$$\bar{w}_2(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\xi) \left[ A_{nII} \sin(\Omega_n\tau) \sin(\Omega\tau) + B_{nII} \cos(\Omega_n\tau) \cos(\Omega\tau) + \sum_{k=I}^{II} \alpha_{nk} C_{nk} \cos(\omega_{nk}\tau) \right], \quad (3.2.4.5)$$

где је

$$A_{nI} = \lambda_4 \left[ \frac{\alpha_{nII} u_{nI}}{n_{nI} m_{nI}} - \frac{\alpha_{nI} u_{nII}}{n_{nII} m_{nII}} \right], \quad (3.2.4.6)$$

$$A_{nII} = \lambda_4 \alpha_{nI} \alpha_{nII} \left[ \frac{u_{nI}}{n_{nI} m_{nI}} - \frac{u_{nII}}{n_{nII} m_{nII}} \right], \quad (3.2.4.7)$$

$$B_{nI} = 2\lambda_4 \Omega_n \Omega \left[ \frac{\alpha_{nI}}{n_{nII} m_{nII}} - \frac{\alpha_{nII}}{n_{nI} m_{nI}} \right], \quad (3.2.4.8)$$

$$B_{nII} = 2\lambda_4 \Omega_n \Omega \alpha_{nI} \alpha_{nII} \left[ \frac{1}{n_{nII} m_{nII}} - \frac{1}{n_{nI} m_{nI}} \right], \quad (3.2.4.9)$$

$$C_{nI} = \frac{2\lambda_4 \Omega_n \Omega \alpha_{nII}}{n_{nI} m_{nI}}, \quad C_{nII} = -\frac{2\lambda_4 \Omega_n \Omega \alpha_{nI}}{n_{nII} m_{nII}}, \quad (3.2.4.10)$$

$$\lambda_4 = \frac{2FM(1 + \eta^2 k_n^2)}{(\alpha_{nII} - \alpha_{nI})} = \frac{2F}{(\alpha_{nII} - \alpha_{nI})}, \quad \Omega_n = n\pi v = k_n v, \quad (3.2.4.11)$$

$$m_{nk} = \omega_{nk}^2 - (\Omega_n - \Omega)^2, \quad n_{nk} = \omega_{nk}^2 - (\Omega_n + \Omega)^2, \quad (3.2.4.12)$$

$$u_{nk} = \omega_{nk}^2 - \Omega_n^2 - \Omega^2, \quad k = I, II. \quad (3.2.4.13)$$

Принудне осцилације представљеног нано-система се могу изразити у облику

$$\bar{w}_1(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\xi) [A_{nI} \sin(\Omega_n \tau) \sin(\Omega \tau) + B_{nI} \cos(\Omega_n \tau) \cos(\Omega \tau)], \quad (3.2.4.14)$$

$$\bar{w}_2(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\xi) [A_{nII} \sin(\Omega_n \tau) \sin(\Omega \tau) + B_{nII} \cos(\Omega_n \tau) \cos(\Omega \tau)], \quad (3.2.4.15)$$

где су са  $A_{nI}$ ,  $A_{nII}$ ,  $B_{nI}$  и  $B_{nII}$  означене амплитуде осциловања горње и доње нано-цеви у стабилном стационарном стању. У раду (*Zhang, Y. Q. и сарадници 2008a*) узети су у обзир само утицаји амплитуда осциловања  $A_{nI}$  и  $A_{nII}$  и из тог разлога се разматрају и у овој дисертацији.

### 3.3. Нумеричка анализа

Анализа нано-система сачињеног од две нано-греде међусобно спојене Winkler-овим еластичним слојем, заснована је на нелокалној теорији еластичности и примењује се за анализу принудних осцилација повезаних угљеничних наноцеви, ZnO нано-цеви, борнитридних нано-цеви и других нано-материјала под магнетним утицајем (*Barone, V., u Peralta, J. E., 2008 u Kumar, C. S., u Mohammad, F., 2011*).

Нумеричка дискусија подељена је у три дела. У првом, добијени су нумерички резултати за однос амплитуда осциловања у стационарном стању спрегнутих нано-цеви под утицајем аксијалног магнетног поља. Добијени резултати упоређивани су са резултатима који су добијени класичном теоријом континуума (*Zhang, Y. Q. u сарадници 2008a*). У раду (*Zhang, Y. Q. u сарадници 2008a*) анализирана су трансверзална померања греда спрегнутих Winkler-овим еластичним слојем под дејством аксијалних сила притиска.

У другом делу разматрани су утицаји нелокалног параметра и аксијалног магнетног поља на законе промена малих трансверзалних померања принудних осцилација спрегнутог нано-система.

У трећем делу, табеларно су представљене вредности фреквенција анализираних нано-система. Резултати су поређени са резултатима симулације молекуларне динамике у раду (*Ansari R., u сарадници 2012b*).

#### 3.3.1. Параметарска анализа

Да бисмо потврдили добијене резултате за амплитуде осциловања, усвајамо вредности карактеристика материјала, облика попречног пресека и геометрије носача из рада (*Zhang, Y. Q. u сарадници 2008a*). У раду (*Zhang, Y. Q. u сарадници 2008a*) приказана је анализа еластично спрегнутих греда без утицаја нелокалног параметра и магнетног поља. Са обзиром да је на почетку овог поглавља извршено бездимензионисање диференцијалних једначина осциловања нано-система две нано-греде, може се за

упоређивање резултата (амплитуда осциловања) користити вредности карактеристика материјала, облика попречног пресека и геометрије носача из поменутог рада.

Поређење добијених резултата спроведено је за случајеве равномерно распоређеног и концентрисаног хармонијског оптерећења.

Како би упоредили добијене резултате за односе амплитуда осциловања  $\psi_1$  и  $\psi_2$  из (3.3.1.9) у случају равномерно распоређеног хармонијског оптерећења, одредићемо амплитуде осциловања у стационарном стању ( $A_{nI}$  и  $A_{nII}$ ) и ( $A_{nI}^0$  и  $A_{nII}^0$ ) заменом једначина (3.3.1.2 – 3.3.1.7) и (3.3.1.8) у једначине (3.2.1.6) и (3.2.1.7), респективно.

На **Слици 3.3.1.1а** представљена је веза између односа амплитуда осциловања  $\psi_1$  и односа  $p = \bar{F}/P_{cr}$  у опсегу 0–1, за трећи мод осциловања при фреквенцији побуде  $\Omega = 0.6 \omega_{nII}$ . Веза између односа амплитуда осциловања  $\psi_2$  и односа  $p$  приказана је на **Слици 3.3.1.1б**.

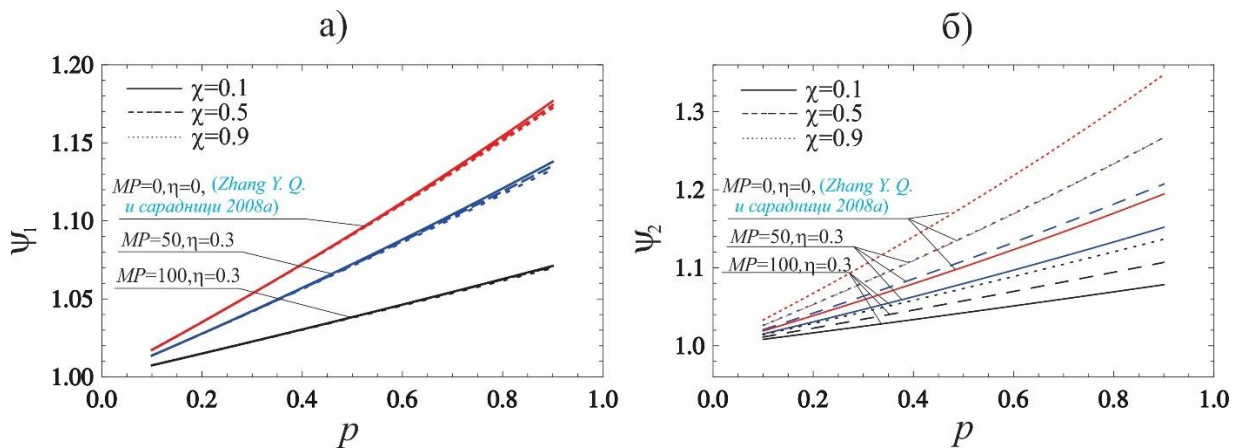
Примећује се да се однос амплитуда осциловања  $\psi_1$  неприметно смањује услед пораста параметра  $\chi$ . Са друге стране, веће вредности овог параметра утичу на повећање односа амплитуда осциловања  $\psi_2$ , што доводи до повећања вредности амплитуде осциловања  $A_{nII}$ . Закључак је да однос притисних аксијалних сила  $\chi$  има занемарљиве ефекте на први однос амплитуда  $\psi_1$ , док на други однос амплитуда  $\psi_2$  има значајан утицај.

У даљем раду, приказан је утицај аксијалних сила, магнетног поља и нелокалног параметра на разматрани нано-систем.

Са **Слике 3.3.1.1** јасно се види да веће вредности магнетног поља доводе до смањења вредности параметара  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , што доводи до смањења амплитуда осциловања  $A_{nI}$  и  $A_{nII}$ . Међутим, са физичке тачке гледишта, аксијално магнетно поље доводи до повећања укупне крутости и самим тим до повећања природних фреквенција система, видети (*Karličić, D. Z., 2016*). Овај ефекат нам омогућава практичну примену таквог система, јер је могуће мењати природне фреквенције  $\omega_{nI}$  и  $\omega_{nII}$  као и амплитуде  $A_{nI}$  и  $A_{nII}$  без промене материјалних и геометријских параметара разматраног нано-система. Треба напоменути да када су интензитети аксијалног магнетног поља и нелокалног параметра једнаки нули, овакав нелокални систем се своди на класични систем анализиран у раду (*Zhang, Y. Q. и сарадници 2008а*).

Такође, на **Слици 3.3.1.1** су приказани резултати за односе амплитуда осциловања  $\psi_1$  и  $\psi_2$  код случаја континуално равномерно распоређеног оптерећења који су добијени

за случај када су аксијално магнетно поље и нелокални параметар занемарени. Упоредна студија за случај концентрисане хармонске силе се изводи на сличан начин. Анализом добијених резултата за односе амплитуда  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , показано је да су добијене потпуно исте вредности као у случају континуално равномерног распоређеног оптерећења. Резултати добијени у овом истраживању показују веома добра поклапања са резултатима добијеним у раду (Zhang, Y. Q. и сарадници 2008a) када се занемаре утицаји магнетног поља и нелокалног параметра.



**Слика 3.3.1.1** Односи амплитуда осциловања а)  $\psi_1 = A_{nI}/A_{nI}^0$ , б)  $\psi_2 = A_{nII}/A_{nII}^0$  у функцији од параметра  $p = \bar{F}/P_{cr}$  за неколико различитих односа аксијалних сила притиска  $\chi$  и магнетних поља  $MP$

На даље су анализирани односи амплитуда  $\psi_1$  и  $\psi_2$  за случајеве равномерно распоређеног оптерећења (Слике 3.3.1.2 и 3.3.1.3), покретне силе константног интензитета (Слике 3.3.1.4 и 3.3.1.5) и покретне хармонијске силе (Слике 3.3.1.6 и 3.3.1.7). Бездимензиони параметри нано-система коришћени у нумеричким симулацијама на Сликама 3.3.1.2 до 3.3.1.7 су:  $K = 50$ ,  $F = 0.2$ ,  $r = 0.2$ ,  $\chi = 0.5$ ,  $\xi = 0.5$ ,  $v = 0.3$ , и  $n = 1$ . На сликама где се разматра само утицај нелокалног параметра, узета је вредност за магнетно поље  $MP = 25$ , док на сликама где се разматра само утицај магнетног поља, узета је вредност нелокалног параметра  $\eta = 0.3$ .

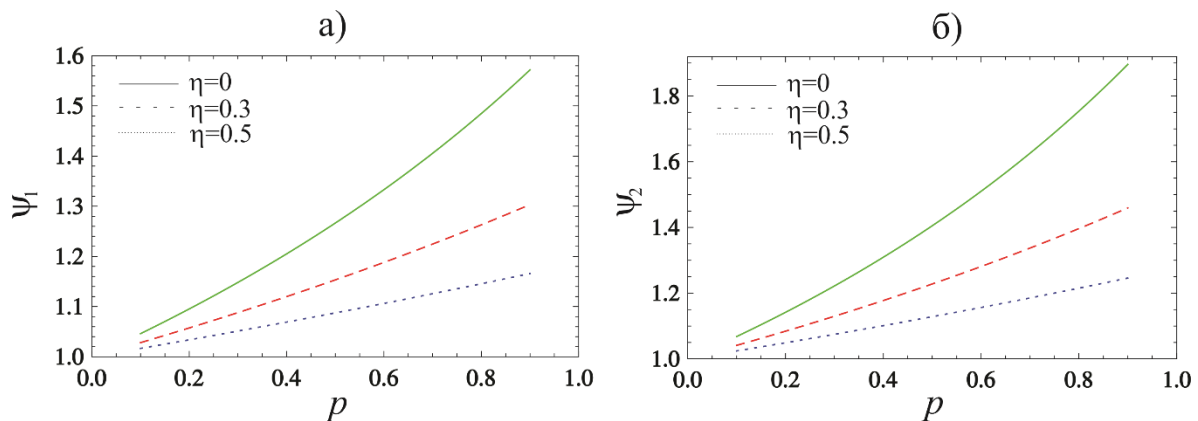
На Слици 3.3.1.2 је приказан утицај нелокалног параметра  $\eta$  на односе амплитуда  $\psi_1$  и  $\psi_2$  у функцији од  $p = \bar{F}/P_{cr}$ , у опсегу 0–1, за случај равномерно распоређеног оптерећења. Уочава се да односи  $\psi_1$  и  $\psi_2$  опадају са порастом нелокалног параметра  $\eta$ ,



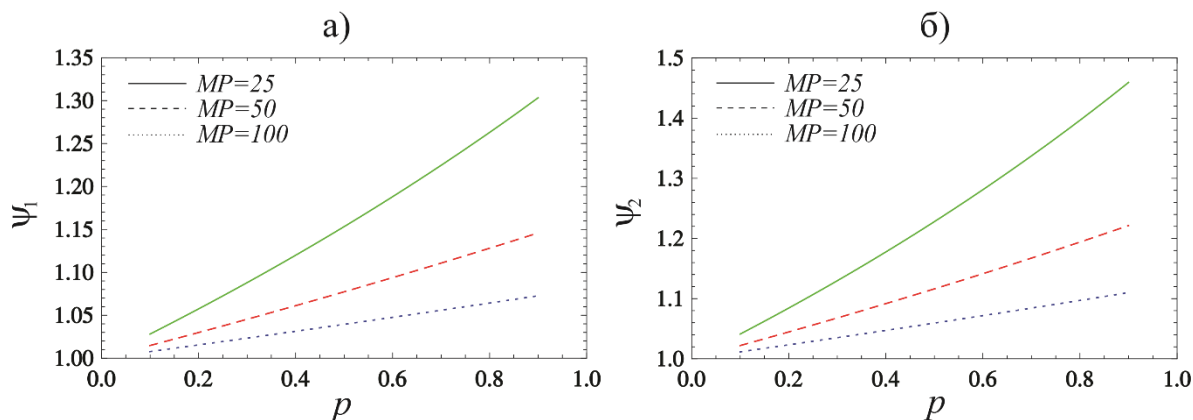
што имплицира да величине амплитуда осциловања у стационарном стању  $A_{nI}$  и  $A_{nII}$  постају мање за веће вредности нелокалног параметра. Са физичке тачке гледишта нелокални параметар  $\eta$  има ефекте пригушења на амплитуде осциловања у стационарном стању. Поред тога, повећање односа  $p$  доводи до повећања односа амплитуда  $\psi_1$  и  $\psi_2$ .

На **Слици 3.3.1.3** је приказан утицај аксијалног магнетног поља  $MP$  на односе амплитуда  $\psi_1$  и  $\psi_2$  у функцији од  $p = \bar{F}/P_{cr}$ , у опсегу 0–1, за случај равномерно распоређеног оптерећења. Очигледно је да се односи амплитуда осциловања у стационарном стању  $\psi_1$  и  $\psi_2$  смањују и са порастом параметра аксијалног магнетног поља. Са физичке тачке гледишта параметар магнетног поља  $MP$  има ефекте пригушења на амплитуде осциловања у стационарном стању.

Нумеричка симулација је показала да нелокални параметар  $\eta$  и параметар аксијалног магнетног поља  $MP$  слично утичу на односе амплитуда  $\psi_1$  и  $\psi_2$  у функцији од  $p = \bar{F}/P_{cr}$ , и када је у питању дејство концентрисане хармонијске силе и дејство равномерно распоређеног оптерећења, као што је показано на **Сликама 3.3.1.2** и **3.3.1.3**.



**Слика 3.3.1.2** Односи амплитуда осциловања а)  $\psi_1 = A_{nI}/A_{nI}^0$ , б)  $\psi_2 = A_{nII}/A_{nII}^0$  у функцији од параметра  $p = \bar{F}/P_{cr}$  за различите вредности нелокалних параметара  $\eta$ , код равномерно распоређеног оптерећења



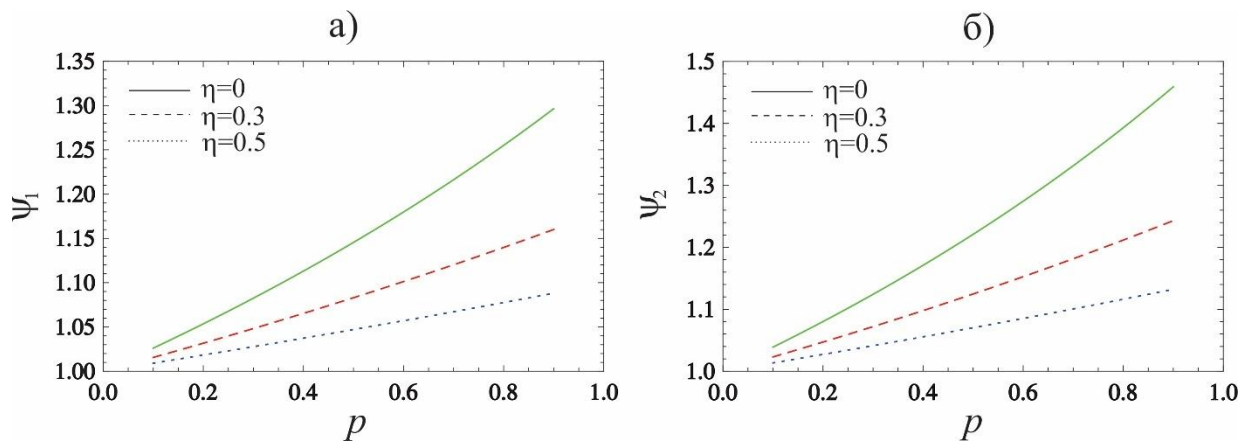
**Слика 3.3.1.3** Односи амплитуда осциловања а)  $\psi_1 = A_{nI}/A_{nI}^0$ , б)  $\psi_2 = A_{nII}/A_{nII}^0$  у функцији од параметра  $p = \bar{F}/P_{cr}$ , за различите вредности аксијалних магнетних поља  $MP$ , код равномерно распоређеног оптерећења

На **Слици 3.3.1.4** је приказан утицај нелокалног параметра  $\eta$  на односе амплитуда  $\psi_1$  и  $\psi_2$  у функцији од  $p = \bar{F}/P_{cr}$ , у опсегу 0–1, за случај покретне силе константног интензитета. Док је на **Слици 3.3.1.5** приказан је утицај аксијалног магнетног поља  $MP$  на односе амплитуда  $\psi_1$  и  $\psi_2$  у функцији од  $p = \bar{F}/P_{cr}$ , у опсегу 0–1, за случај покретне силе константног интензитета. Као и са претходних **Слика 3.3.1.2** и **3.3.1.3** тако и при овој анализи покретне силе константног интензитета (**Слике 3.3.1.4** и **3.3.1.5**) долази се до сличних закључака.

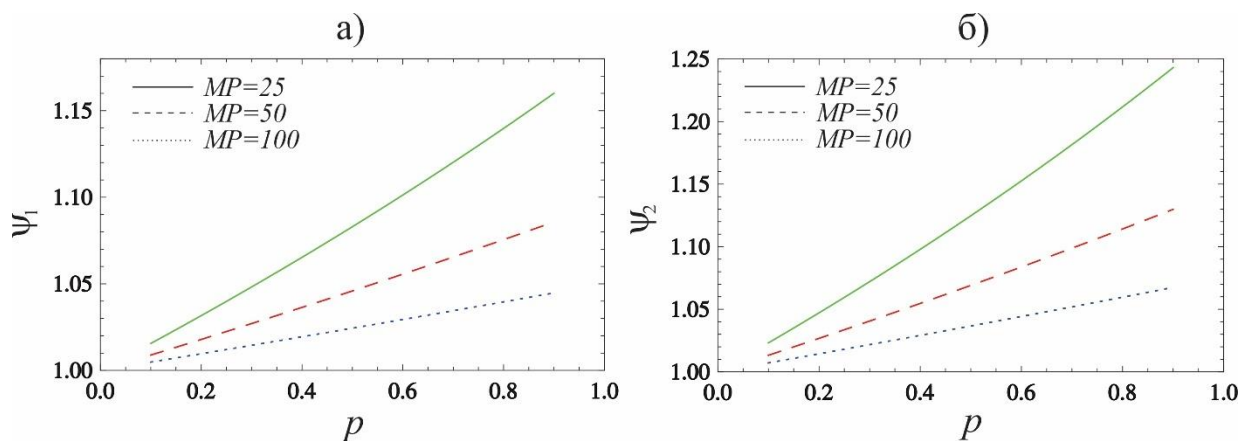
На **Слици 3.3.1.6** приказан је утицај нелокалног параметара  $\eta$  на односе амплитуда  $\psi_1$  и  $\psi_2$  у функцији од  $p = \bar{F}/P_{cr}$ , у опсегу 0–1, за случај покретне хармонијске силе. Са ове слике се може видети да се односи амплитуда осциловања у стационарном стању  $\psi_1$  и  $\psi_2$  смањују са порастом нелокалног параметра  $\eta$ . То имплицира да величине амплитуда осциловања  $A_{nI}$  и  $A_{nII}$  делују на сличан начин као у случају свих разматраних оптерећења. Такође се може приметити да су вредности за односе амплитуда веће код покретне хармонијске силе (**Слика 3.3.1.6**) него код покретне силе константног интензитета (**Слика 3.3.1.4**).

На **Слици 3.3.1.7** приказан је утицај аксијалног магнетног поља  $MP$  на односе амплитуда  $\psi_1$  и  $\psi_2$  у функцији од  $p = \bar{F}/P_{cr}$ , у опсегу 0–1, за случај покретне хармонијске силе. Овде се такође може видети да се односи амплитуда осциловања у стационарном стању  $\psi_1$  и  $\psi_2$  смањују са порастом аксијалног магнетног поља  $MP$ , што такође

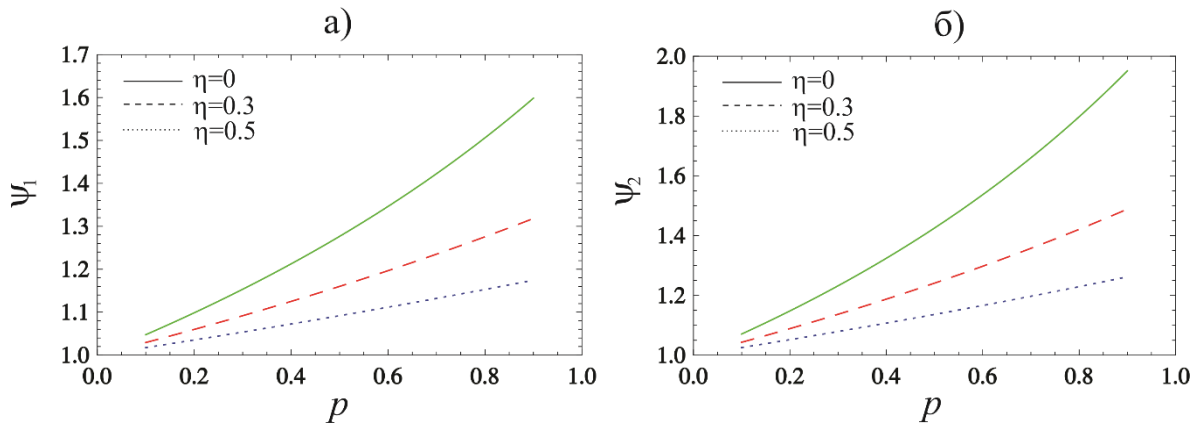
имплицира да њихове величине делују на сличан начин као у случају свих разматраних покретних оптерећења. При овој анализи се може приметити да су вредности за односе амплитуда веће код покретне хармонијске силе (Слика 3.3.1.7) него код покретне силе константног интензитета (Слика 3.3.1.5). Са обзиром да су сви параметри у овој нумеричкој анализи били непромењени, (осим нелокалног и параметра магнетног поља), можемо закључити да брзина покретног оптерећења утиче на вредности амплитуда осциловања у стационарном стању  $A_{nI}$  и  $A_{nII}$  анализираних нано-система.



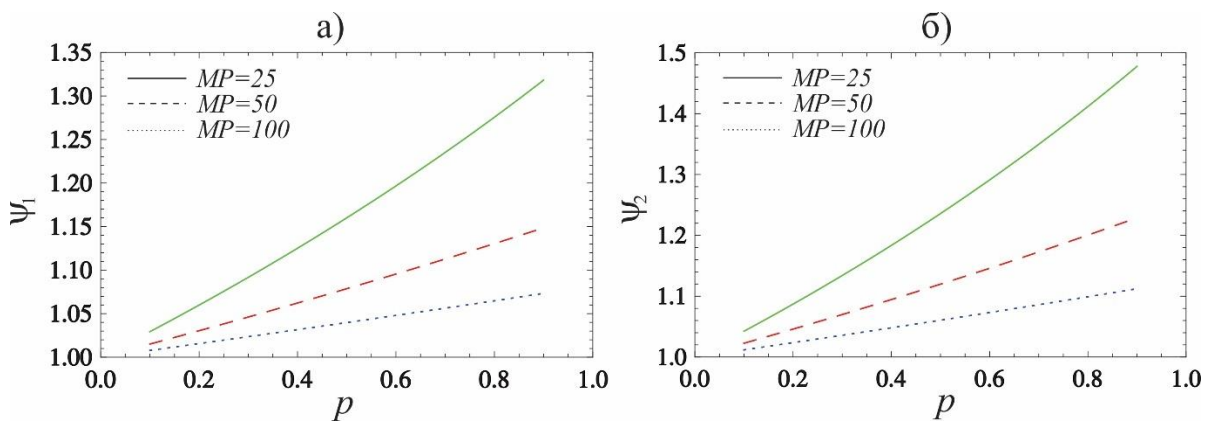
Слика 3.3.1.4 Односи амплитуда осциловања а)  $\psi_1 = A_{nI}/A_{nI}^0$ , б)  $\psi_2 = A_{nII}/A_{nII}^0$  у функцији од параметра  $p = \bar{F}/P_{cr}$  за различите вредности нелокалних параметара  $\eta$ , код покретне силе константног интензитета



Слика 3.3.1.5 Односи амплитуда осциловања а)  $\psi_1 = A_{nI}/A_{nI}^0$ , б)  $\psi_2 = A_{nII}/A_{nII}^0$  у функцији од параметра  $p = \bar{F}/P_{cr}$  за различите вредности аксијалних магнетних поља  $MP$ , код покретне силе константног интензитета



**Слика 3.3.1.6** Односи амплитуда осциловања а)  $\psi_1 = A_{nI}/A_{nI}^0$ , б)  $\psi_2 = A_{nII}/A_{nII}^0$  у функцији од бездимензионог параметра  $p = \bar{F}/P_{cr}$  за различите вредности нелокалних параметара  $\eta$ , код покретне хармонијске силе



**Слика 3.3.1.7** Односи амплитуда осциловања а)  $\psi_1 = A_{nI}/A_{nI}^0$ , б)  $\psi_2 = A_{nII}/A_{nII}^0$  у функцији од бездимензионог параметра  $p = \bar{F}/P_{cr}$  за различите вредности аксијалних магнетних поља  $MP$ , код покретне хармонијске силе

Представљени резултати за односе амплитуда показују добро поклапање са резултатима из литературе ([Şimşek, M., 2011](#), [Oniszczyk, Z., 2003](#) и [Zhang, Y. Q. и сарадници 2008a](#)).

У **Табели 3.3.1.1** приказан је утицај магнетног поља и нелокалног параметра на односе амплитуда осциловања у стационарном стању  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Приказане вредности односе се на равномерно распоређено хармонијско оптерећење и концентрисану

хармонијску силу. Смањење вредности односа амплитуда  $\psi_1$  и  $\psi_2$  узроковано је повећањем вредности магнетног поља и нелокалног параметра.

Вредности односа амплитуда осциловања у стационарном стању  $\psi_1$  и  $\psi_2$  поређене су са резултатима из рада (Zhang, Y. Q. и сарадници 2008a). Заменаривањем утицаја магнетног поља и нелокалног параметра уочена су веома добра поклапања добијених вредности са резултатима из овог рада.

**Табела 3.3.1.1** Утицај магнетног поља и нелокалног параметра на односе амплитуда осциловања  $\psi_1$  и  $\psi_2$ . Студија поређења.

	$\psi_1 = A_{nI}/A_{nI}^0$	$\psi_2 = A_{nII}/A_{nII}^0$
(Zhang, Y. Q. и сарадници 2008a)	1.1965	1.3019
$MP=0, \eta=0$	1.1965	1.3019
$MP=50, \eta=0.3$	1.1499	1.2277
$MP=50, \eta=0.5$	1.0872	1.1309
$MP=100, \eta=0.3$	1.0779	1.1175
$MP=100, \eta=0.5$	1.0436	1.0658

$$\chi = 0.5.$$

### 3.3.2. Анализа принудних осцилација нано-система

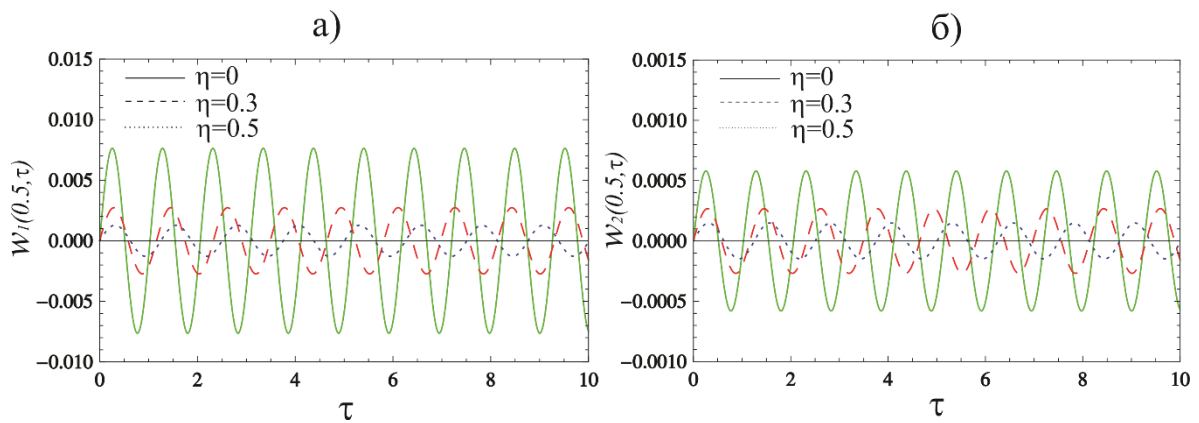
У овом поглављу приказане су временске функције принудних осцилација анализираних нано-система у средњим тачкама нано-греда за два случаја спољних оптерећења: равномерно распоређеног хармонијског оптерећења и покретне хармонијске силе. Такође, претпоставља се да обе нано-греде имају исте геометријске и материјалне карактеристике и да су подвргнуте притисним аксијалним силама  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$ . Приказани су утицаји аксијалног магнетног поља  $MP$  и нелокалног параметра  $\eta$  на законе промена малих трансверзалних померања принудних осцилација  $\bar{w}_1(\xi, \tau)$  и  $\bar{w}_2(\xi, \tau)$ .

За анализу трансверзалних померања код принудних осцилација нано-система користиће се мање вредности за крутост еластичног слоја  $K$  и лонгитудинално магнетно

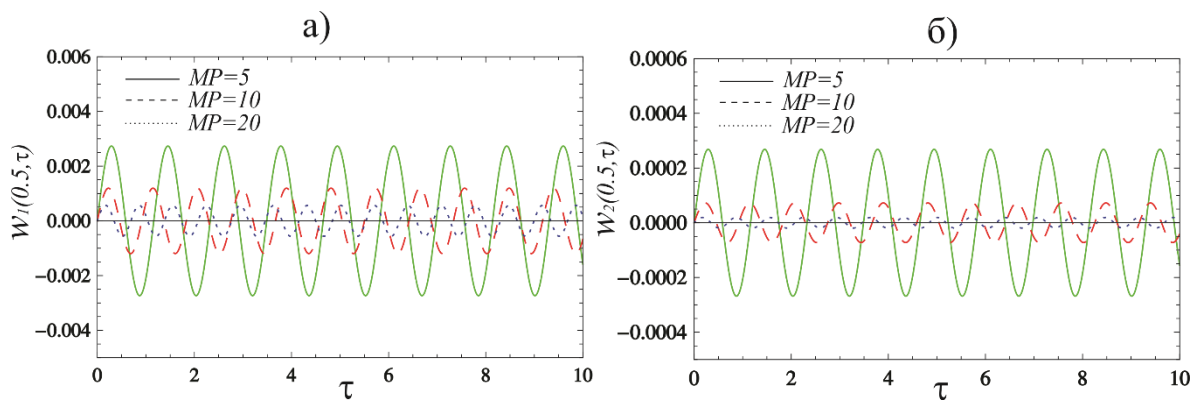
поље  $MP$ , јер употреба већих вредности доводи до значајног смањења вредности трансверзалних померања  $\bar{w}_1(0.5, \tau)$  и  $\bar{w}_2(0.5, \tau)$ . Остали бездимензиони параметри који се користе у нумеричким симулацијама су:  $K = 5$ ,  $\chi = 0.5$ ,  $\bar{F}_1 = 0.2$ ,  $\xi = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ , за мод  $n = 1$  и  $\Omega = 0,6\omega_{nII}$ . Примећује се да аксијално магнетно поље смањује вредности трансверзалних померања  $\bar{w}_1(\xi, \tau)$  и  $\bar{w}_2(\xi, \tau)$  за оба случаја спољних оптерећења: равномерно распоређеног хармонијског и покретне хармонијске силе, **Слике 3.3.2.2 и 3.3.2.4.**

Штавише, овај ефекат нам омогућава промену крутости угљеничних нано-цеви, а самим тим и укупну крутост нано-система. Међутим, промена крутости система доводи до промена у природној фреквенцији система, па је могуће избећи резонантну регију за различите случајеве спољних оптерећења (*Karličić, D. u saradnici 2014a*). Даље, пажљивим одабиром интензитета магнетног поља се може подесити амплитуда трансверзалних осцилација у одређеном опсегу без промене других материјалних и геометријских карактеристика нано-система. Ова чињеница има значај у практичним применама за контролу амплитуде осцилација у NEMS (нано-електромеханичким системима) и нано-композитним структурама заснованим на CNTs (carbon nanotubes). Такође је приказано како нано-систем реагује на промену нелокалног параметра  $\eta$ . Примећује се да пораст нелокалног параметра  $\eta$  има видно пригушујући ефекат на трансверзално померање горње и доње нано-греде за случај равномерно распоређено хармонијско оптерећење (**Слика 3.3.2.1**). Такође, пораст интензитета магнетног поља  $MP$  има видно пригушујући ефекат на трансверзално померање горње и доње нано-греде за случај равномерно распоређеног хармонијског оптерећења (**Слика 3.3.2.2**).

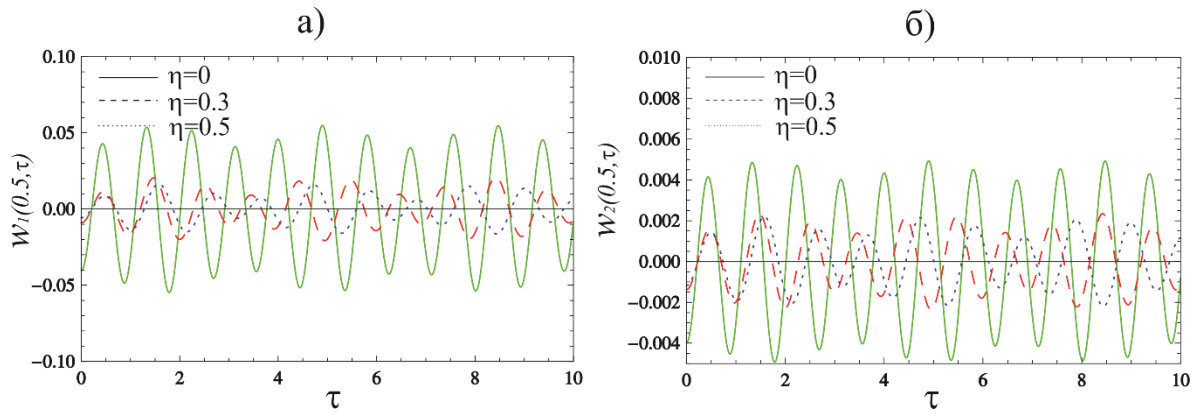
У случају покретне хармонијске силе, нелокални параметар такође има пригушујући ефекат на трансверзално померање горње и доње нано-греде, (**Слика 3.3.2.3**). Примећује се да пораст вредности нелокалног параметра  $\eta$ , даје мање вредности амплитуда горње и доње нано-греде у случају равномерно распоређеног хармонијског оптерећења, (**Слика 3.3.2.1**) у поређењу са трансверзалним померањима горње и доње нано-греде за случај покретне хармонијске силе (**Слика 3.3.2.3**). Долази се до закључка да утицај нелокалности узрокује смањење вредности амплитуда малих трансверзалних померања  $\bar{w}_1(0.5, \tau)$  и  $\bar{w}_2(0.5, \tau)$  и код равномерно распоређеног хармонијског оптерећења и код покретне хармонијске силе.



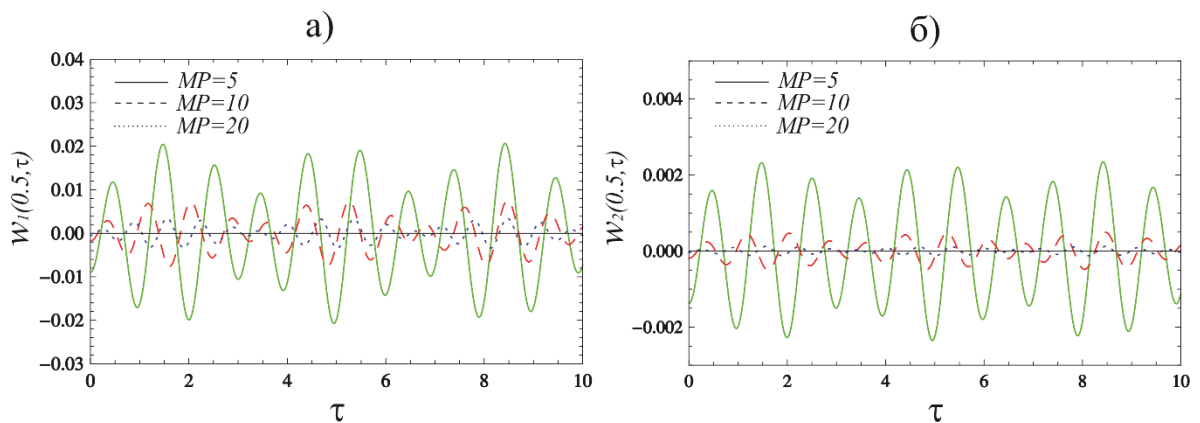
**Слика 3.3.2.1** Утицај нелокалног параметра на трансверзално померање *a)* горње нано-греде  $\bar{w}_1(0.5, \tau)$  и *b)* доње нано-греде  $\bar{w}_2(0.5, \tau)$  код случаја равномерно распоређеног хармонијског оптерећења



**Слика 3.3.2.2** Утицај магнетног поља на трансверзално померање *a)* горње нано-греде  $\bar{w}_1(0.5, \tau)$  и *b)* доње нано-греде  $\bar{w}_2(0.5, \tau)$  код случаја равномерно распоређеног хармонијског оптерећења



**Слика 3.3.2.3** Утицај нелокалног параметра на трансверзално померање  
*a)* горње нано-греде  $\bar{w}_1(0.5, \tau)$  и *b)* доње нано-греде  $\bar{w}_2(0.5, \tau)$  код случаја покретне  
хармонијске силе



**Слика 3.3.2.4** Утицај магнетног поља на трансверзално померање  
*a)* горње нано-греде  $\bar{w}_1(0.5, \tau)$  и *b)* доње нано-греде  $\bar{w}_2(0.5, \tau)$  код случаја покретне  
хармонијске силе



### 3.3.3. Резултати симулације молекуларне динамике

Да би се верификовали резултати оваквог нано-система, неопходно је извршити симулацију молекуларне динамике (MD simulation). Симулација молекуларне динамике је атомистичка метода за анализу различитих нано-структура. Базирана је на законима физике који важе на атомској скали и захтева дуги временски прорачун, односно велике рачунарске ресурсе. Сматра се виртуелним експериментом јер чини везу између теорије и лабораторијских експеримената. Кроз брзи развој различитих области нанотехнологије, симулација молекуларне динамике се сматра тачном применом за проучавање система на наноскали (*Ansari, R. u сарадници 2012b*).

