



УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ  
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ



**Никола Д. Нешић**

**АНАЛИЗА НЕЛИНЕАРНЕ  
ДИНАМИКЕ МЕХАНИЧКИХ  
СТРУКТУРА СА ПРИГУШЕЊЕМ  
ФРАКЦИОНОГ РЕДА ПРИМЕНОМ  
АПРОКСИМАТИВНИХ МЕТОДА**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2023.



UNIVERSITY OF NIŠ  
FACULTY OF MECHANICAL  
ENGINEERING



**Nikola D. Nešić**

**NONLINEAR DYNAMICS ANALYSIS  
OF MECHANICAL STRUCTURES  
WITH FRACTIONAL ORDER  
DAMPING BY APPROXIMATION  
METHODS**

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2023.

## Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	др Јулијана Д. Симоновић, ванредни професор, Универзитет у Нишу, Машински факултет
Наслов:	Анализа нелинеарне динамике механичких структура са пригушењем фракционог реда применом апроксимативних метода
Резиме:	У оквиру ове докторске дисертације је анализирано динамичко понашање два различита механичка модела, и то нано-греде на вискоеластичној подлози фракционог реда и динамичког апсорбера, који се могу свести на математички модел система нелинеарних фракционих диференцијалних једначина Дуфинговог типа. Као основна метода је коришћена метода инкременталног хармонијског баланса уз помоћ које су заједно са методом нумеричке континуације добијени амплитудно-фреквентни одзиви система који представљају скуп периодичних решења устаљеног стања. У одређеним случајевима је разматрана стабилност периодичних орбита применом Флокеове теорије стабилности. Резултати добијени ИХБ методом су упоређивани са резултатима добијеним другим пертурбационим методама као што су метода вишеструких временских скала и Њумарк метода. Испитан је утицај различитих параметара система на динамичко понашање приказаних нелинеарних механичких система.
Научна област:	Теоријска и примењена механика
Научна дисциплина:	Осцилације система са фракционим пригушењем
Кључне речи:	нелинеарна динамика, нелинеарне осцилације, структурна механика, нелокална теорија, метода инкременталног хармонијског баланса, Њумарк метода, метода вишеструких временских скала, фракционо пригушење, Дуфингов осцилатор
УДК:	530.182:531.31]:517.9(043.3)
CERIF класификација:	P190 Математичка и општа теоријска физика, класична механика, квантна механика, релативитет, гравитација, статистичка физика

Тип лиценце  
Креативне  
заједнице:

CC BY-NC-ND



## Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Dr Julijana D. Simonović, associate professor, University of Niš, Faculty of Mechanical Engineering
Title:	Nonlinear dynamics analysis of mechanical structures with fractional order damping by approximation methods
Abstract:	The thesis investigates dynamical behavior of two different mechanical models, nano-beam on fractional viscoelastic foundation and dynamical mass damper, which can be reduced to the nonlinear fractional differential Duffing-type equation systems. Incremental harmonic balance method with continuation method are used to obtain amplitude-frequency response of the system's steady state solutions. Stability of periodic orbits is investigated in special cases by using Floquet theory of stability. As comparative methods for models described with fractional differential equations are used among others the perturbation method of multiple time scales and Newmark method. The influence of different system parameters on dynamic behavior is examined.
Scientific Field:	Theoretical and applied mechanics
Scientific Discipline:	Vibration of systems with fractional damping
Key Words:	nonlinear dynamics, nonlinear vibration, structural mechanics, nonlocal theory, incremental harmonic balance method, Newmark method, multiple scales method, fractional damping, Duffing oscillator
UDC:	530.182:531.31]:517.9(043.3)
CERIF Classification:	P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics

---

Creative  
Commons  
License Type:

CC BY-NC-ND

# Изјава захвалности

Овом приликом желим да се најсрдачније захвалим свом ментору професорки др Јулијани Симоновић, која је добронамерним критикама, стручном помоћи и моралном подршком током докторских студија и израде докторске дисертације значајно допринела квалитету рада.

Желим да се најтоплије захвалим професорки др Катици Стевановић Хедрих, која ми је развила љубав према механици кроз припреме за машинијаде и увела у научно-истраживачки рад кроз бројна предавања намењена истраживачима докторантима.

Захвалност дугујем и свим професорима Машинског факултета у Нишу код којих сам одслушао предавања на докторским студијама и полагао испите, а који су тиме допринели мом усавршавању. Речи захвалности упућујем свим члановима комисије, др Михаилу Лазаревићу, редовном професору на Машинском факултету Универзитета у Београду на консултацијама везано за фракциони рачун, др Јелени Манојловић, редовном професору на Природно математичком факултету Универзитета у Нишу на помоћи око математичких формулација коришћених теорија и консултације везано за теорију бифуркација, др Ивану Павловићу ванредном професору на Машинском факултету Универзитета у Нишу и др Срђану Јовићу, редовном професору на Факултету техничких наука Универзитета у Приштини са привременим средиштем у Косовској Митровици, који су својим конструктивним примедбама и препорукама допринели да завршна верзија дисертације буде боља.

Посебну захвалност дугујем колегама др Данилу Карличићу и др Милану Цајићу, вишим научним сарадницима на Математичком институту САНУ на изузетној сарадњи, несебичној помоћи и сугестијама који су допринели да садржај дисертације буде актуелан, као и на размени бројних идеја које су ме мотивисале да истрајем у свом раду. Данилу Карличићу се захваљујем за помоћ при имплементацији метода ИХБ и нумеричке континуације, а Милану Цајићу за савете око фракционог рачуна. Поред тога обојици бих се захвалио око сугестија везано за графичко представљање нумеричких резултата. Колеги Степи Пауновић, истраживачу са Математичког института САНУ, бих се захвалио за помоћ око форматирања текста у  $\text{\LaTeX}$ -у.

Коначно, захвалио бих се члановима породице - супрузи Ивани на љубави и инспирацији, родитељима Снежи и Драгану и сестри Милици на стрпљењу, разумевању и подршци у најтежим тренуцима. Мојој ћерци Леи дугујем све радосне тренутке, које сам пропустио у овом периоду.

# Списак слика

1.1	Координатни системи у физичкој и геометријској средњој равни. . . . .	17
2.1	Амплитудно-фреквентне криве одзива Дуфингове једначине за различите вредности нелинеарног параметра $\theta$ : (а) нелинеарна крутост омешавања ( $\theta < 0$ ), (б) без нелинеарног члана ( $\theta = 0$ ), (в) нелинеарна крутост учвршћивања ( $\theta > 0$ ) [174] . . . . .	31
2.2	Феномени скока навише ( $C \rightarrow D$ ) и скока наниже ( $A \rightarrow B$ ) приликом срачунавања фреквентног одзива . . . . .	31
2.3	Техника нумеричке континуације за одређивање тачака $(\alpha, \ x\ )$ криве $f(x, \alpha) = 0$ . (а) Секвенцијална континуација са кораком предикције дужине $\Delta\alpha$ ; (б) Континуација псеудолуком са кораком предикције дужине $\Delta s$ . $\bigcirc$ : превојна тачка (turning point), $\bullet$ : тачка итерације; 0/1/2: почетна тачка / тачка добијена предикцијом / тачка добијена корекцијом [180]. . . . .	35
5.1	Савијање Ојлер-Бернулијеве греде. . . . .	54
5.2	Модел нелинеарне нелокалне дилатацијско градијентне греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози. . . . .	55
5.3	Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози (а). Слика (б) је увећана Слика (а). Периодични одзив добијен: ИХБ методом - пуна линија, методом вишеструких скала - кружићи. . . . .	75
5.4	Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Периодични одзив добијен: ИХБ методом - пуна линија, методом вишеструких скала - кружићи. . . . .	76
5.5	Амплитудно-фреквентне криве одзива $A_1$ - Слика (а) и $A_3$ - Слика (б) нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози за различите вредности амплитуде побуде $Q_1$ . . . . .	76
5.6	Периодични одзив добијен ИХБ и Њумарк методама за 3 различите фреквенције означене звездицама на слици 5.5 за вредности (а) $\Omega \approx 5$ , (б) $\Omega \approx 9$ , (в) $\Omega \approx 27$ . . . . .	77

5.7	Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ гредe на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде $A_1$ (а) и $A_3$ (б) за различите вредности нелокалног параметра $\mu$ . . . . .	78
5.8	Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ гредe на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде $A_1$ (а) и $A_3$ (б) за различите вредности нелокалног малог параметра дужинске скале $l$ . . . . .	79
5.9	Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ гредe на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде $A_1$ (а) и $A_3$ (б) за различите вредности параметра $K_w$ . . . . .	79
5.10	Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ гредe на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде $A_1$ (а) и $A_3$ (б) за различите вредности параметра $k_w$ . . . . .	80
5.11	Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ гредe на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде $A_1$ (а) и $A_3$ (б) за различите вредности параметра $K_g$ . . . . .	80
5.12	Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ гредe на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде $A_1$ (а) и $A_3$ (б) за различите вредности параметра $k_g$ . . . . .	81
5.13	Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ гредe на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде $A_1$ (а) и $A_3$ (б) за различите вредности фракционог параметра $\alpha$ . . . . .	82
5.14	Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ гредe на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде $A_1$ (а) и $A_3$ (б) за различите вредности степеног индекса материјала $k$ . . . . .	82
5.15	Временски одзив нелинеарне нелокалне ФГ гредe на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде за различите вредности фракционог параметра $\alpha$ . . . . .	83
5.16	Периодични одзив добијен ИХБ и Рунге-Кута методом за 2 тачке обележене љубичастом и светло плавом звездом на слици 5.17 (а), (б). . . . .	84
5.17	Криве амплитудно-фреквентних одзива нелинеарне нелокалне ФГ гредe на фракционој виско-Пастернаковој подлози за следеће граничне услове: просто ослоњени (а,б), укљештено-просто ослоњени (в,г) и обострано укљештени (д,ђ). Амплитуде $A_1$ и $A_3$ за различите вредности магнитуде спољашње силе побуде $Q$ . Нестабилна периодична решења су представљена задебљаним пуним линијама. . . . .	86

5.18	Криве амплитудно-фреквентних одзива нелинеарне нелокалне ФГ гредe на фракционој виско-Пастернаковој подлози за следеће граничне услове: просто ослоњени (а,б), укљештено-просто ослоњени (в,г) и обострано укљештени (д,ђ). Амплитуде $A_1$ и $A_3$ за различите вредности параметра $k$ . Нестабилна периодична решења су представљена задебљаним пуним линијама. . . . .	88
5.19	Криве амплитудно-фреквентних одзива нелинеарне нелокалне ФГ гредe на фракционој виско-Пастернаковој подлози за следеће граничне услове: просто ослоњени (а,б), укљештено-просто ослоњени (в,г) и обострано укљештени (д,ђ). Амплитуде $A_1$ и $A_3$ за различите вредности параметра $K_g$ . Нестабилна периодична решења су представљена задебљаним пуним линијама. . . . .	89
5.20	Различити гранични услови. . . . .	90
5.21	Флокеови множитељи који прелазе јединични круг у комплексној равни (реална оса је хоризонтална, а имагинарна вертикална). . . . .	90
5.22	Модуо првих (FMM1) и других (FMM2) Флокеових множитеља у функцији фреквенције побуде $\Omega$ . . . . .	91
5.23	Базени привлачности за $\Omega = 20$ . . . . .	92
5.24	Базени привлачности за $\Omega = 25$ и обострано укљештене граничне услове. . . . .	93
6.1	Шематски приказ система са два степена слободe. . . . .	95
6.2	Силе које дејствују на систем са 2 степена слободe. . . . .	96
6.3	Периодично решење у фазној равни (дијаграм померање-брзина) генералисаних координата $(y, \dot{y})$ - лево и $(w, \dot{w})$ - десно за $\alpha = 1$ и $\Omega = 2.1$ . . . . .	103
6.4	Периодично решење у фазној равни (дијаграм померање-брзина) генералисаних координата $(y, \dot{y})$ - лево и $(w, \dot{w})$ - десно за $\alpha = 1$ и $\Omega = 2.5$ . . . . .	103
6.5	Периодично решење у фазној равни (дијаграм померање-брзина) генералисаних координата $(y, \dot{y})$ - лево и $(w, \dot{w})$ - десно за $\alpha = 0.2$ и $\Omega = 4$ . . . . .	103
6.6	Периодично решење у фазној равни (дијаграм померање-брзина) генералисаних координата $(y, \dot{y})$ - лево и $(w, \dot{w})$ - десно за $\alpha = 0.6$ и $\Omega = 4$ . . . . .	104
6.7	Амплитудно-фреквенциона крива одзива нелинеарног фракционог динамичког пригушивача. Амплитуде $A_1$ и $A_3$ координата $y$ и $w$ за различите вредности параметра инертера $b_1$ . . . . .	105
6.8	Амплитудно-фреквенциона крива одзива нелинеарног фракционог динамичког пригушивача. Амплитуде $A_1$ и $A_3$ координата $y$ и $w$ за различите вредности параметра инертера $b_2$ . . . . .	106
6.9	Амплитудно-фреквенциона крива одзива нелинеарног фракционог динамичког пригушивача. Амплитуде $A_1$ и $A_3$ координата $y$ и $w$ за различите вредности параметра пригушења $c_1$ . . . . .	107

---

6.10	Амплитудно-фреквенциона крива одзива нелинеарног фракционог динамичког пригушивача. Амплитуде $A_1$ и $A_3$ координата $y$ и $w$ за различите вредности амплитуде побудне силе $F_0$ . . . . .	108
6.11	Амплитудно-фреквенциона крива одзива нелинеарног фракционог динамичког пригушивача. Амплитуде $A_1$ и $A_3$ координата $y$ и $w$ за различите вредности фракционог параметра $\alpha$ . . . . .	109
6.12	Амплитудно-фреквенциона крива одзива нелинеарног фракционог динамичког пригушивача. Амплитуде $A_1$ и $A_3$ координата $y$ и $w$ за различите вредности нелинеарног параметра $k_{22}$ . . . . .	110
6.13	Временски одзив фракционог система са (плава пуна линија) и без нелинеарног динамичког пригушивача (црвена испрекидана линија). Бездимензиони одзив основног тела за $\Omega = 1.15$ и различите вредности параметра $\alpha$ . . . . .	110

# Списак табела

5.1	Првих пет бездимензионих природних фреквенција осциловања Ојлер - Бернулијеве греде са локалним ефектом на Винклер - Пастернаковој подлози за граничне услове просто ослоњене греде ( $k_1 = 25, k_2 = 25$ ) . . . . .	73
5.2	Поређење првих пет бездимензионих природних фреквенција осциловања Ојлер-Бернулијеве греде за различите вредности нелокалног параметра $\mu$ ( $L = 10, h = 1, \rho = 1, E = 30 \cdot 10^6, \nu = 0.3.$ ) . . . . .	73
5.3	Вредности параметара представљеног механичког модела греде на подлози	74
5.4	Вредности параметара представљеног механичког модела греде на подлози, за $\alpha = 1$ . . . . .	84
6.1	Вредности параметара представљеног механичког модела. . . . .	102



# Садржај

<b>1</b>	<b>Уводна разматрања</b>	<b>1</b>
1.1	Избор теме и мотива за проучавање . . . . .	1
1.2	Преглед актуелних истраживања и литературе . . . . .	3
1.3	Основе фракционог рачуна . . . . .	11
1.3.1	Риман-Лиувилеви фракциони изводи . . . . .	12
1.3.2	Грунвалд-Летњикова дефиниција фракционог извода . . . . .	13
1.3.3	Капутова дефиниција фракционог извода . . . . .	13
1.3.4	Основна својства фракционих извода . . . . .	14
1.4	Функционално градијентни материјали . . . . .	15
1.5	Нелокалне теорије механике континуума . . . . .	17
1.5.1	Нелокална теорија еластичности . . . . .	17
1.5.2	Дилатацијско градијентна теорија еластичности . . . . .	19
1.5.3	Нелокална дилатацијско градијентна теорија . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Метода инкременталног хармонијског баланса</b>	<b>22</b>
2.1	Метода хармонијског баланса . . . . .	22
2.2	Метода инкременталног хармонијског баланса . . . . .	25
2.3	Изазови у графичком представљању резултата . . . . .	30
2.4	Метода нумеричке континуације . . . . .	32
2.4.1	Секвенцијална континуација . . . . .	34
2.4.2	Континуација псеудолуком . . . . .	34
2.4.3	Параметризација . . . . .	36
2.5	Веза метода инкременталног хармонијског баланса и нумеричке континуације . . . . .	37
2.6	Флокеова теорија стабилности . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Пертурбационе методе</b>	<b>41</b>
3.1	Теорија пертурбација . . . . .	41
3.2	Егзистенција решења и Фредхолмова алтернатива . . . . .	44
3.3	Линштат-Поанкаре метода . . . . .	45
3.4	Метода вишеструких временских скала . . . . .	46

---

<b>4</b>	<b>Грунвалд-Летњикова апроксимација фракционог извода за решавање фракционих диференцијалних једначина Њумарк методом</b>	<b>48</b>
4.1	Дискретизација фракционог извода у једначини кретања . . . . .	48
4.2	Њумарк-Бета метода . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Осцилације нелинеарне нелокалне Ојлер-Бернулијеве греде на фракционој вискоеластичној подлози Пастернаковог типа</b>	<b>53</b>
5.1	Ојлер-Бернулијева теорија греде . . . . .	53
5.2	Модел греде и једначине малих трансверзалних осцилација . . . . .	54
5.3	Решења једначина осциловања и нелинеарни периодични одзив . . . . .	63
5.3.1	Применом пертурбационе методе вишеструких временских скала . . . . .	63
5.3.2	Применом методе инкременталног хармонијског баланса . . . . .	68
5.3.3	Применом Њумарк методе . . . . .	71
5.4	Нумерички резултати . . . . .	72
5.4.1	Потврда резултата са више апроксимативних метода . . . . .	73
5.4.2	Испитивање утицаја различитих параметара на динамику овог модела . . . . .	77
5.4.3	Анализа амплитудно-временских дијаграма . . . . .	83
5.4.4	Стабилност за специјални случај без фракционих извода ( $\alpha = 1$ ) . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Динамички апсорбер у систему са пригушењем фракционог реда</b>	<b>94</b>
6.1	Извођење једначина кретања разматраног модела . . . . .	94
6.2	Решења једначина кретања и нелинеарни периодични одзив . . . . .	97
6.2.1	Применом методе инкременталног хармонијског баланса . . . . .	97
6.2.2	Применом Њумарк методе . . . . .	100
6.3	Нумерички резултати . . . . .	101
6.3.1	Потврда резултата са више апроксимативних метода . . . . .	102
6.3.2	Испитивање утицаја различитих параметара на динамику овог модела . . . . .	104
6.3.3	Анализа амплитудно-временских дијаграма . . . . .	108
<b>7</b>	<b>Закључак</b>	<b>111</b>
	<b>Литература</b>	<b>115</b>
	<b>Биографија</b>	<b>133</b>

# Глава 1

## Уводна разматрања

### 1.1 Избор теме и мотива за проучавање

У овој докторској дисертацији проучавани су различити механички проблеми чије се динамичко понашање може описати нелинеарним фракционим диференцијалним једначинама Дуфинговог типа или еквивалентним системима нелинеарних фракционих диференцијалних једначина. Такви проблеми могу потицати из структурне динамике и могу укључивати осцилације различитих деформабилних тела на вискоеластичном слоју са фракционим карактеристикама, као у случају функционално градијентних греда, микро и нано греда, аксијално покретних греда и слично. Код оваквих примера се јавља неопходност описивања и моделирања вискоеластичног слоја са фракционим карактеристикама, где ред извода варира у интервалу од 0 до 1, како би се описао читав низ материјалних карактеристика различитих материјала од идеално еластичних, преко сунђера, до идеално вискозних, па чак и различитих материјала са својствима пене. У овој дисертацији се користе изводи нецелог реда за моделирање пригушења иако је у тексту и наслову коришћен назив фракциони извод. Подразумева се да се односе на исто. Поред тога примери са динамичком апсорпцијом вибрација у системима нелинеарних спрегнутих структура се такође могу свести на поменути систем нелинеарних фракционих диференцијалних једначина. У овој дисертацији се анализирају и континуални системи деформабилних тела и дискретни системи. Као пример континуалног система деформабилног тела, разматрана је нелинеарна Ојлер-Бернулијева греда, састављена од материјала чије карактеристике (модуло еластичности, густина) по попречном пресеку варирају по одређеној функцији. Као веза између напона и деформација, користи се теорија напонског градијента (нелокална теорија) и теорија дилатационог градијента. Греда је просто ослоњена на крајевима, а на преосталом делу лежи на фракционом виско-еластичном слоју Пастернаковог типа. Хармонијском побудом у трансверзалном правцу је доведена у стање осциловања. Као пример дискретних система је проучаван нелинеарни динамички апсорбер.