Резултати симулације молекуларне динамике осциловања и извијања једнослојног графенског листића представљени су у радовима (*Ansari, R. u Sahmani S., 2012 u Ansari R. u сарадници 2012b*).

У циљу валидације, упоредићемо добијене резултате за најнижу природну фреквенцију нано-система (3.1.26) са резултатима природне фреквенције једне угљеничне наноцеви добијене молекуларно динамичким симулацијама у радовима (*Ansari, R. u Sahmani, S., 2012 u Ansari, R. u сарадници 2012b*).

Заменом бездимензионог параметра магнетног поља из (3.1.1) у (3.1.26), добија се најнижа сопствена фреквенција прве нано-цеви анализираног нано-система у облику

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{\eta H_x^2}{\rho} (n\pi/L)^2 + \frac{EI(n\pi/L)^4}{\rho A(1 + (e_0 \tilde{a})^2 (n\pi/L)^2)}}. \quad (3.3.3.1)$$

У докторској дисертацији (*Simonović, J., 2012*), показано је да сопствене фреквенције спрегнутог система зависе и од еластичног слоја и од присуства другог елемента у спрези. У радовима (*Karličić, D. u сарадници 2014a,б*), показано је да најнижа природна фреквенција спрегнутих елемената представља основну фреквенцију првог нано-елемента.

Код посматраног нано-система претпоставља се да је ефективна дебљина једнозидне угљеничне нано-цеви једнака размаку графита од  $h = 0.34 \text{ nm}$ . Радијус нано-

цеви је  $R = d/2$ , где је  $d$  пречник једнозидне нано-цеви, (*Kalamkarov, A.L. u сарадници 2006*). Poisson-ов коефицијент је  $\nu = 0.3$ , Young-ов модул еластичности је  $E = 1.1 \text{ TPa}$  и густина материјала је  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$ .

Да би се потврдила тачност нано-система изводе се симулације молекуларне динамике за просто ослођену (8,8) „armchair“ једнозидну угљеничну нано-цев. Ознака (8, 8) „armchair“ ( $n=8$  и  $m=8$ ), представља тип умотавања (роловања) графена око осе симетрије. С’ обзиром да је у овом случају  $n=m$  тада је умотавање графена око осе симетрије представљено као „armchair“. Постоји још један тип роловања графена око осе симетрије, када је  $m=0$  и даје такозвану „zig-zag“ нано-цев која се овде не разматра. Вредности  $n$  и  $m$  не само да одређују тип роловања нано-цеви него и утичу на њену проводљивост, густину и структуру (*Wilder, J.W. u сарадници 1998*).

У **Табели 3.3.3.1** приказане су вредности сопствених фреквенција добијених на основу симулације молекуларне динамике и Euler–Bernoulli-јеве греде засноване на нелокалној теорији еластичности.

Добијени резултати одговарају резултатима који су добијени симулацијом молекуларне динамике, што указује на способност садашњег приступа у тачном одређивању фреквенција једнозидне угљеничне нано-цеви. Из **Табеле 3.3.3.1** се може закључити да се вредности сопствених фреквенција смањују са повећањем односа дужине и пречника једнозидне угљеничне нано-цеви. Такође се може приметити да се резултати добијени Bernoulli-Fourier-овом методом, када је  $\eta H_x^2=0$  веома добро слажу са резултатима из радова (*Ansari, R. u Sahmani, S., 2012 u Ansari, R. u сарадници 2012b*). Узимајући у обзир утицај интензитета магнетног поља, вредности сопствених фреквенција једнозидне угљеничне нано-цеви су веће од вредности сопствених фреквенција приказаним у радовима (*Ansari, R. u Sahmani, S., 2012 u Ansari, R. u сарадници 2012b*).

**Табела 3.3.3.1** Упоредивање резултата сопствених фреквенција једнозидне угљеничне нано-цеви помоћу симулације молекуларне динамике.

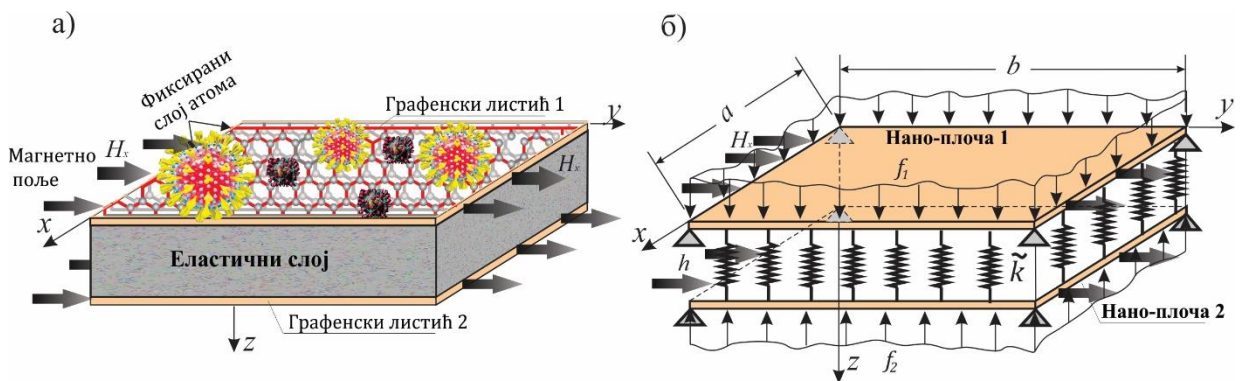
$$R/l = 3, l = \mu^{1/2}, H_x = 1 \cdot 10^8 \text{ A/m}, \tilde{\eta} = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

L/d	Симулација молекуларне динамике <i>(Ansari, R. u сарадници 2012b)</i>	Представљена студија ( $\tilde{\eta}H_x^2=0$ )	Представљена студија ( $\tilde{\eta}H_x^2 \neq 0$ )
8.3	0.5299	0.5485	0.8284
10.1	0.3618	0.3707	0.6306
13.7	0.1931	0.2016	0.4267
17.3	0.1103	0.1264	0.3236
20.9	0.0724	0.0860	0.2613
24.5	0.0519	0.0630	0.2195
28.1	0.0425	0.0479	0.1895
31.6	0.0358	0.0379	0.1674
35.3	0.0287	0.0303	0.1491
39.1	0.0259	0.0247	0.1341

Резултати из овог поглавља објављени су у раду *(Stamenković, M. u сарадници 2016)*.

## 4. Слободне и принудне осцилације спрегнутих нано-плоча

У овом поглављу приказана је анализа слободних и принудних осцилација еластично повезаних ортотропних нано-плоча. Две просто ослоњене ортотропне нано-плоче су међусобно повезане еластичним слојем, који се апроксимира Winkler-овим моделом дискретно распоређених опруга линеарних крутости  $\tilde{k}$  које делују по површини плоче. Разматрана су три различита случаја спољашњих трансверзалних оптерећења: равномерно распоређено површинско и линијско хармонијско оптерећење као и концентрисана хармонијска сила. Физички модел на **Слици 4.1a** представљен је помоћу два еластично повезана графенска листића који имају фиксирани крајње граничне слојеве атома (*Ansari, R. u saradnici, 2010*). Спрега између горње и доње нано-плоче остварена је Winkler-овим еластичним слојем и представља међуатомске силе између две нано-плоче, попут van der Waals-ове интеракције (*Ru, C. Q., 2001*).



**Слика 4.1** Две нано-плоче међусобно спрегнуте Winkler-овим еластичним слојем, изложене дејству трансверзалних сила и дејству магнетног поља;

а) Физички модел, б) Механички модел

На **Слици 4.1** могу се видети две нано-плоче међусобно спрегнуте Winkler-овим еластичним слојем. Плоче су подвргнуте дејству спољашњих трансверзалних сила  $f_i(x, y, t), i = 1, 2$  у правцу осе  $z$ , смера датих на **Слици 4.1**. где је са 1 означена горња, а

са 2 доња нано-плоча. Обе нано-плоче су истих геометријских и материјалних карактеристика. Нано-плоче су дужине  $a$ , ширине  $b$  и дебљине  $h$  (која је једнака дебљини једног атома). Површина попречног пресека нано-плоче је означене са  $A$ , Young-ови модули еластичности нано-плоче (у два ортогонална правца) са  $E_x$  и  $E_y$ , густина материјала са  $\rho$ , Poisson-ов коефицијент са  $\nu_{xy} = \nu_{yx}$  и модул смицања са  $G_{xy}$ . Како би се испитао утицај магнетног поља на мала трансверзална померања средњих равни нано-система  $w_1(x, y, t)$  и  $w_2(x, y, t)$ , обе нано-плоче су подвргнуте лонгитудиналном магнетном пољу.

На основу Kirchhoff-ове теорије плоча (*Reddy, J. N., 2004, Reddy, J. N., 2006, Rašković, D., 1965, Karličić, D. u saradnici, 2015a*) из **Поглавља 2.2** и Eringen-ове нелокалне теорије еластичности (*Eringen, A. C., 1972, Eringen, A. C., 2002*) из **Поглавља 1.2**, изведене су диференцијалне једначине које описују мала трансверзална померања еластично спрегнутих нано-плоча

$$\begin{aligned}
& \rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + D_{11} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& \quad + \tilde{k}(w_1 - w_2) - \tilde{\eta} h H_x^2 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) \\
& - (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[ \rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \tilde{k}(w_1 - w_2) - \tilde{\eta} h H_x^2 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) \right] \\
& = f_1 - (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f_1,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
& \rho h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + D_{11} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& \quad - \tilde{k}(w_1 - w_2) - \tilde{\eta} h H_x^2 \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right) \\
& - (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[ \rho h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \tilde{k}(w_1 - w_2) - \tilde{\eta} h H_x^2 \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right) \right] \\
& = f_2 - (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f_2.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Сви параметри су описани у **Поглављима 1.2, 1.3 и 2.2**.

Гранични услови просто ослоњених ортотропних нано-плоча, дужина  $a$  и ширина  $b$  су

$$w_i(x, 0, t) = w_i(x, b, t) = 0, \quad w_i(0, y, t) = w_i(a, y, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4.3)$$

$$M_{xxi}(0, y, t) = M_{xxi}(a, y, t) = 0, \quad M_{yyi}(x, 0, t) = M_{yyi}(x, b, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.4)$$

Са  $i = 1$  је означена горња нано-плоча, док је са  $i = 2$  означена доња нано-плоча.

#### 4.1. Слободне осцилације спрегнутих нано-плоча

Како би се упростило рачунање и даљи приказ диференцијалних једначина (4.1) и (4.2), примењена је Buckingham-ова  $\pi$  теорема која је приказана у *Прилогу А*. Даље је извршена и представљена детаљна анализа слободних трансверзалних осцилација нано-система сачињеног од две нано-плоче међусобно спрегнуте Winkler-овим еластичним слојем. На основу Buckingham-ове  $\pi$  теореме, најпре су уведени бездимензиони параметри:

$$K = \tilde{k} \frac{a^4}{D_{11}}, \quad \eta^2 = \frac{(e_0 \tilde{a})^2}{a^2}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{D_{11}}{a^4 \rho h}}, \quad MP = \frac{\tilde{\eta} h H_x^2 a^2}{D_{11}}, \quad \tilde{D}_{22} = \frac{D_{22}}{D_{11}}, \quad \tilde{D}_{12} = \frac{D_{12}}{D_{11}},$$

$$\tilde{D}_{66} = \frac{D_{66}}{D_{11}}, \quad R = \frac{a}{b}, \quad \bar{w}_i = \frac{w_i}{a}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \zeta = \frac{y}{b}, \quad i = 1, 2. \quad (4.1.1)$$

Заменом бездимензионих параметара (4.1.1) у једначине (4.1) и (4.2), добија се систем хомогених диференцијалних једначина

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \xi^4} + \tilde{D}_{22} R^4 \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \zeta^4} + 2R^2 (\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66}) \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} + K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)$$

$$- MP \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \xi^2} - R^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \zeta^2} \right)$$

$$- \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) - MP \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \xi^2} - R^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \zeta^2} \right) \right] = 0, \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \xi^4} + \tilde{D}_{22} R^4 \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \zeta^4} + 2R^2 (\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66}) \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} - K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) \\
& \quad - MP \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \xi^2} - R^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \zeta^2} \right) \\
& - \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} - K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) - MP \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \xi^2} - R^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \zeta^2} \right) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Коришћењем Bernoulli-Fourier-ове методе, решења парцијалних хомогених диференцијалних једначина (4.1.2) и (4.1.3) могу се представити у облику производа функција

$$\bar{w}_1(\xi, \zeta, \tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} \sum_{k=I}^{II} T_{mnk}(\tau), \tag{4.1.4}$$

$$\bar{w}_2(\xi, \zeta, \tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} \sum_{k=I}^{II} T_{mnk}(\tau), \tag{4.1.5}$$

где су  $T_{mnl}(\tau)$  и  $T_{mnII}(\tau)$  непознате бездимензионе временске функције, а  $W_{mn}(\xi, \zeta)$  су функције основних облика осциловања просто ослоњених нано-плоча које зависе од граничних услова, видети ([Oniszczyk, Z., 2004](#))

$$W_{mn}(\xi, \zeta) = \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta), \quad \alpha_m = m\pi, \quad \beta_n = n\pi, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots \tag{4.1.6}$$

Заменом решења (4.1.4) и (4.1.5) у једначине (4.1.2) и (4.1.3), следи

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} \left\{ \ddot{T}_{mnl} + \left[ K + \tilde{D} + MP[(\alpha_m)^2 - R^2(\beta_n)^2] \right] T_{mnl} - KT_{mnl} \right\} = 0, \tag{4.1.7}$$

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} \left\{ \ddot{T}_{mnII} + \left[ K + \tilde{D} + MP[(\alpha_m)^2 - R^2(\beta_n)^2] \right] T_{mnII} - KT_{mnII} \right\} = 0, \tag{4.1.8}$$

где је

$$H = 1 + \eta^2[(\alpha_m)^2 + R^2(\beta_n)^2], \quad (4.1.9)$$

$$\tilde{D} = \frac{(\alpha_m)^4 + \tilde{D}_{22}R^4(\beta_n)^4 + 2R^2(\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66})(\alpha_m)^2(\beta_n)^2}{H}. \quad (4.1.10)$$

Решења диференцијалних једначина (4.1.7) и (4.1.8), могу се претпоставити у облику

$$T_{mnl} = C_n e^{j\omega_{mnk}\tau}, \quad T_{mnll} = D_n e^{j\omega_{mnk}\tau}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad k = I, II \quad (4.1.11)$$

где је

$\omega_{mnk}$  сопствена фреквенција,  $mn$  - тог мода осциловања,  $C_n$  и  $D_n$  су амплитуде временских облика осциловања.

Заменом решења за временске функције из израза (4.1.11) у једначине (4.1.7) и (4.1.8), добија се

$$[K + \tilde{D} + MP[(\alpha_m)^2 - R^2(\beta_n)^2] - \omega_{mnk}^2]C_n - KD_n = 0, \quad (4.1.12)$$

$$[K + \tilde{D} + MP[(\alpha_m)^2 - R^2(\beta_n)^2] - \omega_{mnk}^2]D_n - KC_n = 0. \quad (4.1.13)$$

Систем једначина (4.1.12) и (4.1.13) има решења различита од тривијалних само ако је детерминанта тог система једнака нули

$$\begin{bmatrix} K + \tilde{D} + MP[(\alpha_m)^2 - R^2(\beta_n)^2] - \omega_{mnk}^2 & -K \\ -K & K + \tilde{D} + MP[(\alpha_m)^2 - R^2(\beta_n)^2] - \omega_{mnk}^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (4.1.14)$$

Решавањем детерминанте (4.1.14) добијају се два решења за квадрате сопствених фреквенција помоћу којих се могу одредити нетривијалне вредности амплитуда  $C_n$  и  $D_n$ ,

$$\omega_{mnk}^2 = \tilde{D} + K + MP[(\alpha_m)^2 - R^2(\beta_n)^2] \mp K, \quad k = I, II, \quad (4.1.15)$$

при чему су  $\omega_{mnl}^2$  квадрати нижих природних фреквенција, а  $\omega_{mnll}^2$  квадрати виших природних фреквенција посматраног нано-система.

За сваку од природних фреквенција приказан је однос амплитуда осциловања преко кофактора фреквентне детерминанте



$$\begin{aligned}\alpha_{mn_k} &= \frac{D_{n_k}}{C_{n_k}} = \frac{\tilde{D} + K + MP[(\alpha_m)^2 - R^2(\beta_n)^2] - \omega_{mn_k}^2}{K} \\ &= \frac{K}{\tilde{D} + K + MP[(\alpha_m)^2 - R^2(\beta_n)^2] - \omega_{mn_k}^2}, \quad k = I, II. \quad (4.1.16)\end{aligned}$$

## 4.2. Принудне осцилације спрегнутих нано-плоча

У овом делу је извршена детаљна анализа принудних трансверзалних осцилација нано-система сачињеног од две нано-плоче међусобно спрегнуте Winkler-овим еластичним слојем. Коришћењем бездимензионих параметра (4.1.1), једначине (4.1) и (4.2) могу се написати у облику

$$\begin{aligned}& \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \xi^4} + \tilde{D}_{22} R^4 \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \zeta^4} + 2R^2 (\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66}) \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} \\ & + K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) - MP \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \xi^2} - R^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \zeta^2} \right) \\ & - \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} + K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) - MP \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \xi^2} - R^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \zeta^2} \right) \right] \\ & = \tilde{f}_1 - \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \tilde{f}_1, \quad (4.2.1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \xi^4} + \tilde{D}_{22} R^4 \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \zeta^4} + 2R^2 (\tilde{D}_{12} + 2\tilde{D}_{66}) \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} \\ & - K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) - MP \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \xi^2} - R^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \zeta^2} \right) \\ & - \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \left[ \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} - K(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) - MP \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \xi^2} - R^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \zeta^2} \right) \right] \\ & = \tilde{f}_2 - \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \tilde{f}_2, \quad (4.2.2)\end{aligned}$$

где су  $\tilde{f}_1$  и  $\tilde{f}_2$  бездимензионе принудне силе. Применом Buckingham- ове  $\pi$  – теореме приказане у *Прилогу А*, добијају следећи облик

$$\tilde{f}_i = f_i \frac{a^3}{D_{11}}, \quad i = 1, 2, \quad (4.2.3)$$

где је са  $i = 1$  означена горња нано-плоча, а са  $i = 2$  означена доња нано-плоча.

Решења нехомогених диференцијалних једначина (4.2.1) и (4.2.2) претпостављамо у облику производа функција

$$\bar{w}_1(\xi, \zeta, \tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} \sum_{k=I}^{II} T_{mnk}(\tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta) \sum_{k=I}^{II} T_{mnk}(\tau), \quad (4.2.4)$$

$$\bar{w}_2(\xi, \zeta, \tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} \sum_{k=I}^{II} \alpha_{mnk} T_{mnk}(\tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta) \sum_{k=I}^{II} \alpha_{mnk} T_{mnk}(\tau), \quad (4.2.5)$$

где су  $T_{mnk}(\tau)$ , ( $k = I, II$ ) непознате бездимензионе временске функције које одговарају сопственим фреквенцијама  $\omega_{mnk}$ , ( $k = I, II$ ),  $W_{mn}$  је функција основних облика осциловања дата изразом (4.1.6), а зависи од граничних услова и  $\alpha_{mnk}$  су односи амплитуда осциловања који одговарају сопственим фреквенцијама  $\omega_{mnk}$ , ( $k = I, II$ ), представљени изразом (4.1.16).

Заменом решења (4.2.4) и (4.2.5) у једначине (4.2.1) и (4.2.2) добија се следећи систем нехомогених парцијалних диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} \sum_{k=I}^{II} \left\{ \ddot{T}_{mnk} + \left[ \tilde{D} + K(1 - \alpha_{mnk}) + MP[(\alpha_m)^2 - R^2(\beta_n)^2] \right] T_{mnk} \right\} H \\ = \tilde{f}_1 - \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \tilde{f}_1, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} \sum_{k=1}^{II} \left\{ \ddot{T}_{mnk} + \left[ \tilde{D} + K(1 - \alpha_{mnk}) + MP[(\alpha_m)^2 - R^2(\beta_n)^2] \right] T_{mnk} \right\} H \alpha_{mnk} \\ = \tilde{f}_2 - \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \tilde{f}_2. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Множењем једначина (4.2.6) и (4.2.7) са функцијом мода  $W_{kl}$  и интеграљењем у границама  $\xi$  од 0 до 1 и  $\zeta$  од 0 до  $1/R$ , коришћењем услова ортогоналности (*Oniszczyk, Z., 2004, Oniszczyk, Z., 2000b*), следи

$$\int_0^1 \int_0^{1/R} W_{pl} W_{mn} d\xi d\zeta = \int_0^1 \sin(\alpha_p \xi) \sin(\alpha_m \xi) d\xi \int_0^{1/R} \sin(\beta_l \zeta) \sin(\beta_n \zeta) d\zeta = c \delta_{plmn} \quad (4.2.8)$$

$$c = \int_0^1 \int_0^{1/R} W_{mn}^2 d\xi d\zeta = \int_0^1 \sin^2(\alpha_m \xi) d\xi \int_0^{1/R} \sin^2(\beta_n \zeta) d\zeta = \frac{1}{4R}, \quad (4.2.9)$$

где је  $\delta_{plmn}$  Kronecker-ова delta функција,  $\delta_{plmn} = 0$  за  $p \neq m$  или  $l \neq n$ , а  $\delta_{plmn} = 1$  за  $p = m$  или  $l = n$ , па се добија

$$\sum_{k=I}^{II} (\ddot{T}_{mnk} + \omega_{mnk}^2 T_{mnk}) = 4M \int_0^1 \int_0^{1/R} \left[ \tilde{f}_1 - \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \tilde{f}_1 \right] W_{mn} d\xi d\zeta, \quad (4.2.10)$$

$$\sum_{i=I}^{II} (\ddot{T}_{mnk} + \omega_{mnk}^2 T_{mnk}) \alpha_{mnk} = 4M \int_0^1 \int_0^{1/R} \left[ \tilde{f}_2 - \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \tilde{f}_2 \right] W_{mn} d\xi d\zeta, \quad m, n = 1, 3, 5 \dots \quad (4.2.11)$$

где је

$$M = \frac{R}{H}. \quad (4.2.12)$$

Једначине (4.2.10) и (4.2.11) се могу написати у следећем облику

$$\ddot{T}_{mnk} + \omega_{mnk}^2 T_{mnk} = R_{mnk}(\tau), \quad k = I, II, \quad m, n = 1, 2, 3, \quad (4.2.13)$$

где је

$$R_{mnI}(\tau) = d_{mnI} \int_0^1 \int_0^{1/R} \left\{ \tilde{f}_1 \alpha_{mnII} - \tilde{f}_2 - \eta^2 \left[ \alpha_{mnII} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \tilde{f}_1 - \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \tilde{f}_2 \right] \right\} \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta) d\xi d\zeta, \quad (4.2.14)$$

$$R_{mn_{II}}(\tau) = d_{mn_{II}} \int_0^1 \int_0^{1/R} \left\{ \tilde{f}_1 \alpha_{mn_I} - \tilde{f}_2 - \eta^2 \left[ \alpha_{mn_I} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \tilde{f}_1 - \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \tilde{f}_2 \right] \right\} \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta) d\xi d\zeta, \quad (4.2.15)$$

и

$$d_{mn_I} = 4M(\alpha_{mn_{II}} - \alpha_{mn_I})^{-1} \quad \text{и} \quad d_{mn_{II}} = -4M(\alpha_{mn_{II}} - \alpha_{mn_I})^{-1}. \quad (4.2.16)$$

Решење једначине (4.2.13) се може записати у облику конволуционог интеграла

$$T_{mn_k}(\tau) = \frac{1}{\omega_{mn_k}} \int_0^\tau R_{mn_k}(s) \sin[\omega_{mn_k}(\tau - s)] ds, \quad k = I, II. \quad (4.2.17)$$

Заменом израза (4.2.17) у решења (4.2.4) и (4.2.5), добијају се општа решења принудних трансверзалних осцилација разматраног нано-система

$$\bar{w}_1(\xi, \zeta, \tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta) \sum_{k=I}^{II} \frac{1}{\omega_{mn_k}} \int_0^\tau R_{mn_k}(s) \sin[\omega_{mn_k}(\tau - s)] ds, \quad (4.2.18)$$

$$\bar{w}_2(\xi, \zeta, \tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta) \sum_{k=I}^{II} \frac{\alpha_{mn_k}}{\omega_{mn_k}} \int_0^\tau R_{mn_k}(s) \sin[\omega_{mn_k}(\tau - s)] ds, \quad k = I, II. \quad (4.2.19)$$

Наведене формуле (4.2.18) и (4.2.19) користе се за одређивање малих трансверзалних померања средње равни овог нано-система за било који случај трансверзалног оптерећења. Ради једноставности, у даљем раду сматраће се да је само прва нано-плоча подвргнута произвољном оптерећењу, тј.  $\tilde{f}_1(\xi, \zeta, \tau) \neq 0$  и  $\tilde{f}_2(\xi, \zeta, \tau) = 0$ . Заменом  $\tilde{f}_1(\xi, \zeta, \tau) \neq 0$  и  $\tilde{f}_2(\xi, \zeta, \tau) = 0$  у једначине (4.2.14) и (4.2.15), добија се

$$R_{mn_I}(\tau) = c_{mn_I} \int_0^1 \int_0^{1/R} \left[ \tilde{f}_1 - \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \tilde{f}_1 \right] \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta) d\xi d\zeta, \quad (4.2.20)$$

$$R_{mn_{II}}(\tau) = c_{mn_{II}} \int_0^1 \int_0^{1/R} \left[ \tilde{f}_1 - \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \tilde{f}_1 \right] \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta) d\xi d\zeta, \quad (4.2.21)$$

где је

$$c_{mn_I} = d_{mn_I} \alpha_{mn_{II}} = 4M \alpha_{mn_{II}} (\alpha_{mn_{II}} - \alpha_{mn_I})^{-1}, \quad (4.2.22)$$

$$c_{mn_{II}} = d_{mn_{II}} \alpha_{mn_I} = -4M \alpha_{mn_I} (\alpha_{mn_{II}} - \alpha_{mn_I})^{-1}. \quad (4.2.23)$$

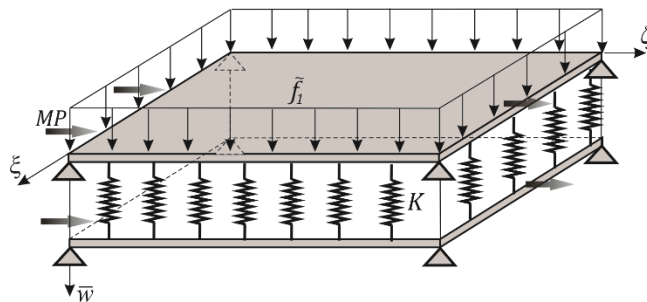
У наставку је приказана анализа принудних трансверзалних осцилација за три различита случаја спољашњих оптерећења, под претпоставком да је оптерећена само горња нано-плоча (*Oniszczyk, Z., 2004, Stamenković, M. u saradnici 2016*), односно за случајеве:

- равномерно распоређеног површинског хармонијског оптерећења,
- равномерно распоређеног линијског хармонијског оптерећења,
- концентрисане хармонијске силе.

За разматране случајеве спољашњих оптерећења, на основу сопствене фреквенције система, приказани су услови настанка резонанције и понашања нано-система као динамичког апсорбера.

#### 4.2.1. Равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење

Равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење које делује на горњу нано-плочу датог нано-система приказано је на **Слици 4.2.1.1**.



*Слика 4.2.1.1* Дејство равномерно распоређеног површинског хармонијског оптерећења на горњу нано-плочу представљеног нано-система

Равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење представљено је помоћу

$$\tilde{f}_1(\xi, \zeta, \tau) = f \sin(\Omega\tau), \quad (4.2.1.1)$$

где је  $f$  магнитуда хармонијског оптерећења, а  $\Omega$  фреквенција постојећег хармонијског оптерећења.

Заменом (4.2.1.1) у изразе (4.2.20) и (4.2.21), добија се

$$R_{mn_I}(\tau) = c_{mn_I} F_{mn} \sin(\Omega\tau), \quad (4.2.1.2)$$

$$R_{mn_{II}}(\tau) = c_{mn_{II}} F_{mn} \sin(\Omega\tau), \quad m, n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.2.1.3)$$

где је

$$F_{mn} = \int_0^1 \int_0^{1/R} f \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta) d\xi d\zeta$$

$$- \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{R}} \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) f \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta) d\xi d\zeta = \frac{4f}{Rmn\pi^2}. \quad (4.2.1.4)$$

Увођењем израза (4.2.1.2) и (4.2.1.3) у (4.2.18) и (4.2.19) добијају се решења математичког модела разматраног нано-система, која представљају законе промена малих трансверзалних померања, у облику

$$\bar{w}_1(\xi, \zeta, \tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta) \left[ A_{mn_I} \sin(\Omega\tau) + \sum_{k=I}^{II} B_{mn_k} \sin(\omega_{mn_k} \tau) \right], \quad (4.2.1.5)$$

$$\bar{w}_2(\xi, \zeta, \tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta) \left[ A_{mn_{II}} \sin(\Omega\tau) + \sum_{k=I}^{II} \alpha_{mn_k} B_{mn_k} \sin(\omega_{mn_k} \tau) \right], \quad (4.2.1.6)$$

где су

$$A_{mn_I} = \frac{16fM}{Rmn\pi^2} (\alpha_{mn_{II}} - \alpha_{mn_I})^{-1} \left[ \frac{\alpha_{mn_{II}}}{\omega_{mn_I}^2 - \Omega^2} - \frac{\alpha_{mn_I}}{\omega_{mn_{II}}^2 - \Omega^2} \right], \quad (4.2.1.7)$$

$$A_{mn_{II}} = \frac{16fM}{Rmn\pi^2} \alpha_{mn_I} \alpha_{mn_{II}} (\alpha_{mn_{II}} - \alpha_{mn_I})^{-1} \left[ \frac{1}{\omega_{mn_I}^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\omega_{mn_{II}}^2 - \Omega^2} \right], \quad (4.2.1.8)$$

$$B_{mn_I} = \frac{16fM}{Rmn\pi^2} \Omega \alpha_{mn_{II}} (\alpha_{mn_I} - \alpha_{mn_{II}})^{-1} \frac{1}{\omega_{mn_I}} (\omega_{mn_I}^2 - \Omega^2), \quad (4.2.1.9)$$

$$B_{mn_{II}} = \frac{16fM}{Rmn\pi^2} \Omega \alpha_{mn_I} (\alpha_{mn_{II}} - \alpha_{mn_I})^{-1} \frac{1}{\omega_{mn_{II}}} (\omega_{mn_{II}}^2 - \Omega^2), \quad m, n = 1, 3, 5 \dots \quad (4.2.1.10)$$

Закони промена малих трансверзалних померања представљеног нано-система (4.2.1.5) и (4.2.1.6) садрже по два члана. Први који садржи  $\sin(\Omega\tau)$ , представља принудне осцилације, док други члан који укључује  $\sin(\omega_{mn_k}\tau)$ , означава слободне (сопствене) осцилације представљеног нано-система. Након дужег времена ће нестати слободне осцилације, те се принудне осцилације представљеног нано-система могу изразити у облику

$$\bar{w}_1(\xi, \zeta, \tau) = \sin(\Omega\tau) \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn_I} \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta), \quad (4.2.1.11)$$

$$\bar{w}_2(\xi, \zeta, \tau) = \sin(\Omega\tau) \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn_{II}} \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \zeta), \quad m, n = 1, 3, 5 \dots \quad (4.2.1.12)$$

Анализа амплитуда стабилног осциловања  $A_{mn_I}$  и  $A_{mn_{II}}$  даје основне услове који су важни по питању динамике анализираних нано-система.

Следећи основни услови настанка резонанције и понашања система као динамичког апсорбера имају практични значај:

Резонанца

$$\Omega = \omega_{mn_k}, \quad m, n = 1, 3, 5 \dots \quad (4.2.1.13)$$

Услови за динамички апсорбер су испуњени када је

$$\Omega^2 = \tilde{D} + K + MP[(\alpha_m)^2 - R^2(\beta_n)^2], \quad (4.2.1.14)$$

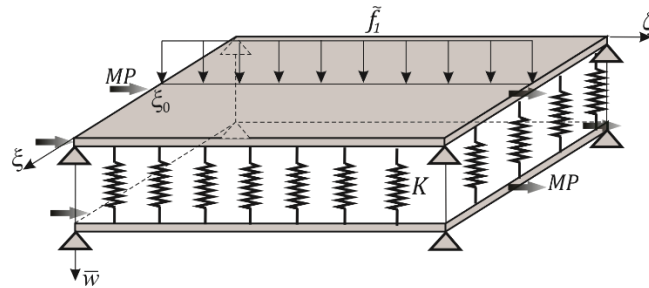
док су у раду (*Oniszczyk, Z., 2000b, 2004*) приказани ови услови без утицаја магнетног поља и нелокалног параметра.

За те услове амплитуде осциловања  $A_{mn_k}$ ,  $k = I, II$ , из (4.2.1.7) и (4.2.1.8) имају облик

$$A_{mn_I} = 0, \quad A_{mn_{II}} = -\frac{16fM}{RKmn\pi^2}, \quad m, n = 1, 3, 5 \dots \quad (4.2.1.15)$$

## 4.2.2. Равномерно распоређено линијско хармонијско оптерећење

Равномерно распоређено линијско хармонијско оптерећење које делује на горњу нано-плочу представљеног нано-система је приказано на Слици 4.2.2.1.



Слика 4.2.2.1 Дејство равномерно распоређеног линијског хармонијског оптерећења на горњу нано-плочу представљеног нано-система

Равномерно распоређено линијско хармонијско оптерећење представљено је помоћу

$$\tilde{f}_1(\xi, \zeta, \tau) = f \sin(\Omega \tau) \delta(\xi - \xi_0), \quad (4.2.2.1)$$

на делу од  $\zeta = 0$  до  $\zeta = 1/R$ , дуж правца линије  $\xi = \xi_0$  паралелне са осом  $\zeta$ , где је  $f$  магнитуда, а  $\Omega$  фреквенција постојећег хармонијског оптерећења.

Заменом (4.2.2.1) у изразе (4.2.20) и (4.2.21), добија се

$$R_{mn_I}(\tau) = c_{mn_I} F_{mn} \sin(\Omega \tau), \quad (4.2.2.2)$$

$$R_{mn_{II}}(\tau) = c_{mn_{II}} F_{mn} \sin(\Omega \tau), \quad m, n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.2.2.3)$$

где је



$$\begin{aligned}
F_{mn} &= \int_0^1 \int_0^{1/R} f \sin(\alpha_m \xi) \delta(\xi - \xi_0) \sin(\beta_n \zeta) d\xi d\zeta \\
&- \int_0^1 \int_0^{1/R} \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) f \sin(\alpha_m \xi) \delta(\xi - \xi_0) \sin(\beta_n \zeta) d\xi d\zeta \\
&= \frac{2f}{Rn\pi} \sin(\alpha_m \xi_0) [1 + \eta^2(\alpha_m)^2].
\end{aligned} \tag{4.2.2.4}$$

Заменом израза (4.2.2.2) и (4.2.2.3) у (4.2.18) и (4.2.19) добијају се решења математичког модела разматраног нано-система, која представљају законе промена малих трансверзалних померања у облику (4.2.1.5) и (4.2.1.6), где су сада амплитуде

$$A_{mn_I} = \frac{8fM}{Rn\pi} [1 + \eta^2(\alpha_m)^2] c_m (\alpha_{mn_{II}} - \alpha_{mn_I})^{-1} \left[ \frac{\alpha_{mn_{II}}}{\omega_{mn_I}^2 - \Omega^2} - \frac{\alpha_{mn_I}}{\omega_{mn_{II}}^2 - \Omega^2} \right], \tag{4.2.2.5}$$

$$A_{mn_{II}} = \frac{8fM}{Rn\pi} [1 + \eta^2(\alpha_m)^2] c_m \alpha_{mn_I} \alpha_{mn_{II}} (\alpha_{mn_{II}} - \alpha_{mn_I})^{-1} \left[ \frac{1}{\omega_{mn_I}^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\omega_{mn_{II}}^2 - \Omega^2} \right], \tag{4.2.2.6}$$

$$B_{mn_I} = \frac{8fM}{Rn\pi} [1 + \eta^2(\alpha_m)^2] c_m \Omega \alpha_{mn_{II}} (\alpha_{mn_I} - \alpha_{mn_{II}})^{-1} \frac{1}{\omega_{mn_I}^2 - \Omega^2}, \tag{4.2.2.7}$$

$$B_{mn_{II}} = \frac{8fM}{Rn\pi} [1 + \eta^2(\alpha_m)^2] c_m \Omega \alpha_{mn_I} (\alpha_{mn_{II}} - \alpha_{mn_I})^{-1} \frac{1}{\omega_{mn_{II}}^2 - \Omega^2}, \tag{4.2.2.8}$$

$$c_m = \sin(\alpha_m \xi_0), \quad m, n = 1, 3, 5 \dots \tag{4.2.2.9}$$

Као и код претходног анализираниог случаја, принудне осцилације датог нано-система се могу представити изразима (4.2.1.11) и (4.2.1.12) у којима су амплитуде  $A_{mn_I}$  и  $A_{mn_{II}}$  дате изразима (4.2.2.5) и (4.2.2.6).

Следећи основни услови настанка резонанције и понашања нано-система као динамичког апсорбера имају практични значај:

Резонанца

$$\Omega = \omega_{mn_k}, \quad m, n = 1, 3, 5 \dots \tag{4.2.2.10}$$

Услови за динамички апсорбер су испуњени за (видети израз 4.2.1.14) док су у раду (Oniszczyk, Z., 2000б, 2004) приказани ови услови без утицаја магнетног поља и нелокалног параметра.

За те услове амплитуде осциловања  $A_{mnk}$ ,  $k = I, II$ , из (4.2.2.5) и (4.2.2.6) имају облик

$$A_{mnI} = 0, \quad A_{mnII} = -\frac{8fM}{RK\pi} [1 + \eta^2(\alpha_m)^2]c_m. \quad (4.2.2.11)$$

### 4.2.3. Концентрисана хармонијска сила

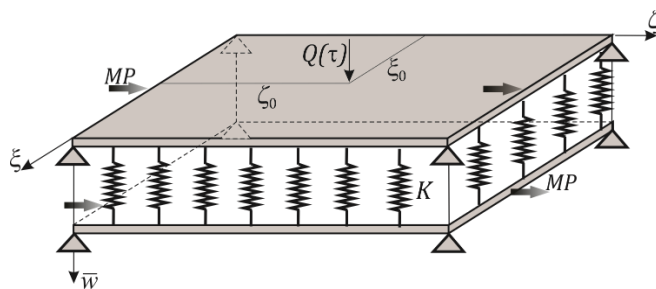
Концентрисана хармонијска сила која делује на средини горње нано-плоче представљеног нано-система приказана је на **Слици 4.2.3.1**.

Концентрисана хармонијска сила на средини горње нано-плоче представљена је помоћу

$$\tilde{f}_1(\xi, \zeta, \tau) = Q \sin(\Omega\tau) \delta(\xi - \xi_0) \delta(\zeta - \zeta_0), \quad (4.2.3.1)$$

и распоређена је од  $\zeta = 0$  до  $\zeta = 1/R$ , дуж правца линије  $\xi = \xi_0$  паралелне са  $\zeta$ -осом, и  $\xi = 0$  до  $\xi = 1/R$ , дуж правца линије  $\zeta = \zeta_0$  паралелне са  $\xi$ -осом.

У овом изразу  $Q$  је магнитуда, а  $\Omega$  фреквенција хармонијске силе.



**Слика 4.2.3.1** Дејство концентрисане хармонијске силе на горњу нано-плочу представљеног нано-система

Заменом (4.2.3.1) у изразе (4.2.20) и (4.2.21), добија се

$$R_{mn_I}(\tau) = c_{mn_I} F_{mn} \sin(\Omega\tau), \quad (4.2.3.2)$$

$$R_{mn_{II}}(\tau) = c_{mn_{II}} F_{mn} \sin(\Omega\tau), \quad m, n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.2.3.3)$$

где је

$$\begin{aligned} F_{mn} &= \int_0^1 \int_0^{1/R} Q \sin(\alpha_m \xi) \delta(\xi - \xi_0) \sin(\beta_n \zeta) \delta(\zeta - \zeta_0) d\xi d\zeta \\ &- Q \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{R}} \eta^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \sin(\alpha_m \xi) \delta(\xi - \xi_0) \sin(\beta_n \zeta) \delta(\zeta - \zeta_0) d\xi d\zeta \\ &= Q \sin(\alpha_m \xi_0) \sin(\beta_n \zeta_0) [1 + \eta^2 (\alpha_m)^2 + \eta^2 R^2 (\beta_n)^2]. \end{aligned} \quad (4.2.3.4)$$

Увођењем израза (4.2.3.2) и (4.2.3.3) у (4.2.18) и (4.2.19) добијају се решења математичког модела разматраног нано-система, која представљају законе промена малих трансверзалних померања у облику (4.2.1.5) и (4.2.1.6), где су сада амплитуде

$$A_{mn_I} = 4QM [1 + \eta^2 (\alpha_m)^2 + \eta^2 R^2 (\beta_n)^2] c_{mn} (\alpha_{mn_{II}} - \alpha_{mn_I})^{-1} \left[ \frac{\alpha_{mn_{II}}}{\omega_{mn_I}^2 - \Omega^2} - \frac{\alpha_{mn_I}}{\omega_{mn_{II}}^2 - \Omega^2} \right], \quad (4.2.3.5)$$

$$\begin{aligned} A_{mn_{II}} &= 4QM [1 + \eta^2 (\alpha_m)^2 + \eta^2 R^2 (\beta_n)^2] c_{mn} \alpha_{mn_I} \alpha_{mn_{II}} (\alpha_{mn_{II}} - \alpha_{mn_I})^{-1} \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{1}{\omega_{mn_I}^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\omega_{mn_{II}}^2 - \Omega^2} \right] \end{aligned} \quad (4.2.3.6)$$

$$B_{mn_I} = 4QM [1 + \eta^2 (\alpha_m)^2 + \eta^2 R^2 (\beta_n)^2] c_{mn} \Omega \alpha_{mn_{II}} \frac{1}{(\alpha_{mn_I} - \alpha_{mn_{II}})} \frac{1}{\omega_{mn_I}} (\omega_{mn_I}^2 - \Omega^2), \quad (4.2.3.7)$$

$$B_{mn_{II}} = 4QM [1 + \eta^2 (\alpha_m)^2 + \eta^2 R^2 (\beta_n)^2] c_{mn} \Omega \alpha_{mn_I} \frac{1}{(\alpha_{mn_{II}} - \alpha_{mn_I})} \frac{1}{\omega_{mn_{II}}} (\omega_{mn_{II}}^2 - \Omega^2) \quad (4.2.3.8)$$

$$c_{mn} = \sin(\alpha_m \xi_0) \sin(\beta_n \zeta_0), \quad m, n = 1, 3, 5, \dots \quad (4.2.3.9)$$

Принудне осцилације представљеног нано-система се могу описати изразима (4.2.1.11) и (4.2.1.12) у којима су амплитуде  $A_{mnI}$  и  $A_{mnII}$  дате изразима (4.2.3.5) и (4.2.3.6).

Следећи основни услови настанка резонанције и понашања система као динамичког апсорбера имају практични значај:

Резонанца

$$\Omega = \omega_{kmn}, \quad m, n = 1, 3, 5 \dots \quad (4.2.3.10)$$

Услови за динамички апсорбер су испуњени када важи (4.2.1.14) док су у раду ([Oniszczyk, Z., 2000б, 2004](#)) приказани ови услови без утицаја магнетног поља и нелокалног параметра.

За те услове амплитуде осциловања  $A_{mnk}$ ,  $k = I, II$ , из (4.2.3.5) и (4.2.3.6) имају облик

$$A_{mnI} = 0, \quad A_{mnII} = -\frac{4QM}{K} [1 + \eta^2(\alpha_m)^2 + \eta^2 R^2(\beta_n)^2] c_{mn}. \quad (4.2.3.11)$$

### 4.3. Нумеричка анализа

Нумеричка дискусија приказаног нано-система подељена је у два под-поглавља. У првом, аналитички резултати су поређени са резултатима из рада ([Oniszczyk, Z., 2004](#)).

Показано је одлично поклапање вредности амплитуда осциловања са вредностима из овог рада. У другом делу су разматрана трансверзална померања горње и доње нано-плоче за различите случајеве спољашњих оптерећења: равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење, равномерно распоређено линијско хармонијско оптерећење и концентрисана хармонијска сила.

Геометријски и материјални параметри исти су за обе плоче и узети су из рада ([Pouresmaeli, S. u сарадници 2013](#)). Young-ови модули еластичности су  $E_x = 2,434$  ТПа и

$E_y = 2,473 \text{ ТПа}$ , густина материјала  $\rho = 6316 \text{ kg/m}^3$ , Poisson-ови коефицијенти  $\nu_{xy} = \nu_{yx} = 0,197$ , дужина, ширина и дебљина нано-плоча  $a = 1 \text{ nm}$ ,  $b = 2a$  и  $h = 0,129 \text{ nm}$ .

Нелокални параметар, параметар магнетног поља и крутост Winkler-овог еластичног слоја биће назначени поред сваке табеле и слике. Вредност магнитуде принудне силе је  $100 \text{ nN}$ . Дискусија се односи на први сопствени мод (амплитудни облик) осциловања, тј.  $m = n = 1$ .

### 4.3.1. Упоредна анализа

За различите вредности нелокалног параметра и магнетног поља, вредности амплитуда осциловања приказане су табеларно и поређене са резултатима из рада (Oniszczyk, Z., 2004). Табела 4.3.1.1 приказује вредности амплитуда осциловања за равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење. Табела 4.3.1.2 приказује вредности амплитуда осциловања за равномерно распоређено линијско хармонијско оптерећење.

Примећује се да пораст интензитета магнетног поља и нелокалног параметра за случајеве равномерно распоређеног површинско хармонијског оптерећења и равномерно распоређеног линијско хармонијског оптерећења, утиче на смањење вредности амплитуда осциловања нано-система, при константној крутости еластичног слоја, Табеле 4.3.1.1, 4.3.1.2. За бездимензиони коефицијент крутости еластичног слоја узета је вредност  $K = 1000$ .

Резултати добијени у овом истраживању показују веома добра поклапања са резултатима добијеним у раду (Oniszczyk, Z., 2004) када се занемаре утицаји магнетног поља и нелокалног параметра.

**Табела 4.3.1.1** Вредности амплитуда осциловања за равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење

	$A_{mnI}$	$A_{mnII}$
<i>(Oniszczyk, Z., 2004)</i>	-0,049262	-0,17591
Представљена студија, систем изотропних плоча, $MP=0, \eta = 0.$	-0,049259	-0,17591
Представљена студија, систем ортотропних плоча, $MP=0, \eta = 0.$	-0,064757	-0,184805
Представљена студија, систем ортотропних плоча, $MP=20, \eta = 0,3.$	-0,044695	-0,10283
Представљена студија, систем ортотропних плоча, $MP=50, \eta = 0,5.$	-0,041307	-0,06936

**Табела 4.3.1.2** Вредности амплитуда осциловања за равномерно распоређено линијско хармонијско оптерећење

	$A_{mnI}$	$A_{mnII}$
<i>(Oniszczyk, Z., 2004)</i>	-0,077381	-0,276318
Представљена студија, систем изотропних плоча, $MP=0, \eta = 0.$	-0,077377	-0,276316
Представљена студија, систем ортотропних плоча, $MP=0, \eta = 0.$	-0,101719	-0,290291
Представљена студија, систем ортотропних плоча, $MP=20, \eta = 0,3.$	-0,070207	-0,161522
Представљена студија, систем ортотропних плоча, $MP=50, \eta = 0,5.$	-0,064886	-0,108955

**Табела 4.3.1.3** Поређење аналитичких резултата за основну природну фреквенцију једнослојног графенског листића

Основна природна фреквенција $((e_0 \tilde{a})^2 = 1,34 \text{ nm}^2)$		
$a \times b$	Симулација молекуларне динамике (THz), ( <i>Ansari, R. u saradnici 2010</i> )	Представљени нано-систем (THz)
10 × 10	0,0595014	0,0592
15 × 15	0,0277928	0,0284
20 × 20	0,0158141	0,0165
25 × 25	0,0099975	0,0107

Да би се верификовали резултати представљеног нано-система, неопходно је извршити симулацију молекуларне динамике (MD simulation). Резултати за најнижу природну фреквенцију нано-система се могу користити за њихово поређење са резултатима добијеним за слободне осцилације једнослојног графенског листића, симулацијом молекуларне динамике из рада (*Ansari, R. u saradnici 2010*).

У овој студији поређења усвојена су следећа механичка својства графенског листића: Young-ов модул еластичности  $E = 1 \text{ TPa}$ , Poisson-ов коефицијент  $\nu = 0.16$ , густина  $\rho = 2250 \text{ kg/m}^3$  и дебљина  $h = 0.34 \text{ nm}$ . У Табели 4.3.1.3 приказане су вредности за основне природне фреквенције, добијене применом симулације молекуларне динамике и приступа нелокалне механике континуума, за различите величине квадратних једнослојних графенских листића. У овом случају, једнослојни листић графена моделиран је као просто ослоњена нелокална Kirchhoff-Love плоча. Вредност нелокалног параметра у анализи слободних осцилација је  $\mu = 1.34 \text{ nm}^2$ . На основу резултата из Табеле 4.3.1.3 се може приметити да резултати добијени аналитичким методама одговарају резултатима представљеним у раду (*Ansari, R. u saradnici 2010*).

### 4.3.2. Анализа принудних осцилација нано-система

Детаљном аналитичком анализом принудних трансверзалних осцилација добијене су једначине (4.2.1.11) и (4.2.1.12) које описују мала трансверзална померања представљеног нано-система који је подвргнут дејству различитих спољашњих оптерећења.

У овом делу детаљно ће се описати принудно осциловање нано-система за равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење, равномерно распоређено линијско хармонијско оптерећење и концентрисану хармонијску силу.

Сва три случаја принудних трансверзалних осцилација су под утицајем магнетног поља у оквиру теорије нелокалне еластичности. Коришћењем аналитичких решења трансверзалних померања добијених за ова три случаја спољашњих оптерећења, померања  $\bar{w}_1(\xi, \zeta, \tau)$  и  $\bar{w}_2(\xi, \zeta, \tau)$  су представљена као временске функције за различите нелокалне параметре и параметре магнетног поља, као што је приказано на **Сликама 4.3.2.1 до 4.3.2.6**.

За анализу принудних осцилација користе се следићи бездимензиони параметри:  $K = 10$ ,  $MP = 100$  и  $\Omega = 0.6\omega_{mIII}$ . Као што се може приметити, параметри нелокалног и магнетног поља утичу на смањење трансверзалних померања  $\bar{w}_1(0.4, 0.4, \tau)$  и  $\bar{w}_2(0.4, 0.4, \tau)$  за различите вредности принудних оптерећења. За положај тачке  $\xi = \zeta = 0,4$  су приказана померања нано-плоча  $\bar{w}_1$  и  $\bar{w}_2$ .

На **Слици 4.3.2.1** приказана су трансверзална померања горње и доње нано-плоче код равномерно распоређеног површинског хармонијског оптерећења где је разматран утицај магнетног поља и нелокалног параметра. Вредности малих трансверзалних померања локалног модела (без утицаја магнетног поља и нелокалног параметра) су упоређиване са вредностима нелокалног модела. Одавде се може закључити да утицај нелокалног и магнетног поља доводи до смањења вредности трансверзалних померања горње и доње нано-плоче за разлику од случаја када су ови параметри занемарени. На увећаној **Слици 4.3.2.1б** истакнута су трансверзална померања у временском интервалу од 0 до 0.5 где се јасно може уочити нижа вредност амплитуде принудних осцилација.



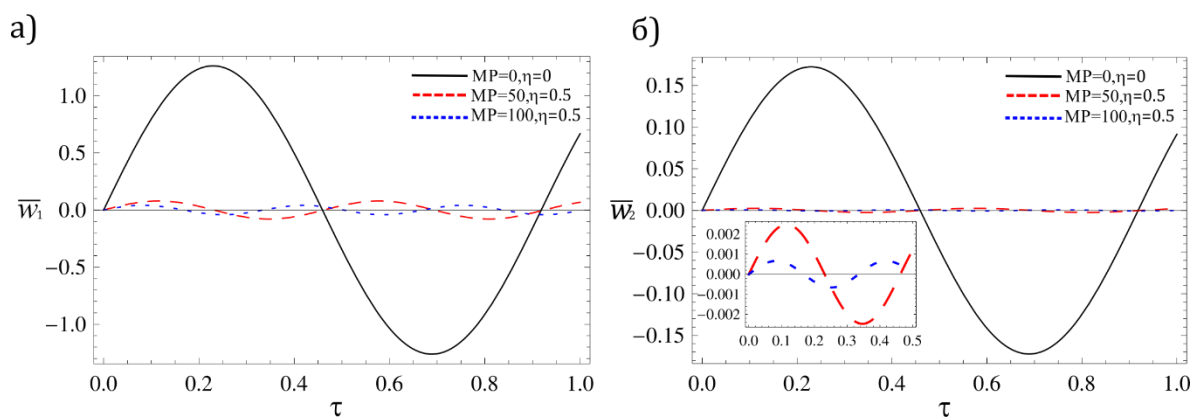
Код равномерно распоређеног линијског хармонијског оптерећења и концентрисане хармонијске силе јављају се слична запажања, (Слике 4.3.2.2 и 4.3.2.3). Уочавамо да су вредности трансверзалних померања узрокована концентрисаном хармонијском силом, услед промене разматраних параметра, доста веће него код равномерно распоређеног површинског и линијског хармонијског оптерећења (Слика 4.3.2.3).

Такође се може закључити да пораст интензитета магнетног поља видно пригушује трансверзална померања нано-система. Пажљивим одабиром интензитета магнетног поља се може подесити амплитуда принудних осцилација у одређеном опсегу без промене других материјалних и геометријских карактеристика нано-система. Ова чињеница има значај у практичним применама за контролу амплитуде осцилација у NEMS - нано-електромеханичким системима.

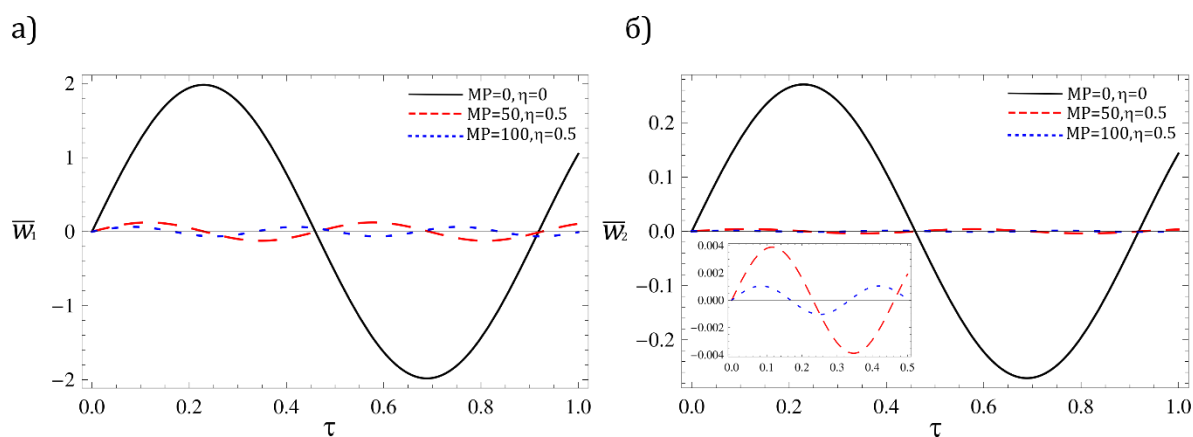
На Сликама 4.3.2.4, 4.3.2.5 и 4.3.2.6 приказани су утицаји различитих вредности магнитуда спољашњих оптерећења за сва три разматрана случаја, на мала трансверзална померања горње и доње нано-плоче. Примећује се да се са повећањем вредности магнитуде спољашњих оптерећења, повећава и вредност амплитуде трансверзалних осцилација горње и доње нано-плоче. Минимална вредност трансверзалних померања горње и доње нано-плоче јавља се у случају равномерно распоређеног површинског хармонијског оптерећења (Слика 4.3.2.4), док се највећа вредност примећује у случају концентрисане хармонијске силе (Слика 4.3.2.6).

Параметарска зависност облика функције трансверзалних померања горње нано-плоче  $\bar{w}_1$  од нелокалног параметра при промени магнитуде принудне силе приказана је на Слици 4.3.2.7. Док је параметарска зависност облика функције трансверзалних померања доње нано-плоче  $\bar{w}_2$  од нелокалног параметра при промени магнитуде принудне силе приказана на Слици 4.3.2.8.

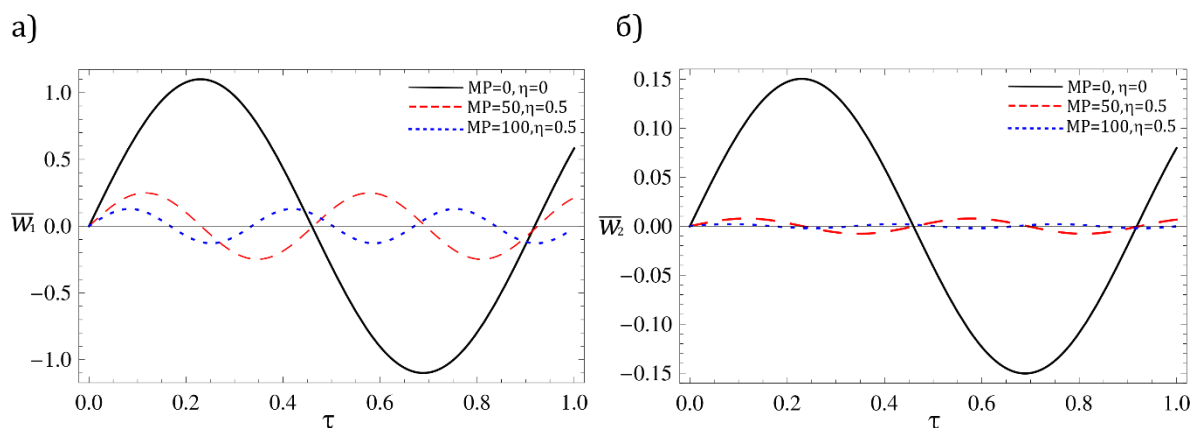
Са Слика 4.3.2.7 и 4.3.2.8 се може уочити да се све три криве са различитим вредностима магнитуде спољашњих оптерећења пресецају у једној тачки за вредност нелокалног параметра  $\eta = 0.4$ . За вредности нелокалног параметра нижег од 0.4, трансверзалне осцилације се повећавају са повећањем вредности магнитуде спољашњих оптерећења. За вредности нелокалног параметра већих од 0.4, трансверзалне осцилације нано-плоча опадају са порастом вредности магнитуде спољашњих оптерећења.



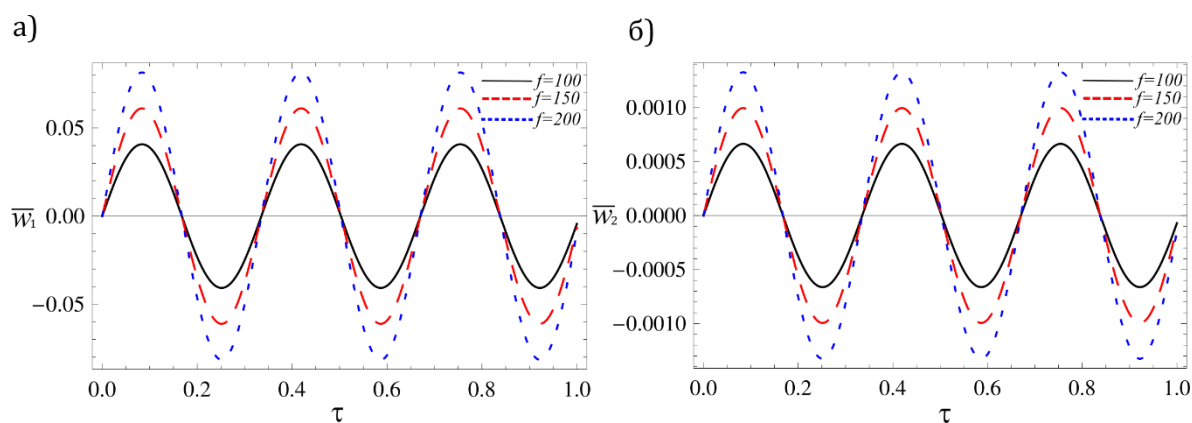
**Слика 4.3.2.1** Принудне осцилације нано-плоче под дејством равномерно распоређеног површинског хармонијског оптерећења са утицајем магнетног поља и нелокалног параметра, а) трансверзална померања горње нано-плоче, б) трансверзална померања доње нано-плоче



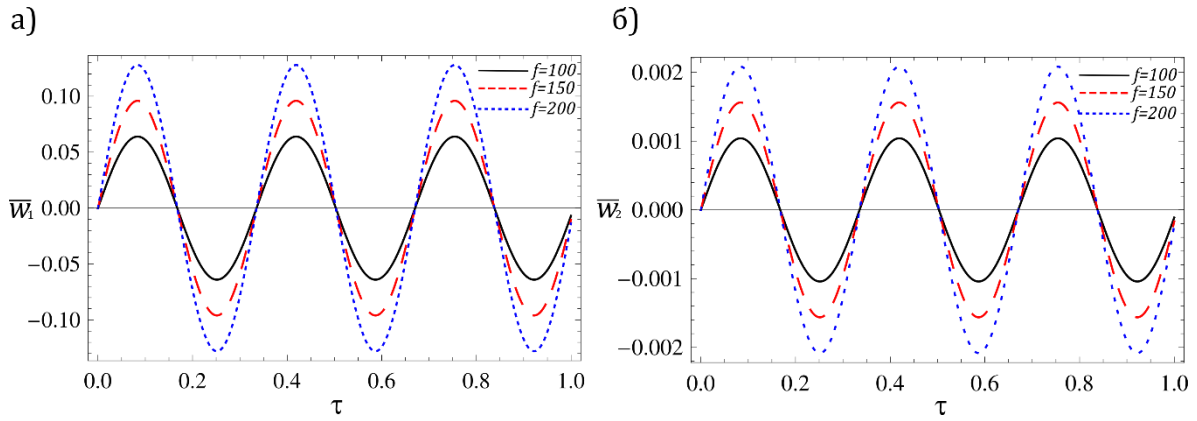
**Слика 4.3.2.2** Принудне осцилације нано-плоче под дејством равномерно распоређеног линијског хармонијског оптерећења са утицајем магнетног поља и нелокалног параметра, а) трансверзална померања горње нано-плоче, б) трансверзална померања доње нано-плоче



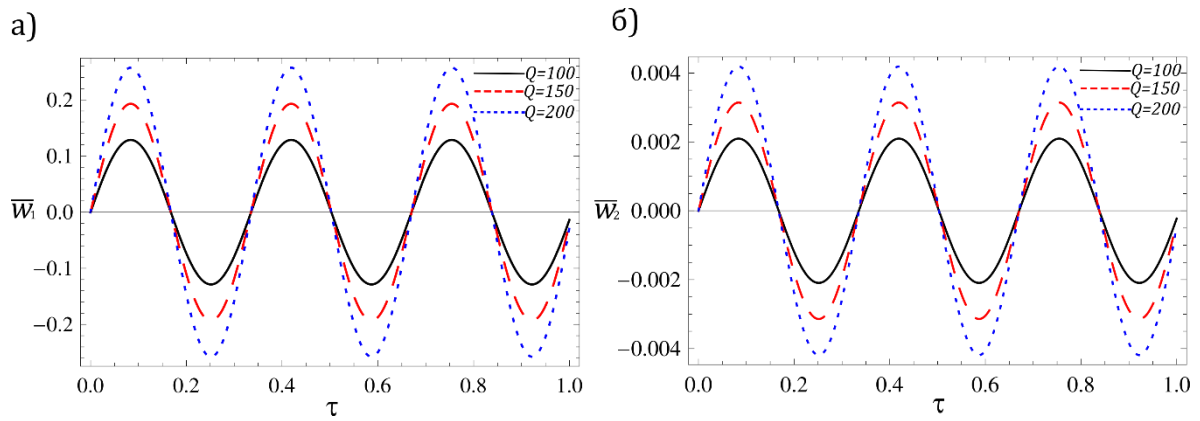
**Слика 4.3.2.3** Принудне осцилације нано-плоче под дејством концентрисане хармонијске силе са утицајем магнетног поља и нелокалног параметра,  
 а) трансверзална померања горње нано-плоче, б) трансверзална померања доње нано-плоче



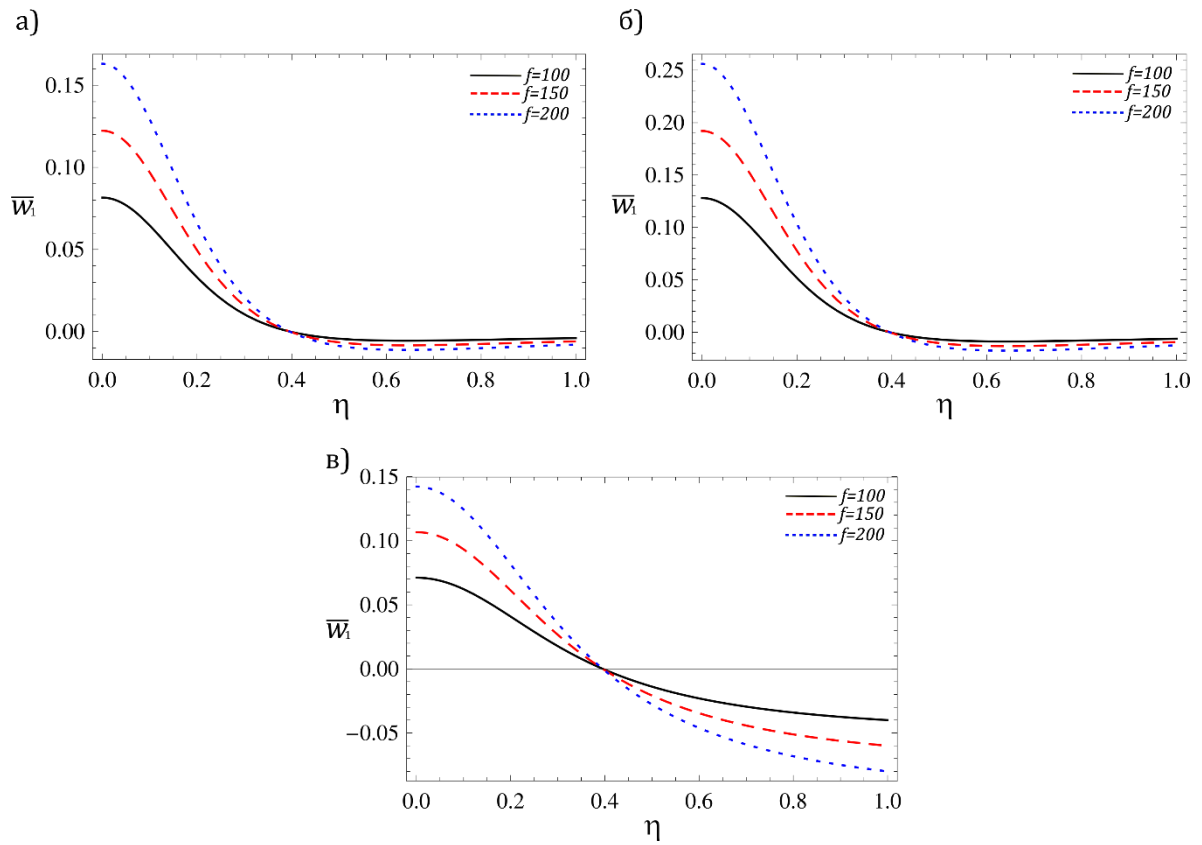
**Слика 4.3.2.4** Утицај промене вредности магнитуде код равномерног распоређеног површинског хармонијског оптерећења на а) трансверзална померања горње нано-плоче, б) трансверзална померања доње нано-плоче



**Слика 4.3.2.5** Утицај промене вредности магнитуде код равномерног распоређеног линијског хармонијског оптерећења на а) трансверзална померања горње нано-плоче, б) трансверзална померања доње нано-плоче

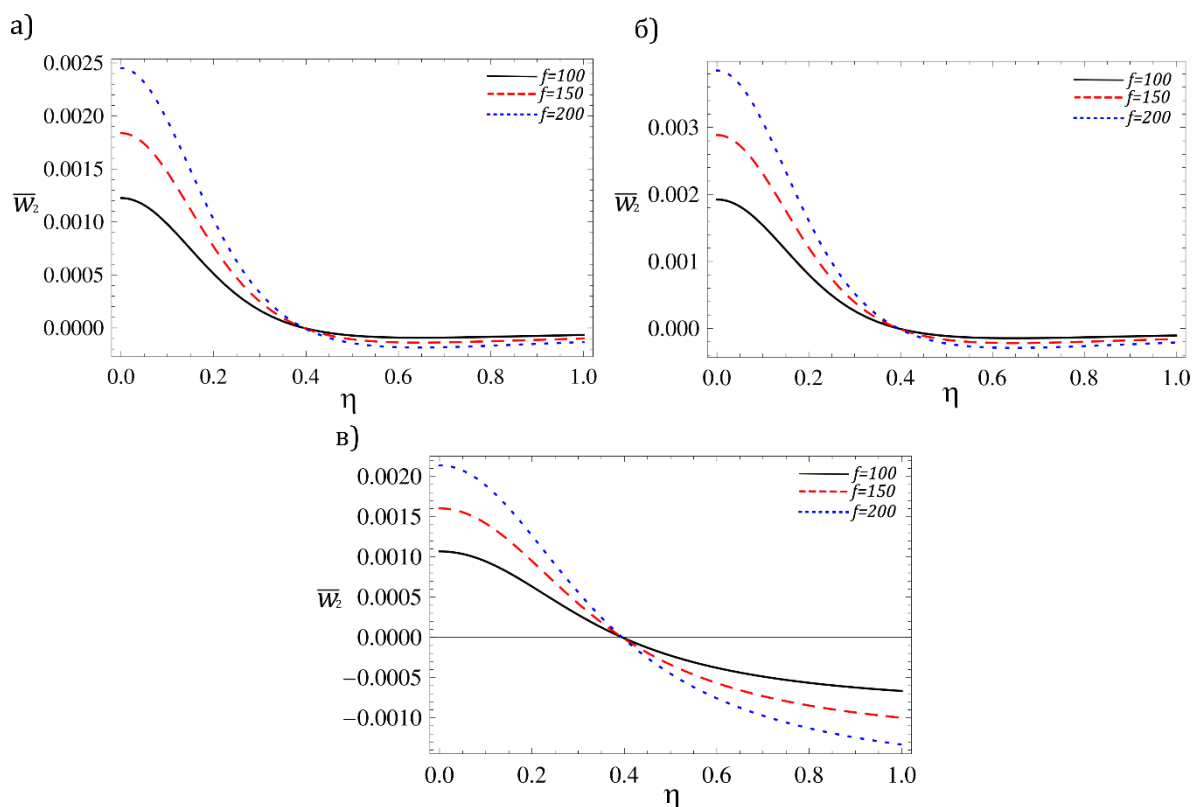


**Слика 4.3.2.6** Утицај промене вредности магнитуде код концентрисане хармонијске силе на а) трансверзална померања горње нано-плоче, б) трансверзална померања доње нано-плоче



**Слика 4.3.2.7** Параметарска зависност облика функције трансверзалних померања горње нано-плоче  $\bar{w}_1$  од нелокалног параметра при промени магнитуде принудне силе

а) равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење, б) равномерно распоређено линијско хармонијско оптерећење и в) концентрисана хармонијска сила



**Слика 4.3.2.8** Параметарска зависност облика функције трансверзалних померања доње нано-плоче  $\bar{w}_2$  од нелокалног параметра при промени магнитуде принудне силе а) равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење, б) равномерно распоређено линијско хармонијско оптерећење и в) концентрисана хармонијска сила

Резултати из овог поглавља објављени су у раду (Atanasov, M. S. и сарадници 2017a).

## 5. Слободне и принудне осцилације спрегнуте нано-плоче и нано-љуске

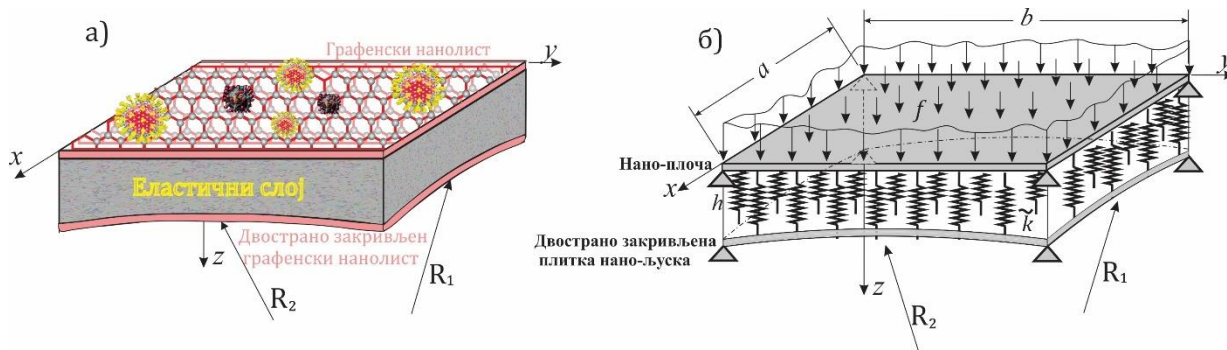
У овом поглављу представљен је нано-систем сачињен од еластично повезаних елемената нано-плоче и нано-љуске. Нано-плоча и двострано закривљена плочка нано-љуска направљене су од орторопних материјала. Оба нано-елемента су просто ослоњена и спојена еластичним слојем, који се апроксимира Winkler-овим моделом дискретно распоређених опруга линеарних крутости  $\tilde{k}$ , које делују по површини плоче и љуске, као што је приказано на **Слици 5.1**.

За представљени нано-систем биће спроведена анализа слободних и принудних осцилација. На основу Eringen-ове конститутивне еластичне релације, Kirchhoff-Love теорије плоча (Reddy, J. N., 2004, Reddy, J. N., 2006 и Karličić, D. и сарадници, 2015a) и Novozhilov-е линеарне теорије плитких љуски (Amabili, M., 2008), изведен је систем од четири спрегнуте парцијалне диференцијалне једначине малих трансверзалних осцилација. Решења диференцијалних једначина која описују мала трансверзална померања принудних осцилација нано-система добијена су применом методе модалне анализе, која је представљена у (Kelly, S. G., 2012).

Главни циљ разматрања овог нано-система је истраживање утицаја закривљених доњих елемената на амплитуде осциловања горњих нано-елемената. Упоредивањем амплитуда осциловања еластично повезаних нано-система, од две нано-плоче (наносистем плоча-плоча) са еластично повезаним системом од нано-плоче и двострано закривљене нано-љуске (наносистем плоча-љуска) очекује се појава умањења амплитуде осциловања горњег нано-елемента наносистема плоча-љуска. У овом поглављу показано је да се такав феномен може појавити унутар линеарних нано-система.

Материјалне и геометријске карактеристике материјала нано-љуске су исте као и код нано-плоче, с тим што код нано-љуске постоје и главни полупречници закривљености означени са  $R_1$  и  $R_2$ . Модули еластичности у два ортогонална правца су означени са  $E_x$  и  $E_y$ , Poisson-ови коефицијенти са  $\nu_{xy} = \nu_{yx}$ , модул смицања са  $G_{xy}$  и густина са  $\rho$ . Геометријске карактеристике, дужина  $a$ , ширина  $b$  и дебљина  $h$  су исте за нано-плочу и нано-љуску. Трансверзално померање нано-плоче је представљено са  $w_1(x, y, t)$ .

Померање нано-љуске у правцу  $x$  означено је са  $u_2(x, y, t)$ , у правцу  $y$  са  $v_2(x, y, t)$  и правцу  $z$  са  $w_2(x, y, t)$ .



Слика 5.1 Нано-систем сачињен од нано-плоче и нано-љуске међусобно повезане Winkler-овим еластичним слојем, а) Физички модел, б) Механички модел

Табела 5.1 Материјална и геометријска својства нано-плоче и двострано закривљене плитке нано-љуске

$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_1$ $= \nu_2$	$\rho$	$h$	$a$	$b$	$\tilde{k}$
$TPa$	$TPa$	$TPa$		$kg/m^3$	$nm$	$nm$	$nm$	$GPa/nm$
2.434	2.473	1.039	0.197	6316	0.129	10	4.5	0.075

Својства материјала из Табеле 5.1 узета су из рада (Pouresmaeeli, S. и сарадници 2013). Вредност коефицијента крутости Winkler-овог слоја  $\tilde{k}$  узета је из рада (Radić, N. и сарадници 2018).

Ако искористимо диференцијалне једначине малих трансверзалних осцилација (2.2.26 и 2.3.18-2.3.20) и ако се узме у обзир еластични слој који повезује нано-плочу и нано-љуску преко померања крајева опруга  $w_i(x, y, t)$ ,  $i = 1, 2$ , (где је са 1 означена нано-плоча, а са 2 нано-љуска), добијају се диференцијалне једначине спрегнутог система које представљају мала трансверзална померања средње равни наносистема плоча-љуска



$$\begin{aligned}
& \rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \rho h \left( \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + D_{11} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& + \tilde{k}(w_1 - w_2) - \tilde{k}(e_0 \tilde{a})^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right) \right] = f - (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right),
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
& \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \rho h \left( \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + \left( 2 \left( c + \frac{1}{R_1} \right) D_{66} + \frac{D_{12}}{R_1} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2} + \frac{D_{11}}{R_1} \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} \\
& - \left( A_{66} + 2c \left( c + \frac{1}{R_1} \right) D_{66} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \left( A_{12} + A_{66} - 2c \left( c + \frac{1}{R_1} \right) D_{66} + \frac{D_{11}}{R_1^2} + \frac{D_{12}}{R_1 R_2} \right) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} \\
& - \left( A_{11} + \frac{D_{11}}{R_1^2} + \frac{D_{12}}{R_1 R_2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \left( \frac{A_{11}}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2} + \frac{D_{11} + D_{12}}{R_1^2 R_2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
& \rho h \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \rho h \left( \frac{\partial^4 v_2}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 v_2}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + \left( 2 \left( \frac{1}{R_2} - c \right) D_{66} + \frac{D_{12}}{R_2} \right) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{D_{22}}{R_2} \frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3} \\
& - \left( A_{12} + A_{66} + 2c \left( \frac{1}{R_2} - c \right) D_{66} + \frac{D_{22}}{R_2^2} + \frac{D_{12}}{R_1 R_2} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - \left( A_{66} + 2c \left( \frac{1}{R_2} - c \right) D_{66} \right) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \\
& - \left( A_{22} + \frac{D_{22}}{R_2^2} + \frac{D_{12}}{R_1 R_2} \right) \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} - \left( \frac{A_{12}}{R_1} + \frac{A_{22}}{R_2} + \frac{D_{22} + D_{12}}{R_1 R_2^2} \right) \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
& \rho h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \rho h \left( \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + D_{11} \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& + \left( \frac{A_{11}}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2} \right) \frac{\partial u_2}{\partial x} - \left( 4c D_{66} + \frac{D_{12}}{R_1} + \frac{D_{22}}{R_2} \right) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x \partial y^2} - \left( \frac{D_{11}}{R_1} + \frac{D_{12}}{R_2} \right) \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + \left( \frac{A_{22}}{R_2} + \frac{A_{12}}{R_1} \right) \frac{\partial v_2}{\partial y} \\
& - \left( \frac{D_{11}}{R_1} + \frac{D_{12}}{R_2} - 4c D_{66} \right) \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^2 \partial y} - \left( \frac{D_{12}}{R_1} + \frac{D_{22}}{R_2} \right) \frac{\partial^3 v_2}{\partial y^3} - \left( \frac{D_{11} + D_{12}}{R_1 R_2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \\
& - \left( \frac{D_{22} + D_{12}}{R_1 R_2} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \left( \frac{A_{11}}{R_1^2} + 2 \frac{A_{12}}{R_1 R_2} + \frac{A_{22}}{R_2^2} \right) w_2 - \tilde{k}(w_1 - w_2) \\
& + \tilde{k}(e_0 \tilde{a})^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right) \right] = 0.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Мала трансверзална померања средње равни нано-плоче описана су помоћу  $w_1$  у једначини (5.1). У једначинама (5.2 – 5.4) се може приметити да фигуришу компоненте померања у сва три правца  $u_2$ ,  $v_2$  и  $w_2$ . Због тога се све једначине морају узети у обзир при описивању малих трансверзалних осцилација ортотропне двострано закривљене плитке нано-љуске. Сви параметри описани су у **Поглављу 2.3**.