У природно-математичким наукама и инжењерству је често потребно симулирати пе-

риодичне процесе. То омогућава да потврдимо наше разумевање тих процеса и предвиђање како промена одређених параметара утиче на њих. Ово је веома битно за објашњавање феномена који се јављају у природи и техници, за дизајн и побољшање квалитета инжењерских производа и потврду њихове безбедности за употребу. Физички процеси се обично моделирају математички коришћењем система диференцијалних једначина. За одређени број специфичних случајева је могуће наћи тачна аналитичка решења тих система једначина. Међутим, велики број реалних проблема укључује нелинеарности, те за системе диференцијалних нелинеарних једначина углавном не постоји тачно аналитичко решење, тако да је потребно прибећи примени приближних (апроксимативних) решења која се добијају коришћењем приближних (апроксимативних) метода. То је нарочито случај када су једначине система бројне, спрегнуте, нелинеарне и нехомогене. Метода инкременталног хармонијског баланса (МИХБ) је у овој тези уведена и примењена за изучавање нелинеарних осцилаторних система и користи се заједно са методама: нумеричка континуација (праћење путање), пертурбациона метода вишеструких временских скала и Њумарк метода. МИХБ у комбинацији са методом нумеричке континуације даје напредне могућности испитивања амплитудно-фреквентних карактеристика система, као и утицај различитих параметара на динамику система. МИХБ је полу аналитичка - полу нумеричка метода. За потврду нумеричких резултата користе се и друге апроксимативне методе као што су: пертурбациона метода вишеструких временских скала, Њумаркова метода и метода Рунге-Кута. Врши се упоређивање различитих метода у структурној анализи динамичких проблема са једним и више степени слободе кретања. Поред тога, испитиван је утицај различитих параметара сложених система на амплитудно-фреквентни одзив система и испитан утицај параметара фракционог пригушења (ред нецелог извода и коефицијент множител тог извода функције) на амплитудно-фреквентни одзив у условима примарне резонанце и резонанци виших модова осциловања, као и услови и резултати интеракције нелинеарних модова. У случају механичких система, нелинеарни чланови у једначинама настају услед: великих деформација (нелинеарне кинематске релације), нелинеарног понашања материјала (нпр. хипер-еластичност, вискоеластичност или пластичност) или нелинеарних граничних услова (нпр. фрикциона интеракција или интеракција унилатералним контактом). Када су механичке осцилације (вибрације) мале, често је оправдано линеаризовати нелинеарне чланове, а затим применити теорију линеарних осцилација. Ова стратегија се тренутно примењује свуда у апликацијама у машинском и ваздухопловном инжењерству. Многи научници и инжењери деле мишљење да ће се то драматично променити у наредним деценијама и да ће бити неопходно прећи са линеарног на нелинеарни дизајн. Постоје два главна разлога за ову тврдњу. Прво, потребан је екстреман дизајн лаких конструкција да би се постигли амбициозни циљеви високе ефикасности материјала и енергије, што води ка већим осцилацијама тањих и виткијих структура. Као последица, линеарне апроксимације нису више довољно прецизне и јављају се нелинеарни феномени, који више не могу бити описани линеарном теоријом. Као друго, могу се

користити специфични нелинеарни феномени, који не постоје у линеарном свету. Један важан фундаментални и универзални пример је пасиван пренос енергије кроз различите временске и дужинске скале. Пасиван пренос енергије је пренос енергије са једног тела на друго или дуж једног тела, који је изазван без активног утицаја споља. Он омогућава, између осталог, много ефективније концепте за ублажавање вибрација (пасивни динамички апсорбери) или сакупљање енергије (energy harvesting), на бази чега се моделирају метаматеријали са супериорним својствима. Супротно томе, активан пренос енергије захтева одговарајуће системе аутоматског управљања, који нису изучавани у овој тези.

Концепт фракционог рачуна датира још из времена Лајбнице и Лопиталове дискусије о изводу реда једне половине, од пре три века. Проблем је привукао пажњу многих научника. Уопштено говорећи, претпоставља се да је извод нецелог реда користан за бољи опис реалних појава. На пример, пригушење у механичким уређајима се обично моделује као функција (линеарна или нелинеарна) извода првог реда и може се заменити фракционим пригушењем (у неким случајевима са одговарајућим физичким значењем). Да би се решила фракциона диференцијална једначина, потребно је апроксимирати одговарајући фракциони оператор, што значи укључивање информација о претходним стањима система (тзв. меморијски ефекат). Овај ефекат уводи додатне степене слободe. Такви мултидимензионални динамички системи, нарочито ако имају нелинеарности у себи, су сложени и захтевају посебан математички апарат за њихову анализу. Као што је већ напоменуто, у овој дисертацији се користе изводи нецелог реда за моделирање пригушења иако је у тексту и наслову коришћен назив фракциони извод. Подразумева се да се односе на исто. Разлог за то је да је у модерној литератури широко распрострањен назив фракциони извод и фракциони рачун, чак и када се користе изводи који могу да буду општијег карактера од разломка гј. нецели бројеви. Да би се испратили светски токови уведена је оваква терминологија.

## 1.2 Преглед актуелних истраживања и литературе

Структуре са физичким својствима која се мењају континуално и постепено дуж одећеног правца су познате као функционално градијентни (ФГ) материјали [ton2021new, 1]. Главна предност оваквих материјала која је забележена у инжењерској пракси је мањак концентрације напона, што је главни проблем на граничним слојевима (интерфејсима) конвенционалних ламинатних композита [1]. ФГ материјали најчешће садрже два различита материјала као што су нпр. метал и керамика. Упркос значајној количини литературе у области ФГ структура, још увек има простора и потребе за истраживање микро/нано електромеханичких система (МЕМС/НЕМС) који су базирани на ФГ материјалима. Наногреде и наноплоче се користе у различитим МЕМС/НЕМС уређајима, као што су микроактуатори [2, 3], микропрекидачи [4], микро сензори [5], резонатори на на-

но скали [6], наноуређаји за прикупљање (харвестинг) енергије [7], итд. За истраживање динамичког понашања таквих система користе се различити приступи базирани на експериментима, симулацијама молекуларне динамике и механике континуума [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Међутим, поставка и извођење експеримента, као и имплементација молекуларно динамичких симулација захтева време и одређене вештине. Из тих разлога су модели механике континуума зависни од величине, тј. дужинске скале, добили на популарности због њихове једноставности у предвиђању механичког понашања микро/нано-скалираних структурних система. Различите неklasичне теорије еластичности се користе да опишу ефекат малих величина у микро- и наноструктурама. Међу њима се најчешће користе следеће теорије континуума за испитивање наноструктура: нелокална теорија еластичности [14, 15, 16], дилатацијско градијентна теорија [12], модификована теорија спрегнутих напона (или модификована дилатацијско градијентна теорија) [17] и теорија површинске еластичности [18]. Резултати експеримената приказаних у раду [12] су показали да нелокална теорија еластичности има ограничења у приказивању ефекта очвршћивања крутости (*stiffness-hardening*). Ова мана се може надоместити коришћењем нелокалне дилатацијско-градијентне теорије (НДГТ) као што је оригинално описано у раду Lim и сарадници [19]. Ова теорија укључује у разматрање и нелокални и ефекат дужинске (нано) скале.

Многе студије користе НДГТ при анализи механичког понашања ФГ структура. Gao и сарадници [20] су испитивали нелинеарне слободне осцилације ФГ кружних наноцевчица користећи НДГТ и двостепену пертурбациону методу. Јаневски [21, 22] је испитивао линеарне осцилације, стабилности на извијање НДГТ Ојлер-Бернулијеве и Тимошенкове греде под утицајем температуре. El-Borgi и сарадници [8] су се бавили испитивањем слободних и принудних осцилација просто ослоњене ФГ греде на нелинеарној еластичној подлози. Они су применили пертурбациону методу вишеструких временских скала за добијање амплитудно-фреквентних кривих одзива система. Друга група аутора [23] се бавила истраживањем топлотом индукованих нелинеарних осцилација капацитивне ФГ наногреде у оквиру НДГТ. Применом полуаналитичке пертурбационе методе усредњавања анализиран је одзив стационарног стања. Такође су користили технику погађања (*shooting*) заједно са Флокеовом теоријом за одређивање периодичних орбита кретања и испитивање њихове стабилности. Wang и Shen [24] су испитивали трансверзалне нелинеарне осцилације аксијално покретне вискоеластичне просто ослоњене греде описане са НДГТ. Користили су директну методу вишеструких скала за одређивање амплитудно-фреквентног одзива стационарних стања у субхармонијском параметарском резонантном стању као и Routh–Hurwitz критеријум за одређивање стабилности решења. Jalaei и сарадници [25] су испитивали динамичку стабилност температурно зависне Тимошенкове ФГ наногреде изложене аксијалном оптерећењу и магнетном пољу у термичком окружењу. Аутори су за решавање проблема користили приступ базиран на Навијеовој и Болотиновој методи. Li и сарадници [26] су испитивали лонгитудиналне осцилације штапова описаних

коришћењем НДГТ и извели аналитичка решења за предвиђање природних фреквенција и модова осциловања за специфичне граничне услове. Закључили су да се код НДГТ штапа јавља ефекат омекшавања крутости (*stiffness-softening*) када је нелокални параметар већи од параметра скале дужине и врши ефекат учвршћивања крутости (*stiffness-hardening*) у супротном случају. Li [27] је истраживао осцилације аксијално ФГ греда описаних преко НДГТ и Ојлер-Бернулијеве теорије греда решио проблем преко метода уопштених диференцијалних квадратура. Simsek [28] је испитивао слободне осцилације нелинеарне ФГ наногреде са непокретним крајевима описане преко НДГТ и Ојлер-Бернулијеве теорије греде и фон-Карманове геометријске нелинеарности. Liu [29] је испитао нелинеарно осцилаторно понашање ФГ сендвич НДГТ наногреде у присуству почетне геометријске имперфекције. Нелинеарност је индукована кроз фон-Карманову теорију и косинусна функција слична форми облика мода је искоришћена за описивање геометријске имперфекције мода. Они су искористили Хеов варијациони принцип за решавање нелинеарне диференцијалне једначине и срачунавање фреквенције нелинеарног модела сендвич наногреде. На основу НДГТ, Li и Hu [30] и Zhen и Zhou [31] су испитивали пропагацију таласа кроз једнозидну угљеничну наноцевчицу кроз коју тече флуид. Поред тога, Li [32] је испитивао критичне брзине струјања флуида кроз микроцевчице моделиране преко НДГТ, Тимошенкове и Ојлер-Бернулијеве теорије греда.

Zhang и сарадници [33] су испитивали нелинеарну динамику просто ослоњене фракционо вискоеластичне греде оптерећене трансверзалном хармонијском побудом. Коришћењем методе усредњавања, аутори су добили одзив стационарног стања система у једном моду. Нумеричке резултате су добили уз помоћ алгорита који је базиран на Грунвалд-Летњиковој дефиницији фракционог извода, а њихову исправност су потврдили са аналитичким резултатима. Начин и методе нелинеарне динамике које су применили за нумеричку анализу су послужили као инспирација за представљање нумеричких резултата добијених у овој дисертацији. Еуебе [34] је испитивао нелинеарне осцилације наногреде која осцилује на фракционој Винклер-Пастернак-овој подлози коришћењем Даламберовог принципа за извођење једначина осциловања и методу вишеструких скала за апроксимацију резултујућег нелинеарног проблема. Поред тога, Lewandowski [35] је истраживао нелинеарне осцилације стационарног стања и стабилност хармонијски побуђених фракционих вискоеластичних греда. Вискоеластични материјал греде је описан Зенеровим релошким моделом са фракционим изводима. Амплитудне једначине су добијене коришћењем методе коначних елемената и методе хармонијског баланса заједно са методом нумеричке континуације, која је коришћена и у овој докторској дисертацији.

У раду [36] је испитивана хомогена Ојлер-Бернулијева греда на нелинеарној, вискоеластичној подлози која може да реагује само на притисак или и на истезање и притисак. Представљен модел је подвргнут вишеструким концентрисаним или континуално расподељеним трансверзалним статичким или динамичким оптерећењима. Методу ИХБ су искористили за одређивање нелинеарног амплитудно-фреквентног одзива систе-

ма. Амплитудно-фреквентни дијаграми које су добили и представили у раду су очекивано сличног облика као дијаграми у овој докторској дисертацији. Међутим, разматрани сетови параметара су другачији када посматрамо својства оптерећења и подлоге. Њихов циљ је био испитивање подлоге, која представља модел пенастих материјала, на притисак и истезање. Насупрот томе, у овом делу дисертације, испитиван је утицај параметара фракционог модела подлоге који може представљати широк спектар различитих материјала од пена до гума и за различите вредности ових параметара се показало добро поклапање резултата. Поред тога, нумеричка срачунавања у докторској дисертацији су потврђена са две додатне методе, методе вишеструких временских скала и Њумарк методе.

У петом поглављу ове дисертације је спроведено детаљно испитивање принудних нелинеарних осцилација НДГТ Ојлер-Бернулијеве греде на вискоеластичној подлози моделираној Пастернаковим моделом са фракционим карактеристикама. Предложени модел садржи нелокални параметар, који произилази из нелокалног еластичног поља напона и материјални параметар дужинске (нано) скале, који произилази из дилатацијског градијентног поља. У овом истраживању најпре је приказана процедура извођења основне партиципалне диференцијалне једначине кретања коришћењем Хамилтоновог принципа, која је затим редукована на обичну нелинеарну фракциону диференцијалну једначину применом Галеркинове апроксимације. Представљене су ИХБ метода и техника нумеричке континуације за одређивање амплитудно-фреквентних одзива стационарног стања. Добијена периодична решења су потврђена пертурбационом методом вишеструких временских скала и Њумарковом методом нумеричке интеграције. На крају је извршена детаљна параметарска студија да би се показао утицај степеног индекса нехомогености материјала, нелокалног параметра, параметра дужинске скале, параметара фракционе виско-Пастернакове подлоге и фактора спољашњег оптерећења на амплитудно-фреквентни одзив предложеног нелинеарног модела. Додатно, ефекти фракционог извода и степеног индекса на пригушење система су приказани на временским дијаграмима те су резултати дискутовани.

Смањење нежељених осцилација, које су побуђене на различите начине (ротационе машине, резонанција изазвана цикличним ходом пешака или саобраћаја на мостовима, турбулентно (вртложно) струјање флуида, итд.) представља изазован и значајан задатак за инжењере. Интервал интензитета осцилација може бити широк, од веома малих осцилација до веома великих и девастирајућих. Због тога, решавање овог проблема може бити од круцијалног значаја у превенцији оштећења у грађевинским структурним објектима, односно катастрофалног лома механичких делова у машинама, гледано из угла њиховог радног века или радних циклуса. Први корак у ублажавању таквих осцилација је адекватан дизајн и избор материјала механичких и структурних делова.

Постоје активни и пасивни апсорбери вибрација. Код активних се у реалном времену сензорима мере параметри попут убрзања и срачунава правац, смер и интензитет силе, односно момента, којим треба деловати да се вибрације смање и пригуше. Са друге стране, код пасивног пригушења нема сензора, микропроцесора и других електричних



компоненти. Контрола вибрација код пасивног апсорбера је чисто механичка те их чини поузданијим, јефтинијим и дугорочнијим. Пасивни динамички апсорбери вибрација су механички системи, који играју значајну улогу у побољшању перформанси различитих уређаја и структура у савременим инжењерским апликацијама и припадају групи уређаја за пасивно пригушење вибрација. Њихова употреба је често веома пожељна јер им за рад није потребна електрична енергија. У овој дисертацији су искључиво испитивани пасивни апсорбери. Феномен динамичке апсорбције и његов ефекат на главно тело конструкције је важно истражити и објаснити, што је нарочито важно у случају нелинеарних вибрација апсорбера, те је цело шесто поглавље томе и посвећено.