Гранични услови просто ослоњене нано-плоче и нано-љуске, дужине  $a$  и ширине  $b$  су

$$w_i(x, 0, t) = w_i(x, b, t) = 0, \quad w_i(0, y, t) = w_i(a, y, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5.5)$$

$$M_{xxi}(0, y, t) = M_{xxi}(a, y, t) = 0, \quad M_{yyi}(x, 0, t) = M_{yyi}(x, b, t) = 0. \quad i = 1, 2. \quad (5.6)$$

$$N_{xxi}(0, y, t) = N_{xxi}(a, y, t) = 0, \quad N_{yyi}(x, 0, t) = N_{yyi}(x, b, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5.7)$$

Са  $i = 1$  је означена нано-плоча, док је са  $i = 2$  означена двострано закривљена плитка нано-љуска.

## 5.1. Слободне осцилације спрегнуте нано-плоче и нано-љуске

Утицај трансверзалне силе  $f - (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$  у једначини (5.1) код анализе слободних осцилација биће занемарен, односно биће једнак нули, па се та једначина може написати

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - (e_0 \tilde{a})^2 \rho h \left( \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + D_{11} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} \\ + \tilde{k}(w_1 - w_2) - \tilde{k}(e_0 \tilde{a})^2 \left[ \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Приказане једначине (5.1.1) и (5.2-5.4) могу се решити претпостављањем померања за граничне услове просто ослоњене нано-плоче и нано-љуске (*Oniszczuk, Z., 2004, Ghavanloo, E., u Fazelzadeh, S. A., 2013*) у облику

$$w_1(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{1mn}(t) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \quad (5.1.2)$$

$$u_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{2mn}(t) \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \quad (5.1.3)$$

$$v_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{2mn}(t) \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y), \quad (5.1.4)$$

$$w_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{2mn}(t) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \quad (5.1.5)$$

где су  $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$  и  $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$

Непознате временске функције означене су са  $W_{1mn}(t)$ ,  $U_{2mn}(t)$ ,  $V_{2mn}(t)$  и  $W_{2mn}(t)$ .

Заменом решења (5.1.2-5.1.5) у једначине (5.1.1) и (5.2-5.4) и применом услова отогоналности добија се систем обичних диференцијалних једначина слободних осцилација

$$m_1 \ddot{W}_{1mn}(t) + s_1 W_{1mn}(t) + \tilde{\kappa}_w W_{2mn}(t) = 0, \quad (5.1.6)$$

$$m_1 \ddot{U}_{2mn2}(t) + s_2 U_{2mn}(t) + s_3 V_{2mn}(t) + s_4 W_{2mn}(t) = 0, \quad (5.1.7)$$

$$m_1 \ddot{V}_{2mn2}(t) + s_5 V_{2mn}(t) + s_6 U_{2mn}(t) + s_7 W_{2mn}(t) = 0, \quad (5.1.8)$$

$$m_1 \ddot{W}_{2mn}(t) + s_8 W_{2mn}(t) + \tilde{\kappa}_w W_{1mn}(t) + s_9 U_{2mn}(t) + s_{10} V_{2mn}(t) = 0, \quad (5.1.9)$$

где су

$$m_1 = h\rho[1 + (e_0\tilde{a})^2(\alpha_m^2 + \beta_n^2)],$$

$$\tilde{\kappa}_w = -\tilde{k}[1 + (e_0\tilde{a})^2(\alpha_m^2 + \beta_n^2)],$$

$$s_1 = D_{11}\alpha_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha_m^2\beta_n^2 + D_{22}\beta_n^4 + \tilde{k}[1 + (e_0\tilde{a})^2(\alpha_m^2 + \beta_n^2)],$$

$$s_2 = \left(A_{11} + \frac{D_{11}}{R_1^2} + \frac{D_{12}}{R_1R_2}\right)\alpha_m^2 + \left(A_{66} + 2c^2D_{66} + \frac{2cD_{66}}{R_1}\right)\beta_n^2$$

$$s_3 = \left(A_{12} + A_{66} - 2c^2D_{66} + \frac{D_{11}}{R_1^2} - \frac{2cD_{66}}{R_1} + \frac{D_{12}}{R_1R_2}\right)\alpha_m\beta_n,$$

$$s_4 = -\left(\frac{A_{11}}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2} + \frac{D_{11} + D_{12}}{R_1^2R_2}\right)\alpha_m - \frac{D_{11}}{R_1}\alpha_m^3 - \left(2c^2D_{66} + \frac{D_{12}}{R_1} + \frac{2cD_{66}}{R_1}\right)\alpha_m\beta_n^2,$$

$$s_5 = \left(A_{66} + 2c^2D_{66} - \frac{2cD_{66}}{R_2}\right)\alpha_m^2 + \left(A_{22} + \frac{D_{22}}{R_2^2} + \frac{D_{12}}{R_1R_2}\right)\beta_n^2, \quad (5.1.10)$$

$$s_6 = \left(A_{12} + A_{66} - 2c^2D_{66} + \frac{D_{22}}{R_2^2} + \frac{2cD_{66}}{R_2} + \frac{D_{12}}{R_1R_2}\right)\alpha_m\beta_n,$$

$$s_7 = -\left(\frac{A_{12}}{R_1} + \frac{D_{22} + D_{12}}{R_2^2R_1} + \frac{A_{22}}{R_2}\right)\beta_n + \left(2c^2D_{66} - \frac{D_{12}}{R_2} - \frac{2cD_{66}}{R_2}\right)\alpha_m^2\beta_n - \frac{D_{22}}{R_2}\beta_n^3,$$

$$s_8 = D_{11}\alpha_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\alpha_m^2\beta_n^2 + D_{22}\beta_n^4 + \frac{A_{11}}{R_1^2} + \frac{A_{22}}{R_2^2} + \frac{2A_{12}}{R_1R_2} + \frac{D_{11} + D_{12}}{R_1R_2}\alpha_m^2$$

$$+ \frac{D_{12} + D_{22}}{R_1R_2}\beta_n^2 + \tilde{k}[1 + (e_0\tilde{a})^2(\alpha_m^2 + \beta_n^2)],$$

$$s_9 = -\left(\frac{A_{11}}{R_1} + \frac{A_{12}}{R_2}\right)\alpha_m - \left(\frac{D_{11}}{R_1} + \frac{D_{12}}{R_2}\right)\alpha_m^3 - \left(4cD_{66} + \frac{D_{12}}{R_1} + \frac{D_{22}}{R_2}\right)\alpha_m\beta_n^2$$

$$s_{10} = -\left(\frac{A_{12}}{R_1} + \frac{A_{22}}{R_2}\right)\beta_n + \left(4cD_{66} - \frac{D_{11}}{R_1} - \frac{D_{12}}{R_2}\right)\alpha_m^2\beta_n - \left(\frac{D_{12}}{R_1} + \frac{D_{22}}{R_2}\right)\beta_n^3.$$

Може се претпоставити да су непознате временске функције у облику

$$W_{1mn}(t) = C_1 e^{it\omega_{mn}}, \quad (5.1.11)$$

$$U_{2mn}(t) = C_2 e^{it\omega_{mn}}, \quad (5.1.12)$$

$$V_{2mn}(t) = C_3 e^{it\omega_{mn}}, \quad (5.1.13)$$

$$W_{2mn}(t) = C_4 e^{it\omega_{mn}}. \quad (5.1.14)$$

Заменом израза (5.1.11 – 5.1.14) у једначине (5.1.6 – 5.1.9), добија се стандардна форма хомогених диференцијалних једначина која се може записати у матричном облику

$$\begin{bmatrix} s_1 - m_1 \omega_{mn}^2 & 0 & 0 & \tilde{\kappa}_w \\ 0 & s_2 - m_1 \omega_{mn}^2 & s_3 & s_4 \\ 0 & s_6 & s_5 - m_1 \omega_{mn}^2 & s_7 \\ \tilde{\kappa}_w & s_9 & s_{10} & s_8 - m_1 \omega_{mn}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.1.15)$$

За нетривијална решења, детерминанта сачињена од сета алгебарских једначина мора да буде једнака нули

$$\det \begin{bmatrix} s_1 - m_1 \omega_{mn}^2 & 0 & 0 & \tilde{\kappa}_w \\ 0 & s_2 - m_1 \omega_{mn}^2 & s_3 & s_4 \\ 0 & s_6 & s_5 - m_1 \omega_{mn}^2 & s_7 \\ \tilde{\kappa}_w & s_9 & s_{10} & s_8 - m_1 \omega_{mn}^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (5.1.16)$$

Решавањем детерминанте (5.1.16) по непознатој  $\omega_{mn}$ , добијају се четири сопствене фреквенције за свако  $(m, n)$ , што даје четири различита облика осциловања.

Анализа различитих облика осциловања биће приказана у **Поглављу 5.4**.

Решења диференцијалних једначина (5.1.6-5.1.9) могу се описати помоћу главних координата

$$W_{1mn}(t) = \xi_{1mn}(t) + \xi_{2mn}(t) + \xi_{3mn}(t) + \xi_{4mn}(t), \quad (5.1.17)$$

$$U_{2mn}(t) = \alpha_{mn}^{(1)} \xi_{1mn}(t) + \alpha_{mn}^{(2)} \xi_{2mn}(t) + \alpha_{mn}^{(3)} \xi_{3mn}(t) + \alpha_{mn}^{(4)} \xi_{4mn}(t), \quad (5.1.18)$$

$$V_{2mn}(t) = \beta_{mn}^{(1)} \xi_{1mn}(t) + \beta_{mn}^{(2)} \xi_{2mn}(t) + \beta_{mn}^{(3)} \xi_{3mn}(t) + \beta_{mn}^{(4)} \xi_{4mn}(t), \quad (5.1.19)$$

$$W_{2mn}(t) = \gamma_{mn}^{(1)} \xi_{1mn}(t) + \gamma_{mn}^{(2)} \xi_{2mn}(t) + \gamma_{mn}^{(3)} \xi_{3mn}(t) + \gamma_{mn}^{(4)} \xi_{4mn}(t), \quad (5.1.20)$$

где су  $\alpha_{mn}^{(k)}$ ,  $\beta_{mn}^{(k)}$  и  $\gamma_{mn}^{(k)}$  односи амплитуда,  $k = 1, 2, 3, 4$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ .

Из представљене матричне форме (5.1.15) налазе се односи амплитуда

$$\alpha_{mn}^{(k)} = \frac{C_2}{C_1}(\omega_{mnk}); \quad \beta_{mn}^{(k)} = \frac{C_3}{C_1}(\omega_{mnk}); \quad \gamma_{mn}^{(k)} = \frac{C_4}{C_1}(\omega_{mnk}); \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (5.1.21)$$

Применом почетних услова  $W_{1mn}(0) = W_{01mn}$ ,  $U_{2mn}(0) = U_{02mn}$ ,  $V_{2mn}(0) = V_{02mn}$ ,  $W_{2mn}(0) = W_{02mn}$  се може записати сет следећих једначина

$$W_{01mn} = \xi_{01mn} + \xi_{02mn} + \xi_{03mn} + \xi_{04mn}, \quad (5.1.22)$$

$$U_{02mn} = \alpha_{mn}^{(1)} \xi_{01mn} + \alpha_{mn}^{(2)} \xi_{02mn} + \alpha_{mn}^{(3)} \xi_{03mn} + \alpha_{mn}^{(4)} \xi_{04mn}, \quad (5.1.23)$$

$$V_{02mn} = \beta_{mn}^{(1)} \xi_{01mn} + \beta_{mn}^{(2)} \xi_{02mn} + \beta_{mn}^{(3)} \xi_{03mn} + \beta_{mn}^{(4)} \xi_{04mn}, \quad (5.1.24)$$

$$W_{02mn} = \gamma_{mn}^{(1)} \xi_{01mn} + \gamma_{mn}^{(2)} \xi_{02mn} + \gamma_{mn}^{(3)} \xi_{03mn} + \gamma_{mn}^{(4)} \xi_{04mn}, \quad (5.1.25)$$

и  $\dot{W}_{1mn}(0) = \dot{W}_{01mn}$ ,  $\dot{U}_{2mn}(0) = \dot{U}_{02mn}$ ,  $\dot{V}_{2mn}(0) = \dot{V}_{02mn}$ ,  $\dot{W}_{2mn}(0) = \dot{W}_{02mn}$  за

$m = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ , даје да су

$$\dot{W}_{01mn} = \dot{\xi}_{01mn} + \dot{\xi}_{02mn} + \dot{\xi}_{03mn} + \dot{\xi}_{04mn}, \quad (5.1.26)$$

$$\dot{U}_{2mn} = \alpha_{mn}^{(1)} \dot{\xi}_{01mn} + \alpha_{mn}^{(2)} \dot{\xi}_{02mn} + \alpha_{mn}^{(3)} \dot{\xi}_{03mn} + \alpha_{mn}^{(4)} \dot{\xi}_{04mn}, \quad (5.1.27)$$

$$\dot{V}_{2mn} = \beta_{mn}^{(1)} \dot{\xi}_{01mn} + \beta_{mn}^{(2)} \dot{\xi}_{02mn} + \beta_{mn}^{(3)} \dot{\xi}_{03mn} + \beta_{mn}^{(4)} \dot{\xi}_{04mn}, \quad (5.1.28)$$

$$\dot{W}_{2mn} = \gamma_{mn}^{(1)} \dot{\xi}_{01mn} + \gamma_{mn}^{(2)} \dot{\xi}_{02mn} + \gamma_{mn}^{(3)} \dot{\xi}_{03mn} + \gamma_{mn}^{(4)} \dot{\xi}_{04mn}. \quad (5.1.29)$$

Решавањем система једначина (5.1.22 – 5.1.25) по  $\xi_{01mn}, \xi_{02mn}, \xi_{03mn}$  и  $\xi_{04mn}$  у функцији од  $W_{01mn}, U_{02mn}, V_{02mn}$  и  $W_{02mn}$  добија се

$$\xi_{01mn} = \frac{1}{p_{mn}} \left[ \lambda_{1mn} W_{01mn} + \lambda_{2mn} U_{02mn} + \lambda_{3mn} V_{02mn} + \lambda_{4mn} W_{02mn} \right], \quad (5.1.30)$$

$$\xi_{02mn} = \frac{1}{p_{mn}} \left[ \lambda_{5mn} W_{01mn} + \lambda_{6mn} U_{02mn} + \lambda_{7mn} V_{02mn} + \lambda_{8mn} W_{02mn} \right], \quad (5.1.31)$$

$$\xi_{03mn} = \frac{1}{p_{mn}} \left[ \lambda_{9mn} W_{01mn} + \lambda_{10mn} U_{02mn} + \lambda_{11mn} V_{02mn} + \lambda_{12mn} W_{02mn} \right], \quad (5.1.32)$$

$$\xi_{04mn} = \frac{1}{p_{mn}} \left[ \lambda_{13mn} W_{01mn} + \lambda_{14mn} U_{02mn} + \lambda_{15mn} V_{02mn} + \lambda_{16mn} W_{02mn} \right]. \quad (5.1.33)$$

Такође, решавањем система (5.1.26 – 5.1.29) по  $\dot{\xi}_{01mn}, \dot{\xi}_{02mn}, \dot{\xi}_{03mn}$  и  $\dot{\xi}_{04mn}$  у функцији од  $\dot{W}_{01mn}, \dot{U}_{02mn}, \dot{V}_{02mn}$  and  $\dot{W}_{02mn}$  добија се

$$\dot{\xi}_{01mn} = \frac{1}{p_{mn}} \left[ \lambda_{1mn} \dot{W}_{01mn} + \lambda_{2mn} \dot{U}_{02mn} + \lambda_{3mn} \dot{V}_{02mn} + \lambda_{4mn} \dot{W}_{02mn} \right], \quad (5.1.34)$$

$$\dot{\xi}_{02mn} = \frac{1}{p_{mn}} \left[ \lambda_{5mn} \dot{W}_{01mn} + \lambda_{6mn} \dot{U}_{02mn} + \lambda_{7mn} \dot{V}_{02mn} + \lambda_{8mn} \dot{W}_{02mn} \right], \quad (5.1.35)$$

$$\dot{\xi}_{03mn} = \frac{1}{p_{mn}} \left[ \lambda_{9mn} \dot{W}_{01mn} + \lambda_{10mn} \dot{U}_{02mn} + \lambda_{11mn} \dot{V}_{02mn} + \lambda_{12mn} \dot{W}_{02mn} \right], \quad (5.1.36)$$

$$\dot{\xi}_{04mn} = \frac{1}{p_{mn}} \left[ \lambda_{13mn} \dot{W}_{01mn} + \lambda_{14mn} \dot{U}_{02mn} + \lambda_{15mn} \dot{V}_{02mn} + \lambda_{16mn} \dot{W}_{02mn} \right], \quad (5.1.37)$$

где су  $\lambda_i$  за  $i = 1, \dots, 16$  и  $p_{mn}$  представљени у **Прилогу Б**.

Диференцијалне једначине (5.1.6 - 5.1.9) изражене помоћу главних координата су

$$\ddot{\xi}_{1mn}(t) + \omega_{mn}^2 \xi_{1mn}(t) = 0, \quad (5.1.38)$$

$$\ddot{\xi}_{2mn}(t) + \omega_{mn}^2 \xi_{2mn}(t) = 0, \quad (5.1.39)$$

$$\ddot{\xi}_{3mn}(t) + \omega_{mn}^2 \xi_{3mn}(t) = 0, \quad (5.1.40)$$

$$\ddot{\xi}_{4mn}(t) + \omega_{mn}^2 \xi_{4mn}(t) = 0. \quad (5.1.41)$$

Док су општа решења

$$\xi_{1mn}(t) = A_1 \cos(\omega_{mn_1} t) + B_1 \sin(\omega_{mn_1} t), \quad (5.1.42)$$

$$\xi_{2mn}(t) = A_2 \cos(\omega_{mn_2} t) + B_2 \sin(\omega_{mn_2} t), \quad (5.1.43)$$

$$\xi_{3mn}(t) = A_3 \cos(\omega_{mn_3} t) + B_3 \sin(\omega_{mn_3} t), \quad (5.1.44)$$

$$\xi_{4mn}(t) = A_4 \cos(\omega_{mn_4} t) + B_4 \sin(\omega_{mn_4} t). \quad (5.1.45)$$

Применом почетних услова за главне координате  $\xi_{kmn}(0) = \xi_{0kmn}$  и  $\dot{\xi}_{kmn}(0) = \dot{\xi}_{0kmn}$  за  $k = 1, 2, 3, 4$ , из једначина (5.1.42 - 5.1.45) добија се

$$A_k = \xi_{0kmn} \quad \text{и} \quad B_k = \frac{\dot{\xi}_{0kmn}}{\omega_{mn_k}}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad m = n = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (5.1.46)$$

Коришћењем константи (5.1.46) са добијеним  $\xi_{0kmn}$  и  $\dot{\xi}_{0kmn}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  из једначина (5.1.30 – 5.1.33) и (5.1.34 – 5.1.37), општа решења за главне координате су

$$\xi_{1mn}(t) = \xi_{01mn} \cos(\omega_{mn_1} t) + \frac{\dot{\xi}_{01mn}}{\omega_{mn_1}} \sin(\omega_{mn_1} t), \quad (5.1.47)$$

$$\xi_{2mn}(t) = \xi_{02mn} \cos(\omega_{mn_2} t) + \frac{\dot{\xi}_{02mn}}{\omega_{mn_2}} \sin(\omega_{mn_2} t), \quad (5.1.48)$$

$$\xi_{3mn}(t) = \xi_{03mn} \cos(\omega_{mn_3} t) + \frac{\dot{\xi}_{03mn}}{\omega_{mn_3}} \sin(\omega_{mn_3} t), \quad (5.1.49)$$

$$\xi_{4mn}(t) = \xi_{04mn} \cos(\omega_{mn_4} t) + \frac{\dot{\xi}_{04mn}}{\omega_{mn_4}} \sin(\omega_{mn_4} t). \quad (5.1.50)$$



Заменом општих решења (5.1.47 – 5.1.50) у (5.1.17 – 5.1.20) и заменом у изразу (5.1.2 – 5.1.5), могу се написати решења слободних осцилација нано-система у облику

$$w_1(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) [\xi_{1mn}(t) + \xi_{2mn}(t) + \xi_{3mn}(t) + \xi_{4mn}(t)], \quad (5.1.51)$$

$$u_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) [\alpha_{mn}^{(1)} \xi_{1mn}(t) + \alpha_{mn}^{(2)} \xi_{2mn}(t) + \alpha_{mn}^{(3)} \xi_{3mn}(t) + \alpha_{mn}^{(4)} \xi_{4mn}(t)], \quad (5.1.52)$$

$$v_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) [\beta_{mn}^{(1)} \xi_{1mn}(t) + \beta_{mn}^{(2)} \xi_{2mn}(t) + \beta_{mn}^{(3)} \xi_{3mn}(t) + \beta_{mn}^{(4)} \xi_{4mn}(t)], \quad (5.1.53)$$

$$w_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) [\gamma_{mn}^{(1)} \xi_{1mn}(t) + \gamma_{mn}^{(2)} \xi_{2mn}(t) + \gamma_{mn}^{(3)} \xi_{3mn}(t) + \gamma_{mn}^{(4)} \xi_{4mn}(t)], \quad m = 1, 2, 3, \dots, \infty, n = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (5.1.54)$$

## 5.2. Принудне непригушене осцилације спрегнуте нано-плоче и нано-љуске

Код анализе принудних непригушених осцилација представљеног нано-система, разматра се случај када је само нано-плоча под дејством равномерно распоређеног површинског хармонијског оптерећења  $f(x, y, t)$ . Узимајући у обзир представљене диференцијалне једначине нано-плоче (5.1) и диференцијалне једначине нано-љуске (5.2 – 5.4), диференцијалне једначине временских модова малих трансверзалних осцилација које описују принудно осциловање непригушеног посматраног нано-система имају следећи матрични облик

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{W}_{mn1}(t) \\ \ddot{U}_{mn2}(t) \\ \ddot{V}_{mn2}(t) \\ \ddot{W}_{mn2}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \tilde{\kappa}_w \\ 0 & s_2 & s_3 & s_4 \\ 0 & s_6 & s_5 & s_7 \\ \tilde{\kappa}_w & s_9 & s_{10} & s_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn1}(t) \\ U_{mn2}(t) \\ V_{mn2}(t) \\ W_{mn2}(t) \end{Bmatrix} \\
& = \begin{Bmatrix} f - (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{5.2.1}
\end{aligned}$$

Једначине (5.2.1) се могу записати у поједностављенијој форми

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{S}}\} + \mathbf{K}\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{F}\}, \tag{5.2.2}$$

где су

$$\{\ddot{\mathbf{S}}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{W}_{mn1}(t) \\ \ddot{U}_{mn2}(t) \\ \ddot{V}_{mn2}(t) \\ \ddot{W}_{mn2}(t) \end{Bmatrix}, \{\mathbf{S}\} = \begin{Bmatrix} W_{mn1}(t) \\ U_{mn2}(t) \\ V_{mn2}(t) \\ W_{mn2}(t) \end{Bmatrix}, \{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} f - (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{5.2.3}$$

Матрица  $\mathbf{M}$  је матрица масе, а  $\mathbf{K}$  је матрица крутости.

За решавање једначине (5.2.2) користи се стандардни поступак модалне анализе из литературе (*Kelly, S. G., 2012*), заснован на главним координатама. Вредности сопствених фреквенција система  $\omega_{mn_1} \leq \omega_{mn_2} \leq \omega_{mn_3} \leq \omega_{mn_4}$  добијене су из матричне форме (5.1.16).

Систему нехомогених диференцијалних једначина (5.2.1) или (5.2.2) одговарају генерализане координате  $\{\mathbf{S}\}$  које се могу превести на систем главних координата  $p_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  увођењем модалне матрице  $\mathbf{P}$ .

Матрица  $\mathbf{P}$  представља модалну матрицу датог система чије колоне представљају нормализоване основне облике осциловања

$$\mathbf{P} = \{X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4\}. \tag{5.2.4}$$

Трансформација

$$S(t) = \sum_{j=1}^4 p_j(t) X_j, \quad (5.2.5)$$

је еквивалентна линеарној трансформацији између генерализаних и главних координата система

$$S(t) = \mathbf{P}p(t). \quad (5.2.6)$$

Заменом једначине (5.2.5) у (5.2.2) добија се

$$\mathbf{M} \sum_{j=1}^4 \ddot{p}_j(t) X_j + \mathbf{K} \sum_{j=1}^4 p_j(t) X_j = \{F\}. \quad (5.2.7)$$

Скаларним множењем једначине (5.2.7) са  $X_k$ , за произвољно  $k = 1, 2, 3, 4$  добија се

$$\sum_{j=1}^4 \ddot{p}_j(t) (X_k M X_j) + \sum_{j=1}^4 p_j(t) (X_k K X_j) = (X_k F). \quad (5.2.8)$$

Коришћењем услова ортогоналности основних облика, добија се по један члан за сваку од сума, а који је различит од нуле за одговарајући мод  $k = j$ . С обзиром да су основни облици осциловања нормализовани, једначина (5.2.8) се може записати као

$$\sum_{k=1}^4 \ddot{p}_k(t) (X_k X_k)_M + \sum_{k=1}^4 p_k(t) (X_k X_k)_K = (X_k F), \quad (5.2.9)$$

или

$$\ddot{p}_k(t) + \omega_{mn_k}^2 p_k(t) = g_k(t), \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (5.2.10)$$

где је

$$g_k(t) = (X_k F). \quad (5.2.11)$$

За оптерећење  $\{F\}$  приказано изразом (5.2.3), узима се равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење у облику

$$f(x, y, t) = F_0 \cos(\Omega t). \quad (5.2.12)$$

Почетни услови дефинисани су главним координатама као  $p_k(0) = 0$  и  $\dot{p}_k(0) = 0$ , па се решења могу записати у облику конволуционог интеграла

$$p_k(t) = \frac{1}{\omega_{mnk}} \int_0^t g_k(s) \sin[\omega_{mnk}(t-s)] ds. \quad k = 1,2,3,4. \quad (5.2.13)$$

Када се решења добијена помоћу (5.2.13) врате у једначину (5.2.6), добија се

$$S(t) = \begin{pmatrix} W_{mn1}(t) \\ U_{mn2}(t) \\ V_{mn2}(t) \\ W_{mn2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11}(\omega_{mn1})p_1(t) + X_{12}(\omega_{mn2})p_2(t) + X_{13}(\omega_{mn3})p_3(t) + X_{14}(\omega_{mn4})p_4(t) \\ X_{21}(\omega_{mn1})p_1(t) + X_{22}(\omega_{mn2})p_2(t) + X_{23}(\omega_{mn3})p_3(t) + X_{24}(\omega_{mn4})p_4(t) \\ X_{31}(\omega_{mn1})p_1(t) + X_{32}(\omega_{mn2})p_2(t) + X_{33}(\omega_{mn3})p_3(t) + X_{34}(\omega_{mn4})p_4(t) \\ X_{41}(\omega_{mn1})p_1(t) + X_{42}(\omega_{mn2})p_2(t) + X_{43}(\omega_{mn3})p_3(t) + X_{44}(\omega_{mn4})p_4(t) \end{pmatrix}$$

$$m = 1,2,3 \dots, \infty. n = 1,2,3, \dots, \infty. \quad (5.2.14)$$

Овако добијене функције времена могу се заменити у претпостављена решења (5.1.2-5.1.5) која сада представљају општа решења принудних непригушених малих трансверзалних осцилација разматраног нано-система

$$w_1(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) [X_{11}(\omega_{1mn})p_1(t) + X_{12}(\omega_{2mn})p_2(t) + X_{13}(\omega_{3mn})p_3(t) + X_{14}(\omega_{4mn})p_4(t)], \quad (5.2.15)$$

$$u_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) [X_{21}(\omega_{1mn})p_1(t) + X_{22}(\omega_{2mn})p_2(t) + X_{23}(\omega_{3mn})p_3(t) + X_{24}(\omega_{4mn})p_4(t)], \quad (5.2.16)$$

$$v_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) [X_{31}(\omega_{1mn})p_1(t) + X_{32}(\omega_{2mn})p_2(t) + X_{33}(\omega_{3mn})p_3(t) + X_{34}(\omega_{4mn})p_4(t)], \quad (5.2.17)$$

$$w_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) [X_{41}(\omega_{1mn})p_1(t) + X_{42}(\omega_{2mn})p_2(t) + X_{43}(\omega_{3mn})p_3(t) + X_{44}(\omega_{4mn})p_4(t)],$$

$$m = n = 1, 2, 3 \dots, \infty, \quad (5.2.18)$$

### 5.3. Принудне пригушене осцилације спрегнуте нано-плоче и нано-љуске

У овом подпоглављу анализирани су принудне пригушене осцилације разматраног нано-система. Пригушење је остварено помоћу Rayleigh-евог типа пропорционалног пригушења дефинисаног коефицијентима  $\alpha$  и  $\beta$ , односно матрица пригушења је линеарна комбинација матрице масе  $\beta \mathbf{M}$  и матрице крутости  $\alpha \mathbf{K}$ , (*Kelly, S. G., 2012*).

Узимајући у обзир диференцијалне једначине нано-плоче (5.1) и нано-љуске (5.2 – 5.4), диференцијалне једначине временских модова малих трансверзалних осцилација, које описују принудно осциловање пригушеног посматраног нано-система се могу приказати у следећој матричној форми

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{W}_{mn1}(t) \\ \ddot{U}_{mn2}(t) \\ \ddot{V}_{mn2}(t) \\ \ddot{W}_{mn2}(t) \end{Bmatrix} \\ & + \left( \alpha \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \tilde{\kappa}_w \\ 0 & s_2 & s_3 & s_4 \\ 0 & s_6 & s_5 & s_7 \\ \tilde{\kappa}_w & s_9 & s_{10} & s_8 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{W}_{mn1}(t) \\ \dot{U}_{mn2}(t) \\ \dot{V}_{mn2}(t) \\ \dot{W}_{mn2}(t) \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \tilde{\kappa}_w \\ 0 & s_2 & s_3 & s_4 \\ 0 & s_6 & s_5 & s_7 \\ \tilde{\kappa}_w & s_9 & s_{10} & s_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn1}(t) \\ U_{mn2}(t) \\ V_{mn2}(t) \\ W_{mn2}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f - (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.3.1) \end{aligned}$$

Помоћу уведеног Rayleigh-евог типа пропорционалног пригушења, једначине (5.3.1) се могу записати у поједностављенијој форми

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{S}}\} + (\alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M})\{\dot{\mathbf{S}}\} + \mathbf{K}\{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{F}\}. \quad (5.3.2)$$

Решавање ове једначине такође је спроведено поступком модалне анализе приказане у литератури (*Kelly, S. G., 2012*).

Систему нехомогених диференцијалних једначина (5.3.1) или (5.3.2) одговарају генерализане координате  $\{\mathbf{S}\}$  које се могу свести на систем главних координата  $p_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , увођењем модалне матрице  $\mathbf{P}$  чије колоне представљају нормализоване основне облике осциловања приказане у (5.2.4).

Поменуто је код непригушених принудних осцилација посматраног нано-система, да је трансформација (5.2.5) еквивалентна линеарној трансформацији између генерализаних и главних координата система помоћу (5.2.6).

Заменом једначине (5.2.5) у (5.3.2), као и скаларним обостраним множењем са  $X_k$ , за произвољно одговарајући мод  $k = 1, 2, 3, 4$  добија се

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \ddot{p}_j(t) (X_j M X_k) + \sum_{j=1}^4 \dot{p}_j(t) [\alpha (X_j K X_k) + \beta (X_j M X_k)] \\ + \sum_{j=1}^4 p_j(t) (X_j K X_k) = (X_k F). \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Коришћењем услова ортогоналности основних облика, добија се по један члан за сваку од сума и који је различит од нуле за  $k = j$ . С обзиром да су основни облици осциловања нормализовани, једначина (5.3.3) се може записати као

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 \ddot{p}_k(t) (X_k X_k)_M + \sum_{k=1}^4 \dot{p}_k(t) [\alpha (X_k X_k)_K + \beta (X_k X_k)_M] \\ + \sum_{k=1}^4 p_k(t) (X_k X_k)_K = (X_k F). \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Једначина (5.3.4) се може представити у облику

$$\ddot{p}_k(t) + 2\zeta_k \dot{p}_k(t) + \omega_{mn_k}^2 p_k(t) = g_k(t), \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (5.3.5)$$

где је

$$\zeta_k = \frac{1}{2} (\alpha \omega_{mn_k}^2 + \beta), \quad (5.3.6)$$

Оптерећење  $\{F\}$  приказано изразом (5.2.3), представљено је као равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење у облику

$$f(x, y, t) = F_0 \cos(\Omega t). \quad (5.3.7)$$

Заменом (5.3.7) у израз (5.2.3), добија се

$$\mathbf{F} = \{F\} \cos(\tilde{\Omega}t) = \begin{Bmatrix} f - (e_0 \tilde{a})^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos(\Omega t). \quad (5.3.8)$$

Једначина (5.3.5) се може написати у облику

$$\ddot{p}_k(t) + 2\zeta_k \dot{p}_k(t) + \omega_{mn_k}^2 p_k(t) = h_k \cos(\Omega t), \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (5.3.9)$$

где је

$$h_k = (\mathbf{Q}_k \mathbf{F}_0). \quad (5.3.10)$$

Опште решење нехомогене линеарне једначине другог реда (5.3.9), се може изразити у облику

$$p_k(t) = p_{kh}(t) + p_{kp}(t), \quad (5.3.11)$$

где су  $p_{kh}(t)$  и  $p_{kp}(t)$  хомогена и партикуларна решења једначине (5.3.9).

Свака нехомогена једначина (5.3.9) има одговарајућу хомогену једначину

$$\ddot{p}_k(t) + 2\zeta_k \dot{p}_k(t) + \omega_{mn_k}^2 p_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (5.3.12)$$

Хомогено решење се претпоставља у следећем облику

$$p_{kh} = (A \cos \vartheta t + B \sin \vartheta t) e^{-\zeta_k t}, \quad (5.3.13)$$

где је

$$\vartheta = \sqrt{\omega_{mn_k}^2 - \zeta_k^2}, \quad (5.3.14)$$

а  $A$  и  $B$  су произвољне константе добијене из почетних услова.

На основу нехомогеног члана  $h_k \cos(\Omega t)$  приказаног у једначини (5.3.9) се може предвидети облик функције којом би се одредило решење  $p_{kp}$

$$p_{kp} = C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t), \quad (5.3.15)$$

где су  $C$  и  $D$  коефицијенти који се одређују на следећи начин. Заменом  $\dot{p}_{kp}$  и  $\ddot{p}_{kp}$  у једначину (5.3.9), добијају се две једначине

$$(\omega_{mn_k}^2 - \Omega^2)C + 2\zeta_k \Omega D = h_k, \quad (5.3.16)$$

$$-2\zeta_k \Omega C + (\omega_{mn_k}^2 - \Omega^2)D = 0. \quad (5.3.17)$$

Из система једначина (5.3.16) и (5.3.17), одређују се коефицијенти

$$C = \frac{h_k(\omega_{mn_k}^2 - \Omega^2)}{(\omega_{mn_k}^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_k^2 \Omega^2} = N \cos \varphi, \quad (5.3.18)$$

$$D = \frac{2h_k \zeta_k \Omega}{(\omega_{mn_k}^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_k^2 \Omega^2} = N \sin \varphi, \quad (5.3.19)$$

где је  $N$  амплитуда осцилације.

Из једначина (5.3.18) и (5.3.19) одређују се непознате  $N$  и  $\varphi$

$$N = \frac{h_k}{\sqrt{(\omega_{mn_k}^2 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_k^2 \Omega^2}}, \quad (5.3.20)$$

и

$$\varphi = \arctg \frac{2\zeta_k \Omega}{(\omega_{mn_k}^2 - \Omega^2)}. \quad (5.3.21)$$

Партикуларно и опште решење је

$$p_{kp} = N \cos(\Omega t - \varphi). \quad (5.3.22)$$

$$p_k(t) = (A \cos \vartheta t + B \sin \vartheta t) e^{-\zeta_k t} + N \cos(\Omega t - \varphi). \quad (5.3.23)$$



За произвољне почетне услове  $p_k(0) = p_{k0}$  и  $\dot{p}_k(0) = \dot{p}_{k0}$ , могуће је добити преостале константе  $A$  и  $B$

$$A = p_{k0} - N \cos \varphi, \quad (5.3.24)$$

$$B = \frac{\dot{p}_{k0} + \zeta_k p_{k0}}{\vartheta} - \frac{N}{\vartheta} (\zeta_k \cos \varphi + \Omega \sin \varphi). \quad (5.3.25)$$

Након замене константи  $A$  и  $B$  у (5.3.23), добија се опште решење једначине (5.3.9) у следећем облику

$$p_k(t) = \left( p_{k0} \cos \vartheta t + \frac{\dot{p}_{k0} + \zeta_k p_{k0}}{\vartheta} \sin \vartheta t \right) e^{-\zeta_k t} - \left[ \cos \varphi \cos \vartheta t + \frac{(\zeta_k \cos \varphi + \Omega \sin \varphi)}{\vartheta} \sin \vartheta t \right] N e^{-\zeta_k t} + N \cos(\Omega t - \varphi), \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (5.3.26)$$

Заменом решења (5.3.26) у једначину (5.2.6) добијају се временске функције у облику (5.2.14).

Овако добијене функције (5.2.14) могу се заменити у (5.1.2-5.1.5), па решења принудних пригушених малих трансверзалних осцилација разматраног нано-система добијају облик (5.2.15 - 5.2.18).

## 5.4. Нумеричка анализа

Ово поглавље је подељено у три дела. У првом делу анализирају се природне фреквенције представљеног нано-система. У циљу валидације, добијени резултати природних фреквенција при занемаривању утицаја нелокалног параметра и радијуса кривине су поређени са резултатима природних фреквенција из рада ([Oniszczyk, Z., 2000b, 2004](#)).

У другом делу су представљени резултати слободних осцилација нано-система из **Поглавља 5.1.**

У трећем делу је приказана детаљна анализа принудних малих трансверзалних осцилација нано-система из *Поглавља 5.2* и *5.3*. За материјалне и геометријске параметре користе се вредности из *Табеле 5.1*. Разматрани су утицаји нелокалног параметра, радијуса кривине, амплитуде побуђене силе и коефицијената пропорционалности пригушења на трансверзална померања средње тачке нано-система.

### 5.4.1. Анализа природне фреквенције осциловања нано-система

За материјалне и геометријске карактеристике дате у *Табели 5.1*, природне фреквенције разматраног нано-система  $\omega_{mnk}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , ( $\omega_{mn_1} < \omega_{mn_2} < \omega_{mn_3} < \omega_{mn_4}$ ) су приказане у *Табели 5.4.1.1*. Вредности природних фреквенција представљеног нано-система означене су са  $\omega_{mn_1}$ ,  $\omega_{mn_2}$ ,  $\omega_{mn_3}$ ,  $\omega_{mn_4}$ , за прва три сопствена мода  $m, n = 1, 2, 3$ . У *Табели 5.4.1.1* приказано је поређење вредности природних фреквенција услед промене нелокалног параметра. Примећује се да веће вредности нелокалног параметра смањују вредност природних фреквенција.

Општи облици осциловања спрегнутих плоча приказани су у раду (*Oniszczyk, Z., 2000b, 2004*). Претпоставља се да је нелокални параметар једнак нули, да радијуси закривљености двострано закривљене плитке љуске теже бесконачности,  $R_1 = R_2 \rightarrow \infty$  и  $A_{11} = A_{12} = A_{22} = A_{66} = 0$ . Тада се систем од четири спрегнуте диференцијалне једначине (5.1)- (5.2, 5.3 и 5.4) своди на систем од две спрегнуте диференцијалне једначине, које представљају законе малих трансверзалних померања две еластично спрегнуте плоче (*Oniszczyk, Z., 2000b, 2004*). На овај начин је разматрани нано-систем сведен на систем од две нано-плоче међусобно повезане Winkler-овим еластичним слојем.

Вредности природних фреквенција посматраног нано-система су упоређене са резултатима из рада (*Oniszczyk, Z., 2000b, 2004*). У једначинама (5.1) и (5.2, 5.3 и 5.4) коришћене су вредности геометријских и материјалних параметара из рада (*Oniszczyk, Z., 2000b, 2004*). Занемаривањем нелокалног параметра и под претпоставком да радијуси закривљености плитке љуске теже бесконачности, добија се веома добро поклапање резултата са вредностима фреквенција из рада (*Oniszczyk, Z., 2000b, 2004*), *Табела 5.4.1.2*.

**Табела 5.4.1.1** Природне фреквенције еластично спрегнуте нано-плоче и нано-љуске  $\omega_{mnk}$  у  $\frac{rad}{s}$ ,  $k = 1,2,3,4$ , за  $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_2 = 150 \text{ nm}$

		$e_0 \tilde{a} = 1 \text{ nm}$			
		$\omega_{mn_1}$	$\omega_{mn_2}$	$\omega_{mn_3}$	$\omega_{mn_4}$
$m = 1$	$n = 1$	$4.61953 \times 10^{11}$	$2.99085 \times 10^{12}$	$7.38604 \times 10^{12}$	$1.21507 \times 10^{13}$
	$n = 2$	$9.31595 \times 10^{11}$	$2.30851 \times 10^{12}$	$1.03814 \times 10^{13}$	$1.64871 \times 10^{13}$
	$n = 3$	$1.46995 \times 10^{12}$	$2.15757 \times 10^{12}$	$1.15336 \times 10^{13}$	$1.82203 \times 10^{13}$
$m = 2$	$n = 1$	$5.70087 \times 10^{11}$	$5.67846 \times 10^{12}$	$6.99782 \times 10^{12}$	$1.36309 \times 10^{13}$
	$n = 2$	$1.01025 \times 10^{12}$	$4.20984 \times 10^{12}$	$1.01672 \times 10^{13}$	$1.67344 \times 10^{13}$
	$n = 3$	$1.52519 \times 10^{12}$	$3.45108 \times 10^{12}$	$1.13942 \times 10^{13}$	$1.82509 \times 10^{13}$
$m = 3$	$n = 1$	$7.34647 \times 10^{11}$	$6.85678 \times 10^{12}$	$7.19172 \times 10^{12}$	$1.51839 \times 10^{13}$
	$n = 2$	$1.13034 \times 10^{12}$	$5.94912 \times 10^{12}$	$9.69245 \times 10^{12}$	$1.71264 \times 10^{13}$
	$n = 3$	$1.61201 \times 10^{12}$	$4.78913 \times 10^{12}$	$1.11226 \times 10^{13}$	$1.83239 \times 10^{13}$
		$e_0 \tilde{a} = 2 \text{ nm}$ ,			
		$\omega_{mn_1}$	$\omega_{mn_2}$	$\omega_{mn_3}$	$\omega_{mn_4}$
$m = 1$	$n = 1$	$3.84471 \times 10^{11}$	$2.07360 \times 10^{12}$	$5.08588 \times 10^{12}$	$8.36769 \times 10^{12}$
	$n = 2$	$5.86577 \times 10^{11}$	$1.35492 \times 10^{12}$	$5.97785 \times 10^{12}$	$9.49374 \times 10^{12}$
	$n = 3$	$8.24879 \times 10^{11}$	$1.19378 \times 10^{12}$	$6.20668 \times 10^{12}$	$9.80507 \times 10^{12}$
$m = 2$	$n = 1$	$4.33619 \times 10^{11}$	$3.68099 \times 10^{12}$	$4.50109 \times 10^{12}$	$8.78749 \times 10^{12}$
	$n = 2$	$6.24265 \times 10^{11}$	$2.40523 \times 10^{12}$	$5.77111 \times 10^{12}$	$9.49987 \times 10^{12}$
	$n = 3$	$8.54911 \times 10^{11}$	$1.86919 \times 10^{12}$	$6.1067 \times 10^{12}$	$9.78197 \times 10^{12}$
$m = 3$	$n = 1$	$5.04771 \times 10^{11}$	$4.25083 \times 10^{12}$	$4.25083 \times 10^{12}$	$9.17758 \times 10^{12}$
	$n = 2$	$6.77858 \times 10^{11}$	$3.33059 \times 10^{12}$	$5.40006 \times 10^{12}$	$9.54656 \times 10^{12}$
	$n = 3$	$8.95666 \times 10^{11}$	$2.56714 \times 10^{12}$	$5.92601 \times 10^{12}$	$9.76398 \times 10^{12}$
		$e_0 \tilde{a} = 3 \text{ nm}$ ,			
		$\omega_{mn_1}$	$\omega_{mn_2}$	$\omega_{mn_3}$	$\omega_{mn_4}$
$m = 1$	$n = 1$	$3.44521 \times 10^{11}$	$1.53112 \times 10^{12}$	$3.71222 \times 10^{12}$	$6.10881 \times 10^{12}$
	$n = 2$	$4.49233 \times 10^{11}$	$9.63276 \times 10^{11}$	$4.11125 \times 10^{12}$	$6.52950 \times 10^{12}$
	$n = 3$	$5.85347 \times 10^{11}$	$8.49677 \times 10^{11}$	$4.19978 \times 10^{12}$	$6.63473 \times 10^{12}$
$m = 2$	$n = 1$	$3.73072 \times 10^{11}$	$2.64494 \times 10^{12}$	$3.19060 \times 10^{12}$	$6.25442 \times 10^{12}$
	$n = 2$	$4.78425 \times 10^{11}$	$1.66611 \times 10^{12}$	$3.95389 \times 10^{12}$	$6.50982 \times 10^{12}$
	$n = 3$	$6.15194 \times 10^{11}$	$1.28667 \times 10^{12}$	$4.12822 \times 10^{12}$	$6.61318 \times 10^{12}$
$m = 3$	$n = 1$	$4.11932 \times 10^{11}$	$2.96932 \times 10^{12}$	$2.96932 \times 10^{12}$	$6.39772 \times 10^{12}$
	$n = 2$	$5.11162 \times 10^{11}$	$2.2887 \times 10^{12}$	$3.68065 \times 10^{12}$	$6.51242 \times 10^{12}$
	$n = 3$	$6.42609 \times 10^{11}$	$1.75086 \times 10^{12}$	$4.00041 \times 10^{12}$	$6.59264 \times 10^{12}$

**Табела 5.4.1.2** Упоређивање природних фреквенција  $\omega_{mnk}$  *in*  $\frac{rad}{s}$ ,  $k = 1, 2$ , еластично спрегнутих плоча из рада (Oniszczyk, Z., 2000b, 2004), за прва три мода осциловања, са фреквенцијама представљеног нано-система, када је  $(e_0\tilde{a}) = \mu = 0$  и  $R_1 = R_2 \rightarrow \infty$ .

		(Oniszczyk, Z., 2000b, 2004)		Представљен модел $\mu = 0$ и $R_1 = R_2 \rightarrow \infty$	
		$\omega_{mn1}$	$\omega_{mn2}$	$\omega_{mn1}$	$\omega_{mn2}$
$m = 1$	$n = 1$	52.8	72.0	52.7975095047	72.0248360629
	$n = 2$	84.5	97.7	84.4760152075	97.6534543441
	$n = 3$	137.3	145.8	137.2735247122	145.7532867105
$m = 2$	$n = 1$	179.5	186.1	179.5115323161	186.0763021839
	$n = 2$	211.2	216.8	211.1900380189	216.7976756296
	$n = 3$	264.0	268.5	263.9875475236	268.4947397018
$m = 3$	$n = 1$	390.7	393.8	390.7015703349	393.7609897669
	$n = 2$	422.4	425.2	422.3800760378	425.2116280556
	$n = 3$	475.2	477.7	475.1775855425	477.6962819637

**Табела 5.4.1.3** Упоређивање вредности природних фреквенција  $\Omega_k = \omega_{mnk} R_1 \sqrt{\frac{\rho(1-\vartheta_{12}\vartheta_{21})}{E_1}}$  плитких сферичних љуски за  $R_1/R_2 = 1$ ,  $a/b = 1$ ,  $\frac{R_1}{h} = 25$ ,  $E_y/E_x = 0.75$ ,  $G_{xy}/E_x = 0.2$ ,  $\nu_{xy} = \nu_{yx} = 0.3$ ,  $(e_0\tilde{a}) = 0 \text{ nm}^2$ ,  $a/R_1 = 0.2$ .

	(Ghavanloo, E., и Fazelzadeh, S. A., 2013)	Представљени модел
$\Omega_1$	5.0843	5.2304
$\Omega_2$	12.2689	12.3081
$\Omega_3$	13.4459	13.5241
$\Omega_4$	20.1542	20.4447

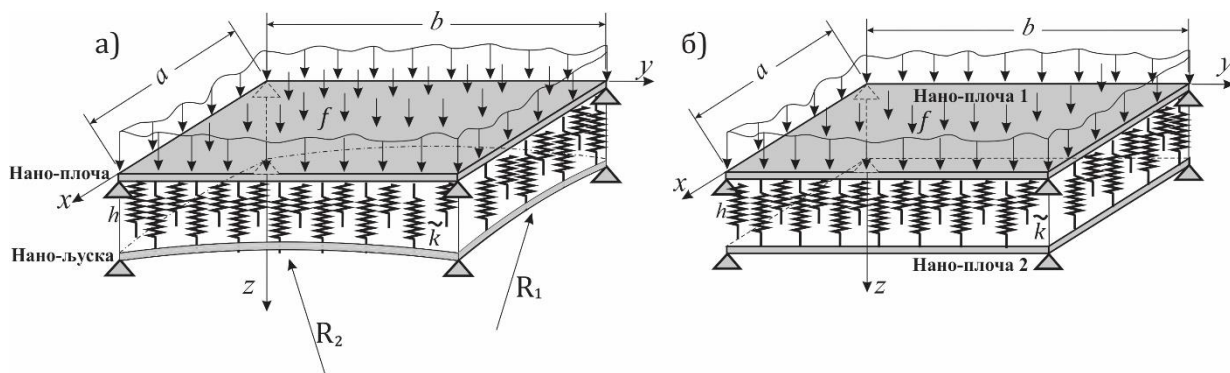
Када би се изоставила нано-љуска и еластични слој, вредност сопствене фреквенције нано-плоче се може користити за поређење са резултатима сопствене фреквенције једнослојног графенског листића, симулацијом молекуларне динамике из рада (Ansari, R. и сарадници 2010) као што је показано у **Поглављу 4, Табели 4.3.1.3.**

Када би се изоставила горња нано-плоча и еластични слој, вредности природних фреквенција нано-љуске се могу поредити са резултатима из рада (*Ghavanloo, E., u Fazelzadeh, S. A., 2013*), Табела 5.4.1.3. Из Табеле 5.4.1.3 се може уочити да су вредности природних фреквенција приближне вредностима добијених у раду (*Ghavanloo, E., u Fazelzadeh, S. A., 2013*). Разлика у вредностима се појављује због примене Градијентне теорије еластичности у раду (*Ghavanloo, E., u Fazelzadeh, S. A., 2013*).

## 5.4.2. Анализа слободних осцилација нано-система

У овом поглављу је приказана анализа слободних осцилација нано-система сачињеног од еластично спрегнуте нано-плоче и нано-љуске, Слика 5.4.2.1а и нано-система сачињеног од еластично спрегнуте две нано-плоче, Слика 5.4.2.1б. Оба нано-система су спрегнута слојем Winkler-овог типа и имају исте материјалне и геометријске карактеристике, с тим што је нано-љуска моделирана као плитка и обострано закривљена и има радијусе кривине  $R_1$  и  $R_2$ .

Главни циљ овог истраживања је анализа очекиване појаве смањења амплитуде осциловања побуђене нано-плоче код наносистема плоча-љуска у поређењу са наносистемом плоча-плоча.



Слика 5.4.2.1 Нано-системи спрегнути слојем Winkler-овог типа

а) еластично спрегнути нано-систем састављен од нано-плоче и нано-љуске

б) еластично спрегнути нано-систем састављен од две нано-плоче

За прва три облика (мода) осциловања приказане су контуре и максималне вредности амплитуда слободних осцилација нано-система.

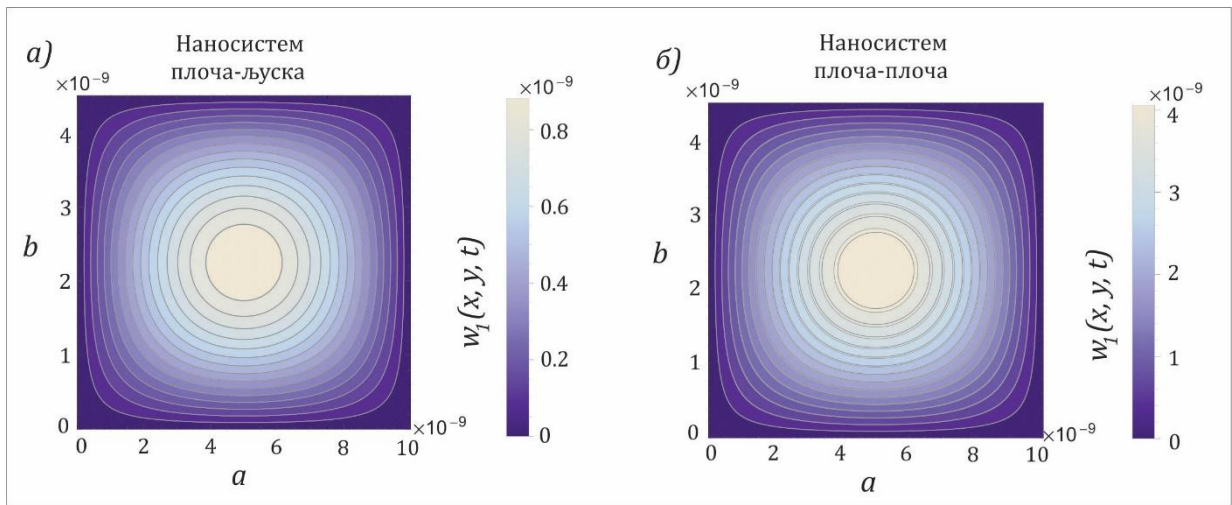
Упоредивање вредности слободних малих трансверзалних померања средње равни нано-плоче наносистема плоча-љуска, са слободним малим трансверзалним померањем наносистема плоча-плоча, приказано је на **Сликама 5.4.2.2 и 5.4.2.3**. На **Слици 5.4.2.2а** се могу видети контуре и максимална вредност амплитуде код слободног осциловања нано-плоче код наносистема плоча-љуска. Док се на **Слици 5.4.2.2б** могу видети контуре и максимална вредност амплитуде код слободног осциловања горње нано-плоче код наносистема плоча-плоча. Примећује се да је вредност амплитуде осциловања горње нано-плоче код наносистема плоча-љуска, нижа од вредности амплитуде осциловања горње нано-плоче код наносистема плоча-плоча. За полупречнике кривине плитке нано-љуске узето је да  $R_1 \rightarrow \infty$  и да је  $R_2 = 150 \text{ nm}$ .

Слична запажања приказана су и на **Слици 5.4.2.3**, где су вредности полупречника кривине плитке нано-љуске  $R_1 \rightarrow \infty$  и  $R_2 = 450 \text{ nm}$ .

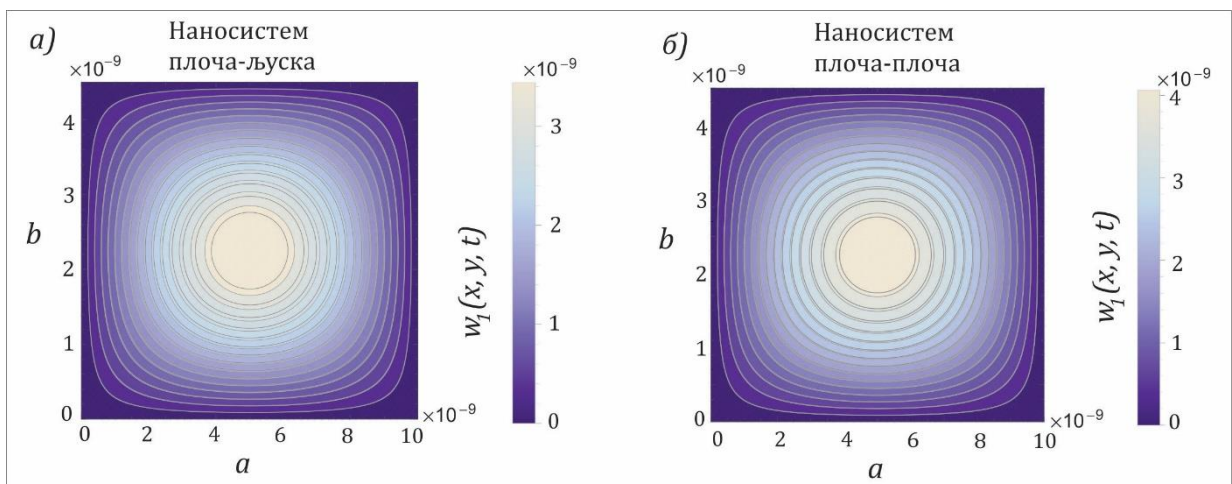
Вредности амплитуде осциловања (реда величине  $0,8 \cdot 10^{-9}$ ) горње нано-плоче са **Слике 5.4.2.2а** упоређене су са вредношћу амплитуде (реда величине  $3 \cdot 10^{-9}$ ) горње нано-плоче са **Слике 5.4.2.3а** нано-система плоча-љуска. Уочено је да се са повећањем радијуса кривине са  $R_2 = 150 \text{ nm}$  (**Слика 5.4.2.2а**) на  $R_2 = 450 \text{ nm}$  (**Слика 5.4.2.3а**) повећава вредност амплитуде осциловања горње нано-плоче наносистема плоча-љуска. Вредност амплитуде осциловања горње нано-плоче (реда величине  $0,8 \cdot 10^{-9}$ ) код наносистема плоча-љуска са радијусом кривине  $R_2 = 150 \text{ nm}$  (**Слика 5.4.2.2а**) је мања од вредности амплитуде осциловања горње нано-плоче (реда величине  $3 \cdot 10^{-9}$ ) код наносистема плоча-љуска са радијусом кривине  $R_2 = 450 \text{ nm}$ , (**Слика 5.4.2.3а**). Можемо закључити да се са повећањем полупречника кривине (када и  $R_2 \rightarrow \infty$ ) приближавамо случају система плоча-плоча, док у случају када постоји радијус кривине слободна трансверзална померања горње нано-плоче су мања.

На **Слици 5.4.2.4** приказана су мала трансверзална померања слободних осцилација на средини плоче(љуске) наносистема плоча-љуска и наносистема плоча-плоча. Сивом бојом приказане су амплитуде малих трансверзалних осцилација наносистема плоча-плоча, док су плавом бојом приказане амплитуде наносистема плоча-љуска. На **Слици 5.4.2.4а** поређене су амплитуде слободних осцилација горњих нано-

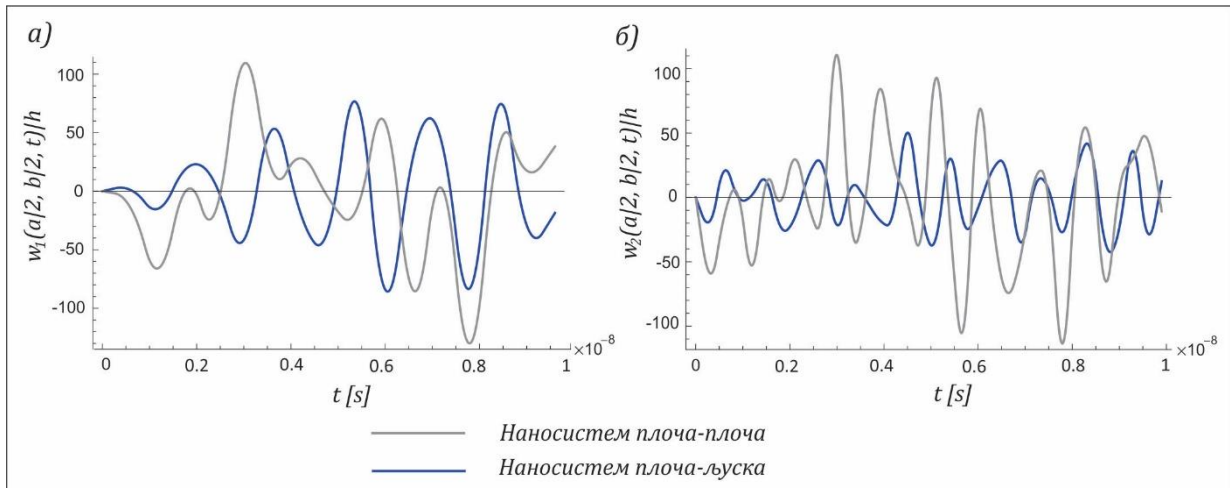
плоча наносистема плоча-љуска и наносистема плоча-плоча. Вредности радијуса кривине нано-љуске су  $R_1 \rightarrow \infty$  и  $R_2 = 450 \text{ nm}$ . Са **Слике 5.4.2а** уочава се смањење амплитуде осциловања горње нано-плоче код наносистема плоча-љуска. Поређење вредности амплитуда слободних осцилација нано-љуске код наносистема плоча-љуска са доњом нано-плочом наносистема плоча-плоча, приказано је на **Слици 5.4.2б**. Као што је очекивано, амплитуда осциловања нано-љуске за наносистем плоча-љуска је мања у поређењу са амплитудом осциловања нано-плоче наносистема плоча-плоча.



**Слика 5.4.2.2** Контуре и вредности трансверзалних померања слободних осцилација за  $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_2 = 150 \text{ nm}$ , а) наносистем плоча-љуска, б) наносистем плоча-плоча



**Слика 5.4.2.3** Контуре и вредности трансверзалних померања слободних осцилација за  $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_2 = 450 \text{ nm}$ , а) наносистем плоча-љуска, б) наносистем плоча-плоча



**Слика 5.4.2.4** Трансверзално померање нано-система у временском домену

- а) Упоредивање амплитуда горњих нано-плоча код оба анализирана наносистема,  
 б) Упоредивање амплитуда доње нано-љуске код наносистема плоча-љуска са доњом нано-плочом наносистема плоча-плоча

### 5.4.3. Анализа принудних осцилација нано-система

У овом делу је дата анализа принудних осцилација наносистема еластично спрегнуте нано-плоче и нано-љуске, **Слика 5.4.2.1а** и наносистема сачињеног од две еластично спрегнуте нано-плоче, **Слика 5.4.2.1б**. Оба система су повезана Winkler-овим еластичним слојем. Као и у претходној анализи, оба нано елемената имају исте материјалне и геометријске карактеристике, с тим што је нано-љуска моделирана као плитка и обострано закривљена, радијуса кривина  $R_1$  и  $R_2$ .

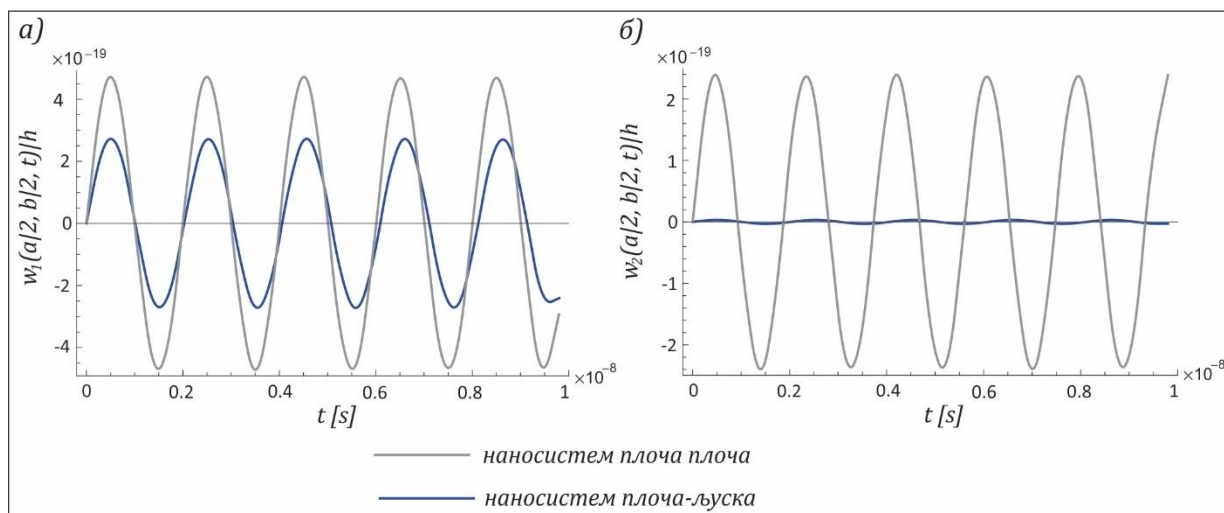
Горњи нано-елементи наносистема плоча-љуска и наносистема плоча-плоча оптерећени су континуално распоређеним површинским оптерећењем  $F_0 \cos(\Omega t)$ , где је  $F_0 = 10$  nN магнитуда побуде и  $\Omega = 0.8\omega_1$  фреквенција побуде. Вредности коефицијената пропорционалности пригушења су  $\alpha = \beta = 1$  nNs/m.

Разматран је утицај промене различитих параметара у наносистему, на мала трансверзална померања средње тачке нано-плоче и нано-љуске у времену за прва три мода осциловања.



Поређење вредности амплитуда малих трансверзалних осцилација наносистема плоча-љуска и плоча-плоча приказано је на **Слици 5.4.3.1**. Мала трансверзална померања наносистема плоча-плоча приказана су сивом бојом, док су плавом приказана за наносистем плоча-љуска. На **Слици 5.4.3.1a** је приказано упоређивање вредности амплитуда малих трансверзалних осцилација нано-плоче код наносистема плоча-љуска са нано-плочом наносистема плоча-плоча. Најважније је напоменути да се при упоређивању вредности амплитуда осциловања горњих елемената наносистема плоча-љуска и наносистема плоча-плоча уочава смањење амплитуде код нано-плоче наносистема плоча-љуска (плава линија). Овим је испуњен један од главних циљева проучавања оваквог нано-система. На **Слици 5.4.3.1** вредности радијуса кривине нано-љуске су  $R_1 \rightarrow \infty$  и  $R_2 = 450 \text{ nm}$ .

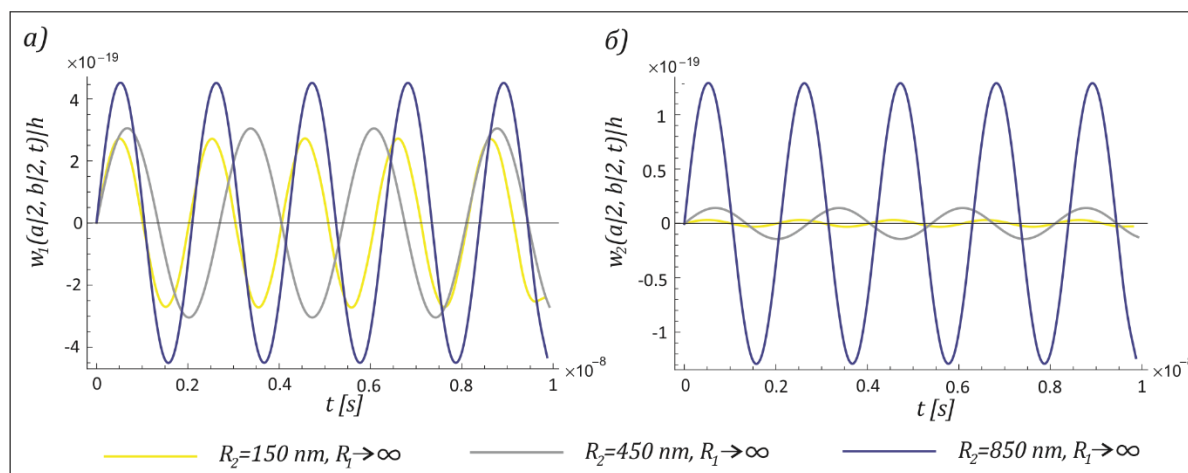
На **Слици 5.4.3.1b** је приказано поређење амплитуда малих трансверзалних померања нано-љуске наносистема плоча-љуска са доњом нано-плочом наносистема плоча-плоча. Примећено је да је вредност амплитуде значајно мања за нано-љуску код наносистема плоча-љуска у поређењу са амплитудом осциловања доње нано-плоче наносистема плоча-плоча.



**Слика 5.4.3.1** Поређење амплитуде осциловања принудних осцилација наносистема плоча-љуска и наносистема плоча-плоча а) горње нано-плоче наносистема плоча-љуска са горњом нано-плочом наносистема плоча-плоча б) доње нано-љуске наносистема плоча-љуска са доњом нано-плочом наносистема плоча-плоча

На **Сликама 5.4.3.2** и **5.4.3.3** су приказани утицаји промене закривљености љуске на померање средње тачке нано-система током времена.

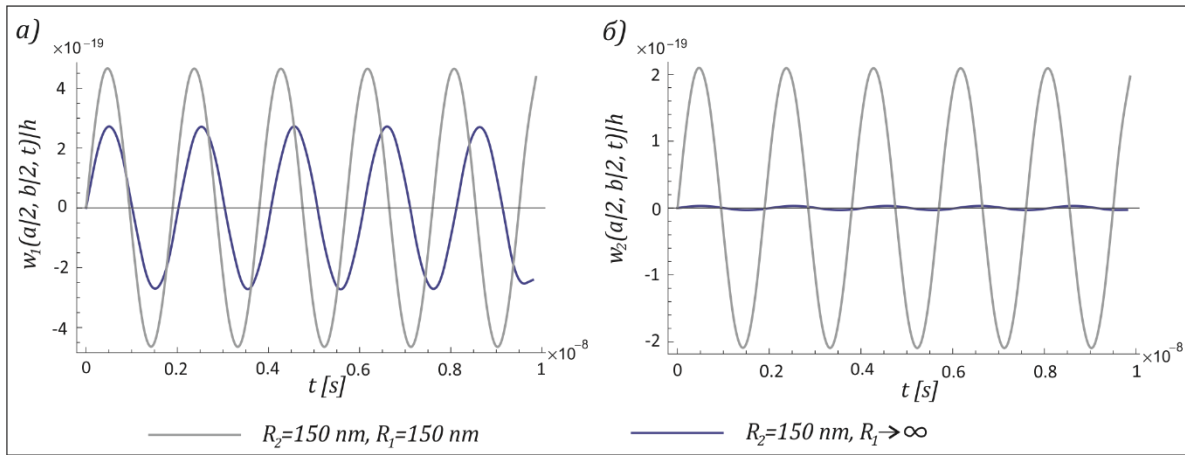
На **Слици 5.4.3.2** су приказани утицаји закривљености нано-љуске на мала трансверзална померања нано-система плоча-љуска. Међане су вредности радијуса кривине  $R_2$  од 150 до 850 nm, док радијус кривине  $R_1$  тежи бесконачности. Ниже вредности радијуса кривине  $R_2$  утичу на смањење вредности амплитуде осциловања и нано-плоче и нано-љуске. Вредност амплитуде осциловања нано-љуске је доста мања са смањењем вредности радијуса кривине, **Слика 5.4.3.2б**, уколико би се упоредила са амплитудом нано-плоче на **Слици 5.4.3.2а**.



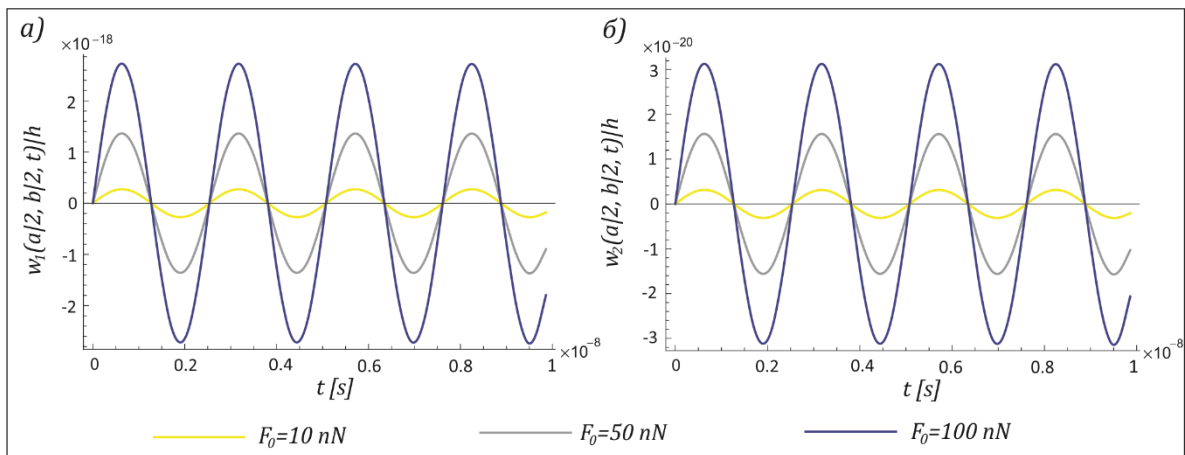
**Слика 5.4.3.2** Утицај радијуса закривљености  $R_2$ , при  $R_1 \rightarrow \infty$ , на мала трансверзална померања а) нано-плоче б) нано-љуске, нано-система плоча-љуска

На **Слици 5.4.3.3** приказан је утицај једностраног и двостраног закривљења плитке нано-љуске на мала трансверзална померања средње равни нано-система плоча-љуска. Трансверзално померање нано-система са једнострано закривљеном нано-љуском је означено плавом бојом, док је сивом бојом означено трансверзално померање нано-система са двострано закривљеном нано-љуском. Са **Слике 5.4.3.3а** се може запазити да је амплитуда осциловања нано-плоче мања код нано-система са једнострано закривљеном нано-љуском. Са **Слике 5.4.3.3б** се такође примећује да је амплитуда осциловања нано-љуске мања код нано-система са једнострано закривљеном нано-љуском.

Закључак је да је амплитуда осциловања мања и за нано-плоче и за нано-љуске код нано-система са једнострано закривљеном нано-љуском.



**Слика 5.4.3.3** Утицај једнострано и двострано закривљене нано-љуске на мала трансверзална померања, а) нано-плоче б) нано-љуске, наносистема плоча-љуска

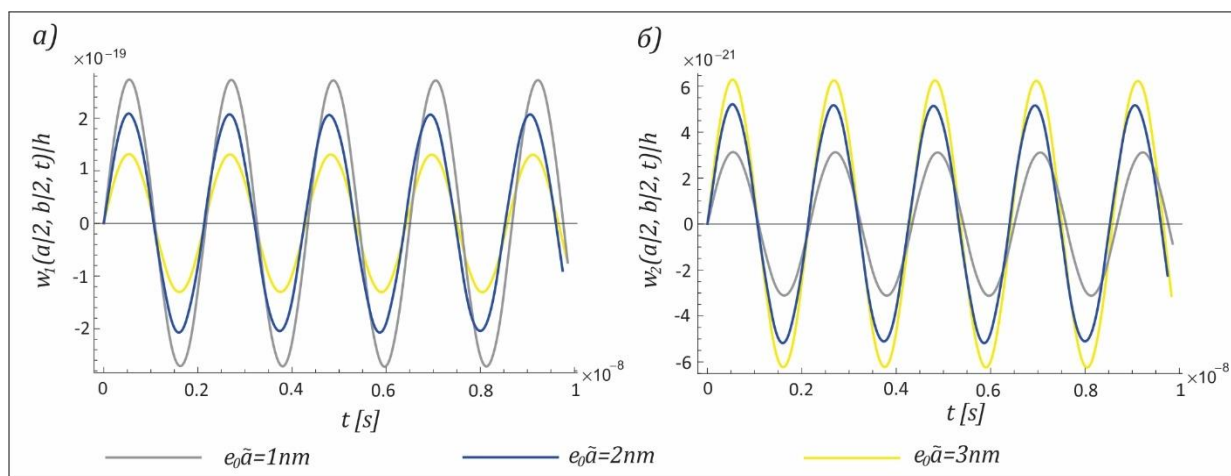


**Слика 5.4.3.4** Утицај промене магнитуде принудне силе на мала трансверзална померања а) нано-плоче б) нано-љуске, наносистема плоча-љуска

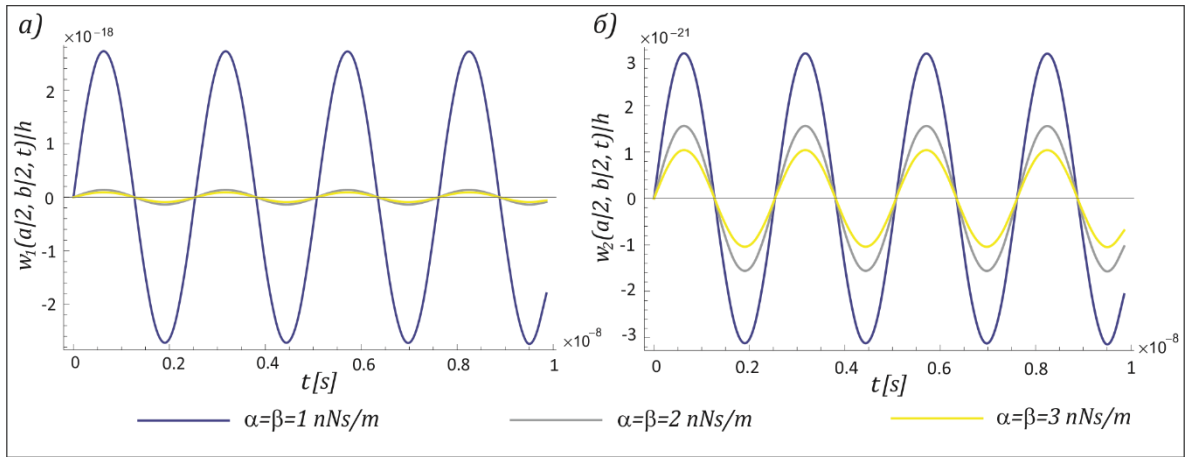
На **Слици 5.4.3.4** се може видети утицај промене магнитуде принудне силе на мала трансверзална померања наносистема плоча-љуска. На **Слици 5.4.3.4а** разматрано је трансверзално померање средње равни нано-плоче и нано-љуске на **Слици 5.4.3.4б**. Међане су вредности магнитуде равномерно распоређеног површинског хармонијског оптерећења  $F_0 = 10 \text{ nN}$ ,  $50 \text{ nN}$  и  $100 \text{ nN}$ . Примећује се да повећање вредности магнитуде спољашњег оптерећења повећава амплитуду осциловања и нано-плоче и нано-љуске наносистема плоча-љуска.

Утицај нелокалног параметра на мала трансверзална померања наносистема плоча-љуска приказан је на **Слици 5.4.3.5**. Мала трансверзална померања нано-плоче приказана су на **Слици 5.4.3.5а**, док су за нано-љуску приказана на **Слици 5.4.3.5б**. Уочава се да амплитуда осциловања нано-плоче наносистема плоча-љуска опада са порастом нелокалног параметра, **Слика 5.4.3.5а**. Док се са **Слике 5.4.3.5б** може видети да вредност амплитуде нано-љуске наносистема плоча-љуска расте са порастом нелокалног параметра. Слична запажања уочена су и у раду ([Arefi, M., 2018](#)).

Утицаји коефицијената пропорционалности пригушења на мала трансверзална померања наносистема плоча-љуска, се могу видети на **Слици 5.4.3.6**. Трансверзално померање нано-плоче услед промене вредности коефицијената пропорционалности пригушења приказано је на **Слици 5.4.3.6а**. Трансверзално померање нано-љуске приказано је на **Слици 5.4.3.6б**. Уочава се да пораст коефицијената пропорционалности пригушења смањује вредност амплитуде трансверзалних осцилација код оба нано-елемента наносистема плоча-љуска.