Пригушење у структурама се најчешће моделира као пропорционално маси и крутости [37], вискозно [38] и невискозно [39]. Експерименталне студије сугеришу да фактори пригушења могу бити зависни од сопствене фреквенције и фреквенције побуде [40, 41, 42, 43, 44]. Chang и сарадници [45] су развили модел вискозног пригушења у временском домену заснован на односима пригушења зависним од фреквенције. Генерално се пригушење математички моделира пропорционално брзини тј. првом изводу координате померања по времену, с тим да тај извод не мора бити цео број. За линеарне системе код којих је пригушење моделирано изводом првог реда Adhikari [37] је развио модел генерализованог пропорционалног пригушења како би се регистровале промене фактора пригушења у зависности од фреквенције. Rossikhin и Shitikova [46] су предложили коришћење фракционих извода у описивању пригушења зависног од фреквенције код нелинеарних структурних система. Опште је познато да се апсорбција вибрација може постићи уз помоћ динамичког апсорбера (tuned mass damper), где је помоћна мања маса закачена за већу главну масу да би могла да интерагује са њом. Преносом енергије са веће на мању масу, већа маса може бити стабилизована, јер мала додатна маса има улогу дисипатора енергије. Ова идеја је најпре реализована од стране Frahm-а у његовом патенту из 1911. године [47]. Међутим, и у савременим истраживањима ово је актуелна област и многе студије сугеришу различит дизајн и начин подешавања механичких параметара динамичког пригушивача. Gatti [48] и Li и сарадници [49] су истраживали нелинеарне осцилације структуре са једним степеном слободe управљане нелинеарним подешеним пригушивачем масе и применом методе хармонијског баланса одредили амплитуде стационарног стања управљане структуре. Sun и сарадници [50] су испитивали експериментално и нумерички слабљења амплитуда Дуфинговог осцилатора са два динамичка апсорбера, једним нелинеарним подешеним пригушивачем масе и једним клатном променљиве дужине. Штавише, Sun и Liu [51] су анализирали апсорбер у систему подвргнутом ускопојасном хармонијском оптерећењу и на основу математичког модела система са два степена слободe пример решили методом ИХБ.

У научној заједници је нагло порасло интересовање за тзв. инертере од тренутка када је Smith [52] увео појам ”инертер” да би направио аналогију између електричних и механичких система. Према њему, инертер је механички елемент аналоган неуземљеном кон-

дензатору у електричном колу. Преглед научних истраживања у овој области се може наћи у радовима Wang-а [53], Smith-а [54] и књизи Chen and Hu [55]. Од скоро, модели инертера су успешно искоришћени у многим областима примене машинског инжењерства, нпр. код возова, вешања мотоцикала и аутомобила, кретања двоножних хуманоидних робота, итд. [56, 57, 58, 59, 60]. Предности њихове примене су показала савремена нумеричка и експериментална истраживања о појачањима инерционог ефекта и његовог утицаја код: природних фреквенција осциловања и малих трансверзалних осцилација деформабилних греда [61, 62, 63], дискретних система ланаца маса [64, 65], подешених инерционих пригушивача [66], ромбоидне решетке [67] и сл. Нарочито је значајна примена инертера у грађевинском инжењерству, на пример код стамбених зграда и плутајућих конструкција на отвореном мору [68, 69, 70, 71, 72]. Код моделовања физичког система, инертер се у различитим варијантама комбинује са опругама и пригушницама. У пракси се најчешће срећу два типа инертера. Један је са завојним вretenом са куглицама и замајцем (screwball инертер), а други са зупчастом летвом, системом зупчаника и замајцем (rack-and-pinion инертер) [73]. Оба користе велики ефекат инерције генерисан од стране ротирајућег замајца. Код инертера са завојним вretenом, линијско кретање вретена се претвара у ротационо кретање замајца. Код инертера са зупчаницима се трансмисија момента до замајца одвија преко зупчасте летве и низа зупчаника [73, 74, 75, 76]. У теоријском систему презентованом у овој дисертацији је коришћен модел идеалног инертера, без улажења у детаље о његовој практичној реализацији и конструкцији.

Нелинеарне диференцијалне једначине или системи нелинеарних диференцијалних једначина чине математички модел физичких модела конструкција и могу бити решавани аналитичким и нумеричким методама. Практично се највише користе аналитичке методе које су базиране на пертурбационим техникама [77]. Када су у питању полу аналитичке - полу нумеричке методе, примена ИХБ методе добија све већи значај. Kong и сарадници [78] су испитивали дво- и тро-димензионе динамичке системе са једним и два енергетска понора (energy sinks) и са геометријски нелинеарним пригушењем. Они су истраживали фреквентне одзиве и периодична решења добијена ИХБ методом и испитивали су стабилност коришћењем Флокеове теорије. Увођењем Поанкареових мапа и енергетског спектра спровели су нумеричку анализу система у близини резонантне фреквенције, те су извршили оптимизацију параметара да би проценили ефикасност нелинеарних енергетских понора у пригушењу осцилација. Нуи и сарадници [79] су предложили уопштење ИХБ методе како би се могла применити са било којом непрекидном нелинеарном функцијом укључујући местимично линеарну функцију (piecewise linear function) и функцију силе са нелинеарним хистерезисом, које се могу применити за системе са једним и више степени слободе кретања. Xiong и сарадници [80] су применили ИХБ методу за одређивање периодичних осцилација система са билинеарним хистерезисом (двоструки хистерезис, оптерећење и растерећење на криви оптерећења су паралелни и на једном правцу, а релаксација материјала на другом) са једним и два степена слободе кретања, који су примењени

за апсорпцију и управљање магнетно-реолошком пригушницом и метал-гума апсорбером. Поред тога, ИХБ метода се може применити на одређивање квази-периодичних осциловања [81, 82]. Huang и сарадници [83] су испитивали бифуркације и квази-периодична кретања вишедимензионалних нелинеарних модела коришћењем ИХБ методе са две временске скале. Ова метода је проширена за испитивање квази-периодичног кретања нелинеарног система са комбинацијом побуде спољашњом силом и параметарске побуде чији спектар садржи једнолико распоређене "sideband" фреквенције. Аутори су такође применили стандардне алате, као што су Флокеова теорија заједно са Hsu-овим методом за испитивање стабилности периодичних решења. Dou и Jensen [84] су применили ИХБ метод у комбинацији са нелинеарним нормалним модовима за оптимизацију решеткастих конструкција. Karličić и сарадници [85, 86] су користили ИХБ методу за решавање система два међусобно спрегнута осцилатора, где је један нелинеарни енергетски харвестер (сакупљач енергије). Такође, метода ИХБ се користила за решавање математичких модела нелинеарних осцилација структура са нелокалним параметром [87]. У овој докторској дисертацији, ИХБ метода у комбинацији са техником нумеричке континуације се примењује за одређивање периодичних решења и одговарајућих крива амплитудно-фреквентног одзива.

Многи физички феномени се описују математичким моделима базираним на фракционом рачуну [88, 89, 90]. Најчешћа примена таквих модела у механици је за описивање понашања тела са вискоеластичним својствима. Детаљна студија у овој области је урађена од стране Rossikhin and Shitikova [91]. У радовима [92, 93, 94] су истраживани нелинеарни динамички системи са два степена слободе кретања и фракционим пригушењем, који се јављају код осцилација мостова. Аутори су проширили пертурбациону методу вишеструких временских скала, коју је Nayfeh [77] детаљно разрадио, да обухвати и нелинеарне фракционе диференцијалне једначине.

Фракционе диференцијалне једначине [95], се у литератури нумерички решавају на различите начине. На пример, у раду [96] су аутори предложили формулу за развој фракционог извода, чијом применом се нелинеарна фракциона диференцијална једначина редукује на систем обичних диференцијалних једначина и где су аутори показали конвергенцију решења. Liu и сарадници [97] су предложили нумерички метод за решавање нелинеарних фракционих диференцијалних једначина који је базиран на Њумарк- $\beta$  алгоритму. Evangelatos и Spanos [98] су искомбиновали Њумарк методу са Грунвалд-Летњиковом репрезентацијом фракционог извода и развили шему за решавање нелинеарних фракционих диференцијалних једначина. Bucher и Pirrotta [99] су предложили методологију базирану на коначним елементима за динамичку анализу структурних система састављених од вискоеластичних тела која су описана фракционим изводима деформација. Њихова модификација Њумарк методе узима у обзир фракционе изводе дискретизоване Грунвалд-Летњиковом формулом, што им омогућава анализу структурних система базирану на стандардним кодовима са коначним елементима. Diethelm и сарадници [100]

су предложили Адамсов тип предвиђање-исправка (предиктор-коректор) методе за нумеричко решавање фракционих линеарних и нелинеарних диференцијалних једначина, које могу имати више од једног фракционог диференцијалног оператора. Други аутори су користили ИХБ методу за решавање нелинеарних фракционих диференцијалних једначина Матије-Дуфинговог типа [101, 102, 103, 104]. Поред тога, аутор ове докторске дисертације је са својим коауторима у научним радовима [101, 102] применио методу ИХБ за решавање нелинеарних фракционих диференцијалних једначина које, настају при математичком моделирању осцилација наногреде на фракциониј виско-Пастернаковој подлози. У овој дисертацији је методологија ИХБ из радова [101, 102] примењена, и проширена на дводимензионални проблем. Поред тога, у овој дисертацији је систем нелинеарних фракционих диференцијалних једначина решен са два различита приступа: ИХБ методом са техником нумеричке континуације и модификованом Њумарк методом.

У шестом поглављу ове докторске дисертације је дат побољшан и уопштенији математички модел масеног пригушивача него што је доступно у литератури. Испитано је његово динамичко понашање коришћењем ИХБ методе и технике нумеричке континуације. У литератури постоје радови, нпр. [105, 106, 107, 108] који се баве пасивним пригушењем система применом фракционих извода. Међутим, у тим радовима су физички модели са већим бројем рестриктивних претпоставки сведени на простије математичке моделе, такође користе се и другачије методологије за њихово решавање него ли у овој дисертацији. Са друге стране, реалност захтева да се физички модели апроксимирају са што мање претпоставки и поједностављења, тако да су модели представљени у овој дисертацији сложенији и покривају већи опсег реалних материјалних карактеристика динамичких система. Поред тога, нова нумеричка методологија базирана на Њумарк методи је представљена и искоришћена за решавање система нелинеарних фракционих диференцијалних једначина. Ова нова метода је надградња и уопштење методе представљене у раду [98] у коме су решавали само једну нелинеарну фракциону диференцијалну једначину, а у докторској дисертацији је разматран систем од две једначине. У урађеном нумеричком примеру, модел динамичког апсорбера вибрација је описан са те две једначине, које представљају кретање система са два степена слободe. У том другом нумеричком примеру је испитиван феномен нелинеарне динамичке апсорбције вибрација базиран на побољшаном математичком моделу принудних осцилација система од два тела. Представљен на слици 6.1, предложени механички систем се састоји од главне масе повезане за тло преко фракционне пригушнице, опруге и инертера, док је додатно тело тј. нелинеарни апсорбер вибрација повезан са главним телом линеарном и нелинеарном опругом у паралелној спрези, пригушницом и инертером. Кретање овог система се може описати системом фракционалних диференцијалних једначина са кубном нелинеарношћу. Систем је решен ИХБ методом и испитиване су осцилације система са присутном јаком (великом) нелинеарношћу. Примењена апроксимативна методологија је валидирана нумеричком методом Њумарка, која је адаптирана за решавање система нелинеарних фракционих диференцијалних једначина.

### 1.3 Основе фракционог рачуна

Појам фракционог извода датира још из 1695. године када је Лајбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz) упутио писмо Лопиталу (Guillaume de l'Hôpital), у коме га је питао за мишљење да ли ред извода поред природног броја може бити и ирационалан, комплексан број или разломак. Та идеја је мотивисала многе математичаре, физичаре и инжењере да развију концепт фракционог рачуна, тј. рачуна нецелог реда [109].

Фракциони рачун има бројне примене у физици и инжењерству [88]. Између осталог, користи се за реалније моделирање пригушења и својства материјала који "памте" историју оптерећења [110], који су вискоеластични [111], за уопштење ПИД контролера управљања, где диференцијални и интегрални оператори фракционог реда дају бољу управљивост одређених система од диференцијалних и интегралних оператора целог реда [112, 113], моделирање елемената електричних струјних кола [112] и уопштење различитих физичких закона [88, 113].

Осцилације деформабилних тела на различитим типовима подлога су присутне код великог броја конструкција у инжењерској пракси. Најчешће утицај подлоге/темеља има великог значаја и треба се моделирати на одговарајући начин. Модели подлога са различитим својствима се могу наћи у литератури [114]. Виско-Пастернаков модел подлоге [101] за потребе анализе примера у овој дисертацији је проширен временским изводом фракционог реда функције деформације. То омогућава да се обухвати и анализира читав низ подлога са различитим својствима. Употребљава се Риман-Лиувилова (Riemann-Liouville) дефиниција фракционог извода, када се користе метода инкременталног хармонијског баланса и пертурбациона метода вишеструких скала и Грунвалд-Летњикова (Grünwald-Letnikov) дефиниција, када се користи Њумаркова (Newmark) метода [115, 116]. Ове две дефиниције фракционог извода су једнаке једна другој за широк спектар функција и веома често се користе за реалне физичке и инжењерске проблеме [115]. Из тог разлога, најпре се користи једна дефиниција када се изводе једначине осциловања, а затим прелази на другу када се срачунавају фреквенције амплитудних одзива апроксимативним и нумеричким методама. У наставку су дате обе дефиниције ради јасноће. Риман-Лиувилев фракциони временски извод може бити дефинисан као леви или десни. У читавом докторату ће се користити искључиво леви.

За дефинисање фракционог извода (тј. извода нецелог реда), треба се најпре дефинисати гама функција  $\Gamma$ . Ова функција се у математици користи као уопштење факторијал функције на комплексне бројеве. У том смислу, за сваки природан број  $n \in \mathbb{N}$  важи:

$$\Gamma(n) = (n - 1)!. \quad (1.1)$$

За комплексне бројеве чији је реални део позитиван, Данијел Бернули (Daniel Bernoulli) је извео гама функцију коју је дефинисао као несвојствени конвергентни интеграл на

следећи начин [95, 117]:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \Re(z) > 0. \quad (1.2)$$

Гама функција нема нуле, тако да је функција  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  цела функција.

### 1.3.1 Риман-Лиувилеви фракциони изводи

Нека је  $[a, b]$  коначан интервал на реалној оси  $\mathbb{R}$ , такав да је  $-\infty < a < b < \infty$ . Нека је функција  $f(t)$  интегрална и  $n$ -пута диференцијабилна на интервалу  $[a, b]$ , при чему је  $n \in \mathbb{N}$ . Нека је  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\Re(\alpha) \geq 0$ ) и гама функција дефинисана са (1.2). Онда леви и десни Риман-Лиувилеви (Riemann-Liouville) извод реда  $\alpha$  могу редом да се дефинишу на следећи начин [95]:

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1; t > a), \quad (1.3)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1; t < b), \quad (1.4)$$

где  $[\Re(\alpha)]$  означава целобројни део од  $\Re(\alpha)$ . Када је  $0 < \Re(\alpha) < 1$ , онда се ова два извода дефинишу као:

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}} d\tau, \quad (0 < \Re(\alpha) < 1; t > a), \quad (1.5)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}} d\tau, \quad (0 < \Re(\alpha) < 1; t < b). \quad (1.6)$$

Када је  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , дефиниције извода (1.3) и (1.4) се свODE на:

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (n = [\alpha] + 1; t > a), \quad (1.7)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (n = [\alpha] + 1; t < b). \quad (1.8)$$

Када је  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  и  $0 < \alpha < 1$ , дефиниције извода (1.5) и (1.6) се свODE на:

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau, \quad (0 < \alpha < 1; t > a), \quad (1.9)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha}} d\tau, \quad (0 < \alpha < 1; t < b). \quad (1.10)$$

Када је  $\Re(\alpha) = 0, (\alpha \neq 0)$ , онда се из (1.3) и (1.4) добија дефиниција ова два извода за чисто имагинарни ред извода:

$$D_{a+}^{i\theta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{i\theta}} d\tau, \quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; t > a), \quad (1.11)$$

$$D_{b-}^{i\theta} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{i\theta}} d\tau, \quad (\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; t < b). \quad (1.12)$$

Како би се задовољили физички услови структура које су разматране, истраживање у докторату је ограничено на случај када је  $\alpha \in \mathbb{R}, (0 < \alpha \leq 1)$  при чему је коришћен леви извод.

### 1.3.2 Грунвалд-Летњикова дефиниција фракционог извода

Грунвалд-Летњикови (Grünwald-Letnikov) леви и десни фракциони извод реда  $\alpha \in \mathbb{R} (\alpha > 0)$  на коначном интервалу  $[a, b]$  се дефинишу као:

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) := \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta_{h,a+}^{\alpha} f(t)}{h^{\alpha}}, \quad (1.13)$$

$$D_{b-}^{\alpha} f(t) := \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\Delta_{h,b-}^{\alpha} f(t)}{h^{\alpha}}, \quad (1.14)$$

где су

$$\Delta_{h,a+}^{\alpha} f(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh), \quad (t \in \mathbb{R}; h > 0; \alpha > 0), \quad (1.15)$$

$$\Delta_{h,b-}^{\alpha} f(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{b-t}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t+jh), \quad (t \in \mathbb{R}; h > 0; \alpha > 0), \quad (1.16)$$

док  $[x]$  означава целобројни део од  $x$ .

Ови изводи су настали уопштавањем метода коначних разлика на изводе нецелог реда и углавном се примењују у нумеричким апроксимативним методама. У наставку је коришћен само леви Грунвалд-Летњиков извод.

### 1.3.3 Капутова дефиниција фракционог извода

Капутови (Caputo) фракциони леви и десни извод  ${}^C D_{a+}^{\alpha} f(t)$  и  ${}^C D_{b-}^{\alpha} f(t)$  реда  $\alpha \in \mathbb{C} (\Re(\alpha) \geq 0)$  на интервалу  $[a, b] \in \mathbb{R}$  су дефинисани на следећи начин [118]:

$${}^C D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1; t > a), \quad (1.17)$$

$${}^c D_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(\tau)}{(\tau - t)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad (n = [\Re(\alpha)] + 1; t < b), \quad (1.18)$$

Постоје и друге дефиниције фракционих извода, али се поменуте три највише срећу у литератури.