**Слика 5.4.3.5** Утицај нелокалног параметра на мала трансверзална померања  
 а) нано-плоче б) нано-љуске, наносистема плоча-љуска



*Слика 5.4.3.6 Утицај коефицијента пропорционалности пригушења на мала трансверзална померања а) нано-плоче б) нано-љуске, наносистема плоча-љуска*

## 6. Параметарска анализа принудних осцилација нано-носача

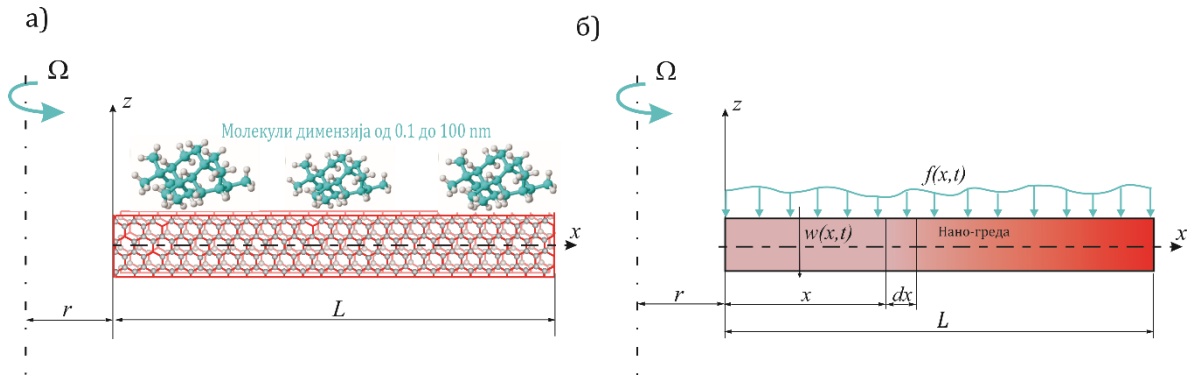
Утицаји различитих параметара на амплитуде осциловања принудних осцилација нано-система су од великог практичног значаја за нано-електро-механичке системе. Утицаји нелокалног параметра и спољашњих оптерећења разматрани су код свих нано-модела у предходним поглављима. У овом поглављу се поред наведених утицаја у разматрање узима параметар угаоне брзине и параметар радијуса главчине. Анализа ових параметара примењује се на нано-систем који је представљен као ротирајући нано-носач, **Слика 6.1.**

Динамика ротирајућег нано-носача, односно ротирајуће нано-греде је од практичног значаја, посебно када се испитује утицај спољашњег оптерећења. Ротирајуће нано-структуре побољшавају своја функционална својства и налазе примену код осовина нано-мотора, тачније хибридованим нано-генераторима са различитим утицајима спољашњих оптерећења, (*Zhang, B. и сарадници 2016*).

Хибридовани нано-генератор ефикасно генерише соларну енергију и енергију ветра и може наћи примену у енергетским и сензорским системима са сопственим напајањем, (*Zhao, X. и сарадници 2021*). Техника прикупљања енергије привукла је пажњу многих истраживача за пројектовање нано-сензора који имају високу чврстоћу, малу тежину, а велику отпорност на спољашње утицаје попут ветра, кише, сунчеве светлости...

Према томе, динамичка анализа ротирајућег нано-носача веома је важна због практичне примене таквих минијатурних и отпорних уређаја.

У овом поглављу се разматра нано-греда дужине  $L$  која је причвршћена у тачки  $O$  на круту главчину. Главчина има радијус  $r$  и константну брзину ротације  $\Omega$ . Нано-греда је под дејством спољашњег оптерећења  $f(x, t)$ , **Слика 6.1.**



Слика 6.1 Ротирајућа нано-греда под утицајем спољашњег оптерећења; а) Физички модел б) Механички модел

Парцијална диференцијална једначина осциловања Euler–Bernoulli-јеве греде дата је једначином (2.1.10). Уколико се у једначину (2.1.10) уведе центрифугална сила  $T(x)$ , диференцијална једначина која описује мала трансверзална померања ротирајуће нано-греде се може написати у облику

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - f(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial w}{\partial x} \right) = (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - f(x, t) \right]. \quad (6.1)$$

Центрифугална сила је облика

$$T(x) = \int_x^L \rho A \Omega^2 (r + x) dx. \quad (6.2)$$

где је  $r = R/2$  радијус,  $\Omega$  брзина главчине.

Решавањем интеграла (6.2) добија се,

$$T(x) = \rho A \Omega^2 \left[ \frac{R}{2} L + \frac{L^2}{2} - \frac{R}{2} x - \frac{x^2}{2} \right] = \rho A \Omega^2 \left[ rL + \frac{L^2}{2} - rx - \frac{x^2}{2} \right]. \quad (6.3)$$

Диференцирањем израза (6.3) одређују се парцијални изводи  $\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial w}{\partial x} \right)$  и  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$  у једначини (6.1)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho A \Omega^2 \left[ (-r - x) \frac{\partial w}{\partial x} + \left( rL + \frac{L^2}{2} - rx - \frac{x^2}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] &= \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \\
&+ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + T \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \\
&= \rho A \Omega^2 \left[ -3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 3(-r-x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left( rL + \frac{L^2}{2} - rx - \frac{x^2}{2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right]. \quad (6.5)
\end{aligned}$$

Заменом парцијалних извода центрифугалне силе (6.4) и (6.5) у једначину (6.1) добија се једначина осциловања ротирајућег нано-носача под утицајем спољашњег оптерећења у облику

$$\begin{aligned}
EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \rho A \Omega^2 \left[ (-r-x) \frac{\partial w}{\partial x} + \left( rL + \frac{L^2}{2} - rx - \frac{x^2}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
+ (e_0 a)^2 \rho A \Omega^2 \left[ -3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 3(-r-x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left( rL + \frac{L^2}{2} - rx - \frac{x^2}{2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right] \\
= f(x, t) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}. \quad (6.6)
\end{aligned}$$

Према једначини (22) из рада ([Han, S. M. u saradnici, 1999](#)), гранични услови ротирајућег носача су једнаки граничним условима конзолно ослоњене греде

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = 0 \quad \text{за } x = 0, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad \text{за } x = L. \quad (6.8)$$

Слободне осцилације ротирајуће конзолне нано-греде разматране су у раду ([Pradhan, S. C. u Murmu, T., 2010](#)), док ће принудне осцилације бити анализирани у овом поглављу докторске дисертације.

У наставку се за решавање једначине (6.6) користити Galerkin-ова метода ([Duncan, W. J., 1937, 1938](#)). Решавање једначине (6.6) са граничним условима (6.7) и (6.8) је у складу са резултатима приказаним у раду ([Pradhan, S. C. u Murmu, T., 2010](#)) и ([Atanasov, M. S., Stojanović, V., 2020](#)).



## 6.1. Методологија решавања

Једначина (6.6) се не може решити стандардним аналитичким поступком у затвореном облику и потребно је извршити одговарајућу дискретизацију. Једна од корисних метода је Galerkin-ова метода (*Duncan, W. J., 1937, 1938*). Решење једначине (6.6) се може написати у следећем облику

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n W_k(x) q_k(t), \quad (6.1.1)$$

где  $k$  представља број линеарних комбинација функције  $w(x, t)$ .  $W_k(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  су функције основних облика осциловања чији облик зависи од посебних граничних услова (6.7) и (6.8), датом у (*Reddy, J. N., 2004*)

$$W_k(x) = \cosh(\tilde{\lambda}_k x) - \cos(\tilde{\lambda}_k x) - \frac{\sinh(\tilde{\lambda}_k L) - \sin(\tilde{\lambda}_k L)}{\cosh(\tilde{\lambda}_k L) + \cos(\tilde{\lambda}_k L)} [\sinh(\tilde{\lambda}_k x) - \sin(\tilde{\lambda}_k x)], \quad (6.1.2)$$

где су  $\tilde{\lambda}_k, k = 1, 2, \dots, n$  корени карактеристичне једначине (*Reddy, J. N., 2004*)

$$1 + \cos(\tilde{\lambda}_k) \cosh(\tilde{\lambda}_k) = 0. \quad (6.1.3)$$

Заменом претпостављеног решења из израза (6.1.1) у једначину (6.6) добија се

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left\{ EI \frac{\partial^4 W_k(x)}{\partial x^4} q_k(t) + \rho A W_k(x) \ddot{q}_k(t) - (e_0 a)^2 \rho A \frac{\partial^2 W_k(x)}{\partial x^2} \ddot{q}_k(t) \right. \\ & - \rho A \Omega^2 \left[ (-r - x) \frac{\partial W_k(x)}{\partial x} + \left( rL + \frac{L^2}{2} - rx - \frac{x^2}{2} \right) \frac{\partial^2 W_k(x)}{\partial x^2} \right] q_k(t) \\ & + (e_0 a)^2 \rho A \Omega^2 \left[ -3 \frac{\partial^2 W_k(x)}{\partial x^2} + 3(-r - x) \frac{\partial^3 W_k(x)}{\partial x^3} \right. \\ & \left. + \left( rL + \frac{L^2}{2} - rx - \frac{x^2}{2} \right) \frac{\partial^4 W_k(x)}{\partial x^4} \right] q_k(t) \left. \right\} = f(x, t) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

или у сажетом облику

$$\sum_{k=1}^n \Psi_k(x, t) = \tilde{f}(x, t). \quad (6.1.5)$$

Сукцесивним множењем једначине (6.1.5) са пробном функцијом (6.1.2) која задовољава граничне услове (6.7), за свако  $k = 1, 2, \dots, n$  и интегралњем од 0 до  $L$ , добија се скуп од  $n$  обичних диференцијалних једначина

$$\int_0^L \left[ \sum_{k=1}^n \Psi_k(x, t) W_1(x) \right] dx = \int_0^L [\tilde{f}(x, t) W_1(x)] dx, \quad (6.1.6)$$

$$\int_0^L \left[ \sum_{k=1}^n \Psi_k(x, t) W_2(x) \right] dx = \int_0^L [\tilde{f}(x, t) W_2(x)] dx, \quad (6.1.7)$$

⋮

$$\int_0^L \left[ \sum_{k=1}^n \Psi_k(x, t) W_n(x) \right] dx = \int_0^L [\tilde{f}(x, t) W_n(x)] dx. \quad (6.1.8)$$

Приказани поступак је за  $k = 1, 2, \dots, n$ , међутим  $n$  се ограничава до 4. реда и нумеричка анализа је приказана за  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Систем диференцијалних једначина малих трансверзалних осцилација (6.1.6), (6.1.7) до (6.1.8) се може представити у матричном облику

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (6.1.9)$$

где су  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$  симетричне  $n \times n$  матрице масе и крутости,  $\mathbf{q}$  је  $n$ -димензионални вектор колоне генерализаних координата и  $\mathbf{F}$  је систем спољашњег оптерећења представљен помоћу

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \left( f(x, t) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \right) W_1(x) dx \\ \int_0^L \left( f(x, t) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \right) W_2(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^L \left( f(x, t) - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \right) W_n(x) dx \end{array} \right\}. \quad (6.1.10)$$

## 6.2. Одређивање природне фреквенције

За одређивање вредности природних фреквенција ротирајуће нелокалне нано-греде коришћен је стандардни поступак модалне анализе из литературе (*Kelly, S. G., 2012*). Разматран је стандардни облик хомогених диференцијалних једначина слободних осцилација у облику

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (6.2.1)$$

Када је систем непригушен, очекује се да су слободне осцилације описане решењем једначине (6.2.1) периодичне. Претпоставља се да су осцилације синхроне. Када су слободне осцилације поједине фреквенце инициране за одређени систем, однос између било које две зависне променљиве не зависи од времена.

На основу наведеног, претпостављено решење једначине (6.2.1) има облик

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}e^{j\omega_n t}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \quad (6.2.2)$$

где је  $\mathbf{Q}$   $m$ -димензионални вектор константе (према облицима осциловања) и  $\omega_n$  је природна фреквенција нано-система. Заменом једначине (6.2.2) у једначину (6.2.1) следи

$$(-\omega_n^2 \mathbf{M}\mathbf{Q} + \mathbf{K}\mathbf{Q})e^{j\omega_n t} = \mathbf{0}. \quad (6.2.3)$$

Пошто је  $e^{j\omega_n t} \neq 0$  за било коју реалну вредност  $t$ , следи да је

$$-\omega_n^2 \mathbf{M} \mathbf{Q} + \mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (6.2.4)$$

Матрица масе није сингуларна, и самим тим  $\mathbf{M}^{-1}$  постоји. Множењем једначине (6.2.4) са  $\mathbf{M}^{-1}$  добија се

$$(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{I}) \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad (6.2.5)$$

где је  $\mathbf{I}$   $n \times n$  јединична матрица. Систем једначина (6.2.5) има нетривијална решења када је детерминанта матрице система једнака нули, тј.

$$\det|\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{I}| = 0. \quad (6.2.6)$$

На основу тога, квадрати сопствених вредности матрице  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$  предстаљају природне фреквенције система  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots, \omega_n$ .

### 6.3. Принудне осцилације непригушеног нано-система

Диференцијалне једначине малих трансверзалних осцилација непригушеног нано-система представљене су једначином (6.1.9). Један од начина за одређивање закона малих трансверзалних осцилација представљеног нано-система је стандардни поступак модалне анализе заснован на главним координатама, као што је детаљно описано у ([Kelly, S. G., 2012](#)). У претходном излагању, фреквенције  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq \dots \omega_n$  представљају природне фреквенције нано-система, а решења су добијена помоћу једначине (6.2.6).

Матрица  $\mathbf{P}$  представља модалну матрицу разматраног нано-система чије колоне представљају нормализоване основне облике осциловања

$$\mathbf{P} = \{\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{Q}_n\}. \quad (6.3.1)$$

Облик осциловања (мод) који одговара одређеној природној фреквенцији непригушеног линеарног система са  $n$  -степену слободе (nDOF) система, изабран је да задовољи ограничења нормализације и назива се нормализовани основни облик

осциловања. Ограничења треба изабрати у складу са даљом употребом нормализованог облика осциловања.

Систем од  $n$ -диференцијалних једначина који одговара генерализаним координатама  $\mathbf{q}(t)$  се може трансформисати у систем са главним координатама  $p_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  увођењем модалне матрице система  $\mathbf{P}$ , чије колоне представљају нормализоване основне облике осциловања.

Трансформација

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^n p_j(t) \mathbf{Q}_j, \quad (6.3.2)$$

је еквивалентна линеарној трансформацији између генерализаних и главних координата система

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}\mathbf{p}(t). \quad (6.3.3)$$

Заменом (6.3.2) у једначину (6.1.9), добија се

$$\mathbf{M} \sum_{j=1}^n \ddot{p}_j(t) \mathbf{Q}_j + \mathbf{K} \sum_{j=1}^n p_j(t) \mathbf{Q}_j = \mathbf{F}. \quad (6.3.4)$$

Скаларним множењем једначине (6.3.4) са  $\mathbf{Q}_k$ , за произвољно одговарајући мод  $k = 1, 2, \dots, n$ , добија се

$$\sum_{j=1}^n \ddot{p}_j(t) (\mathbf{Q}_k \mathbf{M} \mathbf{Q}_j) + \sum_{j=1}^n p_j(t) (\mathbf{Q}_k \mathbf{K} \mathbf{Q}_j) = (\mathbf{Q}_k \mathbf{F}). \quad (6.3.5)$$

Коришћењем услова ортогоналности основних облика осциловања у свакој од сума, добија се само један члан који се разликује од нуле и то за  $k = j$ . Облици осциловања су нормализовани у једначини (6.3.5), па је

$$\sum_{k=1}^n \ddot{p}_k(t) (\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k)_M + \sum_{k=1}^n p_k(t) (\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k)_K = (\mathbf{Q}_k \mathbf{F}), \quad (6.3.6)$$

ИЛИ

$$\ddot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t) = g_k(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (6.3.7)$$

где је

$$\omega_k^2 = \frac{(\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k)_K}{(\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k)_M}, \quad (6.3.8)$$

$$g_k(t) = (\mathbf{Q}_k \mathbf{F}). \quad (6.3.9)$$

За спољашње оптерећење  $\mathbf{F}$  представљено изразом (6.1.10), узима се равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење у облику

$$f(x, t) = F_0 \cos(\tilde{\Omega}t). \quad (6.3.10)$$

где је  $F_0$  амплитуда, а  $\tilde{\Omega}$  је фреквенција хармонијског оптерећења.

Ако су почетни услови за главне координате добијени из једначине (6.3.3),  $p_k(0) = 0$  и  $\dot{p}_k(0) = 0$ , решење главних координата је у следећем облику

$$p_k(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t g_k(s) \sin[\omega_k(t - s)] ds. \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (6.3.11)$$

Када се решење из једначине (6.3.11) замени у једначину (6.3.3), добија се

$$\mathbf{q}(t) = \left\{ \begin{array}{l} Q_{11}(\omega_1)p_1(t) + Q_{12}(\omega_2)p_2(t) + \dots + Q_{1n}(\omega_n)p_n(t) \\ Q_{21}(\omega_1)p_1(t) + Q_{22}(\omega_2)p_2(t) + \dots + Q_{2n}(\omega_n)p_n(t) \\ \vdots \\ Q_{n1}(\omega_1)p_1(t) + Q_{n2}(\omega_2)p_2(t) + \dots + Q_{nn}(\omega_n)p_n(t) \end{array} \right\}. \quad (6.3.12)$$

Коначно, решење једначине ротирајуће нано-греде дато једначином (6.6) за непригушени систем има следећи облик

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{i=1}^n W_i(x) q_i(t) \\ &= \{W_1(x)[Q_{11}(\omega_1)p_1(t) + Q_{12}(\omega_2)p_2(t) + \dots + Q_{1n}(\omega_n)p_n(t)]\} \\ &\quad + \{W_2(x)[Q_{21}(\omega_1)p_1(t) + Q_{22}(\omega_2)p_2(t) + \dots + Q_{2n}(\omega_n)p_n(t)]\} + \dots \\ &\quad + \{W_n(x)[Q_{n1}(\omega_1)p_1(t) + Q_{n2}(\omega_2)p_2(t) + \dots \\ &\quad + Q_{nn}(\omega_n)p_n(t)]\}, \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

које сада представља опште решење принудних непригушених малих трансверзалних осцилација, где је  $W_i(x)$  функција основних облика осциловања представљена једначином (6.1.2).

## 6.4. Принудне осцилације пригушеног нано-система

Увођењем Rayleigh-јевог типа пропорционално пригушења, диференцијалне једначине временских модова малих трансверзалних осцилација које описују принудно осциловање пригушеног нано-система се могу записати у облику

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}. \quad (6.4.1)$$

Једначина (6.4.1) представља модел пропорционално пригушеног нано-система, при чему је матрица пригушења линеарна комбинација матрице масе  $\beta\mathbf{M}$  и матрице крутости  $\alpha\mathbf{K}$ . За одређивање малих трансверзалних принудних пригушених осцилација представљеног нано-система примењује се стандардни поступак модалне анализе, заснован на главним координатама, (*Kelly, S. G., 2012*).

Заменом израза (6.3.2) у једначину (6.4.1) добија се

$$\mathbf{M} \sum_{j=1}^n \ddot{p}_j(t) \mathbf{Q}_j + (\alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M}) \sum_{j=1}^n \dot{p}_j(t) \mathbf{Q}_j + \mathbf{K} \sum_{j=1}^n p_j(t) \mathbf{Q}_j = \mathbf{F}. \quad (6.4.2)$$

Скаларним множењем једначине (6.4.2) са  $\mathbf{Q}_k$ , за произвољно  $k = 1, 2, \dots, n$ , добија се

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \ddot{p}_j(t) (\mathbf{Q}_k \mathbf{M} \mathbf{Q}_j) + \sum_{j=1}^n \dot{p}_j(t) [\alpha (\mathbf{Q}_k \mathbf{K} \mathbf{Q}_j) + \beta (\mathbf{Q}_k \mathbf{M} \mathbf{Q}_j)] \\ + \sum_{j=1}^n p_j(t) (\mathbf{Q}_k \mathbf{K} \mathbf{Q}_j) = (\mathbf{Q}_k \mathbf{F}). \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

Коришћењем услова ортогоналности основних облика осциловања, у свакој од сума добија се само један члан који се разликује од нуле и то за мод  $k = j$ . Облици осциловања су нормализовани, па једначина (6.4.3) добија облик

$$\sum_{k=1}^n \ddot{p}_k(t) (\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k)_M + \sum_{k=1}^n \dot{p}_k(t) [\alpha (\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k)_K + \beta (\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k)_M] + \sum_{k=1}^n p_k(t) (\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k)_K = (\mathbf{Q}_k \mathbf{F}), \quad (6.4.4)$$

или

$$\ddot{p}_k(t) + 2\zeta_k \dot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t) = g_k(t), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (6.4.5)$$

где је

$$\zeta_k = \frac{1}{2} (\alpha \omega_k^2 + \beta), \quad (6.4.6)$$

За спољашње оптерећење  $\mathbf{F}$  дато изразом (6.1.10), узима се равномерно распоређено површинско хармонијско оптерећење у облику

$$f(x, t) = F_0 \cos(\tilde{\Omega}t). \quad (6.4.7)$$

Заменом (6.4.7) у (6.1.10) добија се

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \cos(\tilde{\Omega}t) = \left\{ \begin{array}{c} \int_0^L F_0 W_1(x) dx \\ \int_0^L F_0 W_2(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^L F_0 W_n(x) dx \end{array} \right\} \cos(\tilde{\Omega}t). \quad (6.4.8)$$

Једначина (6.4.5) у моду  $k$  има облик



$$\ddot{p}_k(t) + 2\zeta_k \dot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t) = h_k \cos(\tilde{\Omega}t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6.4.9)$$

где је

$$h_k = (\mathbf{Q}_k \mathbf{F}_0). \quad (6.4.10)$$

У нумеричкој анализи је  $n = 4$ , односно  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Решење нехомогене линеарне диференцијалне једначине (6.4.9) се може написати у облику

$$p_k(t) = p_{kh}(t) + p_{kp}(t), \quad (6.4.11)$$

где су  $p_{kh}(t)$  и  $p_{kp}(t)$  хомогено и партикуларно решење једначине (6.4.9).

Свака нехомогена једначина (6.4.9) има одговарајућу хомогену једначину у облику

$$\ddot{p}_k(t) + 2\zeta_k \dot{p}_k(t) + \omega_k^2 p_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (6.4.12)$$

Хомогено решење се претпоставља у следећем облику

$$p_{kh} = (A \cos \vartheta t + B \sin \vartheta t) e^{-\zeta_k t}, \quad (6.4.13)$$

где су  $A$  и  $B$  произвољне константе које се добијају из почетних услова

$$\vartheta = \sqrt{\omega_k^2 - \zeta_k^2}. \quad (6.4.14)$$

На основу нехомогеног члана  $h_k \cos(\Omega t)$  приказаног у (6.4.9) се може претпоставити облик функције којом би се одредило партикуларно решење  $p_{kp}$

$$p_{kp} = C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t), \quad (6.4.15)$$

где су  $C$  и  $D$  коефицијенти који се одређују на следећи начин.

Заменом  $\dot{p}_{kp}$  и  $\ddot{p}_{kp}$  у једначину (6.4.9), добијају се две једначине

$$(\omega_k^2 - \tilde{\Omega}^2)C + 2\zeta_k \tilde{\Omega}D = h_k, \quad (6.4.16)$$

$$-2\zeta_k \tilde{\Omega}C + (\omega_k^2 - \tilde{\Omega}^2)D = 0. \quad (6.4.17)$$

Из система једначина (6.4.16) и (6.4.17), одређују се коефицијенти

$$C = \frac{h_k(\omega_k^2 - \tilde{\Omega}^2)}{(\omega_k^2 - \tilde{\Omega}^2)^2 + 4\zeta_k^2\tilde{\Omega}^2} = N\cos\varphi, \quad (6.4.18)$$

$$D = \frac{2h_k\zeta_k\tilde{\Omega}}{(\omega_k^2 - \tilde{\Omega}^2)^2 + 4\zeta_k^2\tilde{\Omega}^2} = N\sin\varphi, \quad (6.4.19)$$

где је  $N$  амплитуда осциловања.

Из једначина (6.4.18) и (6.4.19) одређују се непознате  $N$  и  $\varphi$

$$N = \frac{h_k}{\sqrt{(\omega_k^2 - \tilde{\Omega}^2)^2 + 4\zeta_k^2\tilde{\Omega}^2}}, \quad (6.4.20)$$

и

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\zeta_k\tilde{\Omega}}{(\omega_k^2 - \tilde{\Omega}^2)}. \quad (6.4.21)$$

Партикуларно и опште решење су сада у облику

$$p_{kp} = N\cos(\tilde{\Omega}t - \varphi). \quad (6.4.22)$$

$$p_k(t) = (A\cos\vartheta t + B\sin\vartheta t)e^{-\zeta_k t} + N\cos(\tilde{\Omega}t - \varphi). \quad (6.4.23)$$

За произвољне почетне услове  $p_k(0) = p_{k0}$  и  $\dot{p}_k(0) = \dot{p}_{k0}$ , могуће је добити преостале константе  $A$  и  $B$  у следећем облику

$$A = p_{k0} - N\cos\varphi, \quad (6.4.24)$$

$$B = \frac{\dot{p}_{k0} + \zeta_k p_{k0}}{\vartheta} - \frac{N}{\vartheta} (\zeta_k \cos\varphi + \tilde{\Omega} \sin\varphi). \quad (6.4.25)$$

Заменом константи  $A$  и  $B$  у (6.4.13), опште решење једначине (6.4.9) добија облик

$$p_k(t) = \left( p_{k0} \cos\vartheta t + \frac{\dot{p}_{k0} + \zeta_k p_{k0}}{\vartheta} \sin\vartheta t \right) e^{-\zeta_k t} - \left[ \cos\varphi \cos\vartheta t + \frac{(\zeta_k \cos\varphi + \tilde{\Omega} \sin\varphi)}{\vartheta} \sin\vartheta t \right] N e^{-\zeta_k t} + N\cos(\tilde{\Omega}t - \varphi),$$

$$k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.4.26)$$

Заменом решења (6.4.26) у једначину (6.3.3) добија се

$$\mathbf{q}(t) = \begin{cases} Q_{11}(\omega_1)p_1(t) + Q_{12}(\omega_2)p_2(t) + \cdots + Q_{1n}(\omega_n)p_n(t) \\ Q_{21}(\omega_1)p_1(t) + Q_{22}(\omega_2)p_2(t) + \cdots + Q_{2n}(\omega_n)p_n(t) \\ \vdots \\ Q_{n1}(\omega_1)p_1(t) + Q_{n2}(\omega_2)p_2(t) + \cdots + Q_{nn}(\omega_n)p_n(t) \end{cases}. \quad (6.4.27)$$

Коначно, опште решење принудних пригушених малих трансверзалних осцилација ротирајуће нано-греде има облик

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{i=1}^n W_i(x)q_i(t) \\ &= \{W_1(x)[Q_{11}(\omega_1)p_1(t) + Q_{12}(\omega_2)p_2(t) + \cdots + Q_{1n}(\omega_n)p_n(t)]\} \\ &+ \{W_2(x)[Q_{21}(\omega_1)p_1(t) + Q_{22}(\omega_2)p_2(t) + \cdots + Q_{2n}(\omega_n)p_n(t)]\} + \cdots \\ &+ \{W_n(x)[Q_{n1}(\omega_1)p_1(t) + Q_{n2}(\omega_2)p_2(t) + \cdots + Q_{nn}(\omega_n)p_n(t)]\}, \quad (6.4.28) \end{aligned}$$

## 6.5. Нумеричка анализа

Анализа принудних осцилација ротирајуће нано-греде са утицајима нелокалног параметра, угаоне брзине и радијуса главчине, инспирисана је радом ([Pradhan, S. C. и Murmu, T., 2010](#)). За разлику од истраживања у наведеном раду овде се анализирају мале трансверзалне осцилације ротирајуће конзолне нано-греде при промени наведених параметара. Ово поглавље је подељено на три дела.

У првом делу је извршена анализа природних фреквенција представљеног нано-система из [Поглавља 6.2](#). Решавање парцијалне диференцијалне једначине и одређивање природне фреквенције у раду ([Pradhan, S. C. и Murmu, T., 2010](#)) добијено је на основу диференцијале квадратурне методе (DQM). У овој студији коришћен је Galerkin-ов метод и метод стандардне модалне анализе. Добијени резултати су поређени са резултатима из поменутог рада.

У другом делу су разматрани утицаји нелокалног параметра, угаоне брзине и ефекта радијуса главчине на мале трансверзалне осцилације непригушене ротирајуће нано-греде из **Поглавља 6.3**.

У трећем делу је спроведена детаљна анализа пригушеног осциловања ротирајуће нано-греде из **Поглавља 6.4** са променљивим утицајима нелокалног параметра, угаоне брзине и ефекта радијуса главчине.

За материјалне и геометријске параметре ротирајуће нано-греде коришћене су вредности из рада (*Pradhan, S. C. u Murmu, T., 2010*), где је Young-ов модул еластичности  $E = 0.971 \text{ TPa}$ , густина материјала је  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$ , дужина је  $L = 100 \text{ nm}$  и пречник нано-греде је  $d = 0.34 \text{ nm}$ . За бездимензиону угаону брзину узете су вредности  $\gamma = 1; 2; 3$ , за бездимензиони полупречник главчине  $\delta = 0; 1; 2$  и за бездимензиони нелокални параметар  $\psi = 0; 0,1; 0,2$ .

### 6.5.1. Анализа природне фреквенције

Вредности природних фреквенција ротирајуће нано-греде су поређене са вредностима из рада (*Pradhan, S. C. u Murmu, T., 2010*).

У **Поглављу 6.2** дата је детерминанта (6.2.6) у којој квадрати сопствених вредности матрице  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$  предстаљају природне фреквенције система  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots, \omega_n$ .

У раду (*Pradhan, S. C. u Murmu, T., 2010*) су уведени бездимензиони параметри. У циљу потврде резултата природних фреквенција добијених другом методом решавања, најпре је потребно утицајне параметре представити у бездимензионом облику:

- 1) бездимензиони радијус (полупречник) главчине

$$\delta = \frac{r}{L}, \quad (6.5.1.1)$$

- 2) бездимензиона угаона брзина

$$\gamma = \sqrt{\frac{\rho A \Omega^2 L^4}{EI}}, \quad (6.5.1.2)$$

3) бездимензиона сопствена фреквенција

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho A \omega_n^2 L^4}{EI}}, \quad (6.5.1.3)$$

4) бездимензиони нелокални параметар

$$\psi = \frac{e_0 \tilde{a}}{L}. \quad (6.5.1.4)$$

Као што се може и видети, у овом поглављу је бездимензиони нелокални параметар означен са  $\psi$  ради лакшег поређења са резултатима из рада ([Pradhan, S. C. u Murmu, T., 2010](#)).

**Табела 6.5.1.1** Вредности фреквенција за нелокалне параметре  $\psi = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ , где су угаона брзина  $\gamma = 1$  и радијус главчине  $\delta = 1$ .

		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$\psi = 0$	Представљена студија,	3,889	22,375	62,043	121,263
	( <a href="#">Pradhan, S. C. u Murmu, T., 2010</a> )	3,890	22,380	62,050	-
$\psi = 0,1$	Представљена студија,	3,932	21,122	51,603	86,356
	( <a href="#">Pradhan, S. C. u Murmu, T., 2010</a> )	3,932	21,122	51,603	-
$\psi = 0,2$	Представљена студија,	4,065	18,257	37,744	55,350
	( <a href="#">Pradhan, S. C. u Murmu, T., 2010</a> )	4,065	18,257	37,744	-
$\psi = 0,3$	Представљена студија,	4,305	15,107	29,519	39,189
	( <a href="#">Pradhan, S. C. u Murmu, T., 2010</a> )	4,305	15,110	29,520	-
$\psi = 0,4$	Представљена студија,	4,701	12,229	26,018	28,587
	( <a href="#">Pradhan, S. C. u Murmu, T., 2010</a> )	4,701	12,230	26,0201	-

У **Табели 6.5.1.1** дате су вредности за прве четири бездимензионе сопствене фреквенције  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  за радијус главчине  $\delta = 1$  и угаону брзину  $\gamma = 1$ . У **Табели 6.5.1.2** приказане су вредности за прве четири бездимензионе фреквенције  $\lambda_k$ ,  $k =$

1, 2, 3, 4 за радијус главчине  $\delta = 0$  и угаону брзину  $\gamma = 1$ . Бездимензиони нелокални параметар  $\psi$  узет је у опсегу од 0 до 0.4.

Из Табеле 6.5.1.1 вредност прве сопствене фреквенције  $\lambda_1$  једнака је одговарајућој вредности из рада (Pradhan, S. C. и Murmu, T., 2010). У Табели 6.5.1.2 су приказане и друге вредности бездимензионих фреквенција када нема радијуса главчине ( $\delta = 0$ ) у функцији нелокалног параметра  $\psi$ . Примећује се да повећање нелокалног параметра  $\psi$  доводи до повећања вредности прве фреквенције  $\lambda_1$ , док се вредности фреквенција  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  смањују. За вредност нелокалног параметра  $\psi = 0$ , уочава се највећа вредност бездимензионе фреквенције  $\lambda_4$ .

Запажено је да се нешто веће вредности фреквенција  $\lambda_k, k = 1, 2, 3, 4$  добијају када се узме у обзир повећање радијуса главчине ( $\delta > 0$ ).

**Табела 6.5.1.2** Вредности сопствених фреквенција за нелокалне параметре  $\psi = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ , где су угаона брзина  $\gamma = 1$  и радијус главчине  $\delta = 0$ .

		$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
	Представљена студија,	3,682	22,181	61,842	121,051
$\psi = 0$	(Pradhan, S. C. и Murmu, T., 2010)	3,690	-	-	-
	Представљена студија,	3,706	20,868	51,295	85,982
$\psi = 0,1$	(Pradhan, S. C. и Murmu, T., 2010)	3,710	-	-	-
	Представљена студија,	3,783	17,866	37,223	54,704
$\psi = 0,2$	(Pradhan, S. C. и Murmu, T., 2010)	3,783	-	-	-
	Представљена студија,	3,923	14,589	28,709	38,346
$\psi = 0,3$	(Pradhan, S. C. и Murmu, T., 2010)	3,923	-	-	-
	Представљена студија,	4,153	11,675	24,468	28,043
$\psi = 0,4$	(Pradhan, S. C. и Murmu, T., 2010)	4,154	-	-	-

У Табели 6.5.1.1 и Табели 6.5.1.2 приказане су вредности сопствених фреквенција за  $(n = 1, 2, \dots, 6)$ . На овај начин се постиже боља сагласност вредности сопствених фреквенција са резултатима из рада (Pradhan, S. C. и Murmu, T., 2010). Такође, користећи другу теорију за одређивање природних фреквенција нано-система, добијени су резултати веома блиски вредностима из радова (Hodges, D.Y., Rutkowski, M.Y., 1981) и (Shafiei, N. и сарадници, 2016).

Студија конвергенције је представљена у Табели 6.5.1.3 из које се може приметити да повећање броја реда у дискретизацији доводи до смањења вредности бездимензионих фреквенција. Разлике између друге и шесте тачке реда у дискретизацији уочене су у петом децималном запису.

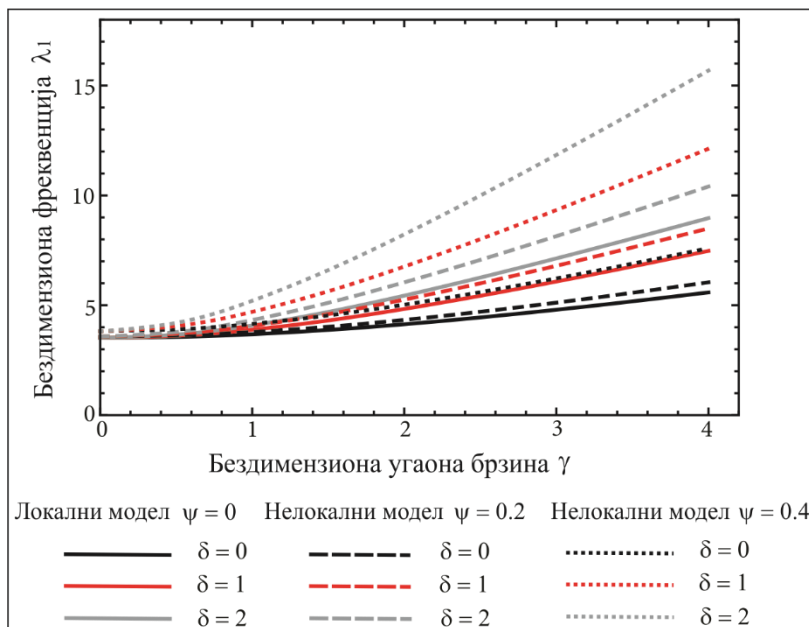
**Табела 6.5.1.3** Студија конвергенције бездимензионих сопствених фреквенција за  $\psi = 0, \gamma = 1$  и  $\delta = 0$ .

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
$n=2$	3,68167306	22,18102852		
$n=3$	3,68165070	22,18102833	61,84178166	
$n=4$	3,68164789	22,18101484	61,84177366	121,05094094
$n=5$	3,68164718	22,18101281	61,84176519	121,05092897
$n=6$	3,68164697	22,18101185	61,84176414	121,05092360

На Слици 6.5.1.1 је приказана веза између бездимензионе сопствене фреквенције за први мод осциловања  $\lambda_1$  у односу на бездимензиону угаону брзину  $\gamma$  ротирајуће нано-греде, за различите вредности нелокалног параметра и полупречника главчине. Са повећањем вредности нелокалног параметра  $\psi$ , повећава се фреквенција у првом моду осциловања  $\lambda_1$ . До сличног запажања се долази када постоји радијус главчине, односно када је  $\delta = 1$  и  $\delta = 2$ . Примећује се да је фреквенција у првом моду осциловања најнижа када је нелокални параметар занемарен,  $\psi = 0$ . Са повећањем угаоне брзине  $\gamma$  се може уочити повећање фреквенције у првом моду осциловања  $\lambda_1$ .

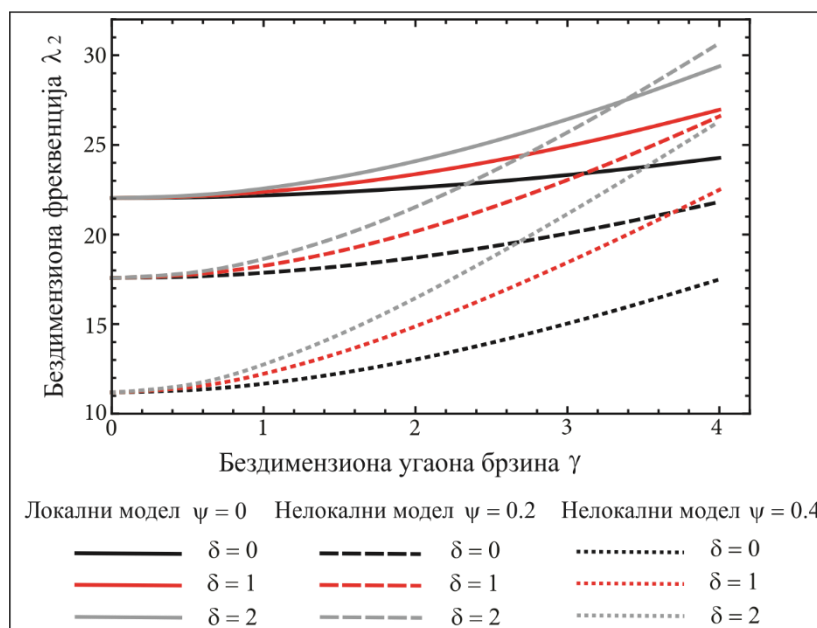
На **Сликама 6.5.1.2, 6.5.1.3 и 6.5.1.4** приказане су везе између бездимензионих сопствених фреквенција у другом, трећем и четвртном моду осциловања  $\lambda_2, \lambda_3$  и  $\lambda_4$ , респективно и бездимензионе угаоне брзине  $\gamma$  ротирајуће нано-греде, за различите вредности нелокалног параметра и полупречника главчине. Сасвим супротна запажања него при првом моду осциловања се уочавају код виших облика осциловања. Односно, са повећањем вредности нелокалног параметра  $\psi$ , смањују се вредности фреквенција у другом, трећем и четвртном моду осциловања  $\lambda_2, \lambda_3$  и  $\lambda_4$ . Са **Слика 6.5.1.2, 6.5.1.3 и 6.5.1.4** се може запазити да утицај радијуса главчине  $\delta$  доводи до пораста вредности фреквенција за сваки мод осциловања.

Када је нелокални параметар  $\psi = 0.4$ , рачунањем се не добијају стварне сопствене вредности. Из тог разлога јавља се прекид на дијаграму зависности између фреквенција у трећем и четвртном моду осциловања и угаоне брзине, **Слике 6.5.1.3 и 6.5.1.4**. За разлику од сопствених фреквенције у првом моду осциловања, сопствене фреквенције код виших модова имају увек другачију почетну тачку између фреквенција према локалном и нелокалном моделу. Ово истраживање је у складу са објављеним резултатима приказаним у раду (*Pradhan, S. C. и Murmu, T. 2010*).

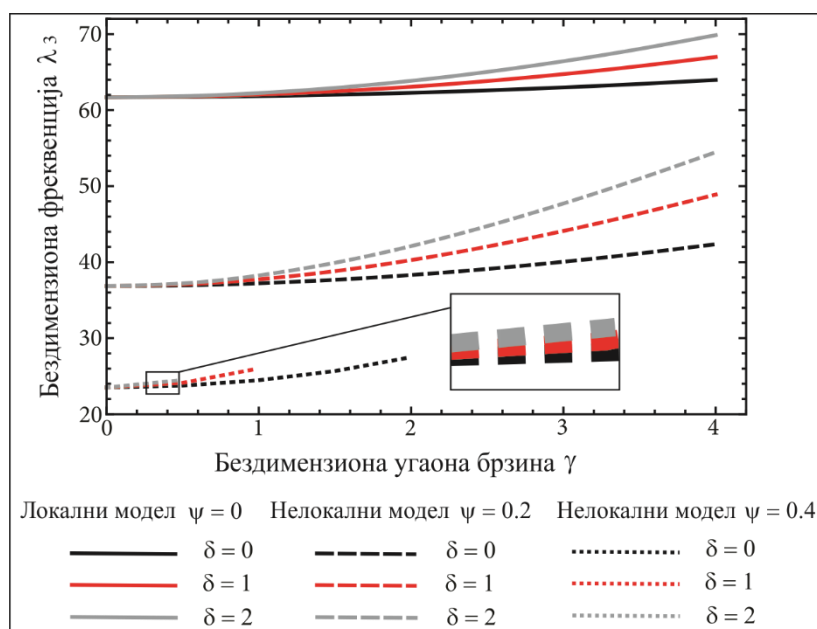


**Слика 6.5.1.1** Зависност између сопствене фреквенције у првом моду осциловања и угаоне брзине ротирајуће нано-греде, за различите вредности нелокалног параметра и полупречника главчине

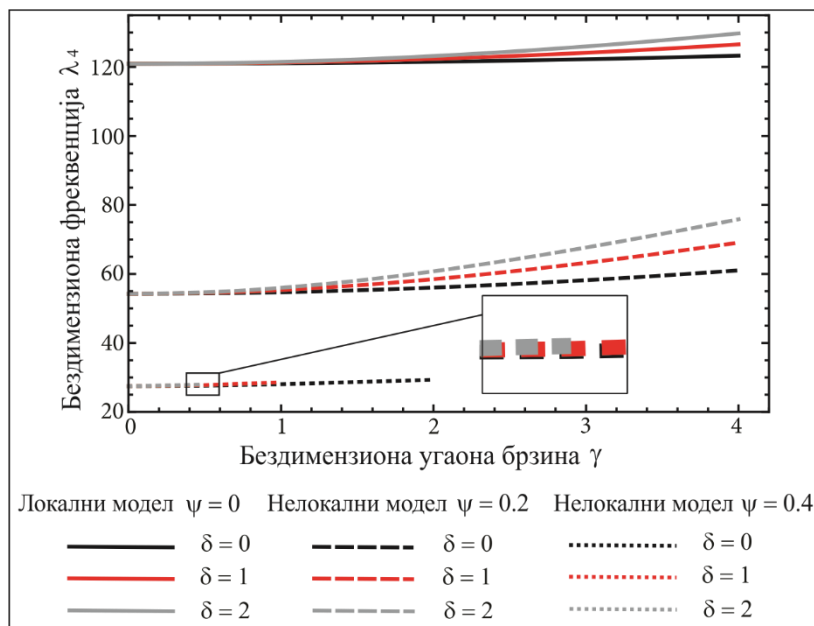




**Слика 6.5.1.2** Зависност између сопствене фреквенције у другом моду осциловања и угаоне брзине ротирајуће нано-греде, за различите вредности нелокалног параметра и полупречника главчине



**Слика 6.5.1.3** Зависност између сопствене фреквенције у трећем моду осциловања и угаоне брзине ротирајуће нано-греде, за различите вредности нелокалног параметра и полупречника главчине



*Слика 6.5.1.4* Зависност између сопствене фреквенције у четвртном моду осциловања и угаоне брзине ротирајуће нано-греде, за различите вредности нелокалног параметра и полупречника главчине

## 6.5.2. Анализа принудних непригушених осцилација

У овом поглављу приказана је анализа непригушених осцилација ротирајуће нано-греде. На основу добијеног решења за непригушени систем представљен једначином (6.3.13), разматран је утицај нелокалног параметра, угаоне брзине и радијуса главчине на посматрани систем. Ротирајућа нано-греда је под дејством равномерно распоређеног површинско хармонијског оптерећења  $F = F_0 \cos(\tilde{\Omega}t)$  магнитуде  $F_0 = 0.5 \text{ nN}$  и фреквенције спољашњег оптерећења  $\tilde{\Omega} = 0.9\omega_1$ .

Бездимензионо трансверзално померање греде је дато у следећем облику

$$\bar{w}(L, t) = w(L, t)/d. \quad (6.5.2.1)$$

На **Сликама 6.5.2.1** и **6.5.2.2** приказани су краћи и дужи временски периоди принудних непригушених осцилација ротирајуће нано-греде, под утицајем нелокалног

параметра, угаоне брзине и радијуса главчине. У случају одсуства пригушења јавља се периодични одзив. Са **Слика 6.5.2.1** и **6.5.2.2**, се може приметити да се овај феномен непрестано јавља у одређеним временским интервалима. Другим речима, појављује се *подрхтавање (бијење)*. Дијаграми су добијени за почетне услове, угиби и брзине за све случајеве су нула.

**Слика 6.5.2.1а** приказује краћи временски период принудног непригушеног осциловања ротирајуће нано-греде под утицајем нелокалног параметра. За бездимензионе параметре угаоне брзине и полупречника главчине узете су вредности  $\gamma = 1$  и  $\delta = 1$ . Уочава се да се трансверзална померања смањују са повећањем вредности нелокалног параметра. Са повећањем вредности нелокалног параметра јавља се више *периода подрхтавања* за исти временски период. Амплитуда удара (бијења) је мања за веће вредности нелокалног параметра.

На **Слици 6.5.2.1б** је приказан краћи временски период принудног непригушеног осциловања ротирајуће нано-греде у функцији промене бездимензионих угаоних брзина. За бездимензиони нелокални параметар и бездимензиони радијус главчине узете су вредности  $\psi = 0.1$  and  $\delta = 1$ . Очигледно је да се са повећањем угаоне брзине смањују трансверзална померања непригушених осцилација ротирајуће нано-греде. *Подрхтавањем* су описана и трансверзална померања непригушених осцилација ротирајуће нано-греде само за вредности угаоне брзине  $\gamma = 1$ .

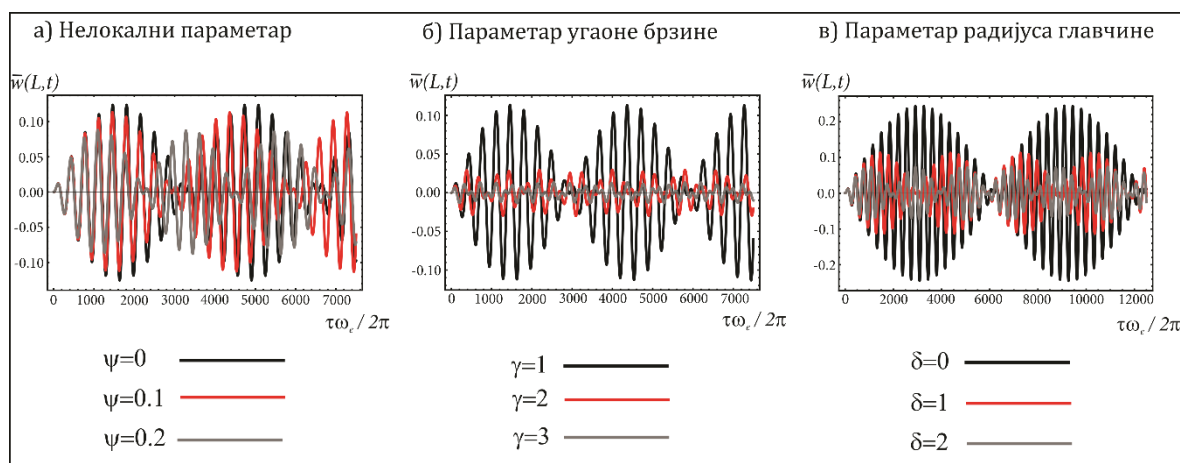
Одавде се може закључити да се само при нижим вредностима угаоних брзина код принудно непригушених осцилација јавља подрхтавање. Мала трансверзална померања непригушених осцилација при нижим вредностима угаоне брзине  $\gamma = 1$  су знатно већа него за вредности  $\gamma = 2$  и  $\gamma = 3$ . *Подрхтавање* се не јавља за веће вредности угаоних брзина, у овом случају  $\gamma = 2$  и  $\gamma = 3$ .

На **Слици 6.5.2.1в** приказан је краћи временски период принудног непригушеног осциловања ротирајуће нано-греде при промени радијуса главчине. Утицај радијуса главчине на трансверзална померања је такође описан *феноменом подрхтавања*. Повећање вредности полупречника главчине доводи до смањења амплитуде удара. Јасно се може видети да се са повећањем вредности радијуса главчине повећао број удара

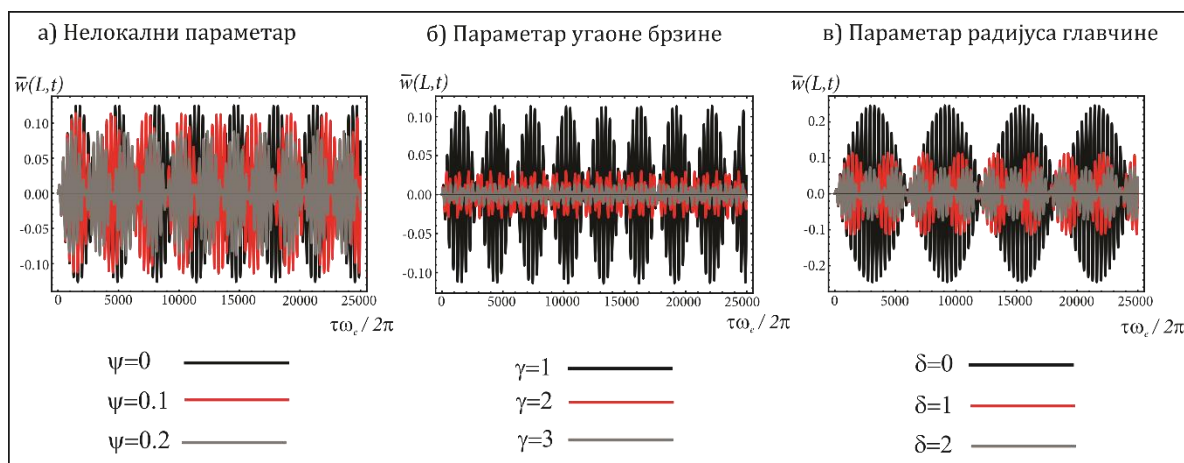
(периода подрхтавања). За  $\delta = 0$  јавља се један период подрхтавања, за  $\delta = 1$  два периода подрхтавања и за  $\delta = 2$  три периода подрхтавања.

Вредност амплитуде осциловања трансверзалних померања је при већим вредностима радијуса главчина нижа него у случају занемаривања радијуса главчине ( $\delta = 0$ ). Вредности угаоне брзине и нелокалног параметра на Слици 6.5.2.1в су  $\gamma = 1$  и  $\psi = 0.1$ .

Промена нелокалног параметра, угаоне брзине и радијуса главчине за дужи временски период принудног непригушеног осциловања ротирајуће нано-греде приказана је на Слици 6.5.2.2. Претходна дискусија везана за краће временске периоде осциловања (Слика 6.5.2.1) важи и за Слика 6.5.2.2, само што се код дужег временског периода осциловања појављује већи број периода подрхтавања.



**6.5.2.1** Краћи временски период принудног непригушеног осциловања ротирајуће нано-греде са утицајем бездимензионог а) нелокалног параметра; б) параметра угаоне брзине; в) параметра радијуса главчине



**6.5.2.2** Дужи временски период принудног непригушеног осциловања ротирајуће нано-греде са утицајем бездимензионог а) нелокалног параметра; б) параметра угаоне брзине; в) параметра радијуса главчине

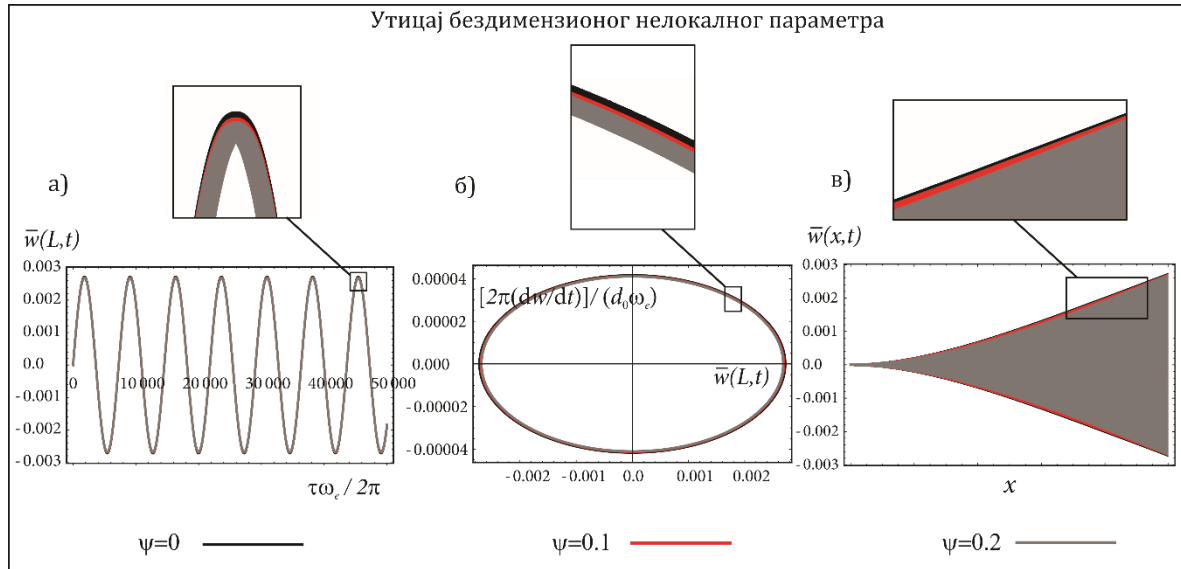
### 6.5.3. Анализа принудних пригушених осцилација

У овом поглављу је приказана анализа принудних пригушених осцилација ротирајуће нано-греде. На основу решења за пригушени систем (6.4.28), анализиран је утицај нелокалног параметра, угаоне брзине и радијуса главчине. Вредности коефицијената пропорционалности пригушења су  $\alpha = \beta = 10$  nNs/m. Ротирајућа нано-греда је под дејством равномерно распоређеног површинско хармонијског оптерећења  $F = F_0 \cos(\tilde{\Omega}t)$ , где је  $F_0 = 1$  nN и  $\tilde{\Omega} = 0.9\omega_{l1}$ .

На **Слици 6.5.3.1а** приказан је закон промене малих трансверзалних осцилација принудног пригушеног осциловања ротирајуће нано-греде у стационарном стању, где је уочено да се са повећањем нелокалног параметра неприметно смањују трансверзална померања. Односно, вредност амплитуде осциловања неприметно опада, па се може закључити да нелокални параметар не утиче значајно на крутост нано-носача.

На **Слици 6.5.3.1** спроведена је анализа за вредност бездимензионе угаоне брзине  $\gamma = 1$  и полупречника главчине  $\delta = 1$ . Одговарајући фазни дијаграм дат је на **Слици 6.5.3.1б**.

Дијаграм угиба ротирајуће нано-греде услед промене вредности нелокалног параметра је приказан на **Слици 6.5.3.1в**. Удаљење мерено од причвршћеног краја греде дефинисано је величином  $x$ . Примећује се да промена нелокалног параметра није утицала на угибе на слободном крају конзоле.



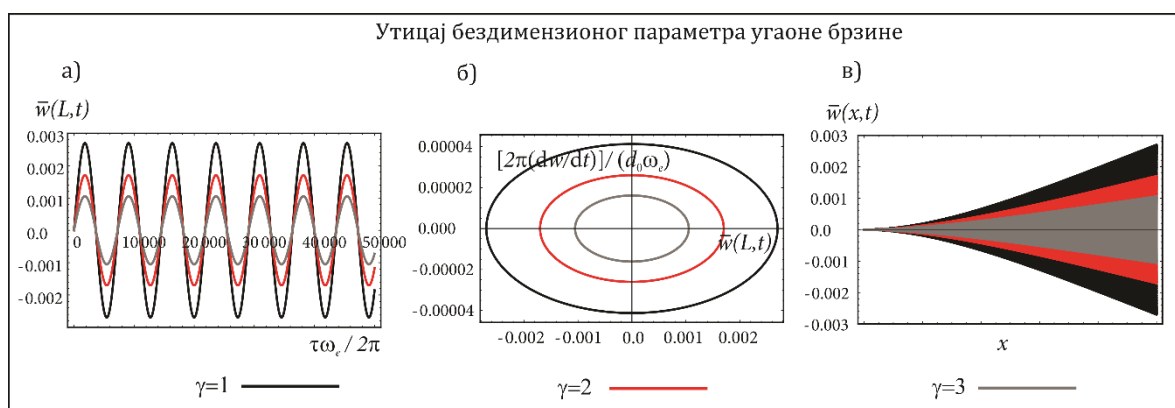
**Слика 6.5.3.1** Утицај нелокалног параметра на пригушене осцилације ротирајуће нано-греде: а) промена у времену; б) фазни дијаграм; в) дијаграм угиба

Утицај угаоне брзине је приказан на **Слици 6.5.3.2**. Овде су вредности нелокалног параметра и радијуса главчине  $\psi = 0.1$  и  $\delta = 1$ . Са **Слике 6.5.3.2а** се уочава да повећање угаоне брзине доводи до смањења трансверзалних осцилација ротирајуће нано-греде. Одговарајући фазни дијаграм је приказан на **Слици 6.5.3.2б**. Дијаграм угиба ротирајуће нано-греде услед промене угаоне брзине је приказан на **Слици 6.5.3.2в**. Евидентно је да су најудаљеније тачке нано-греде (мерено од укљештења) изложене највећем утицају промене угаоне брзине, при чему су мањи угиби за веће вредности угаоне брзине.

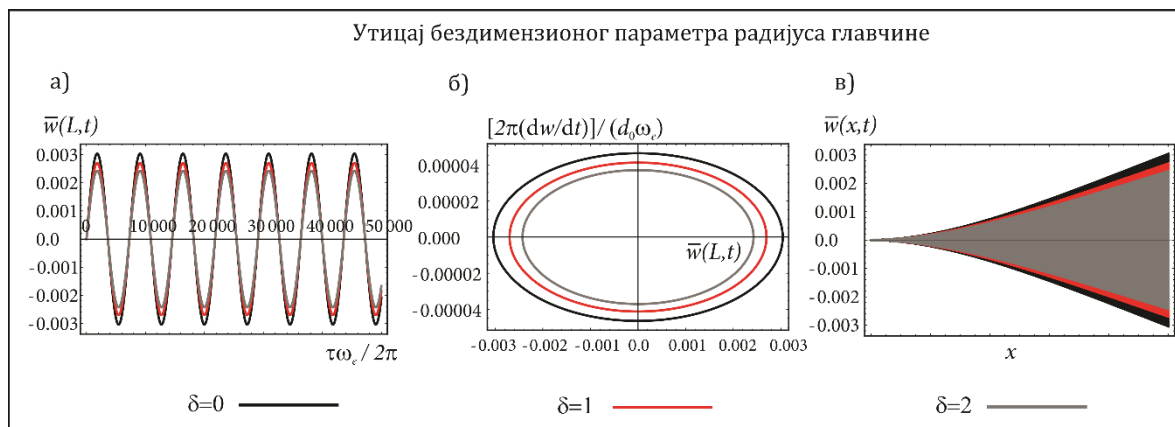
На **Слици 6.5.3.3** приказан је закон промене малих трансверзалних осцилација, фазни дијаграм и дијаграм угиба за различите вредности радијуса главчине ротирајуће нано-греде. Вредности нелокалног параметра и угаоне брзине у овој анализи су  $\psi = 0.1$  и  $\gamma = 1$ . Тенденција смањења трансверзалних осцилација, као и појава максималног угиба у најудаљенијим тачкама нано-греде иста је као и у претходном случају. Повећање

радијуса главчине доводи до смањења трансверзалног померања ротирајуће нано-греде. Очигледно је да ефекти угаоне брзине и полупречника главчине имају сличан утицај.

На основу добијених резултата се може закључити да се са порастом параметра угаоне брзине и параметра радијуса главчине смањују трансверзална померања ротирајуће нано-греде. Промена вредности нелокалног параметра при разматрању трансверзалних померања ротирајуће нано-греде је занемарљивог утицаја.



**Слика 6.5.3.2** Утицај параметра угаоне брзине на пригушене осцилације ротирајуће нано-греде: а) промена у времену; б) фазни дијаграм; в) дијаграм угиба



**Слика 6.5.3.3** Утицај параметра радијуса главчине на пригушене осцилације ротирајуће нано-греде: а) промена у времену; б) фазни дијаграм; в) дијаграм угиба

Резултати из овог поглавља објављени су у раду (Atanasov, M. S., Stojanović, V., 2020).

У овом поглављу приказана је параметарска анализа принудног осциловања ротирајуће нано-греде изложене дејству равномерно распоређеног површинског хармонијског оптерећења. Показано је да се са повећањем вредности параметара угаоне брзине и радијуса главчине смањују вредности амплитуда трансверзалног померања нано-греде, истовремено нелокални параметар има занемрљив утицај.

Овом анализом је потврђено да Eringen-ова диференцијална форма не даје резултате који се поклапају са емпиријским понашањима носача (нарочито код испитивања утицаја нелокалног параметра на крутост конзолног носача). Овде је показано, а и резултати потврђују парадокс Ерингерове теорије. Постоје неколико сугестија аутора (*Fernández-Sáez, J. u сараници, 2016; Eptaimeros, K.G. u сарадници, 2016, Batra, R. C., 2021, Penna, R. u сарадници, 2021*) који су се бавили превазилажењем овог парадокса. Интегрална форма у смислу деформација, а не напона приказана је у раду (*Batra, R. C., 2021*). У раду (*Batra, R. C., 2021*) предложено је неколико алтернативних решења како би се избегао парадокс Ерингерове теорије.

Овде је доказано да Eringen-ова метода у диференцијалној форми има недостатак јер не обухвата тачност решења у случају свих граничних услова (поготово код конзолног носача као што је у овом примеру) и свих облика оптерећења (највише изражено у случају конзолног носача са концентрисаном силом на слободном крају), видети рад (*Fernández-Sáez, J. u сараници, 2016*).

Недостатак изражавања, односно извођења Eringen-ове диференцијалне форме која следи из интегралне захтева додатна ограничења за подинтегралне функције (спољашњег оптерећења) да би се могла свести на свој еквивалент у интегралној форми (*Penna, R. u сарадници, 2021*). Ови услови су задовољени код носача као што су проста греда са концентричном силом на средини или континуалним периодичним оптерећењем (*Fernández-Sáez, J. u сараници, 2016*).

Одавде се може закључити да се приликом проучавања нано-система описаног ротирајућом нано-гредом показује недостатак у приступу решавања применом Eringen-ове диференцијалне методе, јер решење није могуће вратити у интегралну форму за услов ослањања конзолне греде и све облике спољашњих оптерећења. Примена Eringen-ове интегралне форме на представљени нано-систем би могла дати даље усмерење за наредна истраживања и поређења.



## 7. ЗАКЉУЧАК

У овој докторској дисертацији представљена је анализа динамике различитих типова еластично спрегнутих нано-структура сачињених од две угљеничне нано-цеви моделиране као две нано-греде, два графенска нано-листића моделирана као две нано-плоче и комбинација нано-плоче и двострано закривљене плитке нано-љуске. Спрежући слој између нано-елемената је моделиран Winkler-овим еластичним слојем, који представља међуатомске силе између два нано-елемента, попут van der Waals-ове интеракције. За наведене нано-системе, применом Eringen-ове нелокалне теорије напона и Euler–Bernoulli-јеве теорије греда, теорије плоча Kirchhoff-Love и линеарне теорије плитких љуски Novozhilov-a, написане су једначине којима се описује њихово осциловање и објашњава динамика. За посматране спрегнуте нано-структуре аналитички су одређене вредности сопствених кружних фреквенција, изведени закони малих трансверзалних померања услед дејства различитих типова спољашњег оптерећења, те су разматрани критеријуми критичних сила извијања.

Типови оптерећења који су анализирани у овој докторској дисертацији су континуално равномерно распоређено хармонијско оптерећење, концентрисана хармонијска сила, покретна сила константног интензитета и покретна хармонијска сила.

Детаљно је спроведена параметарска анализа слободног и принудног осциловања наведених нано-система. Такође, детаљно је извршена параметарска анализа принудног непригушеног и пригушеног осциловања ротирајуће нано-греде изложене дејству равномерно распоређеног површинског хармонијског оптерећења.

Један од главних циљева ове докторске дисертације је испитивање утицаја различитих параметара (нелокалног, магнетног поља, радијуса закривљења, коефицијената пропорционалности пригушења, различитих вредности спољашњих оптерећења, радијуса главчине и угаоне брзине) на законе промена малих трансверзалних осцилација горњих и доњих нано-елемената.

Eringen-ова диференцијална нелокална теорија еластичности и Maxwell-ове релације су описане у ПРВОМ поглављу докторске дисертације.

У ДРУГОМ поглављу су приказане основе теорије греда, плоча и двострано закривљених плитких љуски. Применом другог Newton-овог закона, Hamilton-овог принципа, Eringen-ове теорије напона и одговарајућих теорија у зависности да ли је у питању греда, плоча или љуска, изведене су диференцијалне једначине помоћу којих су описана мала трансверзална померања представљених нано-система. Код нано-греда је коришћена Euler–Bernoulli-јева теорија греда, код нано-плоча теорија плоча Kirchhoff-Love и код двострано закривљених плитких нано-љуски линеарна теорија Novozhilov-a.

У ТРЕЋЕМ поглављу је представљена анализа слободних и принудних осцилација просто ослоњених нано-греда међусобно спрегнутих еластичним слојем, који се апроксимира Winkler-овим моделом дискретно распоређених опруга линеарних крутости, које делују по дужини греде. Написана је диференцијална једначина малих трансверзалних померања нано-система. Аналитички су одређене вредности сопствених кружних фреквенција и односа амплитуда осциловања нано-система. Приказани су закони малих трансверзалних померања услед дејства различитих типова спољашњег оптерећења, те су разматрани критеријуми критичних сила извијања.

Континуално равномерно распоређено хармонијско оптерећење, концентрисана хармонијска сила, покретна сила константног интензитета и покретна хармонијска сила су типови оптерећења за која су представљена аналитичка решења и нумеричка анализа принудних осцилација спрегнутих нано-греда.

Представљена је веза између односа амплитуда осциловања стационарног стања (стања пре појаве извијених геометријских облика напрегнутог нано-носача) и односа аксијалне силе притиска и критичног оптерећења извијања. На основу добијених вредности показано је веома добро поклапање са резултатима из рада ([Zhang, Y. Q. и сарадници 2008a](#)) када се занемаре утицаји аксијалног магнетног поља и нелокалног параметра.

Доказано је да утицаји нелокалног параметра и аксијалног магнетног поља смањују вредност амплитуде осциловања, што са физичке тачке гледишта доводи до повећања укупне крутости нано-система. Промена крутости система доводи до промена у природној фреквенцији система, чиме је могуће избећи настанак резонанције код различитих случајева спољних оптерећења.

Детаљном нумеричком анализом амплитуда осциловања, закључено је да брзина покретног оптерећења има утицаја на промену вредности амплитуда осциловања. Вредности амплитуда осциловања су веће код покретне хармонијске силе, него код покретне силе константног интензитета.

За два случаја спољашњих оптерећења: равномерно распоређеног хармонијског и покретне хармонијске силе изведени су закони малих трансверзалних померања принудних осцилација анализираних нано-система у средњим равнима нано-греда.

Доказано је да аксијално магнетно поље смањује вредност амплитуде трансверзалних померања нано-система код оба случаја спољашњих оптерећења.

Закључено је да се пажљивим одабиром интензитета магнетног поља може подесити амплитуда принудних осцилација у одређеном опсегу без промене других материјалних и геометријских карактеристика нано-система. Ово омогућава практичну примену таквих система у динамичким апсорберима, нано-резонаторима и нано-актуатор уређајима.

Нумеричком анализом нелокалног параметра, закључено је да пораст његове вредности узрокује смањење вредности амплитуда малих трансверзалних померања горње и доње нано-греде за оба анализирана случаја спољашњих оптерећења.

Тачност добијених резултата је упоређивана са резултатима из објављених радова. Приказано је добро слагање резултата упоређивањем вредности најниже природне фреквенције нано-система са резултатом природне фреквенције једне угљеничне нано-цеви добијене молекуларно динамичким симулацијама у радовима ([Ansari, R. u Sahmani, S., 2012](#) u [Ansari, R. u сападници 2012b](#)).

У ЧЕТВРТОМ поглављу изучаване су слободне и принудне осцилације просто ослоњених нано-плоча међусобно спрегнутих еластичним слојем, који се апроксимира Winkler-овим моделом дискретно распоређених опруга линеарних крутости, које делују по површини плоче. Аналитички су одређене вредности сопствених кружних фреквенција и односа амплитуда осциловања оваквог нано-система. Приказани су закони малих трансверзалних осцилација горње и доње нано-плоче за различите случајеве спољашњих оптерећења: равномерно распоређено површинско и линијско хармонијско оптерећење и концентрисана хармонијска сила. За разматране случајеве спољашњих

оптерећења, на основу сопствене фреквенције система, приказани су услови настанка резонанције и понашања нано-система као динамичког абсорбера. Извршено је поређење вредности амплитуда осциловања са резултатима добијеним у раду (*Oniszczyk, Z., 2004*), када се занемаре утицаји магнетног поља и нелокалног параметра.

Уочено је да пораст интензитета магнетног поља и нелокалног параметра код равномерно распоређеног површинског и линијског хармонијског оптерећења, утиче на смањење вредности амплитуда осциловања нано-система, при константној крутости еластичног слоја.

Приликом анализе малих трансверзалних померања представљеног нано-система за све случајеве спољашњих оптерећења (равномерно распоређеног површинског и линијског хармонијског оптерећења, као и концентрисане хармонијске силе) разматрани су утицаји нелокалног параметра, магнетног поља и магнитуде спољашњих побуда, при чему се дошло се закључка:

- пораст интензитета магнетног поља и нелокалног параметра смањује вредност амплитуде осциловања и горње и доње нано-плоче разматраног система,
- повећање вредности магнитуда спољашњих оптерећења, воде до повећања вредности амплитуда трансверзалних померања и горње и доње нано-плоче разматраног нано-система. Минимална вредност амплитуде малих трансверзалних померања горње и доње нано-плоче је примећена у случају равномерно распоређеног површинског хармонијског оптерећења, док се највећа вредност уочава у случају концентрисане хармонијске силе.

Представљена је параметарска зависност облика функције трансверзалних померања нано-система од нелокалног параметра, услед промене вредности магнитуда спољашњих оптерећења. Уочено је да се све три криве са различитим вредностима магнитуде спољашњих оптерећења пресецају у једној тачки када је вредност нелокалног параметра 0.4. За вредности нелокалног параметра нижег од 0.4 трансверзалне осцилације се повећавају са повећањем вредности магнитуде спољашњих оптерећења. Са друге стране, за вредности нелокалног параметра већих од 0.4, трансверзалне осцилације нано-плоча опадају са порастом вредности магнитуде спољашњих оптерећења.

Приказано је веома добро слагање добијених резултата упоређивањем вредности најниже природне фреквенције нано-система са резултатом природне фреквенције

једнослојног графенског листића добијене молекуларно динамичким симулацијама из рада (*Ansari, R. u сарадници 2010*).

У ПЕТОМ поглављу представљен је наносистем плоча-љуска сачињен од еластично спрегнутих елемената нано-плоче и нано-љуске. Нано-плоча и двострано закривљена плитка нано-љуска направљени су од орторопних материјала. Оба нано-елемента су просто ослоњена и спојена еластичним слојем, који се апроксимира Winkler-овим моделом дискретно распоређених опруга линеарних крутости, које делују по површини плоче и љуске. Спроведена је детаљна анализа слободних и принудних осцилација наносистема плоча-љуска. Изведен је систем од четири спрегнуте парцијалне диференцијалне једначине малих трансверзалних осцилација. Решења диференцијалних једначина која описују мала трансверзална померања принудних осцилација нано-система добијена су применом методе модалне анализе. Претпостављено је да је нано-систем под дејством равномерно распоређеног површинско хармонијског оптерећења.

Анализиране су природне фреквенције представљеног нано-система. У циљу валидације, вредности природних фреквенција су поређене са резултатима из рада (*Oniszczyk, Z., 2000b, 2004*), занемаривањем утицаја нелокалног параметра и радијуса кривине, при чему је разматрани нано-систем сведен на систем од две нано-плоче (наносистем плоча-плоча). Приказано је упоређивање вредности природних фреквенција услед промене нелокалног параметра. Веће вредности нелокалног параметра снижавају вредност природних фреквенција. Уочено је добро слагање резултата упоређивањем вредности најниже природне фреквенције нано-система са резултатом природне фреквенције једнослојног графенског листића добијене молекуларно динамичким симулацијама из рада (*Ansari, R. u сарадници 2010*).

Детаљном анализом слободних осцилација и упоређивањем вредности амплитуда осциловања, показано је да је вредност амплитуде нано-плоче за наносистем плоча-љуска мања у поређењу са амплитудом осциловања нано-плоче наносистема плоча-плоча.

Анализом вредности амплитуде слободних осцилација услед промене радијуса закривљења нано-љуске, уочено је да се са повећањем радијуса кривине повећала и вредност амплитуде осциловања горње нано-плоче наносистема плоча-љуска. При томе се дошло до закључка да се са повећањем вредности полупречника кривине

приближавамо случају система плоча-плоча, док су у случају постојања радијуса кривине слободна трансверзална померања горње нано-плоче мања.

Код детаљне анализе принудних пригушених осцилација нано-система (где је пригушење остварено помоћу Rayleigh-евог типа пропорционалног пригушења) разматран је утицај промене различитих параметара у нано-систему, на мала трансверзална померања средње тачке нано-плоче и нано-љуске. Најважније је напоменути да се при упоређивању вредности амплитуда осциловања горњих елемената наносистема плоча-љуска и наносистема плоча-плоча уочило смањење амплитуде код нано-плоче наносистема плоча-љуска. Овим доказивањем испуњен је један од главних циљева истраживања оваквог нано-система.

Испитивањем утицаја закривљености нано-љуске на мала трансверзална померања нано-система показано је да ниже вредности радијуса кривине утичу на смањење вредности амплитуде осциловања и нано-плоче и нано-љуске. Приказан је и утицај једностраног и двостраног закривљења плитке нано-љуске на мала трансверзална померања наносистема плоча-љуска. Установљено је да је амплитуда осциловања мања код нано-система са једнострано закривљеном нано-љуском него код нано-система са двострано закривљеном нано-љуском.

Разматрани су утицаји нелокалног параметра, магнитуде спољашњег оптерећења и коефицијената пропорционалности пригушења на мала трансверзална померања средње равни нано-система.

Примећено је да повећање вредности магнитуде спољашњег оптерећења повећава амплитуду осциловања и нано-плоче и нано-љуске наносистема плоча-љуска. Са порастом коефицијената пропорционалности пригушења уочено је смањење вредности амплитуде трансверзалних осцилација и нано-плоче и нано-љуске наносистема плоча-љуска.

Показано је да вредност амплитуде осциловања нано-плоче наносистема плоча-љуска опада са порастом нелокалног параметра, док вредност трансверзалних померања нано-љуске наносистема плоча-љуска расте са порастом нелокалног параметра. Слична запажања изнета су и у раду ([Arefi, M., 2018](#)).

Закључак је да су утицаји различитих параметара на вредности амплитуде малих трансверзалних осцилација нано-система од великог практичног значаја за нано-електро-механичке системе.

У ШЕСТОМ поглављу детаљно су испитивани утицаји различитих параметара на амплитуде осциловања малих трансверзалних померања ротирајуће нано-греде. Динамика ротирајуће нано-греде је од практичног значаја, посебно када се испитује утицај спољашњег оптерећења. Ротирајуће нано-структуре побољшавају своја функционална својства и налазе примену код осовина нано-мотора, тачније хибридизованим нано-генераторима са различитим утицајима спољашњих оптерећења.

Поред нелокалног параметра и спољашњег оптерећења у овом поглављу су разматрани параметар угаоне брзине и параметар радијуса главчине. Како би се потврдила тачност вредности природних фреквенција добијених другачијом методом решавања у односу на рад (*Pradhan, S. C. u Murmu, T., 2010*), уведени су утицајни параметри у бездимензионом облику.

Представљена је параметарска зависност облика функције сопствених фреквенција (у првом, другом, трећем и четвртом моду осциловања) од угаоне брзине, услед промене вредности нелокалног параметра и полупречника главчине. Са повећањем вредности нелокалног параметра, повећала се сопствена фреквенција у првом моду осциловања. Код виших модова осциловања је констатовано супротно, односно са повећањем вредности нелокалног параметра су се смањиле вредности сопствених фреквенција. Слична запажања су представљена у раду (*Pradhan, S. C. u Murmu, T. 2010*).

Спроведена је детаљна анализа принудних непригушених и пригушених осцилација коришћењем стандардног поступка модалне анализе.

За ротирајућу нано-греду која је под дејством равномерно распоређеног површинско хармонијског оптерећења, приказане су мале трансверзалне осцилације за краћи временски и дужи временски период принудних непригушених осцилација, респективно са утицајима нелокалних параметара, угаоних брзина и радијуса главчине.

Запажен је феномен подрхтавања (удара) код малих трансверзалних померања непригушених осцилација ротирајуће нано-греде.

Уочено је да се са повећањем вредности нелокалног параметра појавило више *периода подрхтавања* (посматрањем и краћег и дужег временског домена) и да је тада вредност амплитуде удара мања.

Закључено је да се са повећањем угаоне брзине смањила вредност амплитуде малих трансверзалних померања и да се само при нижим вредностима угаоних брзина појавило подрхтавање.

Повећање вредности полупречника главчине довело је до смањења вредности амплитуде малих трансверзалних померања. Показано је да се са повећањем вредности радијуса главчине повећао и број удара.

Код анализе пригушених осцилација представљене ротирајуће нано-греде, пригушење је остварено помоћу Rayleigh-евог типа пропорционалног пригушења. Такође, анализирани су утицаји нелокалног параметра, угаоне брзине и радијуса главчине на мала трансверзална померања ротирајуће нано-греде. Одговарајући фазни дијаграми као и дијаграми угиба ротирајуће нано-греде представљени су приликом анализирања свих разматраних утицаја.

Са повећањем вредности угаоних брзина и радијуса главчина уочено је смањење вредности амплитуда малих трансверзалних померања ротирајуће нано-греде.

Приказано је да су најудаљеније тачке нано-греде (мерено од укљештења) изложене највећем утицају промене угаоне брзине и радијуса главчине, при чему су уочени мањи угиби при већим вредностима и угаоних брзина и радијуса главчина. Тиме је доказано да та два параметра утичу на крутост ротирајуће нано-греде.

Уочено је да нелокални параметар није значајно утицао на промену вредности амплитуде малих трансверзалних принудних пригушених осцилација ротирајуће нано-греде. Такође, промена нелокалног параметра није утицала ни на угибе на слободном крају конзоле. Тиме је показано да нелокални параметар не утиче на крутост нано-греде.

Овом анализом је потврђено да диференцијална Eringen-ова форма не даје резултате који се поклапају са емпиријским понашањима носача (нарочито код испитивања утицаја нелокалног параметра на крутост конзолног носача). Приликом испитивања утицаја нелокалног параметра, приказани резултати потврђују парадокс Ерингерове теорије. Одавде се може закључити да се приликом проучавања нано-система описаног ротирајућом нано-гредом показује недостатак у приступу решавања применом



Eringen-ове диференцијалне методе јер решење није могуће вратити у интегралну форму за услов ослањања конзолне греде и све облике спољашњих оптерећења. Указано је на који начин би се могло доћи до алтернативних решења како би се избегао парадокс Ерингерове теорије. Ово истраживање би могло бити полазна основа за наредна испитивања и упоређивања.

Што се тиче резултата добијених код просто ослоњених нано-система, у раду (*Fernández-Sáez, J. и сараници, 2016*) потврђено је да се они подударају у оба случаја: било да се користи нелокална интегрална или нелокала диференцијална Eringen-ова конститутивна релација.

Утицаји различитих параметара на наведене нано-системе могу допринети побољшању пројектовања нано-електромеханичких уређаја. Резултати из ове дисертације могу бити корисни за будућа истраживања различитих типова сложених нано-система.

## ЛИТЕРАТУРА

Avouris, P., Chen, Z., Perebeinos, V. (2007). Carbon-based electronics. *Nature nanotechnology*, 2(10), 605-615.