### 1.3.4 Основна својства фракционих извода

Пошто су у дисертацији коришћени само леви фракциони изводи, својства која су дата у наставку се односе на њих. Аналогна својства важе и за десне изводе, али она овде неће бити наведена. За детаљније информације, читалац се упућује на [115, 117]. Означимо извод  $D_{a+}^{\alpha} f(t)$  са  ${}_a D_t^{\alpha} f(t)$ . Главна својства фракционих извода су следећа:

1. Ако је  $f(t)$  аналитичка функција од  $t$ , онда је њен фракциони извод  ${}_0 D_t^{\alpha} f(t)$  аналитичка функција од  $t$  и  $\alpha$ .
2. За  $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ , оператор  ${}_0 D_t^{\alpha} f(t)$  је класичан оператор диференцирања реда  $n$ , тј. важи:

$$\begin{aligned} D_{a+}^0 f(t) &= D_{b-}^0 f(t) = f(t), \\ D_{a+}^n f(t) &= f^{(n)}(t), \quad D_{b-}^n f(t) = (-1)^n f^{(n)}(t), \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned} \quad (1.19)$$

где је  $f^{(n)}(t)$  извод реда  $n$  од функције  $f(t)$ .

3. За  $\alpha = 0$ , оператор  ${}_0 D_t^0 f(t)$  је идентичан оператор:

$${}_0 D_t^0 f(t) = f(t).$$

4. Оператор фракционог диференцирања је линеаран оператор:

$${}_a D_t^{\alpha} (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_a D_t^{\alpha} f(t) + \mu {}_a D_t^{\alpha} g(t). \quad (1.20)$$

5. За композицију оператора фракционог диференцирања важи:

$${}_0 D_t^{\alpha} {}_0 D_t^{\beta} f(t) = {}_0 D_t^{\beta} {}_0 D_t^{\alpha} f(t) = {}_0 D_t^{\alpha + \beta} f(t). \quad (1.21)$$

Важи комутативност између фракционих  ${}_a D_t^r$  и целобројних извода  $\frac{d^n}{dt^n}$ :

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^r f(t)) = {}_a D_t^r \left( \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_a D_t^{r+n} f(t), \quad (1.22)$$

под условом да у  $t = a$  важи  $f^{(k)}(a) = 0$ , ( $k = 0, 1, 2, 1, \dots, n - 1$ ).

6. Лајбницово (Leibniz) правило за фракционо диференцирање производа две функци-



је гласи:

$${}_a D_t^r (\phi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} \phi^{(k)}(t) {}_a D_t^{r-k} f(t), \quad (1.23)$$

ако су функције  $\phi(t)$  и  $f(t)$  и сви њихови изводи непрекидни у интервалу  $[a, t]$ .

## 1.4 Функционално градијентни материјали

Концепт функционално градијентних (ФГ) материјала је иницијално представљен у граду Сендаи у Јапану 1980-их година за описивање термалних баријера [119]. Код ових материјала долази до постепених промена својства материјала услед континуалних промена хемијске структуре у једном или више жељених праваца. У природи оваква својства имају нпр. кости, зуби, кожа, дрво итд. Приликом избора материјала, ФГ материјали се бирају због њихове могућности постепеног прелаз са једног на други материјал, радије него материјали где је тај прелаз (интерфејс) оштар. Предности у односу на традиционалне ламинатне композите су већа чврстоћа, мањи заостали напони услед постепених промена у физичким, металуршким и механичким својствима између суседних слојева, чиме се побољшавају перформансе структуре и продужава њен радни век. ФГ материјали се најчешће користе у апликацијама у којима се јавља потреба за компонентама, које требају имати у различитим деловима различита и често супротна својства. Овакве компоненте се могу наћи у енергетском, ваздухопловном, аутомобилском инжењерству, оптоелектроници, медицини, итд [120]. ФГ материјали најчешће настају адитивним технолошким процесима производње [120, 121, 122].

Да би дво- и вишефазни ФГ материјали били погоднији за практичну примену и нумеричку анализу (нпр. методом коначних елемената), корисно је применити хомогенизационе шеме које дефинишу паралелне хомогене слојеве са коначним еластичним модулом. Својства сваког слоја се одређују одговарајућим методама усредњавања. Дебљина слоја и запремински удели фазних компоненти садржаних у слоју се бирају да апроксимирају значајне варијације у уделу фазне запремине градираних материјала. Најчешће се користе следећи хомогенизациони модели [123]: модел ФГМ степеног закона (power law model), модел ФГМ експоненцијалног закона (exponential law model), модел ФГМ законом са сигмоидном функцијом (sigmoid law model), модел законом Viola Tornabene, тригонометријски модел, правило мешавине (rule of mixture), Мори-Танака шема (Mori-Tanaka scheme), ТТО модел (Tamura-Tomota-Ozawa), Војтов модел (Voigt), Ројсов модел (Reuss), самоконзистентни модел процене (self-consistent estimation model), модел кубних локалних репрезентативних запреминских елемената (cubic local representative volume elements model), Хашин-Штрикман гранични модел (Hashin-Shtrikman bounds model). У овој докторској дисертацији је коришћен хомогенизациони модел са степеним законом.

ФГ греда ширине  $b$  и дебљине  $h$  се састоји из два различита материјала. Ефективне ма-

теријалне карактеристике (нпр. Јунгов модул еластичности  $E$  и запреминска густина  $\rho$ ) варирају континуално кроз њену дебљину у вертикалном  $z$  правцу. Те материјалне карактеристике у односу на геометријску средњу раван савијања се могу срачунати, применом степене функције расподеле материјала:

$$\mathcal{P}(z_m) = (\mathcal{P}_g - \mathcal{P}_d) \left( \frac{z_m}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \mathcal{P}_d, \quad (1.24)$$

где индекси  $g$  и  $d$  означавају горњи и доњи слој греде, а  $k$  је степени индекс, који дефинише начин промене својстава материјала у вертикалном правцу греде. Геометријска и физичка средња раван се поклапају (коинцидентне су) код хомогених материјала. Међутим, промена особина материјала у једном правцу помера физичку средњу раван од геометријске за неко коначно растојање  $c$ , као што је приказано на слици 1.1. Тако да је нови референтни координатни систем предложен у више различитих студија [28], [124],[125]. Да би се упростила анализа и спречио ефекат спрезања модова осциловања приликом савијања и истезања, користиће се ново уведени координатни систем, где оса  $x$  лежи у физичкој средњој равни, а вертикална оса је дата као  $z$  оса (Слика 1.1). Под спрезањем модова се подразумева да модови померања у вертикалном правцу утичу на померање у хоризонталном правцу и обрнуто. У већини случајева се то спрезање може занемарити. Специјални случајеви из литературе где спрезање није занемарено, укључују моделирање процеса бушења [126, 127] и најчешће су последица ексцентричног деловања аксијалне силе [128]. Проблем оваквог типа ексцентричности је овде решен увођењем новог координатног система, тако да модови савијања и истезања не буду међусобно спрегнути (зависни):

$$z = z_m + c. \quad (1.25)$$

Константа  $c$  која означава позицију средње физичке равни, може се срачунати на следећи начин:

$$c = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z_m \mathcal{P}(z_m) dz_m}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathcal{P}(z_m) dz_m}. \quad (1.26)$$

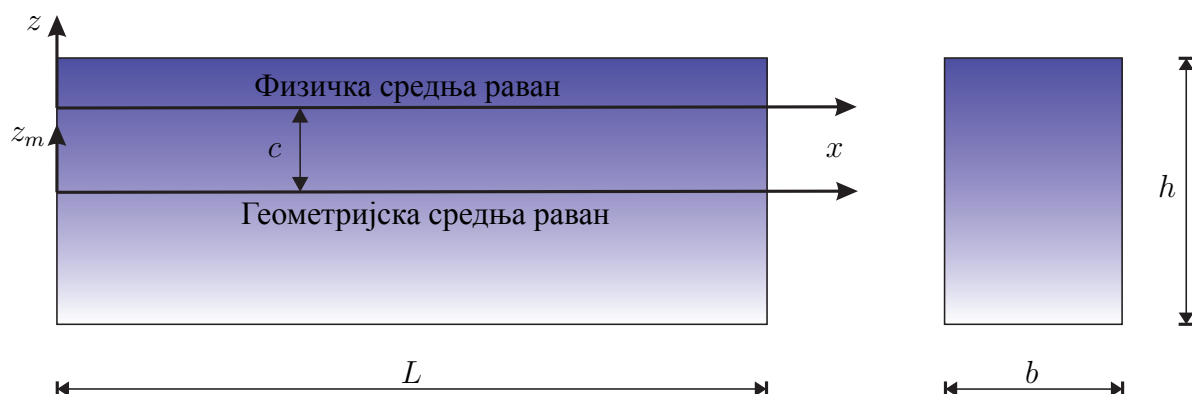
У случају правоугаоне ФГ греде, ширине  $b$  и висине  $h$ , заменом (1.24) у (1.26), израз за  $c$  добија простији облик:

$$c = \frac{(E_t - E_b)hk}{2(2 + k)(E_t + kE_b)}. \quad (1.27)$$

Узимањем физичке средње равни као референтне и заменом променљиве  $z_m$  са  $z$  у једначини (1.24), материјалне особине се могу исказати следећим изразима:

$$E(z) = (E_t - E_b) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + E_b, \quad (1.28)$$

$$\rho(z) = (\rho_t - \rho_b) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + \rho_b. \quad (1.29)$$



Слика 1.1: Координатни системи у физичкој и геометријској средњој равни.

## 1.5 Нелокалне теорије механике континуума

Класична теорија еластичности је локална и описана је линеарним Хуковим (Hook) законом. Њен назив потиче од њене локалне природе, односно од својства да стање напона у произвољној тачки посматраног еластичног тела има линеарну везу са стањем деформација у посматраној тачки. Зато класична (линеарна) теорија еластичности даје резултате који занемарују величину посматраног тела и ефекте који се јављају у складу са димензијама. Због наведених недостатака класичне теорије еластичности, настале су бројне модификације ове теорије, које узимају у обзир ефекте који се јављају на микро/нано-скали као што су: Ерингенова нелокална теорија еластичности (теорија градијената напона) [129, 130, 131], теорија градијената дилатација [132, 133], њихова комбинација (нелокална дилатацијско градијентна теорија) [19, 134, 135], теорија спрегнутих напона [17, 136], и сл.

### 1.5.1 Нелокална теорија еластичности

У нелокалној теорији еластичности, стање напона у некој тачки домена је дефинисан као функција стања деформација не само у тој тачки, него као функција стања деформација у свим тачкама посматраног домена. Таква формулација стања напона омогућава да се у обзир узму и нелокални ефекти, као што је интеракција на даљину између атома и молекула, чији утицај долази до изражаја када су димензије посматраних објеката веома мале, тј. мерљиве дужинама међуатомских растојања у атомској решетки материјала. Модели базирани на нелокалној теорији широко су распрострањени у литератури за описивање бројних феномена везаних за микро/нано-структуре, дислокације у материјалима и др.

У структурној механици се примењују нелокалне конститутивне релација у надградњи класичних локалних теорија штапова, греда, плоча и љуски, који се у нелокалној теорији називају наноштапови, наногреде, наноплоче и нанољуске [137, 138].

На основу претпоставке да је стање напона у тачки функција стања деформација свих тачака посматраног еластичног тела, Еринген (Eringen) [130] је дао конститутивне једначине у интегралном облику за нелокални еластични тензор напона. Нелокални ефекти су описани у једначини преко једног материјалног параметра, тзв. нелокалног параметра. У случају тродимензионалног еластичног тела ова једначина гласи:

$$t_{ij}(x) = \int_V \alpha(\|x - x'\|, \tau) \sigma_{ij}(x') dV(x'), \quad (1.30)$$

где је  $t_{ij}$  нелокални тензор напона, а  $\sigma_{ij}(x')$  локални или макроскопски тензор напона у тачки  $x'$ . Функција  $\alpha(\|x - x'\|, \tau)$  представља тзв. нелокални модул или функцију пригушења (атенуације), која узима у обзир нелокалне ефекте у некој референтној тачки  $x$  услед локалне деформације у тачки  $x'$ , где  $\|x - x'\|$  дефинише расторање помоћу Еуклидске норме. Функција атенуације практично дефинише слабљење утицаја нелокалних стања дилатација са удаљењем од референтне тачке на стање напона у референтној тачки.

Материјална константа се дефинише као:

$$\tau = \frac{e_0 a}{l}, \quad (1.31)$$

где су:  $l$  - спољашња карактеристична дужина (дужина прслине, таласна дужина),  $a$  - унутрашња карактеристична дужина (параметар решетке, величина зрна, међуатомско растојање),  $e_0$  - константа која је различита за различите материјале и може се одредити идентификацијом параметра на основу симулација атомистичким методама (молекуларна динамика) или преко Борн-Карманове (Born-Karman) криве дисперзних таласа добијене из динамичке теорије кристалне решетке. Еринген је добио универзалну вредност константе  $e_0 = 0.39$ . У случају наноструктура вредности овог параметра су различите и зависе од конкретне геометрије структуре, материјалних особина и граничних услова.

Еринген је у каснијем раду [131] преформулисао интегралну форму конститутивне једначине избором одговарајуће функције језгра у изразу (1.30) и добио њену диференцијалну форму у следећем облику:

$$(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) t_{ij} = \sigma_{ij}, \quad (1.32)$$

где  $\nabla$  представља Лапласов оператор.

У класичној теорији еластичних деформација изотропног тела, Хуков закон даје везу између тензора стања напона  $\sigma_{ij}(x')$  у тачки  $x'$  и тензора стања деформације  $\varepsilon_{ij}(x')$  у тој

истој тачки:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}, \quad (1.33)$$

где су  $\lambda$  и  $G$  Ламеове константе [139], а  $\delta_{ij}$  је Кронекеров делта симбол. Заменом израза (1.33) у једначину (1.32), у случају деформабилног изотропног тела где се узима у обзир утицај нелокалног параметра дужинске (нано) скале, уз занемаривање нелокалног ефекта у правцу дебљине тела, добијају се следеће конститутивне релације:

$$t_{xx} - \mu \frac{d^2 t_{xx}}{dx^2} = E \varepsilon_{xx}, \quad (1.34)$$

$$t_{xz} - \mu \frac{d^2 t_{xz}}{dx^2} = 2G \varepsilon_{xz}, \quad (1.35)$$

где је  $E$  Јунгов модул еластичности,  $G$  модул смицања и  $\mu = (e_0 a)^2$  нелокални параметар. Ако се усвоји да је нелокални параметар једнак нули  $\mu = 0$ , онда се добија класична конститутивна релација изотропног деформабилног тела.

Треба напоменути да је у истраживањима примећено да се јавља извесно неслагање између резултата савијања код конзоле и греде на једном крају укљештене а на другом просто ослоњене, чија је конститутивна релација описана преко диференцијалне форме Ерингерове нелокалне теорије еластичности и да се за одређене граничне услове и услове распореда оптерећења ово одступање не јавља. У раду [140] је доказано да и када се јаве поменута одступања примери могу да се реше употребом интегралне или диференцијално-интегралне форме конститутивних релација. Примери деформабилних нано структура које се разматрају у овој дисертацији су примери ослањања и распореда оптерећења где се поменути парадокс не појављује и интегрална форма се може свести на диференцијалну, као и обрнуто.

## 1.5.2 Дилатацијско градијентна теорија еластичности

Дилатацијско (деформацијско) градијентна теорија је настала из потребе описивања утицаја микродеформација на макродеформације. Ова теорија се користи да се срачуна ефекат нано-скале који може довести до макроскопског очвршћавања (strengthening) услед местимичне концентрације чврстих везивних честица на микро нивоу, односно предвиђања ефекта макроскопског омекшавања (softening) услед местимичне концентрације микропукотина и микропразнина у материјалу. У преводу, дилатацијско градијентна теорија описује како деформације на микро и нано нивоу (нивоу дислокација у кристалној решетки, пукотина, прслина, нечистоћа и ситних примеса у материјалу) утичу на деформације на макро нивоу [12, 141, 142].

### 1.5.3 Нелокална дилатацијско градијентна теорија

Да би се понашање материјала што реалније и што прецизније описало и искористиле погодности и напонско и дилатацијски градијентне теорије, у последње време у научном свету је постала популарна напонско-дилатационо градијентна теорија, односно нелокална дилатацијско градијентна теорија еластичности. Према нелокалној дилатацијско градијентној теорији [19], енергија дилатације  $U$  може се изразити као:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \sigma_{ijk}^{(1)} \varepsilon_{ij,k}) dV, \quad (1.36)$$

где је  $\sigma_{ij}$  нелокални напон, а  $\sigma_{ijk}^{(1)}$  нелокални напон вишег реда. Укупни напон је:

$$t_{ij} = \sigma_{ij} - \nabla \sigma_{ijk}^{(1)}. \quad (1.37)$$

Конститутивна једначина за нелокални и локални део [131] може се написати као:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \sigma_{xx} = E(z) \varepsilon_{xx}, \quad (1.38)$$

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \sigma_{xxx}^{(1)} = l^2 E(z) \varepsilon_{xx,x}, \quad (1.39)$$

где су  $\mu$  и  $l$  нелокални и параметар дужинске скале, редом,  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $E(z)$  је Јунгов модул еластичности,  $\varepsilon_{xx}$  је аксијална дилатација, а  $\varepsilon_{xx,x}$  је аксијални градијент дилатације. Конститутивна релација између напона и деформације код нелокално дилатацијско градијентне теорије је [26]:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) t_{xx} = (1 - l^2 \nabla^2) E(z) \varepsilon_{xx}. \quad (1.40)$$

Као главни недостатак диференцијалне форме конститутивне релације нелокално дилатацијско градијентне теорије (1.40), у литератури се наводи појава парадокса [143] који се јавља код Ојлер-Бернулијеве (Euler–Bernoulli) греде, и најизраженији је када се ради о граничним условима за конзолу. С друге стране интегрална форма још увек није у довољној мери применљива за решавање проблема из праксе због математичне комплексности у њеној примени. За превазилажење овог недостатка група италијанских аутора је предложила примену диференцијалне форме конститутивних једначина нелокалне еластичности уз увођење додатних конститутивних граничних услова [144, 145, 146]. Они су показали да се на тај начин добијају исти резултати као применом интегралне форме. Проблем који се са оваквим приступом јавља је решавање карактеристичне једначине шестог степена, чији карактер решења зависи од односа параметара те једначине.

Да би се проблем некомпатибилности интегралне и диференцијалне форме за одређене специфичне случајеве решио, Salehipour [147] и касније Batra [143] су предложили модификовану нелокалну теорију која је применљива на нехомогене материјале. Међутим,

према [147], када је Лапласов оператор своди на ( $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$ ) и материјалне особине гредe су само функције вертикалне координате  $z$ , тада се класична Ерингенова теорија може користити да би обухватила ефекте мале скале код ФГ гредe и плоча. Штавише, увођењем референтног координатног система у физичку раван може се избећи спрезање мода савијања и истезања. У овој дисертацији су примењене обе претпоставке да би се испитала динамика нелокалне ФГ гредe која осцилује на фракционом виско-Пастернаковом слоју.

## Глава 2

# Метода инкременталног хармонијског баланса

### 2.1 Метода хармонијског баланса

Метода хармонијског баланса је апроксимативна метода за израчунавање периодичних решења обичних диференцијалних једначина (ОДЈ). Динамика многих система (структуре, флуиди, електрична кола,...) може се описати помоћу ОДЈ. Метода се примењује само ако се не зна тачно решење тј. код нелинеарних ОДЈ-а. Периодичне осцилације су често од примарног техничког значаја.

Идеја методе хармонијског баланса (ХБ) је следећа. Регуларно периодично решење обичног или диференцијално-алгебарског система једначина може се представити Фуријеовим редом, односно комбинацијом синусних и косинусних функција. У многим случајевима, апроксимација довољне тачности је већ постигнута када се узме у обзир само мали број синусних и косинусних функција. Стога се чини да природни приступ тражи приближно решење у облику скраћеног Фуријеовог реда. Замена овог претпостављеног решења (анзаца) у систем диференцијалних једначина генерално доводи до резидуалног члана (остатка). Пошто је приближно решење периодично, онда је и резидуални члан периодичан. Стога се он такође може развити у Фуријеов ред. ХБ метода сада захтева да Фуријеови коефицијенти заосталог члана нестану, до реда скраћења претпостављеног решења. Ово даје систем алгебарских једначина у односу на непознате Фуријеове коефицијенте апроксимације. То је укратко основна идеја ХБ методе.

У случају линеарних диференцијалних једначина, ХБ даје систем линеарних алгебарских једначина, чије решење се обично може дати као израз затвореног облика.

У нелинеарном случају, систем алгебарских једначина је такође нелинеаран, а ХБ даје само апроксимацију (Галеркиновог типа). Може се очекивати да ће ова апроксимација конвергирати тачном решењу како се ред одсецања виших чланова повећава ка бесконачности. Када се може успоставити затворено решење овог система алгебарских једначина,



добија се аналитичка апроксимација. Ово је обично могуће када је Фуријеов ред скраћен на само један или два члана, а нелинеарности имају прилично једноставан (нпр. полиномски) облик. На овај начин, ХБ даје корисне резултате о зависностима квалитативних параметара. Када је потребно узети у обзир више чланова у Фуријеовом реду да би се постигла довољна тачност, или систем једначина садржи нелинеарности компликованијег облика, обично се мора нумерички решити систем алгебарских једначина.

ХБ је применљив на аутономне и неаутономне проблеме и стога се може користити за слободне, самопобуђене и екстерно вођене (принудне и побуђене параметром) осцилације. Иако се, наравно, може применити на линеарне проблеме, његова права вредност лежи у приближном решењу система диференцијалних једначина са јаком и слабом нелинеарношћу. Чак и нелинерни чланови са дискретним скоковима (дисконтинутетима) не представљају нужно велики изазов, све док се тражено решење може добро представити скраћеним Фуријеовим редом. "Не-глатки" чланови (чланови са дискретним скоковима) се појављују, на пример, када се моделују механички системи који су подвргнути трењу клизања или удару, материјала који пролазе кроз фазне трансформације, флуида са ударима и електричних кола са диодама или прекидачима. ХБ се стога може применити на већину проблема у природним наукама и инжењерству, а пре свега на периодичне процесе. За транзијентне, насумичне или понављајуће, али непериодичне процесе, не може се очекивати да ће ХБ дати корисну апроксимацију. ХБ у најбољем случају може указати на то када периодични процес постаје нестабилан при преласку у непериодични.

Стандардна метода за решавање нелинеарних диференцијалних једначина је нумеричка интеграција. Почевши од датог скупа почетних вредности, временска еволуција зависних променљивих се у овом случају одређује сукцесивно од једног корака до наредног (нумеричка интеграција унапред). Овај поступак се такође често назива директна интеграција временског корака. Ако транзијент (временска еволуција променљивих) опада само споро, као у случају слабо пригушених вибрација, за симулацију је потребно много времена да би се на овај начин одредило периодично гранично стање. Дискретизација времена последично уводи грешке апроксимације. Ове грешке се могу акумулирати и неограничено расти (нумеричка нестабилност). У другим случајевима, грешка доводи до нефизичког смањења енергије (нумеричко пригушење) или нефизичке прерасподеле енергије унутар система. Штавише, неглатки нелинеарни чланови (чланови са дискретним скоковима - дисконтинутетима) у диференцијалним једначинама могу довести до скоковитих дисконтинуитета решења. Само неколико метода интеграције је применљиво на такве проблеме, које представљају отворена поља истраживања.

Диференцијално-алгебарске једначине је обично много теже нумерички интегралити него обичне диференцијалне једначине, које не представљају посебан изазов за ХБ. Нумеричка интеграција система обичних диференцијалних једначина обично доводи до екстремно малих временских корака (велики рачунски напори) или јаког нумеричког пригушења (ниска тачност). ХБ је излаз из ове дилеме. По дизајну, апроксимација је увек пери-

одична. Дакле, искорак у времену не доводи до нефизичког раста или смањења енергије. Такође, ХБ избегава симулацију евентуално дугих транзијента (временске еволуције променљивих). Довољно тачне апроксимације се често добијају већ за релативно мали број непознатих (низак ред скраћења Фуријеовог реда). Из ових разлога, ХБ је обично много ефикаснији од нумеричке интеграције. Још једна важна разлика у односу на директну нумеричку интеграцију је у томе што се и стабилне и нестабилне периодичне осцилације могу израчунати коришћењем ХБ.

У наставку текста је дат пример примене методе ХБ на решавање Дуфинговог осцилатора (2.1) [148], облика:

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q} + \omega_0^2 q + \theta q^3 = f \cos \Omega t. \quad (2.1)$$

Нека је ради једноставности  $\omega_0 = 1$ . Циљ је наћи периодично решење  $q(t + T) = q(t)$  са периодом  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ . Потражиће се у облику:

$$q(t) \approx q_h(t) = Q_c \cos \Omega t + Q_s \sin \Omega t. \quad (2.2)$$

Временски изводи претпостављеног решења (2.2) су:

$$\begin{aligned} q_h &= Q_c \cos \Omega t + Q_s \sin \Omega t, \\ \dot{q}_h &= -\Omega Q_c \sin \Omega t + \Omega Q_s \cos \Omega t, \\ \ddot{q}_h &= -\Omega^2 Q_c \cos \Omega t - \Omega^2 Q_s \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Користиће се следећи тригонометријски идентитети:

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x, \\ \cos^2 x \sin x &= \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin 3x, \\ \cos x \sin^2 x &= \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x, \\ \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Развијањем нелинеарног кубног члана из израза (2.1) и коришћењем тригонометријских идентитета (2.4), добија се:

$$\begin{aligned} q_h^3 &= (Q_c \cos \Omega t + Q_s \sin \Omega t)^3 \\ &= Q_c^3 \cos^3 \Omega t + 3Q_c^2 Q_s \cos^2 \Omega t \sin \Omega t + 3Q_c Q_s^2 \cos \Omega t \sin^2 \Omega t + Q_s^3 \sin^3 \Omega t \\ &= \frac{3}{4} (Q_c^3 + Q_c Q_s^2) \cos \Omega t + \frac{3}{4} (Q_s^3 + Q_c^2 Q_s) \sin \Omega t + (\dots) \cos 3\Omega t + (\dots) \sin 3\Omega t. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Заменом једначина (2.3) и (2.5) у једначину кретања (2.1), следи:

$$\begin{aligned} & \left[ (1 - \Omega^2) Q_c + \gamma \Omega Q_s + \frac{3}{4} \theta (Q_c^3 + Q_c Q_s^2) - f \right] \cos \Omega t + \\ & \left[ (1 - \Omega^2) Q_s - \gamma \Omega Q_c + \frac{3}{4} \theta (Q_s^3 + Q_c^2 Q_s) \right] \sin \Omega t + [\dots] \cos 3\Omega t + [\dots] \sin 3\Omega t = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Занемаривањем хармоника вишег реда од реда у претпостављеном решењу (2.2) ( $>1$ ), тј. тригонометријских чланова са фреквенцијама већим од  $\Omega$  ( $2\Omega, 3\Omega, \dots$ ) и балансирањем (уравнотежавањем) хармоника добија се:

$$\begin{aligned} R_c & := (1 - \Omega^2) Q_c + \gamma \Omega Q_s + \frac{3}{4} \theta (Q_c^3 + Q_c Q_s^2) - f = 0, \\ R_s & := (1 - \Omega^2) Q_s - \gamma \Omega Q_c + \frac{3}{4} \theta (Q_s^3 + Q_c^2 Q_s) = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Израз (2.7) представља систем од 2 алгебарске једначине ( $R_c, R_s$ ) са 2 непознате ( $Q_c, Q_s$ ). Највише је од интереса фреквентни одзив, односно потребно је познавати како се решења (2.2) мењају са променом фреквенције побуде  $\Omega$ . Уводи се следећи вектор решења:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} Q_c \\ Q_s \\ \Omega \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Сада се одређивање фреквентног одзива система може написати у облику проблема за нумеричку континуацију са  $\Omega$  као слободним параметром, односно на решавање система:

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} R_c \\ R_s \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

где су  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ , а фреквенција побуде лежи у интервалу  $\Omega^{(s)} \leq \Omega \leq \Omega^{(e)}$ .

## 2.2 Метода инкременталног хармонијског баланса

Методу инкременталног хармонијског баланса су првобитно развили Lau и Cheung 1981. године у сврху проучавања структурних вибрација еластичних система и демонстрирали примену на плоче и плитке љуске [149]. Методе хармонијског баланса (ХБМ) засноване на Галекиновој апроксимацији могу се бавити системима са јаким нелинеарностима јер не захтевају да системи буду непрекидни [150]. Као што је објашњено у [151], метода инкременталног хармонијског баланса (ИХБ) је посебно погодна за компјутерску имплементацију. У овој методи, прво се периодично решење нелинеарног динамичког система представља Фуријеовим редом са малим бројем хармоника, а затим се разматрани систем трансформише у систем линеаризованих инкременталних алгебарских једначина

по непознатим Фуријеовим коефицијентима. Затим, добијени систем линеарних једначина се решава итеративно у сваком инкременталном кораку. Коначно, Фуријеови коефицијенти се могу одредити ако итеративни поступак конвергира.

У поређењу са класичним приступима, ИХБ метода је изузетно ефикасна за добијање решења са жељеном тачношћу у широком опсегу променљивих параметара, где се и стабилна и нестабилна решења директно израчунавају. ИХБ метода је већ успешно примењена на широк спектар динамичких система, на пример [151, 152, 153, 154]. ИХБ метода се такође може користити за истраживање бифуркација и хаоса [155], анализу нелинеарне динамике временски променљивог динамичког система [156], предвиђање осцилација граничног циклуса под неизвесношћу [157] и друге нелинеарне проблеме [158, 159, 160, 161], где се очекује периодичност предвиђених решења. ИХБ метода такође налази свој пут у неким класама "део-по-део" линеарних динамичких система [162, 163, 164, 165]. Метода инкременталног хармонијског баланса (ИХБ) се користи у пуно научних радова за решавање нелинеарних структурних проблема [166, 87, 167, 85, 104, 168]. Између осталих, Dou и Jensen [166] су развили методу за оптимизацију нелинеарних принудних осцилација деформабилних структура са временски променљивим хармонијским оптерећењима, односно налажење оптималног облика греде за који основни или суперхармонијски резонантни одзив има екстремну вредност (минимум или максимум) при чему су за нелинеарну вибрациону анализу користили ИХБ методу. У раду [87] су коришћене ИХБ и пертурбациона метода вишеструких временских скала за испитивање динамичког понашања и стабилности једнослојне угљеничне наноцевчице моделиране као нелинеарна наногреда у Келвин-Војтовом вискоеластичном медијуму. ИХБ метода је такође примењена за испитивање спрегнутих осцилатора који се свде на Дуфингове диференцијалне једначине [167], односно осцилатора који се своди на параметарску Матије-Дуфингову диференцијалну једначину [85] који се примењује за прикупљање енергије. Ова два типа диференцијалних једначина су добро позната у литератури и њима је могуће описати више система са различитим физичким карактеристикама [169, 170, 104].

Размотрта се обична нелинеарна диференцијална једначина у следећем облику:

$$\mathcal{F}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \Omega, \tau) = F \cos \tau, \quad (2.10)$$

односно:

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}, F, \Omega, \tau) = 0. \quad (2.11)$$

У једначини (2.11), скалар или вектор  $x = x(\tau)$  представља закон кретања, односно непознату функцију временске променљиве  $\tau$ , ( $\dot{\phantom{x}}$ ) означава извод по времену  $\tau$ ,  $F$  је амплитуда хармонијске силе побуде, док  $\Omega$  представља нормализовану фреквенцију побуде. За праксу је поред проналажења периодичног решења  $x = x(\tau)$ , значајно одређивање зависности  $x(\Omega)$  односно  $x(F)$ . Да би се то остварило, потребно је најпре функцију  $f$ , дату изразом (2.11), развити у Тејлоров ред у околини почетно-претпостављене тачке

$S(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, F_0, \Omega_0)$ :

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x, \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}, \ddot{x}_0 + \Delta \ddot{x}, F_0 + \Delta F, \Omega_0 + \Delta \Omega, \tau) \\ &= f_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_S \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_S \Delta \dot{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} \right|_S \Delta \ddot{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial F} \right|_S \Delta F + \left. \frac{\partial f}{\partial \Omega} \right|_S \Delta \Omega + \text{ч.в.р.} = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где је

$$f_0 = f(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, F_0, \Omega_0, \tau), \quad (2.13)$$

функција која зависи само од времена  $\tau$  у почетно-претпостављеној тачки  $S$ . Одбацивањем чланова вишег реда (ч.в.р.), добија се инкрементална диференцијална једначина:

$$\begin{aligned} L[\Delta x] &= f_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_S \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_S \Delta \dot{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} \right|_S \Delta \ddot{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial F} \right|_S \Delta F + \left. \frac{\partial f}{\partial \Omega} \right|_S \Delta \Omega \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

коју треба решити по непознатој  $\Delta x$ , док се вредности за  $\Delta F$  и  $\Delta \Omega$  задају.  $L$  је линеарни диференцијални оператор. Приближно решење  $x$  једначине (2.11) тражимо као периодичну функцију, па  $x$  може да се развије у коначни Фуријеов ред облика:

$$x(\tau) = \bar{a}_0 + \sum_{i=1}^N (\bar{a}_i \cos i\tau + \bar{b}_i \sin i\tau). \quad (2.15)$$

Приближно решење дато изразом (2.15) се добија итеративним процесом полазећи од почетне вредности  $x_0$ :

$$x_0(\tau) = a_0 + \sum_{i=1}^N (a_i \cos i\tau + b_i \sin i\tau), \quad (2.16)$$

и одређујући у сваком кораку инкремент  $\Delta x$  у облику:

$$\Delta x(\tau) = \Delta a_0 + \sum_{i=1}^N (\Delta a_i \cos i\tau + \Delta b_i \sin i\tau), \quad (2.17)$$

при чему важи  $x = x_0 + \Delta x$ ,  $\bar{a}_i = a_i + \Delta a_i$ ,  $\bar{b}_j = b_j + \Delta b_j$ , за  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Први и други извод од  $x_0$  и  $\Delta x$  по  $\tau$  су онда:

$$\dot{x}_0 = \sum_{i=1}^N (-i a_i \sin i\tau + i b_i \cos i\tau), \quad (2.18)$$

$$\Delta \dot{x}_0 = \sum_{i=1}^N (-i \Delta a_i \sin i\tau + i \Delta b_i \cos i\tau), \quad (2.19)$$

$$\ddot{x}_0 = \sum_{i=1}^N (-i^2 a_i \cos i\tau - i^2 b_i \sin i\tau), \quad (2.20)$$

$$\Delta \ddot{x}_0 = \sum_{i=1}^N (-i^2 \Delta a_i \cos i\tau - i^2 \Delta b_i \sin i\tau). \quad (2.21)$$

Заменом израза (2.16)-(2.17) за  $x_0$  и  $\Delta x$  и њихових извода (2.18)-(2.21) у једначину (2.14), добија се:

$$L[\Delta x] = \psi(\tau), \quad (2.22)$$

где је  $\Delta x$  непозната функција времена  $\tau$ ,  $L$  је линеарни диференцијални оператор, а  $\psi(\tau)$  функција грешке (тј. остатка). Пошто непознату функцију  $\Delta x(\tau)$  апроксимирамо изразом (2.17), са десне стране једначине (2.22) се појавила функција грешке. Примењује се теорија тежинских остатака, чији је циљ минимизација функције грешке. Непозната функција  $\Delta x$  у диференцијалној једначини (2.22) апроксимира се преко израза (2.17) приближним решењем приказаним у виду суперпозиције производа познатих пробних (базних) функција и непознатих коефицијената (или генералисаних степени слободе проблема). Све пробне функције морају да буду допустиве, тј. да задовољавају есенцијалне граничне услове и да буду непрекидне, односно диференцијабилне до потребног реда у складу са редом диференцијалне једначине која се решава. Пробне функције могу бити различитог облика: тригонометријске, полиномске, итд. у зависности од врсте проблема за чије решавање се користе. Функција остатка  $\psi(\tau)$  једнака је нули само за тачно решење једначине облика (2.22). У методи тежинских остатака, функција остатка минимизује се (своди на нулу) у просечном, интегралном смислу. Наиме, функција остатка множи се са изабраним тежинским функцијама и интегрални унутар домена проблема, па се добијени изрази изједначавају са нулом. На тај начин постиже се да је функција остатка изједначена са нулом у просечном смислу. Разне варијанте методе тежинских остатака разликују се међусобно према избору тежинских функција. Метода Галеркина је специфична по томе што се за тежинске функције бирају базне функције којима је апроксимирано тражено решење (без коефицијената). Базне (пробне) функције претстављају један од облика непознатог решења, док су коефицијенти уз базне функције (или генералисани степени слободе) амплитуде у тим облицима решења.