Adhikari, S., Chowdhury, R. (2010). The calibration of carbon nanotube based bionanosensors. *Journal of Applied physics*, 107(12), 124322.

Adhikari, S., Murmu, T., (2011). Nonlocal Vibration of Coupled Double-Nanoplate-Systems. *School of Engineering, Swansea University, Singleton Park, Swansea SA2 8PP, Wales UK.*

Amabili, M., (2008). Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. *New York: Cambridge University Press.*

Ansari, R., Ajori, S., & Arash, B., (2012a). Vibrations of single-and double-walled carbon nanotubes with layerwise boundary conditions: a molecular dynamics study. *Current Applied Physics*, 12(3), 707- 711.

Ansari, R., Gholami R., Rouhi H., (2012b). Vibration analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories, *Composites: Part B*, 43, 2985–2989.

Ansari, R., Sahmani S., (2012). Small scale effect on vibrational response of single-walled carbon nanotubes with different boundary conditions based on nonlocal beam models. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 17, 1965–1979.

Ansari, R., Sahmani, S., & Arash, B., (2010). Nonlocal plate model for free vibrations of singlelayered graphene sheets. *Physics Letters A*, 375(1), 53-62.

Arani, A. G., Shokravi, M., (2014). Vibration response of visco-elastically coupled double-layered visco-elastic graphene sheet systems subjected to magnetic field via strain gradient

theory considering surface stress effects. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part N: Journal of Nanoengineering and Nanosystems*, 1740349914529102.

Arani, A. G., Maboudi, M. J., Arani, A. G., Amir, S., (2013). 2D-Magnetic Field and Biaxial In-Plane Pre-Load Effects on the Vibration of Double Bonded Orthotropic Graphene Sheets. *Journal of Solid Mechanics*, 5(2), 193-205.

Arani, A. G., Jalaei, M. H., (2016). Transient behavior of an orthotropic graphene sheet resting on orthotropic visco-Pasternak foundation. *International Journal of Engineering Science*, 103, 97-113.

Assadi, A., (2013). Size dependent forced vibration of nanoplates with consideration of surface effects. *Applied Mathematical Modelling*, 37(5), 3575-3588.

Aksencer, T., Aydogdu, M. (2012). Forced transverse vibration of nanoplates using nonlocal elasticity. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 44(7), 1752-1759.

Arefi, M., (2018). Analysis of a doubly curved piezoelectric nano shell: nonlocal electro-elastic bending solution. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 70, 226-237.

Atanasov, M. S., Karličić, D., Kozić, P. (2017). Forced transverse vibrations of an elastically connected nonlocal orthotropic double-nanoplate system subjected to an in-plane magnetic field. *Acta Mechanica*, 228(6), 2165-2185.

Atanasov, M. S., Karličić, D., Kozić, P. Janevski G., (2017b). Thermal effect on free vibration and buckling of a double-microbeam system. *Facta Universitatis Series: Mechanical Engineering*. 15, 1, pp. 45 – 62, ISSN: 0354-2025.

Atanasov, M. S., Stojanović, V., (2020). Nonlocal forced vibrations of rotating cantilever nano-beams. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 79, 103850.

Atanasov, M. S., Pavlović, I., (2022). Effects of dynamic absorption caused to curvatures in geometry of coupled nano-structures. *1st International Conference on Mathematical Modelling in Mechanics and Engineering Mathematical Institute SANU*, 08-10. September, 2022. pp. 68.

Atanasov, M. S., Pavlović, I. Jovanović B. Dragan, (2021). Forced vibration of the nano-system composed from elastically connected nano-plate and nano-shell with influence of different parameters. *8 th International Congress of Serbian Society of Mechanics Kragujevac, Serbia*, 28-30. June, 624-633.

Babaei, A., Yang, C. X., (2018). Vibration analysis of rotating rods based on the nonlocal elasticity theory and coupled displacement field. *Microsystem Technologies*, 1-9.

Batra, R. C., (2021). Misuse of Eringen's nonlocal elasticity theory for functionally graded materials. *International Journal of Engineering Science*, 159, 103425, 1-3.

Barone, V., & Peralta, J. E., (2008). Magnetic boron nitride nanoribbons with tunable electronic properties. *Nano letters*, 8(8), 2210-2214.

Bellucci, S., Gonzalez, J., Guinea, F., Onorato, P., Perfetto, E. (2007). Magnetic field effects in carbon nanotubes. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 19(39), 395017.

Correa-Duarte, M. A., Grzelczak, M., Salgueirino-Maceira, V., Giersig, M., Liz-Marzán, L. M., Farle, M., Diaz, R., (2005). Alignment of carbon nanotubes under low magnetic fields through attachment of magnetic nanoparticles. *The Journal of Physical Chemistry B*, 109(41), 19060-19063.

Claeyssen, J. R., Tsukazan, T., Coppeti, R. D. (2013). Nonlocal effects in modal analysis of forced responses with single carbon nanotubes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 38(2), 299-311.

Diken, H., (2000). Vibration control of a rotating Euler–Bernoulli beam. *Journal of Sound and Vibration*, 232(3), 541-551.

Duncan, W. J., (1937). Galerkin's Method in Mechanics and Differential Equations, *Aeronautical Research Committee Reports and Memoranda*, No. 1798.

Duncan, W.J., (1938). The Principles of the Galerkin Method. *Aeronautical Research Report and Memoranda*, No. 1894.

Dresselhaus, M. S., Dresselhaus, G., Saito, R., Jorio, A. (2005). Raman spectroscopy of carbon nanotubes. *Physics Reports*, 409(2), 47-99.

Dubay, O., Kresse, G. (2003). Accurate density functional calculations for the phonon dispersion relations of graphite layer and carbon nanotubes. *Physical Review B*, 67(3), 035401.

Duan, W. H., Wang, C. M., Zhang, Y. Y., (2007). Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics. *Journal of Applied Physics*, 101(2), 024305-024305.

Eringen, A. C., (2002). Nonlocal continuum field theories. *Springer Science & Business Media*

Eringen, A. C., (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54(9), 4703-4710.

Eringen, A. C., (1972). Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *International Journal of Engineering Science*, 10(5), 425-435.

Eringen, A. C., Edelen, D. G. B., (1972). On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 10(3), 233-248.

Eptaimeros, K.G., Koutsoumaris, C.C. and Tsamasphyros, G.J., (2016). Nonlocal integral approach to the dynamical response of nanobeams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 115, 68-80.

Farrera, C., Torres Andón, F., and Feliu, N. (2017). Carbon nanotubes as optical sensors in biomedicine. *ACS nano*, 11(11), 10637-10643.

Fernández-Sáez, J., Zaera, R., Loya, J.A. and Reddy, J.N. (2016). Bending of Euler–Bernoulli beams using Eringen’s integral formulation: a paradox resolved. *International Journal of Engineering Science*, 99, 107-116.

Ghavanloo, E., Fazelzadeh, S. A. (2013). Free vibration analysis of orthotropic doubly-curved shallow shells based on the gradient elasticity. *Composites Part B: Engineering*, 45(1), 1448-1457.

Goerbig, M. O., Moessner, R., Doucot, B., (2006). Electron interactions in graphene in a strong magnetic field. *Physical Review B*, 74(16), 161407.

Han, S. M., Benaroya, H. and Wei, T., (1999). Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5), 935-988.

Hata, K., Futaba, D. N., Mizuno, K., Namai, T., Yumura, M., &Iijima, S., (2004). Water-assisted highly efficient synthesis of impurity-free single-walled carbon nanotubes. *Science*, 306(5700), 1362-1364.

Hodges, D.Y. and Rutkowski, M.Y., (1981). Free-vibration analysis of rotating beams by a variable-order finite-element method. *AIAA Journal*, 19(11), 1459-1466.

Hu, J., Odom, T. W., &Lieber, C. M., (1999). Chemistry and physics in one dimension: synthesis and properties of nanowires and nanotubes. *Accounts of Chemical Research*, 32(5), 435-445.

Hwu, C., Hsu, H. W., Lin, Y. H. (2017). Free vibration of composite sandwich plates and cylindrical shells. *Composite Structures*, 171, 528-537.

Iijima, S., (1991). Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature*, 354(6348), 56-58.

Iijima, S., Brabec, C., Maiti, A., & Bernholc, J., (1996). Structural flexibility of carbon nanotubes. *The Journal of chemical physics*, 104(5), 2089-2092.

Janevski, G., Despenić N., Pavlović R. I, (2020a). Thermal Buckling and Free Vibration of Timoshenko Fg Nanobeams Based on The Higher-Order Nonlocal Strain Gradient Theory. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 15:107-133.

Janevski, G., Pavlović R. I., Despenić N. (2020b) Thermal Buckling and Free Vibration of Euler–Bernoulli Fg Nanobeams Based on The Higher-Order Nonlocal Strain Gradient Theory, *Archives of Mechanics*, 72:139-168.

Kalamkarov, A.L., Georgiades A.V., Rokkam S.K., Veedu V.P., Ghasemi-Nejhad M.N., (2006). Analytical and numerical techniques to predict carbon nanotubes properties, *International Journal of Solids and Structures*, 43, 6832–6854.

Karličić, D., Murmu, T., Cajić, M., Kozić, P., & Adhikari, S., (2014a). Dynamics of multiple viscoelastic carbon nanotube based nanocomposites with axial magnetic field. *Journal of Applied Physics*, 115(23), 234-303

Karličić, D., Murmu, T., Adhikari, S., McCarthy, M., (2015a). Non-local Structural Mechanics. *John Wiley and Sons*.

Karličić, D., Kozić, P., Adhikari, S., Cajić, M., Murmu, T., Lazarević, M., (2015b). Nonlocal mass-nanosensor model based on the damped vibration of single-layer graphene sheet influenced by in-plane magnetic field. *International Journal of Mechanical Sciences* 96, 132-142.

Karličić, D., Kozić, P., & Pavlović, R. (2014b). Free transverse vibration of nonlocal viscoelastic orthotropic multi-nanoplate system (MNPS) embedded in a viscoelastic medium. *Composite Structures*, 115, 89-99.

- Karličić, D., Murmu, T., Cajić, M., Kozić, P., Adhikari, S. (2014). Dynamics of multiple viscoelastic carbon nanotube based nanocomposites with axial magnetic field. *Journal of Applied Physics*, 115(23), 234-303.
- Karličić, D. Z., (2016.) Primena nelokalne teorije kontinuuma u analizi dinamičkog ponašanja i stabilnosti sistema spregnutih nano-struktura. *Univerzitet u Nišu*.
- Kiani, K., Mehri, B., (2010). Assessment of nanotube structures under a moving nanoparticle using nonlocal beam theories. *Journal of Sound and Vibration*, 329(11), 2241-2264.
- Kraus, J., (1984). Electromagnetics, *McGrawHill, Inc.*, USA.
- Kelly, S. G., (2012). Mechanical vibrations: theory and applications. *Cengage learning*.
- Kumar, C. S., & Mohammad, F., (2011). Magnetic nanomaterials for hyperthermia-based therapy and controlled drug delivery. *Advanced drug delivery reviews*, 63(9), 789-808.
- Kozić, P., Pavlović, R., & Karličić, D., (2014). The flexural vibration and buckling of the elastically connected parallel-beams with a Kerr-type layer in between. *Mechanics Research Communications*, 56, 83-89.
- Li, C., Chou, T. W. (2004). Mass detection using carbon nanotube-based nanomechanical resonators. *Applied Physics Letters*, 84(25), 5246-5248.
- Li, C., Thostenson, E. T., Chou, T. W. (2008). Sensors and actuators based on carbon nanotubes and their composites: a review. *Comp. Science and Technology*, 68(6), 1227-1249.
- Liu, Y., Jones, R. O., Zhao, X., Ando, Y. (2003). Carbon species confined inside carbon nanotubes: A density functional study. *Physical Review B*, 68(12), 125413.
- Leissa, A. W., Kadi, A. S. (1971). Curvature effects on shallow shell vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 16(2), 173-187.



- Lu, P., Lee, H. P., Lu, C., & Zhang, P. Q., (2006). Dynamic properties of flexural beams using a nonlocal elasticity model. *Journal of Applied Physics*, 99(7), 073510.
- Lu, J. P. (1997)., Elastic properties of carbon nanotubes and nanoropes. *Physical Review Letters*, 79(7), 1297.
- Malekzadeh, P., Setoodeh, A. R., Beni, A. A., (2011). Small scale effect on the free vibration of orthotropic arbitrary straight-sided quadrilateral nanoplates. *Composite Structures*, 93(7), 1631-1639.
- Murmu, T., Adhikari, S., (2010). Scale-dependent vibration analysis of prestressed carbon nanotubes undergoing rotation. *Journal of Applied Physics*, 108 (12), 123507.
- Murmu, T., Adhikari, S. (2012). Nonlocal frequency analysis of nanoscale biosensors. *Sensors and Actuators A: Physical*, 173(1), 41-48.
- Murmu, T., McCarthy, M. A., Adhikari, S. (2012a). Vibration response of double-walled carbon nanotubes subjected to an externally applied longitudinal magnetic field: A nonlocal elasticity approach. *Journal of Sound and Vibration*, 331(23), 5069-5086.
- Murmu, T., McCarthy, M. A., Adhikari, S. (2012b). Nonlocal elasticity based magnetic field affected vibration response of double single-walled carbon nanotube systems. *Journal of Applied Physics*, 111(11), 113511.
- Murmu, T., Adhikari, S., (2010). Scale-dependent vibration analysis of prestressed carbon nanotubes undergoing rotation. *Journal of Applied Physics*, 108 (12), 123507.
- Murmu, T., Adhikari, S. (2011). Nonlocal vibration of carbon nanotubes with attached buckyballs at tip. *Mechanics Research Communications*, 38(1), 62-67.
- Murmu, T., Adhikari, S., (2011b). Nonlocal vibration of bonded double-nanoplate-systems. *Composites Part B: Engineering*, 42(7), 1901-1911.

Mohammadi, M., Safarabadi, M., Rastgoo, A., Farajpour, A., (2016). Hygro-mechanical vibration analysis of a rotating viscoelastic nanobeam embedded in a visco-Pasternak elastic medium and in a nonlinear thermal environment. *Acta Mechanica*, 227(8), 2207-2232.

Narendar, S., Gupta, S. S., Gopalakrishnan, S., (2012). Wave propagation in single-walled carbon nanotube under longitudinal magnetic field using nonlocal Euler–Bernoulli beam theory. *Applied Mathematical Modelling*, 36(9), 4529-4538.

Norizan, M. N., Moklis, M. H., Demon, S. Z. N., Halim, N. A., Samsuri, A., Mohamad, I. S., Knight, V.F. and Abdullah, N., (2020). Carbon nanotubes: Functionalisation and their application in chemical sensors. *RSC advances*, 10(71), 43704-43732.

Oniszczyk, Z., (2000a). Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system, *Journal of Sound and Vibration*, 232, 387–403.

Oniszczyk, Z., (2000b). Free transverse vibrations of an elastically connected rectangular simply supported double-plate complex system. *Journal of sound and vibrat.*, 236(4), 595-608.

Oniszczyk, Z., (2003). Forced transverse vibrations of an elastically connected complex simply supported double-beam system. *Journal of Sound and Vibration*, 264(2), 273-286.

Oniszczyk, Z., (2004). Forced transverse vibrations of an elastically connected complex rectangular simply supported double-plate system. *Journal of sound and vibration*, 270(4), 997-1011.

Pavlović, R. I., Pavlović R., Janevski G., Despenić N., Pajkovic V., (2020). Dynamic behavior of two elastically connected nanobeams under a white noise process. *Facta Universitatis, series: Mechanical Engineering*, 18(2), 219 – 227.

Pavlović, R. I, Karličić D., Pavlović R., Janevski G., Ćirić I., (2016). Stochastic Stability of Multi-Nanobeam Systems. *International Journal of Engineering Science*, 109:88-105.

- Pavlović, R. I., Pavlović R., Janevski G., (2019a) Dynamic Stability and Instability of Nanobeams Based on the Higher-Order Nonlocal Strain Gradient Theory. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 72:157-178.
- Pavlović, R. I., Pavlović R., Janevski G. (2019b) Mathematical Modeling and Stochastic Stability Analysis of Viscoelastic Nanobeams Using Higher-Order Nonlocal Strain Gradient Theory. *Archives of Mechanics*, 71:137-153.
- Penna, R., Feo, L., Fortunato, A., Luciano, R., (2021). Nonlinear free vibrations analysis of geometrically imperfect FG nano-beams based on stress-driven nonlocal elasticity with initial pretension force. *Composite Structures*, 255, 112856.
- Pradhan, S. C., Murmu, T., (2010). Application of nonlocal elasticity and DQM in the flapwise bending vibration of a rotating nanocantilever. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 42(7), 1944-1949.
- Pouresmaeeli, S., Ghavanloo, E., Fazelzadeh, S. A., (2013). Vibration analysis of viscoelastic orthotropic nanoplates resting on viscoelastic medium. *Composite Structures*, 96, 405-410.
- Radić, N, Jeremić D, Mijatović B., (2018). Vibration analysis of orthotropic double-nanoplate system subjected to unidirectional in-plane magnetic field with various boundary conditions. *Journal of Mechanical and Civil Engineering*, 15, 59-76.
- Rašković, D., (1965). Teorija oscilacija. *Univerzitet u Beogradu. Naučna knjiga Beograd*.
- Reddy, J. N., (2002). Energy principles and variational methods in applied mechanics. *John Wiley & Sons*.
- Reddy, J. N., (2004). Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. *CRC press*
- Reddy, J. N. (2006). Theory and analysis of elastic plates and shells. *CRC press*.

- Reddy, J. N., (2007). Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45(2), 288-307
- Reddy, J. N., & Pang, S. D., (2008). Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103(2), 023511.
- Reich, S., Thomsen, C., & Maultzsch, J., (2008). Carbon nanotubes: basic concepts and physical properties. *John Wiley & Sons*.
- Roth, S., Baughman, R. H. (2002). Actuators of individual carbon nanotubes. *Current Applied Physics*, 2(4), 311-314.
- Ruoff, R. S., Qian, D., Liu, W. K. (2003). Mechanical properties of carbon nanotubes: theoretical predictions and experimental measurements. *Comp.Rendus Physiq.*, 4(9), 993-1008.
- Ru, C. Q. (2001), Axially compressed buckling of a double walled carbon nanotube embedded in an elastic medium. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(6), 1265-1279.
- Salvetat, J. P., Bonard, J. M., Thomson, N. H., Kulik, A. J., Forro, L., Benoit, W., Zuppiroli, L., (1999). Mechanical properties of carbon nanotubes. *Applied Physics A*, 69(3), 255-260.
- Schilhansl, M., (1958). Bending frequency of a rotating cantilever beam. *Journal of Applied Mechanics*, 25(1).
- Shafiei, N., Kazemi, M., Ghadiri, M., (2016). Comparison of modeling of the rotating tapered axially functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli microbeams. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 83, 74-87.
- Shi, J. X., Lei, X. W., Natsuki, T., (2021). Review on carbon nanomaterials-based nano-mass and nano-force sensors by theoretical analysis of vibration behavior. *Sensors*, 21(5), 1907.

Simonović, J., (2012). Dinamika i stabilnost hibridnih dinamičkih sistema. Doktorska disertacija, *Univerzitet u Nišu, Mašinski fakultet*.

Şimşek, M., (2010). Dynamic analysis of an embedded microbeam carrying a moving microparticle based on the modified couple stress theory. *International Journal of Engineering Science*, 48(12), 1721-1732.

Şimşek, M., (2011). Nonlocal effects in the forced vibration of an elastically connected double-carbon nanotube system under a moving nanoparticle. *Computational Materials Science*, 50(7), 2112-2123.

Stamenković, M., Karličić, D., Goran, J., Kozić, P., (2016). Nonlocal forced vibration of a double single-walled carbon nanotube system under the influence of an axial magnetic field. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 11(3), 279-307.

Szirtes, T., Rozsa, P., (2006). Applied Dimensional Analysis and Modeling. *Elsevier Science and Technology Books*.

Wilder, J.W., Venema, L.C., Rinzler, A.G., Smalley, R.E., Dekker, C., (1998). Electronic structure of atomically resolved carbon nanotubes. *Nature*, 391(6662), pp.59-62.

Zhang, Y. Q., Lu, Y., Ma, G. W., (2008a). Effect of compressive axial load on forced transverse vibrations of a double-beam system. *Inter. Journal of Mech. Sci.*, 50(2), 299-305.

Zhang, Y. Q., Lu, Y., Wang, S. L., Liu X., (2008b). Vibration and buckling of a double-beam system under compressive axial loading, *Journal of Sound and Vibration*, 318, 341–352.

Zhang, B., Chen, J., Jin, L., Deng, W., Zhang, L., Zhang, H., Wang, Z. L., (2016). Rotating-disk-based hybridized electromagnetic–triboelectric nanogenerator for sustainably powering wireless traffic volume sensors. *ACS Nano*, 10(6), 6241-6247.

Zhao, X., Li, C., Wang, Y., Han, W., Yang, Y., (2021). Hybridized nanogenerators for effectively scavenging mechanical and solar energies. *Iscience*, 24(5), 102415.

## Прилог А

Коришћењем Buckingham-ове теореме (*Szirtes, T., Rozsa, P., 2006*), могуће је увести бездимензионе променљиве тако да описивање проблема буде независно од специфичних мерних јединица. Број бездимензионих променљивих (параметара) изражен је Buckingham-овом  $\pi$  – теоремом, где за дате  $n$  променљиве, изражене терминима  $r$  независних димензија, не постоји више од  $(n - r)$  независних бездимензионих променљивих. Обично се узимају три основне димензије маса  $M$ , дужина  $L$  и време  $T$ , или скраћено  $MLT$  систем.

Математички изрази или физички значајна једначина која повезује свих петнаест променљивих ( $n = 15$ ) у задатку, односно у диференцијалним једначинама (4.1) и (4.2) дефинише се као

$$F(a, \rho h, D_{11}, \tilde{k}, b, t, w_i, \tilde{\eta} h H_x^2, D_{22}, D_{12}, D_{66}, (e_0 \tilde{a})^2, f_i, x, y) = 0, \quad (\text{A. 1})$$

где је  $(a, \rho h, D_{11}, \tilde{k}, b, t, w_i, \tilde{\eta} h H_x^2, D_{22}, D_{12}, D_{66}, (e_0 \tilde{a})^2, f_i, x, y)$  сет променљивих димензионих константи.

У **Поглављу 4** уведене су променљиве  $a, \rho h$ , и  $D_{11}$  као примарне променљиве, при чему главна својства ових променљивих спречавају да се формира бездимензиони број у било којој комбинацији. Другим речима, било која комбинација, односно било које прве две променљиве ( $a, \rho h$ ) не могу дати трећу променљиву  $D_{11}$ .

На основу овога се може формирати карактеристична детерминанта коришћењем експонената основних променљивих, чије вредности морају бити различите од нуле. У наставку су приказане коришћене променљиве и њихове димензије

$$a \rightarrow [L], \quad \rho h \rightarrow [ML^{-2}], \quad D_{11} \rightarrow [ML^2T^{-2}], \quad (\text{A. 2})$$

и карактеристична детерминанта

$$\begin{array}{l} [\rho h] \\ [a] \\ [D_{11}] \end{array} \begin{array}{l} M \\ L \\ T \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ -2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} L \\ -2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} T \\ 0 \\ -2 \end{array} \Big| = -2. \quad (\text{A.3})$$

Услов некомпатибилности је задовољен решавањем наведене детерминанте за усвојене варијабле. На основу Buckingham-ове  $\pi$  – теореме ( $m = n - 3 = 15 - 3 = 12$ ), функција  $F$  дефинисана једначином (A.1) се може свести на функцију са бездимензионим параметрима као

$$\phi \left( \pi_{1\tilde{k}}, \pi_{2b}, \pi_{3t}, \pi_{4w_i}, \pi_{5\tilde{\eta}hH_x^2}, \pi_{6D_{22}}, \pi_{7D_{12}}, \pi_{8D_{66}}, \pi_{9(e_0\tilde{a})^2}, \pi_{10f_i}, \pi_{11x}, \pi_{12y} \right) = 0, \quad (\text{A.4})$$

где су димензије осталих променљивих

$$\begin{aligned} x &\rightarrow [L], & y &\rightarrow [L], & \tilde{k} &\rightarrow [ML^{-2}T^{-2}], & b &\rightarrow [L], & t &\rightarrow [T], & w_i &\rightarrow [L], \\ (D_{22}, D_{12}, D_{66}) &\rightarrow [ML^2T^{-2}], & (e_0\tilde{a})^2 &\rightarrow [L^2], & f_i &\rightarrow [ML^{-1}T^{-2}], & \tilde{\eta}hH_x^2 &\rightarrow [MT^{-2}]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Треба напоменути да су бездимензиони  $\pi$  – чланови из израза (A.4) дефинисани у облику

$$\pi_{1k} = \tilde{k} \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1}, \quad \pi_{2b} = b \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1}, \quad (\text{A.6})$$

$$\pi_{3t} = t \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1}, \quad \pi_{4w_i} = w_i \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1}, \quad (\text{A.7})$$

$$\pi_{5\tilde{\eta}hH_x^2} = \tilde{\eta}hH_x^2 \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1}, \quad \pi_{6D_{22}} = D_{22} \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1}, \quad (\text{A.8})$$

$$\pi_{7D_{12}} = D_{12} \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1}, \quad \pi_{8D_{66}} = D_{66} \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1}, \quad (\text{A.9})$$

$$\pi_{9\mu} = (e_0\tilde{a})^2 \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1}, \quad \pi_{10f_i} = f_i \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1}, \quad (\text{A.10})$$

$$\pi_{11x} = x \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1}, \quad \pi_{12y} = yR \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1}. \quad (\text{A.11})$$

На пример, бездимензиона анализа из једначине (A.6) представљена је као

$$\pi_{1k} \rightarrow [M^0L^0T^0],$$

$$\tilde{k} \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1} \rightarrow [ML^{-2}T^{-2} \cdot (ML^{-2})^{x_1} \cdot (L)^{y_1} \cdot (ML^2T^{-2})^{z_1}], \quad (\text{A.12})$$

где је

$$M^0 L^0 T^0 = ML^{-2} T^{-2} \cdot (ML^{-2})^{x_1} \cdot (L)^{y_1} \cdot (ML^2 T^{-2})^{z_1}. \quad (\text{A.13})$$

Након изједначавања експонената са истом основом добијају се следеће једначине

$$\begin{aligned} M: & \quad 1 + x_1 + z_1 = 0, \\ L: & \quad -2 - 2x_1 + y_1 + 2z_1 = 0, \\ T: & \quad -2 - 2z_1 = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Решавањем горњег система алгебарских једначина (A.14), добија се

$$(x_1 = 0, y_1 = 4, z_1 = -1), \rightarrow \pi_{1k} = \tilde{k} \cdot (\rho h)^{x_1} \cdot (a)^{y_1} \cdot (D_{11})^{z_1} = \tilde{k} \frac{a^4}{D_{11}} = K. \quad (\text{A.15})$$

Пратећи представљену методологију, добијају се остали бездимензиони  $\pi$  – изрази као

$$\begin{aligned} \pi_{1k} = K = \tilde{k} \frac{a^4}{D_{11}}, \quad \pi_{2b} = \frac{1}{R} = \frac{b}{a}, \quad \pi_{3t} = \tau = t \sqrt{\frac{D_{11}}{a^4 \rho h}}, \quad \pi_{4w_i} = \bar{w}_i = \frac{w_i}{a}, \\ \pi_{5\eta h H_x^2} = MP = \frac{\tilde{\eta} h H_x^2 a^2}{D_{11}}, \quad \pi_{6D_{22}} = \tilde{D}_{22} = \frac{D_{22}}{D_{11}}, \quad \pi_{7D_{12}} = \tilde{D}_{12} = \frac{D_{12}}{D_{11}}, \quad (\text{A.16}) \\ \pi_{8D_{66}} = \tilde{D}_{66} = \frac{D_{66}}{D_{11}}, \quad \pi_{9\mu} = \eta = \sqrt{\frac{(e_0 \tilde{a})^2}{a^2}}, \quad \pi_{10f_i} = \tilde{f}_i = f_i \frac{a^3}{D_{11}}, \\ \pi_{11x} = \xi = \frac{x}{a}, \quad \pi_{12y} = \zeta = \frac{y}{b}. \end{aligned}$$



## Прилог Б

У *Поглављу 5*, прецизније *Подпоглављу (5.5.1)* уведени су параметри у функцији од односа амплитуда осциловања који се налазе у поставци добијања решења слободних осцилација нано-система сачињеног од еластично спрегнутих елемената нано-плоче и нано-љуске. Параметри су у облику:

$$\lambda_{1mn} = (\alpha_{mn}^{(4)}\beta_{mn}^{(3)} - \alpha_{mn}^{(3)}\beta_{mn}^{(4)})\gamma_{mn}^{(2)} + (\alpha_{mn}^{(2)}\beta_{mn}^{(4)} - \alpha_{mn}^{(4)}\beta_{mn}^{(2)})\gamma_{mn}^{(3)} + (\alpha_{mn}^{(3)}\beta_{mn}^{(2)} - \alpha_{mn}^{(2)}\beta_{mn}^{(3)})\gamma_{mn}^{(4)} \quad (\text{Б. 1})$$

$$\lambda_{2mn} = (\beta_{mn}^{(4)} - \beta_{mn}^{(3)})\gamma_{mn}^{(2)} + (\beta_{mn}^{(2)} - \beta_{mn}^{(4)})\gamma_{mn}^{(3)} + (\beta_{mn}^{(3)} - \beta_{mn}^{(2)})\gamma_{mn}^{(4)} \quad (\text{Б. 2})$$

$$\lambda_{3mn} = (\alpha_{mn}^{(3)} - \alpha_{mn}^{(4)})\gamma_{mn}^{(2)} + (\alpha_{mn}^{(4)} - \alpha_{mn}^{(2)})\gamma_{mn}^{(3)} + (\alpha_{mn}^{(2)} - \alpha_{mn}^{(3)})\gamma_{mn}^{(4)} \quad (\text{Б. 3})$$

$$\lambda_{4mn} = (\alpha_{mn}^{(4)} - \alpha_{mn}^{(3)})\beta_{mn}^{(2)} + (\alpha_{mn}^{(2)} - \alpha_{mn}^{(4)})\beta_{mn}^{(3)} + (\alpha_{mn}^{(3)} - \alpha_{mn}^{(2)})\beta_{mn}^{(4)} \quad (\text{Б. 4})$$

$$\lambda_{5mn} = (\alpha_{mn}^{(3)}\beta_{mn}^{(4)} - \alpha_{mn}^{(4)}\beta_{mn}^{(3)})\gamma_{mn}^{(1)} + (\alpha_{mn}^{(4)}\beta_{mn}^{(1)} - \alpha_{mn}^{(1)}\beta_{mn}^{(4)})\gamma_{mn}^{(3)} + (\alpha_{mn}^{(1)}\beta_{mn}^{(3)} - \alpha_{mn}^{(3)}\beta_{mn}^{(1)})\gamma_{mn}^{(4)} \quad (\text{Б. 5})$$

$$\lambda_{6mn} = (\beta_{mn}^{(3)} - \beta_{mn}^{(4)})\gamma_{mn}^{(1)} + (\beta_{mn}^{(4)} - \beta_{mn}^{(1)})\gamma_{mn}^{(3)} + (\beta_{mn}^{(1)} - \beta_{mn}^{(3)})\gamma_{mn}^{(4)} \quad (\text{Б. 6})$$

$$\lambda_{7mn} = (\alpha_{mn}^{(4)} - \alpha_{mn}^{(3)})\gamma_{mn}^{(1)} + (\alpha_{mn}^{(1)} - \alpha_{mn}^{(4)})\gamma_{mn}^{(3)} + (\alpha_{mn}^{(3)} - \alpha_{mn}^{(1)})\gamma_{mn}^{(4)} \quad (\text{Б. 7})$$

$$\lambda_{8mn} = (\alpha_{mn}^{(3)} - \alpha_{mn}^{(4)})\beta_{mn}^{(1)} + (\alpha_{mn}^{(4)} - \alpha_{mn}^{(1)})\beta_{mn}^{(3)} + (\alpha_{mn}^{(1)} - \alpha_{mn}^{(3)})\beta_{mn}^{(4)} \quad (\text{Б. 8})$$

$$\lambda_{9mn} = (\alpha_{mn}^{(4)}\beta_{mn}^{(2)} - \alpha_{mn}^{(2)}\beta_{mn}^{(4)})\gamma_{mn}^{(1)} + (\alpha_{mn}^{(1)}\beta_{mn}^{(4)} - \alpha_{mn}^{(4)}\beta_{mn}^{(1)})\gamma_{mn}^{(2)} + (\alpha_{mn}^{(2)}\beta_{mn}^{(1)} - \alpha_{mn}^{(1)}\beta_{mn}^{(2)})\gamma_{mn}^{(4)} \quad (\text{Б. 9})$$

$$\lambda_{10mn} = (\beta_{mn}^{(4)} - \beta_{mn}^{(2)})\gamma_{mn}^{(1)} + (\beta_{mn}^{(1)} - \beta_{mn}^{(4)})\gamma_{mn}^{(2)} + (\beta_{mn}^{(2)} - \beta_{mn}^{(1)})\gamma_{mn}^{(4)}, \quad (\text{Б. 10})$$

$$\lambda_{11mn} = (\alpha_{mn}^{(2)} - \alpha_{mn}^{(4)})\gamma_{mn}^{(1)} + (\alpha_{mn}^{(4)} - \alpha_{mn}^{(1)})\gamma_{mn}^{(2)} + (\alpha_{mn}^{(2)} - \alpha_{mn}^{(1)})\gamma_{mn}^{(4)}, \quad (\text{Б. 11})$$

$$\lambda_{12mn} = (\alpha_{mn}^{(4)} - \alpha_{mn}^{(2)})\beta_{mn}^{(1)} + (\alpha_{mn}^{(1)} - \alpha_{mn}^{(4)})\beta_{mn}^{(2)} + (\alpha_{mn}^{(2)} - \alpha_{mn}^{(1)})\beta_{mn}^{(4)}, \quad (\text{Б. 12})$$

$$\begin{aligned} \lambda_{13mn} = & (\alpha_{mn}^{(2)}\beta_{mn}^{(3)} - \alpha_{mn}^{(3)}\beta_{mn}^{(2)})\gamma_{mn}^{(1)} + (\alpha_{mn}^{(3)}\beta_{mn}^{(1)} - \alpha_{mn}^{(1)}\beta_{mn}^{(3)})\gamma_{mn}^{(2)} \\ & + (\alpha_{mn}^{(1)}\beta_{mn}^{(2)} - \alpha_{mn}^{(2)}\beta_{mn}^{(1)})\gamma_{mn}^{(3)}, \end{aligned} \quad (\text{Б. 13})$$

$$\lambda_{14mn} = (\beta_{mn}^{(2)} - \beta_{mn}^{(3)})\gamma_{mn}^{(1)} + (\beta_{mn}^{(3)} - \beta_{mn}^{(1)})\gamma_{mn}^{(2)} + (\beta_{mn}^{(1)} - \beta_{mn}^{(2)})\gamma_{mn}^{(3)}, \quad (\text{Б. 14})$$

$$\lambda_{15mn} = (\alpha_{mn}^{(3)} - \alpha_{mn}^{(2)})\gamma_{mn}^{(1)} + (\alpha_{mn}^{(1)} - \alpha_{mn}^{(3)})\gamma_{mn}^{(2)} + (\alpha_{mn}^{(2)} - \alpha_{mn}^{(1)})\gamma_{mn}^{(3)}, \quad (\text{Б. 15})$$

$$\lambda_{16mn} = (\alpha_{mn}^{(2)} - \alpha_{mn}^{(3)})\beta_{mn}^{(1)} + (\alpha_{mn}^{(3)} - \alpha_{mn}^{(1)})\beta_{mn}^{(2)} + (\alpha_{mn}^{(1)} - \alpha_{mn}^{(2)})\beta_{mn}^{(3)}, \quad (\text{Б. 16})$$

$$\begin{aligned} p_{mn} = & [(\alpha_{mn}^{(4)} - \alpha_{mn}^{(3)})\beta_{mn}^{(2)} + (\alpha_{mn}^{(2)} - \alpha_{mn}^{(4)})\beta_{mn}^{(3)} + (\alpha_{mn}^{(3)} - \alpha_{mn}^{(2)})\beta_{mn}^{(4)}]\gamma_{mn}^{(1)} \\ & + [(\alpha_{mn}^{(3)} - \alpha_{mn}^{(4)})\beta_{mn}^{(1)} + (\alpha_{mn}^{(4)} - \alpha_{mn}^{(1)})\beta_{mn}^{(3)} + (\alpha_{mn}^{(1)} - \alpha_{mn}^{(3)})\beta_{mn}^{(4)}]\gamma_{mn}^{(2)} \\ & + [(\alpha_{mn}^{(4)} - \alpha_{mn}^{(2)})\beta_{mn}^{(1)} + (\alpha_{mn}^{(1)} - \alpha_{mn}^{(4)})\beta_{mn}^{(2)} + (\alpha_{mn}^{(2)} - \alpha_{mn}^{(1)})\beta_{mn}^{(4)}]\gamma_{mn}^{(3)} \\ & + [(\alpha_{mn}^{(2)} - \alpha_{mn}^{(3)})\beta_{mn}^{(1)} + (\alpha_{mn}^{(3)} - \alpha_{mn}^{(1)})\beta_{mn}^{(2)} + (\alpha_{mn}^{(1)} - \alpha_{mn}^{(2)})\beta_{mn}^{(3)}]\gamma_{mn}^{(4)}. \end{aligned} \quad (\text{Б. 17})$$

## БИОГРАФИЈА АУТОРА

Марија (Бранислав) Стаменковић Атанасов рођена је 03. 09. 1986. године у Нишу. Основну школу и средњу техничку школу „Прота Стеван Димитријевић“ смер „Машински техничар за компјутерско конструисање“ завршила је у Алексинцу са одличним успехом. Машински факултет у Нишу уписала је школске 2005/2006 године. Током студирања на основним студијама освојила је прво место на такмичењу у знању из предмета „МЕХАНИКА“ на скупу студената са простора бивше Југославије („Машинијада“) 2008. године. Од треће године факултета школске 2007/2008 године определила се за смер „Енергетика и процесна техника“. Дипломски рад је одбранила 25. марта 2011. године под називом „Прорачун добошастог размењивача топлоте вода-вода снаге 650 kW“ са оценом 10 (десет). Просечна оцена током студирања основних академских студија је 9.14 (девет и 14/100). Школске 2011/2012 године уписала је докторске студије на Машинском факултету у Нишу и положила све испите предвиђене планом и програмом до 2015. године са просечном оценом 10,00 (десет). Са стеченом дипломом мастер инжењер машинства (десет семестара) засновала је радни однос на „Математичком институту САНУ“ у Београду 01. 05. 2011. године на пројекту ОИ 174001 под називом „Динамика хибридних система сложених структура. Механика материјала“, под руководством проф. др Катице (Стевановић) Хедрих. Активно је учествовала у раду научних и семинара за младе истраживаче који су се организовали на Математичком институту САНУ. Одлуком Научног већа Машинског факултета Универзитета у Нишу, 27. 04. 2017. године изабрана је у звање асистент на Катедри за механику. Због трудничког и породилског одсуства радни однос на Катедри за механику заснива 01. 11. 2017. год. Након завршетка пројектног циклуса на ком је била ангажована (пројекат ОИ 174001), од 01. 01. 2020. године прелази на пројекту „Министарства науке, технолошког развоја и иновација Републике Србије



(Уговор бр. 451-03-47/2023-01/200109)“ при Машинском факултету у Нишу. Аутор је више радова у часописима са „SCI“ листе категорије М20 на којима је први аутор. Учествовала је како на домаћим тако и на иностраним научним скуповима. Удата је и мајка двоје деце.

## **Изјава 1.**

### **ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ**

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом:

**„Стабилност и принудне осцилације спрегнутих нано-структура“**

која је одбрањена на Машинском факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, \_\_\_\_\_

Потпис аутора дисертације:

---

Стаменковић Атанасов Марија

**Изјава 2.**

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ  
ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Наслов дисертације:

„Стабилност и принудне осцилације спрегнутих нано-структура“

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, истоветан штампаном облику.

У Нишу, \_\_\_\_\_

Потпис аутора дисертације:

\_\_\_\_\_  
Стаменковић Атанасов Марија

### Изјава 3:

#### ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

**„Стабилност и принудне осцилације спрегнутих нано-структура“**

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прераде (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)<sup>1</sup>

У Нишу, \_\_\_\_\_

Потпис аутора дисертације:

\_\_\_\_\_  
Стаменковић Атанасов Марија

<sup>1</sup> Аутор дисертације обавезан је да изабере и означи (заокружи) само једну од шест понуђених лиценци; опис лиценци дат је у наставку текста.