Пошто су у овом конкретном случају за базне функције изабране тригонометријске функције и примењује се Галеркинова метода, према којој су тежинске функције једнаке базним, множењем остатка тежинским функцијама и интеграцијом унутар домена  $[0, 2\pi]$ , добија се:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \psi(\tau) \cos i\tau d\tau &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \\ \int_0^{2\pi} \psi(\tau) \sin j\tau d\tau &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Галеркинове методе, назване по руском математичару Борису Галеркину, конвертују непрекидни операторски проблем, као што је диференцијална једначина, обично у слабој форми, у дискретни проблем применом линеарних ограничења одређених коначним ску-

повима базних функција одговарајућег простора [171, 172]. Према томе, (2.23) представља систем од  $2N + 1$  линеарних алгебарских једначина по  $\Delta \mathbf{a}$ ,  $\Delta F$  и  $\Delta \Omega$ , где је  $\Delta \mathbf{a} = [\Delta a_0, \Delta a_1, \dots, \Delta a_N, \Delta b_1, \dots, \Delta b_N]^T$ . Пошто се добија систем од  $2N + 1$  једначина по  $2N + 3$  непознатих, који је нерешив, узима се да су две од величина  $\Delta a_0$ ,  $\Delta F$  и  $\Delta \Omega$  једнаке нули. Систем једначина (2.23) у општем случају може написати у матричном облику на следећи начин:

$$\mathbf{R} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{C}^{11} & \mathbf{C}^{12} \\ \hline \mathbf{C}^{21} & \mathbf{C}^{22} \end{array} \right] \Delta \mathbf{a} + \left[ \begin{array}{c} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{array} \right] \Delta F + \left[ \begin{array}{c} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{array} \right] \Delta \Omega. \quad (2.24)$$

Једначина (2.24) се може написати у компактнијој форми:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{C}] \Delta \mathbf{a} + \mathbf{P} \Delta F + \mathbf{Q} \Delta \Omega. \quad (2.25)$$

Матрице и вектори у систему једначина (2.24), односно (2.25), су следећих димензија:  $[\mathbf{C}] \in \mathbb{R}^{(2N+1) \times (2N+1)}$ ;  $\mathbf{C}^{11} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ ;  $\mathbf{C}^{12} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times N}$ ;  $\mathbf{C}^{21} \in \mathbb{R}^{N \times (N+1)}$ ;  $\mathbf{C}^{22} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ;  $\mathbf{R}, \Delta \mathbf{a}, \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{(2N+1) \times 1}$ ;  $\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1 \in \mathbb{R}^{(N+1) \times 1}$ ;  $\mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ ;  $\Delta F, \Delta \Omega \in \mathbb{R}$ , и имају следећи облик [173]:

$$C_{ij}^{11} = \int_0^{2\pi} \left( \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_S \cos j\tau - \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_S j \sin j\tau - \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} \right|_S j^2 \cos i\tau \right) \cos i\tau d\tau, \quad (2.26)$$

$$i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, N,$$

$$C_{ij}^{12} = \int_0^{2\pi} \left( \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_S \sin j\tau + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_S j \cos j\tau - \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} \right|_S j^2 \sin i\tau \right) \cos i\tau d\tau, \quad (2.27)$$

$$i = 0, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$C_{ij}^{21} = \int_0^{2\pi} \left( \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_S \cos j\tau - \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_S j \sin j\tau - \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} \right|_S j^2 \cos i\tau \right) \sin i\tau d\tau, \quad (2.28)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, N,$$

$$C_{ij}^{22} = \int_0^{2\pi} \left( \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_S \sin j\tau + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_S j \cos j\tau - \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} \right|_S j^2 \sin i\tau \right) \sin i\tau d\tau, \quad (2.29)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$P_{c_i} = \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial f}{\partial F} \right|_S \cos i\tau d\tau, \quad i = 0, \dots, N, \quad (2.30)$$

$$P_{s_i} = \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial f}{\partial F} \right|_S \sin i\tau d\tau, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.31)$$

$$Q_{c_i} = \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial f}{\partial \Omega} \right|_S \cos i\tau d\tau, \quad i = 0, \dots, N, \quad (2.32)$$

$$Q_{s_i} = \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial f}{\partial \Omega} \right|_S \sin i\tau d\tau, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.33)$$

$$R_{c_i} = - \int_0^{2\pi} f_0 \cos i\tau d\tau, \quad i = 0, \dots, N, \quad (2.34)$$

$$R_{s_i} = - \int_0^{2\pi} f_0 \sin i\tau d\tau, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.35)$$

Једначина (2.25) дефинише алгоритам за итеративно решавање једначине (2.11). Након сваке итерације, вредности за  $x_0, F_0, \Omega_0$ , се мењају и добијају нове вредности које износе  $x_0 + \Delta x, F_0 + \Delta F, \Omega_0 + \Delta \Omega$ . Када ће се итеративни процес прекинути, одређује се срачунавањем величина  $e_1$  и/или  $e_2$  на следећи начин:

$$e_1 = \sqrt{\sum_{i=0}^N R_{c_i}^2 + \sum_{i=1}^N R_{s_i}^2} = \|\mathbf{R}\|_2, \quad e_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^N \Delta a_i^2 + \sum_{i=1}^N \Delta b_i^2} = \|\Delta \mathbf{a}\|_2, \quad (2.36)$$

које дају процену грешке, односно одступања од унапред задатних вредности [173]. Грешка  $e_1$  указује да ли треба укључити већи број Фуријеових коефицијената у изразу (2.15) који апроксимира решење, а грешка  $e_2$  да ли треба наставити итеративни процес срачунавања  $\Delta \mathbf{a}$  или га треба прекинути. Процена грешке  $e_2$  представља Еуклидску норму Њутн-Рапсонових прираштаја добијених током итерације.

У овом поглављу је до сада представљена методологија решавања обичне нелинеарне диференцијалне једначине (2.11). Ова методологија се може уопштити на систем од  $n$  диференцијалних једначина облика:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, F, \Omega, \tau) = 0, \quad (2.37)$$

где је  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  вектор, односно:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_n, F_1, F_2, \dots, F_n, \Omega, \tau) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_n, F_1, F_2, \dots, F_n, \Omega, \tau) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \dots, \ddot{x}_n, F_1, F_2, \dots, F_n, \Omega, \tau) &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

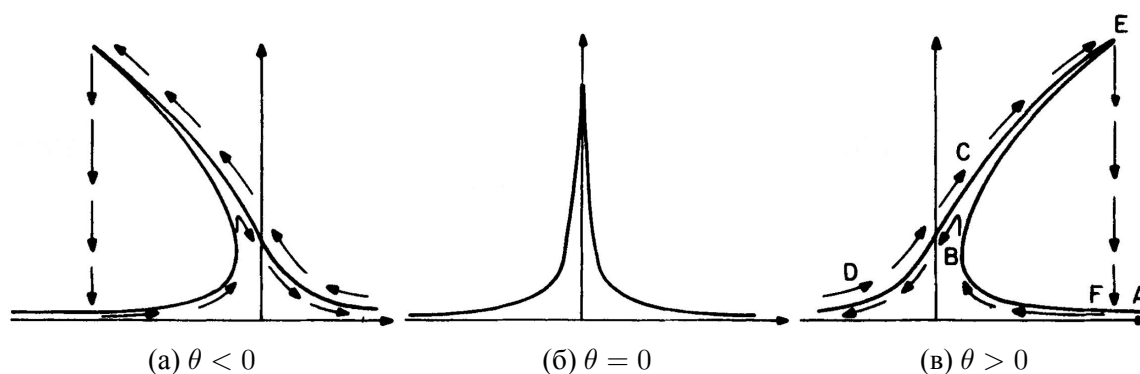
Процедура налажења решења је аналогна оној датој за једнодимензионални случај, односно решавање једне диференцијалне једначине.

## 2.3 Изазови у графичком представљању резултата

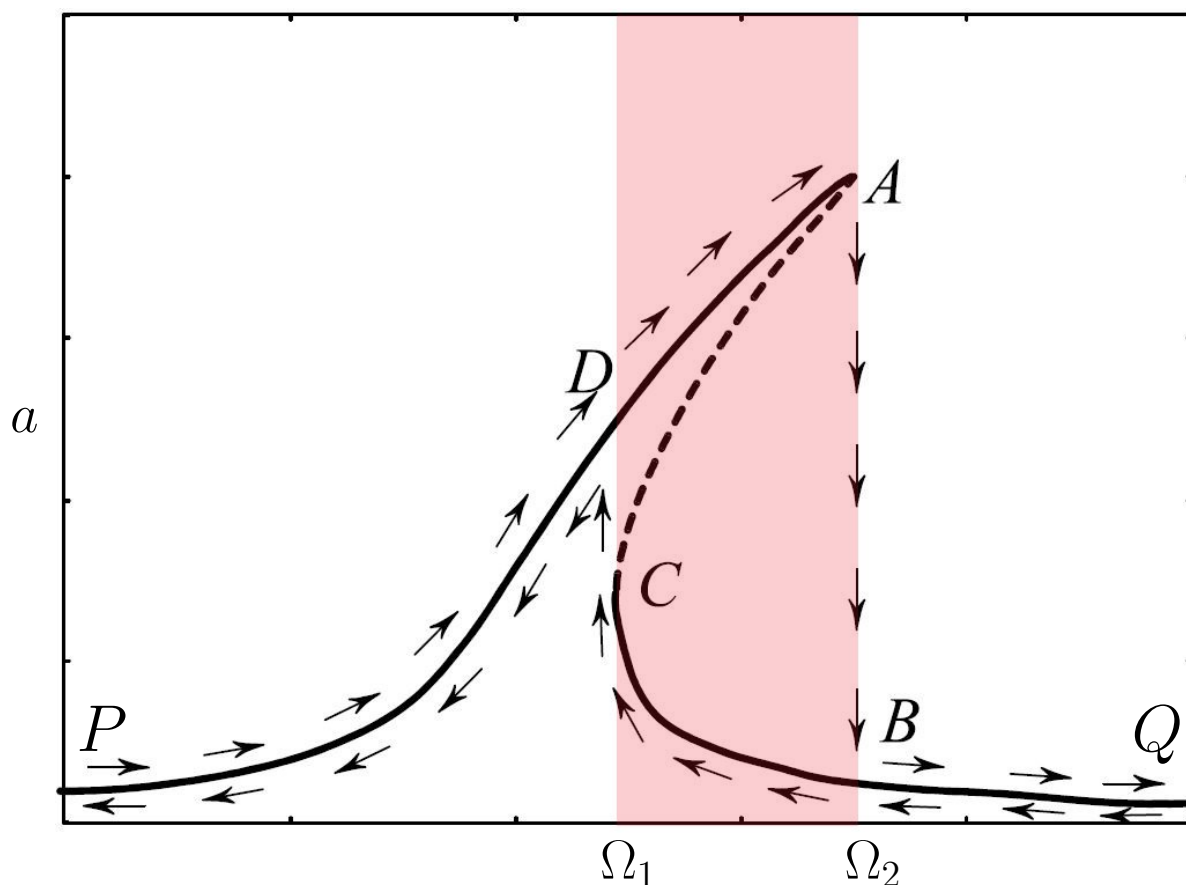
Слика 2.1 приказује понашање амплитудно фреквентног одзива у односу на предзнак нелинеарног члана  $\theta$  у Дуфинговој једначини (2.1) [174]. За  $\theta < 0$  се каже да систем има



нелинеарност омекшавања (softening nonlinearity), а за  $\theta > 0$  нелинеарност очвршћавања (hardening nonlinearity). Размотримо амплитудно-фреквентни одзив Дуфингове осцила-



Слика 2.1: Амплитудно-фреквентне криве одзива Дуфингове једначине за различите вредности нелинеарног параметра  $\theta$ : (а) нелинеарна крутост омешавања ( $\theta < 0$ ), (б) без нелинеарног члана ( $\theta = 0$ ), (в) нелинеарна крутост учвршћавања ( $\theta > 0$ ) [174]



Слика 2.2: Феномени скока навише ( $C \rightarrow D$ ) и скока наниже ( $A \rightarrow B$ ) приликом срачунавања фреквентног одзива

тора, код кога је пик одзива савијен удесно, што се очекује када се разматра систем са нелинеарношћу учвршћавања, који је дат на слици 2.2. Свакој тачки  $(\Omega, a)$  на стабилној грани (пуна линија) амплитудно-фреквентне криве дате на слици 2.2 одговара периодична

орбита у фазној равни. Амплитудно-фреквентна крива је бифуркациони дијаграм, који се добија, када се за задату (фиксирану) вредност параметра фреквенције (представљеног на хоризонталној оси) срачунава амплитуда (дата на вертикалној оси). Оно што прави потешкоће јесу бифуркације, тј. промене у стабилности и/или броју решења за малу промену вредности параметра. Тачке  $A$  и  $C$  су бифуркационе тачке типа седло-чвор, где долази до настајања или нестајања периодичног решења.

У области означеној црвеном бојом на слици 2.2, за вредности фреквенције између  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , постоје три периодична решења, два стабилна (на делу бифуркационе криве између тачака  $D$  и  $A$  и између тачака  $B$  и  $C$ ) и једно нестабилно (на делу бифуркационе криве између тачака  $A$  и  $C$ ). У овој области долази дакле до бистабилности, односно до постојања два атрактора. Тачке  $A$  и  $C$  су бифуркационе тачке типа седло-чвор бифуркације периодичних решења. У тачки  $A$  стабилно решење на делу између  $D$  и  $A$  и нестабилно решење између  $C$  и  $A$  се спајају и са повећањем параметра нестају. У тачки  $C$  стабилно решење на делу између  $B$  и  $C$  и нестабилно решење између  $C$  и  $A$  се спајају и са смањењем параметра нестају. При томе у оба случаја преостаје још једно стабилно периодично решење.

Уколико би се само са методом вишеструких временских скала или ИХБ методом са природном континуацијом покушао добити овај дијаграм, испрекидана линија између тачака  $A$  и  $C$  се не би могла одредити [101]. Срачунавањем приближних вредности координата тачака слева надесно, почев од тачке  $P$ , могла би се добити горња крива, али би се у тачки  $A$  десио скок стационарних амплитуда надоле до тачке  $B$ , одакле би наредна добијена решења била у правцу тачке  $Q$ . Дакле, решења од тачке  $A$  до тачке  $B$  дуж криве  $\widehat{ACB}$ , се не би могла одредити. Ако би се пак срачунавала решења сдесна налево, почев од тачке  $Q$ , у тачки  $C$  би био скок навише до тачке  $D$  након које би било настављено срачунавање до тачке  $P$ . Овде би се изоставила решења дуж криве  $\widehat{CAD}$ . Комбинацијом срачунавања слева надесно и сдесна налево се може добити фреквентни одзив обележен пуном линијом. Решења дуж испрекидане криве  $\widehat{AC}$  се не могу добити на овај начин због скока стационарних амплитуда наниже од  $A$  до  $B$ , односно навише од  $C$  до  $D$ . Један од начина за добијање испрекиданог дела криве је примена методе континуације псеудолуком као додатак ИХБ методи [102, 175].

## 2.4 Метода нумеричке континуације

У литератури се могу наћи примери примене методе нумеричке континуације [176, 36, 177]. Ова метода је позната и као метода праћења путање [178, 179].

Одређују се фиксне тачка динамичког система

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha), \quad (2.39)$$

са само једним параметром бифуркације  $\alpha$ . Фиксна тачка може бити тачка статичке равнотеже или тачка устаљеног стања. Тачка статичке равнотеже се проучава у случају испитивања стабилности на извијање греда, плоча и љуски, где нема инерцијалних сила. С друге стране, тачке устаљеног стања представљају затворене периодичне орбите (гранични цикл) код периодичног кретања система. Оне се одређују за различите вредности фреквенције. У овој докторској дисертацији је истраживање урађено за тачке устаљеног стања.

Задатак је пратити бифуркациону криву  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha)$  (или неку норму  $\|\mathbf{x}\|$ ) која пролази кроз тачке  $(\alpha, \mathbf{x})$ , које су решења нелинеарне једначине:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}, \quad (2.40)$$

где важи  $(\mathbf{f}, \mathbf{x}, \alpha) \in R^n \times R^n \times R$ . Пошто једначина (2.40) имплицитно дефинише  $\mathbf{x}$  као функцију од  $\alpha$ , то најчешће није тако једноставан задатак и обично захтева нумеричке методе. Он се може поједноставити коришћењем техника нумеричке континуације, тј. преласком од једне израчунате тачке криве до друге у малим корацима, уместо да се почиње изнова за сваку тачку криве.

У наставку је дат кратак увод у методу нумеричке континуације, а више детаља о представљеним и другим специфичним методама везано за нумеричку континуацију се могу наћи у [179, 180, 181, 182, 183, 184].

Постоји неколико техника које се користе за нумеричку методу континуације. Најпознатије су секвенцијална или нумеричка континуација природним параметром, проста или линеарна део-по-део континуација, (Давиденко-)Гаус-Њутнова континуација и континуација (псеудо-)луком [178]. Кораци по којима се разликују различите методе нумеричке континуације су следећи:

1. предиктор (предвиђа решење у следећој тачки)
2. стратегија параметризације (дефинише правац предвиђања решења)
3. коректор (геометријски у правцу нормалном на правац предикције, тражи решење све док добијено решење не лежи унутар толеранција дефинисаног одступања од тачног решења)
4. контрола дужине корака (дужина корака може бити фиксна у целом домену или адаптивна у зависности од закривљености криве)

Прве три од ове четири ставке могу се изабрати независно једна од друге. Али контрола дужине корака мора одговарати изабраном предиктору, коректору и параметризацији [184]. За предикцију решења, односно тачака бифуркационе криве  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\alpha)$ , најчешће се користи тангентни предиктор, који је и део Ојлеровог метода за решавање диференцијалних једначина, а за корекцију решења Њутн-Рапсонова метода.

Ако је доступна добра апроксимација тачке на кривој решења, обично није тешко брзо побољшати тачност ове апроксимације користећи, на пример, Њутн-Рапсонову итерацију. Дакле, главни проблем је обично обезбедити почетне апроксимације довољно блиске да би то функционисало, посебно близу прекретница (turning points), гранања или других сингуларитета. Најчешће, ако се компликованија и нумерички скупља метода искористи у предикцији, јефтинија метода се користи у корекцији и обрнуто. Под нумерички скупом методом се подразумева она којој треба више времена за одређено срачунавање у односу на нумерички јефтину. У наставку су дате основне карактеристике једнопараметарске секвенцијалне континуације и нумеричке континуације фиксних тачака псеудолуком.

### 2.4.1 Секвенцијална континуација

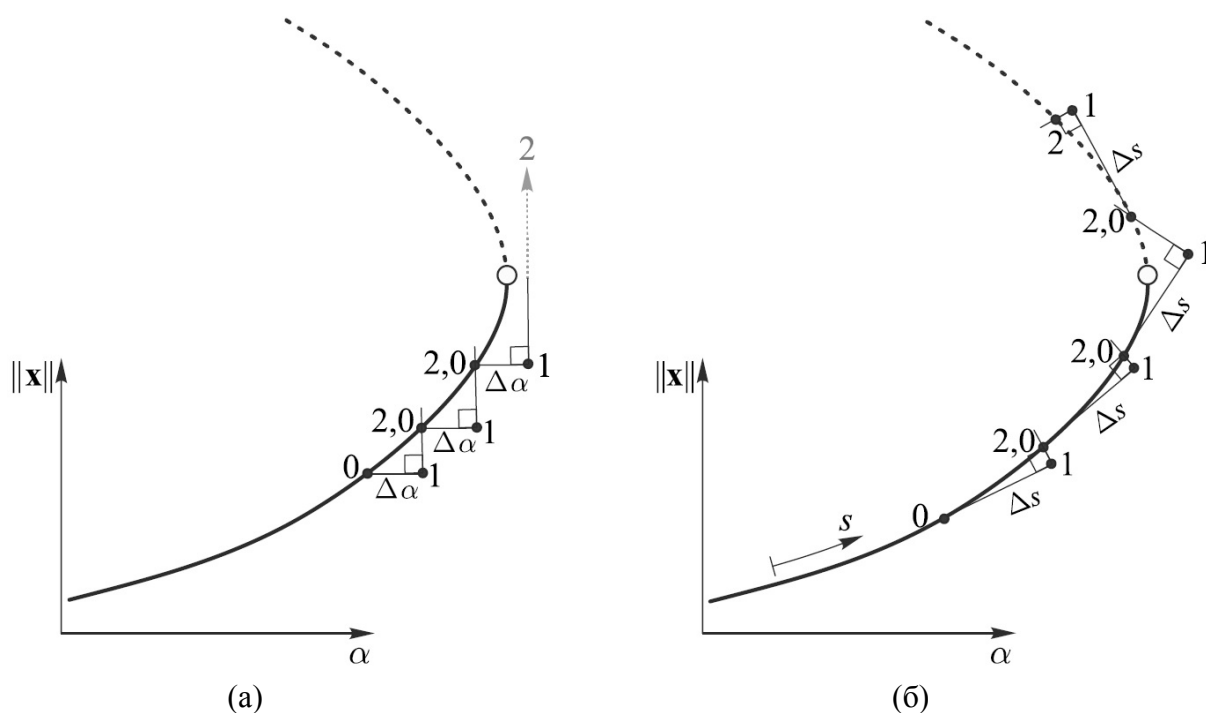
Секвенцијална континуација тј. континуација природним параметром је често једноставна за примену. Као што је илустровано на слици 2.3 (а), ова метода само разматра промену од тачке  $(\alpha_0, \mathbf{x}_0)$  на кривој  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}$  до следеће тачке, повећањем параметра за довољно мали корак  $\Delta\alpha$ , тј.  $\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta\alpha$  и претпоставком да је у првој апроксимацији  $\mathbf{x}$  непромењено, тј. предвиђање је  $(\alpha_1, \mathbf{x}_1) = (\alpha_1, \mathbf{x}_0)$ . Предвиђање се затим коригује решавањем  $f(\mathbf{x}_2, \alpha_1) = 0$  по  $\mathbf{x}_2$  (користећи нпр. Њутн-Рапсонову итерацију или бисекцију) да пронађе следећу тачку решења  $(\alpha_2, \mathbf{x}_2) = (\alpha_1, \mathbf{x}_2)$ . Ова процедура се понавља, при чему тачка  $(\alpha_2, \mathbf{x}_2)$  сада служи као нова почетна тачка  $(\alpha_0, \mathbf{x}_0)$ . Величина корака  $\Delta\alpha$  се може унапред дефинисати као константа вредност, а може бити и променљива у сваком итеративном кораку, тј да се мења у зависности од величине градијента криве у тој тачки.

Као што је очигледно са слике 2.3 (а), секвенцијална континуација не даје резултате у тачкама нагле промене правца криве (превојне тачке, turning points) или гранања (раслојавања, појаве вишезначних решења, односно нових грана), без обзира на то колико је мали прираштај од  $\alpha$ ; не постоји начин да се тачке решења могу наставити (континуирати) око превојне тачке. Такође, у регионима са стрмим градијентима (велики  $|\frac{d\mathbf{x}}{d\alpha}|$  или мали  $\|\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\|$ ) биће потребни веома мали  $\alpha$ -инкременти, а перформансе методе су онда мање ефикасне, па чак и неефикасне [180].

### 2.4.2 Континуација псеудолуком

Континуација псеудолуком (Слика 2.3 (б)) функционише тако што се прво направи корак линеарног предвиђања  $\Delta s$ , тј.  $\overline{0-1}$ , дуж тангенте тренутне криве, а затим се примени корак корекције дуж праве линије  $\overline{1-2}$ , ортогоналне на ту тангенту како би се пратила крива решења. Као што је илустровано на слици 2.3 (б), ово ће функционисати и са превојна тачкама.

Суштина ове методе је да се размотри параметарски приказ криве  $\mathbf{f}(\alpha, \mathbf{x}) = 0$ . Уводи се параметар  $s$  и сматрамо да су и  $\alpha$  и  $\mathbf{x}$  функције од  $s$ , тако да је крива описана скупом



Слика 2.3: Техника нумеричке континуације за одређивање тачака  $(\alpha, \|\mathbf{x}\|)$  криве  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}$ . (а) Секвенцијална континуација са коракном предикције дужине  $\Delta\alpha$ ; (б) Континуација псеудолуком са коракном предикције дужине  $\Delta s$ .  $\circ$ : превојна тачка (turning point),  $\bullet$ : тачка итерације; 0/1/2: почетна тачка / тачка добијена предикцијом / тачка добијена корекцијом [180].

тачака  $(\alpha(s), \mathbf{x}(s))$ , при чему  $s$  припада неком релевантном интервалу.

За примену ове континуације, потребно је наћи тангенту на криву у датој тачки, а затим дуж ње инкрементирати за вредност  $\Delta s$  чиме се добија предвиђање решења. Да бисмо одредили тангентни правац, налазимо однос између промена  $\alpha$  и промена  $\mathbf{x}$  у тачки криве, тако што диференцирамо једначину (2.40) по променљивој  $s$ , одакле следи:

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{ds} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{ds} = \mathbf{f}_x \mathbf{x}' + \mathbf{f}_\alpha \alpha' = 0, \quad (2.41)$$

односно:

$$\mathbf{f}_x \mathbf{z} = -\mathbf{f}_\alpha, \quad (2.42)$$

где је:

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x}'}{\alpha'} \quad (2.43)$$

и:

$$\mathbf{f}_x = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{f}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha}, \quad \mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \quad \alpha' = \frac{d\alpha}{ds}. \quad (2.44)$$

### 2.4.3 Параметризација

Сматраће се да је грана непрекидни део криве  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}$ . Ова крива се „параметризује“. Параметризација је извесна врста мере дуж гране, тј. математички начин идентификације сваке тачке на грани. Термини као што су „следеће“ или „претходно“ решење се квантификују увођењем параметризације. Није могуће на свакој грани или неком њеном делу извршити произвољну параметризацију, односно произвољно усвојити правац тражења решења квантификованим параметром. Најједноставније је користити контролну променљиву  $\alpha$  као параметризациони параметар, као што је приказано на слици 2.3 (а). Овај параметар има и физичко значење, што је његова додатна предност. Међутим, параметризација са њим наилази на потешкоће у превојним тачкама (празан кружић на слици 2.3 (а)), где је правац предвиђања следеће тачке решења  $\overline{0-1}$  нормалан на грану криве, па се корекција предвиђеног решења тражи у бесконачности (тачка 2 сиве боје), што је неповољно [184].

Једначина (2.40) се може проширити ако је задовољен услов потпуног ранга Јакобијан матрице, тј.:

$$\text{rank}(\mathbf{f}_{\mathbf{x}}, \mathbf{f}_{\alpha}) = n, \quad (2.45)$$

где је  $n$  број елемената вектора  $\mathbf{x}$ .

Општи параметар криве, назовимо га  $s$ , може пре имати геометријско, него физичко значење. Криву  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}$  представљамо у параметарском облику:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s), \quad \alpha = \alpha(s). \quad (2.46)$$

За одређену вредност параметра  $s$ , систем  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha) = \mathbf{0}$  се састоји од  $n$  једначина са  $n + 1$  непознатих  $(\mathbf{x}, \alpha)$ . Ако је параметризација успостављена једном додатном скаларном једначином:

$$p = p(\mathbf{x}, \alpha, s), \quad (2.47)$$

може се формулисати проширени систем:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, s) := \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}, s) \\ p(\mathbf{x}, \alpha, s) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.48)$$

који се састоји од  $n + 1$  скаларних једначина за  $n + 1$  непознатих  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \alpha)$ . Решавањем једначине (2.48) за одређене вредности параметра  $s$  добија се информација о зависности  $\mathbf{x}(s), \alpha(s)$ .

## 2.5 Веза метода инкременталног хармонијског баланса и нумеричке континуације

Након примене ИХБ систем диференцијалних једначина се своди на систем линеаризованих алгебарских једначина по непознатим  $\Delta A$  и  $\Delta \Omega$ :

$$M\Delta A + V\Delta \Omega = R. \quad (2.49)$$

У општем случају, методом ИХБ се могу успешно израчунати амплитудно-фреквентне криве инкрементацијом амплитуде или фреквенције. Међутим, ИХБ метода најчешће не конвергира у близини оштрих пикова на амплитудно фреквентним дијаграмима, ако се користи једноставна инкрементација [101]. Да би се превазишао овај недостатак и смањио број потребних итерација за конвергенцију итеративног процеса користи се метода нумеричке континуације [185]. За почетак рекурентног процеса нумеричке континуације, потребно је одредити периодично решење у две сукцесивне тачке коришћењем методе ИХБ. Ове почетне тачке се углавном узимају далеко од резонантног стања, где су за обе тачке амплитуде одзива мале и имају приближно исте вредности. Онда се примени предиктор-коректор метода да би се екстраполацијом извршило срачунавање од тачке - до тачке и тако одредиле одговарајуће гране амплитудно-фреквентног одзива. Да би се применила нумеричка континуација, потребно је извешити параметризацију. Први корак ка томе је да се једначина (2.49) напише у општијој матричној форми на следећи начин:

$$[M \quad V] \begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta \Omega \end{bmatrix} = R. \quad (2.50)$$

Уводе се нови вектори  $X = [A \ \Omega]^T$  и  $\Delta X = [\Delta A \ \Delta \Omega]^T$ . Матрица  $[M \ V]$  се назива матрица тангентне крутости. Један од начина да се спроведе параметризација је увођење додатне једначине облика (2.47). Да би се формирала та додатна једначина, уводи се најпре функција  $g(X)$  вектора  $X$  у облику израза:

$$g(X) = X^T X. \quad (2.51)$$

Треба напоменути да се функција  $g(X)$  може дефинисати на више различитих начина, од којих је најуобичајенији дат изразом (2.51). Псеудо дужина лука (pseudoarclength) је највише коришћен параметризацијски приступ у методи праћења путање, који омогућава праћење решења кроз граничне тачке (limit points) и петље (loops). Уводи се такође параметар дужине лука  $\eta$ , да би се пратио правац путање. Додатна једначина ће бити:

$$g(X) - \eta = 0. \quad (2.52)$$

Нагиб криве се одређује коршћењем две претходне тачке  $X_{k-1}$  и  $X_{k-2}$  на криви одзива на следећи начин:

$$\mathbf{X}' = \frac{\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_{k-2}}{\|\mathbf{X}_{k-1} - \mathbf{X}_{k-2}\|}. \quad (2.53)$$

Прво предвиђено решење се може срачунати уз помоћ прва два периодична решења добијена методом ИХБ на следећи начин:

$$\mathbf{X}_u = \mathbf{X}_{k-1} + \Delta\eta\mathbf{X}', \quad (2.54)$$

где је  $\Delta\eta$  прираштај параметра новоуведене криволинијске координате  $\eta$ .

За одређивање периодичних решења потребно је увести параметризацију криве решења, што се може постићи ако најпре систем једначина са матрицом тангентне крутости (2.50) проширимо са додатном једначином и онда применимо итеративну Њутн-Рапсонову методу за добијање корекције решења. Функција  $g(\mathbf{X})$ , дата у додатнај једначини (2.52) се развија у Тејлоров ред у околини тачке  $\mathbf{X}_0$ . Након проширења система једначина (2.50) додатном једначином (2.52), добија се следећи систем једначина:

$$\begin{bmatrix} M & V \\ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{A}} & \frac{\partial g}{\partial \Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{A} \\ \Delta \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ \Delta\eta - g \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

са новом матрицом тангентне крутости и новим вектором остатка.

## 2.6 Флокеова теорија стабилности

Флокеова теорија се може применити за одређивање стабилности периодичног решења диференцијалних једначина целог реда или система диференцијалних једначина целог реда. На пример, на бифуркационом дијаграму датом на слици (2.2), где свака тачка криве представља решење диференцијалне једначине, за вредности бифуркационог параметра  $\Omega$  између  $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$  амплитуда може имати три различите вредности, а за  $\Omega = \Omega_1$  и  $\Omega = \Omega_2$  по две различите вредности. Која од ових добијених вредности амплитуда представља стабилно, а која нестабилно решење показује Флокеова теорија. Применом ове теорије се може показати да испрекидан део криве  $\widehat{AC}$  представља нестабилно решење добијених амплитуда док су амплитуде у осталим деловима криве стабилне.

Прикажимо примену ове методе на Дуфинговој једначини облика (2.1), у коју се уведе нова временска променљива  $\tau = \Omega t$ , што је почетни корак у примени ИХБ методе, па се добија једначина:

$$\Omega^2 q'' + \gamma \Omega q' + \omega_0^2 q + \theta q^3 = f \cos \tau, \quad (2.56)$$

где су изводи дефинисани као  $\ddot{q} = \frac{dq}{dt}$  и  $q'' = \frac{dq}{d\tau}$ . Када се приближно периодично решење једначине (2.56) добије ИХБ методом, његова стабилност се може испитати Флокеовом



теоријом [155, 186]. Нека је:

$$q_0(\tau) = a_0 + \sum_{i=1}^N \left( a_i \cos \frac{i\tau}{m} + b_i \sin \frac{i\tau}{m} \right), \quad (2.57)$$

добијено приближно периодично решење са периодом  $2m\pi$  (најчешће је  $m = 1$ ), чија стабилност се може испитати увођењем мале пертурбације  $\Delta q$  решењу  $q_0(\tau)$ , тако да је:

$$q = q_0 + \Delta q. \quad (2.58)$$

Заменом израза (2.58) у једначину (2.56), и након линеаризације, односно изостављања малих чланова вишег реда ( $\Delta q^2, \Delta q^3$ ), добија се следећа одговарајућа хомогена обична линеарна диференцијална једначина:

$$\Omega^2 \Delta q'' + \gamma \Omega \Delta q' + \omega_0^2 \Delta q + 3\theta q_0^2 \Delta q = 0. \quad (2.59)$$

Једначина (2.59) се може записати у облику простора стања, тј.:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\tau} = \mathbf{P}(\tau) \mathbf{Y}, \quad (2.60)$$

где је  $\mathbf{Y}(\tau) = [\Delta q, \Delta q']^T \in \mathbb{R}^2$ , а  $\mathbf{P}(\tau)$  је периодична матрица са истим периодом  $T = 2m\pi$  као  $q_0$ , што се и може видети у специјалном случају за Дуфингову једначину (2.1), где је облика:

$$\mathbf{P}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\omega_0^2 + 3\theta q_0^2(\tau)}{\Omega^2} & -\frac{\gamma}{\Omega} \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

За једначину (2.60) се могу одредити фундаментална решења  $\Phi_1(\tau)$  и  $\Phi_2(\tau)$ , тако да задовољавају почетне услове  $\Phi_1(0) = [1, 0]^T$  и  $\Phi_2(0) = [0, 1]^T$ , односно фундаментална матрица:

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} \Phi_1(\tau) & \Phi_2(\tau) \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

за  $\tau = 0$  је једнака јединичној матрици тј.  $\Phi(0) = \mathbf{I}$ . Пошто је  $\mathbf{P}(\tau)$  периодична матрица са периодом  $T$ , онда важи  $\mathbf{P}(\tau + T) = \mathbf{P}(\tau)$ , па је вектор колоне  $\Phi(\tau + T)$  такође фундаментално решење једначине (2.60). Веза између  $\Phi(\tau)$  и  $\Phi(\tau + T)$  се може написати на следећи начин:

$$\Phi(\tau) \mathbf{M} = \Phi(\tau + T). \quad (2.63)$$

Како је  $\Phi(0) = \mathbf{I}$ , из (2.63) следи да је:

$$\mathbf{M} = \Phi(T). \quad (2.64)$$

Матрица  $\mathbf{M}$  се назива монодрома или транзициона матрица, чије сопствене вредности се називају Флокеови множитељи. Ако сви Флокеови множитељи леже унутар јединич-

ног круга са центром у координатном почетку комплексне равни, периодично решење је стабилно (асимптотски стабилно). У супротном је периодично решење нестабилно. Бифуркације се јављају када [155, 184]:

1. Постоји један реални Флокеов множител који излази из јединичног круга, док преостали Флокеови множитељи остају унутар њега.
2. Постоји један пар коњуговано комплексних Флокеових множитеља који излази из јединичног круга, док преостали Флокеови множитељи остају унутар њега.

Увођењем Нсу-ове [187] методологије за нумеричку апроксимацију транзиционе матрице током једног периода могу се приближно одредити Флокеови множитељи као сопствене вредности апроксимације транзиционе матрице [155]. Најпре се претпоставља да је период  $T = 2m\pi$  периодичног решења  $q_0(\tau)$ . Нека је интервал  $[nT, (n+1)T]$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  подељен на  $N_k$  подинтервала, при чему дужина  $k$ -тог интервала износи  $\Delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$  за  $\tau_k = kT/N_k$ . Пошто је  $\mathbf{P}(\tau)$  непрекидна периодична матрица у односу на  $\tau$  и период  $T$ , може у  $k$ -том интервалу временски променљиву матрицу  $\mathbf{P}(\tau)$  заменити константна матрица  $\mathbf{P}_k$ , под условом да је  $N_k$  изабрано да буде довољно велики број. Константна матрица се срачунава на следећи начин:

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{\Delta_k} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \mathbf{P}(\tau) d\tau. \quad (2.65)$$

Транзициона матрица  $\mathbf{M}$  се може апроксимирати матрицом  $\mathbf{M}_a$  на следећи начин:

$$\mathbf{M} = \prod_{i=1}^{N_k} e^{\mathbf{P}_i \Delta_i} \approx \prod_{i=1}^{N_k} \left( \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{N_j} \frac{(\mathbf{P}_i \Delta_i)^j}{j!} \right) = \mathbf{M}_a, \quad (2.66)$$

где  $N_j$  означава број чланова коначне суме којом се апроксимира матрични експонент константне матрице  $\mathbf{P}_i$ . Флокеови множитељи биће сопствене вредности овако добијене матрице  $\mathbf{M}_a$  и одређују се на следећи начин:

$$\det(\mathbf{M}_a - \sigma \mathbf{I}) = 0, \quad (2.67)$$

односно:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\text{tr} \mathbf{M}_a \pm \sqrt{(\text{tr} \mathbf{M}_a)^2 - 4 \det \mathbf{M}_a}}{2}, \quad (2.68)$$

где  $\text{tr} \mathbf{M}_a$  означава траг матрице  $\mathbf{M}_a$ .

Приликом примене ове методе за апроксимацију монодроме матрице је усвојено  $N_k = 5000$  и  $N_j = 5$ .

# Глава 3

## Пертурбационе методе

### 3.1 Теорија пертурбација

У математици, теорија пертурбација обухвата методе које служе за проналажење приближног решења једначине, полазећи од тачног решења сродне, једноставније једначине [77, 188, 189]. Метода пертурбације користи математичке методе за налажење апроксимативног решења и примењује се код једначина чије решење не може бити тачно одређено или је његово проналажење превише компликовано. Теорија пертурбација подразумева да је дејство на систем довољно мало да систем задржи своје главне карактеристике. Методи теорије пертурбација подразумевају решавање поједностављене једначине, која се бира тако да буде егзактно решива. Затим се посматра како се понаша егзактно решење једноставније једначине при малој промени неких параметра. На овакав начин се добија корекција на егзактно решење и тај метод се итеративно понавља. Критична карактеристика технике пертурбација је међукорак који разлаже једначину на ”решиве” и ”пертурбативне” делове. У теорији пертурбације решење се изражава као степени ред по малом параметру, као нпр.:

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon^1 \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots \quad (3.1)$$

Први члан је познато решење решиве једначине. Узастопни чланови у низу са вишим степенима  $\varepsilon$  обично постају мањи. Приближно решење пертурбације се добија скраћивањем реда, обично задржавањем само прва два члана, решења познате једначине и корекције пертурбације ”првог реда”.  $\varepsilon$  је мали параметар.

Одабир приближне методе зависи од једначина које се решавају. Најраније употребе теорије пертурбација биле су решавање једначина унутар небеске механике, као што је Њутново решење за орбиту Месеца, чије је кретање сложено услед збирног гравитационог утицаја Земље и Сунца. У теорији пертурбација су се у почетку користиле само аналитичке методе, али развојем рачунара данас све већи значај имају и нумеричке методе. Примери врста решења која се налазе пертурбативно укључују решење једначине

кретања (нпр. путању честице), статистички просек неке физичке величине (нпр. просечна магнетизација), енергију основног стања квантномеханичког проблема и сл.

Примери тачно решивих једначина које се могу користити као полазне тачке укључују линеарне једначине, укључујући линеарне једначине кретања (хармонски осцилатор, линеарну таласну једначину), статистичке или квантно-механичке системе честица које нису у интеракцији (или уопште, Хамилтонијане или слободне енергије који садрже само квадратне чланове у свим степенима слободе).

Примери система који се могу решити пертурбацијама укључују системе са нелинеарним једначинама кретања, интеракцијама између честица, терминима виших степенова у Хамилтонијану/слободној енергији.

Постоји велики број пертурбационих метода у литератури које се разликују по комплексности и типовима једначина за које дају најбоље резултате. Неке од њих су: метода дирекне експанзије, Линдштат-Поанкаре метода, методе усредњавања попут Крилов-Богољубов-Митропољски методе, метода вишеструких временских скала, итд. [77].

Теорија асимптотских решења и теорија пертурбације су одиграле основну улогу у развоју нашег разумевања физичких феномена и нелинеарних система. Ово је углавном због чињенице да, уз неколико изузетака, немамо опште методе за решавање нелинеарних система једначина, диференцијалних једначина или парцијалних диференцијалних једначина. Теорија пертурбације, међутим, омогућава да се размотре решења сличних једначина која се могу аналитички решити. Најједноставнији и један од најстаријих физичких примера за разматрање је клатно. Иако се често клатно апроксимира линеарном диференцијалном једначином другог реда, ово је заправо асимптотска апроксимација за једначине кретања клатна за осцилације мале амплитуде.

Теорија пертурбације се може формулисати за алгебарски систем једначина, временски зависне диференцијалне једначине, просторно-временске парцијалне диференцијалне једначине и проблеме граничних вредности.

Проблем временски зависне диференцијалне једначине представљен преко теорије пертурбације се може представити у следећем општем облику:

$$Lu = \varepsilon F(u, u_t, \dots, t), \quad t \in [0, \infty], \quad (3.2)$$

где је  $u = u(t)$  непозната функција са почетним условима датим са:

$$u(0) = A, \quad u_t(0) = B. \quad (3.3)$$

Проблем просторно зависне диференцијалне једначине представљен преко теорије пертурбације се може представити у следећем општем облику:

$$Lu = \varepsilon F(u, u_x, u_{xx} \dots, x), \quad x \in [0, l], \quad (3.4)$$

са граничним условима датим у општем облику преко релација:

$$\alpha_1 u(0) + \beta_1 u_x(0) = 0, \quad \alpha_2 u(l) + \beta_2 u_x(l) = 0. \quad (3.5)$$

У једначини (3.4)  $u_x$  представља извод функције  $u$  по просторној координати  $x$ , док у једначини (3.2)  $u_t$  извод функције  $u$  по временској координати  $t$ , са  $L$  се означава линеарни диференцијални оператор и претпоставља се да за мали параметар  $\varepsilon$  важи  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Поред тога, претпоставља се да не знамо да тачно решимо ове једначине када је  $\varepsilon \neq 0$ . Међутим, када је  $\varepsilon = 0$ , може се решити једначина  $Lu = 0$ . Теорија пертурбације претпоставља да можемо решити сличну једначину за малу вредност параметра  $\varepsilon$ .

Теорија пертурбације преобликује нелинеарни проблем у хијерархијски низ, принудних линеарних проблема. Стога је тешкоћа непостојања аналитичких техника решавања за нелинеарне једначине замењена решавањем система линеарних једначина са принудом. Да би се показало како се теоријом пертурбације ово постиже, разматра се временски зависан проблем (3.2) и (3.3). Да би се апроксимирало решење, оно се најпре развија у пертурбациони ред:

$$u = u_0 + \varepsilon^1 u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad (3.6)$$

где је сваки наредни члан у низу претпостављен као мањи од претходног због  $\varepsilon^n$  члана. То ће се десити, под условом да је сваки појединачни допринос реда  $u_n \sim O(1)$ . Заменом израза за развој у пертурбациони ред (3.6) у почетну једначину временски зависног пертурбационог проблема (3.2), добија се:

$$L(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) = \varepsilon F(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, u_{0t} + \varepsilon u_{1t} + \dots, t), \quad (3.7)$$

са граничним условима:

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0(0) + \varepsilon u_1(0) + \varepsilon^2 u_2(0) + \dots = A, \\ u_t(0) &= u_{0t}(0) + \varepsilon u_{1t}(0) + \varepsilon^2 u_{2t}(0) + \dots = B. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Након формалног развоја, циљ је груписати чланове уз сваки степен од  $\varepsilon$ . Да би се то постигло, потребно је у једначини (3.7) развити функције у Тејлоров ред. Тиме се добија следећи хијерархијски уређен скуп линеарних диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned} O(1) : Lu_0 &= 0, \\ O(\varepsilon) : Lu_1 &= F_1(u_0, u_{0t}, \dots, t), \\ O(\varepsilon^2) : Lu_2 &= F_2(u_0, u_1, u_{0t}, u_{1t}, \dots, t), \\ &\vdots \\ O(\varepsilon^n) : Lu_n &= F_n(u_0, u_1, \dots, u_n, u_{0t}, u_{1t}, u_{n-1t}, \dots, t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

са одговарајућим почетним условима:

$$\begin{aligned} u_0(0) &= A, & u_n(0) &= 0, & (n \geq 2), \\ u_{0t}(0) &= B, & u_{nt}(0) &= 0, & (n \geq 2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Пертурбациони развој тако замењује нелинеарну диференцијалну једначину са хијерархијски уређеним скупом линеарних диференцијалних једначина чија је функција принуде (десна страна једнакости) прогресивно сложенија. Без обзира на сложеност, то је линеаран проблем и може се решити кроз различите технике решавања диференцијалних једначина. Решење проблема се тада може формално конструисати као линеарна комбинација у облику:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n. \quad (3.11)$$

У пракси се, међутим, користе само првих пар чланова да би се апроксимирало решење, нпр.:

$$u = u_0 + \varepsilon^1 u_1 + O(\varepsilon^2), \quad (3.12)$$

што даје прихватљиво тачну апроксимацију до времена реда величине  $T \sim O(\frac{1}{\varepsilon})$  [190, 191]. Сваки корективни члан који се додаје при апроксимацији побољшава квалитет апроксимације, али обично не продужава опсег њене валидности у времену.

Општи циљ теорије пертурбације је да уради следеће: (1) Идентификује део проблема који се може решити аналитички, (2) Одреди који су чланови у задатку мали и који се могу поредати са малим параметром  $\varepsilon$  и (3) Израчуна приближно решење за жељену тачност хијерархијским приступом, који побољшава апроксимацију у сваком кораку. Укратко речено, да би се решио проблем, који је тешко или немогуће егзактно решив, решава се један у близини и усмерава (пертурбује) ка стварном проблему од интереса.

У вишим редовима пертурбационог развоја у ред, ако Фредхолмова алтернатива није задовољена, појавиће се секуларни чланови, па ће корекциони чланови  $u_j(t)$  расти у времену неограничено.

## 3.2 Егзистенција решења и Фредхолмова алтернатива

Нека је  $V$  векторски простор и  $L$  линеарни оператор на том простору  $L : V \mapsto V$ . Адјунговани оператор  $L^\dagger : V \mapsto V$  оператора  $L$  је линеарни оператор, такав да је

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^\dagger y \rangle, \quad (3.13)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  означава унутрашњи производ векторског простора.

Језгро оператора дефинише се као:

$$\ker(L) = \{v \in V | Lv = 0\}. \quad (3.14)$$

Језгро линеарног адјунгованог оператора  $L^\dagger : V \mapsto V$  се дефинише као:

$$\ker(L^\dagger) = \{v \in V | L^\dagger v = 0\}. \quad (3.15)$$

Посматра се линеарни операторски проблем на бесконачно димензионом Банаховом простору:

$$Lu = f. \quad (3.16)$$

Фредхолмова алтернатива даје потребне и довољне услове егзистенције решења једначине (3.16).

Из (3.16), (3.13) и узимајући у обзир дефиницију (3.15), добија се за произвољно  $v \in \ker(L^\dagger)$ :

$$\begin{aligned} \langle f, v \rangle &= \langle Lu, v \rangle, \\ \langle f, v \rangle &= \langle u, L^\dagger v \rangle, \\ \langle f, v \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Према томе, вектор  $f$  на десној страни једначине (3.16) мора бити ортогоналан на вектор  $v$ , који припада језгру адјунгованог оператора  $L^\dagger$ .

Фредхолмова алтернатива гласи: Једначина (3.16) има решења ако и само ако  $\langle f, v \rangle = 0$  за свако  $v$  које припада језгру адјунгованог оператора  $L^\dagger$  (тј. свако  $v$  које задовољава  $L^\dagger v = 0$ ).

### 3.3 Линштат-Поанкаре метода

Проблем са регуларном теоријом пертурбације је да она није конструисана да управља пертурбативним променама фреквенције, што доводи до секуларних чланова који са временом неограничено расту. За разлику од регуларне теорије пертурбације, Линштат-Поанкаре метода даје додатну флексибилност у асимптотском развоју дефинисањем нове временске скале која је функција параметра развоја  $\varepsilon$ . Пертурбациони развој Линштат-Поанкареа такође има облик (3.6), али је:

$$\tau = (\omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots) t. \quad (3.18)$$

Дакле, поред одређивања решења и његових корекција  $u_j(t)$ , морају се одредити и корекције временске скале кроз  $\omega_j$ . Способност да се узме у обзир померање фреквенције била је критична за коришћење ове методе у прорачунима планетарних орбита. Примена

услова решивости, тј Фредхолмова алтернатива (3.17)<sup>3</sup> омогућава одређивање вредности  $\omega_j$ , које спречавају да решења неограничено расту. Конкретно, бирају се вредности  $\omega_j$ , тако да се секуларни чланови уклањају или постављају на нулу. Ово превазилази нека од основних ограничења развојем уз помоћ регуларне теорије пертурбације.

### 3.4 Метода вишеструких временских скала

Иако је Линштат-Поанкаре метода моћна техника за карактеризацију ефеката пертурбација на нелинеарне динамичке системе, она је прилично ограничена у опсегу. Конкретно, може само да прихвати промене фреквенције дефинисањем издужене временске променљиве  $\tau = \omega t$ . У пракси, ово има примену само у проблемима са периодичним решењима. Тако на пример код Ван дер Половог осцилатора, она може помоћи у откривању тачне фреквенције граничног циклуса (limit cycle), али није у стању да окарактерише прелазну динамику која води до граничног циклуса.

Метода вишеструких временских скала заобилази основна ограничења Линштат-Поанкаре методе тако што се дефинише друга спора временска скала  $\tau = \varepsilon t$  и дозвољава се да решења варирају и на брзим и на спорим скалама, тако да  $u(t) \rightarrow u(t, \tau)$ . За временске системе, пертурбациони развој методом вишеструких временских скала има облик:

$$u = u_0(t) + \varepsilon^1 u_1(t, \tau) + \varepsilon^2 u_2(t, \tau) + \dots, \quad (3.19)$$

где је  $\tau$  споро променљиво време. Нова променљива  $\tau$  се третира као независна променљива приликом развоја. Треба напоменути да је могуће увести произвољан број спорих и брзих временских променљивих, нпр.:

$$T_m = \varepsilon^m t, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Временска скала  $T_1$  је спорија од  $T_0$ , док је временска скала  $T_2$  спорија од  $T_1$ . Уопштено,  $T_n$  је спорије од  $T_{n-1}$ . Пертурбациони развој за  $M$  временских скала попут израза (3.19) има облик:

$$\begin{aligned} u(t; \varepsilon) &= \tilde{u}(T_0, T_1, \dots, T_M; \varepsilon) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \varepsilon^m x_m(T_0, T_1, \dots, T_M; \varepsilon) + O(\varepsilon T_M). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Апроксимациона грешка у (3.21), означена са  $O(\varepsilon T_M)$  говори да је овакав развој валидан за времена до реда  $O(\varepsilon^{-M})$ . У случају да то не задовољава потребе задатка, морамо узети додатне временске скале да би развој био униформно валидан [77]. Једначине (3.20) и (3.21) нам говоре да је проблем трансформисан из обичне диференцијалне једначине у парцијалну диференцијалну једначину. У случају да је оргинални проблем парцијална диференцијална једначина, увођењем различитих временских скала се повећава број



независних променљивих. Временски извод се трансформише према следећој једначини:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots \quad (3.22)$$

## Глава 4

# Грунвалд-Летњикова апроксимација фракционог извода за решавање фракционих диференцијалних једначина Њумарк методом

У раду [98] је представљена Њумарк метода за решавање једне фракционе диференцијалне једначине, која се јавља у анализи динамике једне класе задатака. У овој докторској дисертацији је та метода уопштена на систем фракционих диференцијалних једначина на начин као што је представљено у овом поглављу. Валидност овакве методе је потврђена у другом нумеричком примеру датом у овој дисертацији.

### 4.1 Дискретизација фракционог извода у једначини кретања

Аналитичким методама се интеграцијом и решавањем диференцијалних једначина добијају непрекидна решења, дефинисана у општем случају у сваком временском тренутку. Код компликованих проблема, где не постоји аналитичко решење диференцијалне једначине, примењују се нумеричке методе. Док аналитичке методе дају решења на бесконачном скупу тачака, нумеричке методе дају решења на коначном скупу тачака. Да би се оне примениле, потребно је дискретизовати време и у изабраним временским тренуцима срачунати решење једначине, у нашем случају интеграција фракционе диференцијалне једначине кретања. Решења која нису добијена на овај начин се добијају интерполацијом између два срачуната решења.

У овој дисертацији користи се већ представљена, у поглављу 1.3.2, Грунвалд-Летњикова (Grünwald-Letnikov) репрезентација фракционог извода и примењује Њумарк-Бета (Newmark  $\beta$ ) метода за нумеричку интеграцију и решавање диференцијалне једначине од-

носно система диференцијалних једначина. Користићемо леви Грунвалд-Летњиков извод (изрази (1.13) и (1.15)) и две различите мреже (скеале) за дискретизацију времена, фину и грубу. У тренуцима добијеним грубом дискретизацијом времена примењујемо временску интеграцију диференцијалне једначине Њумарк методом. Тренуци времена изабрани фином временском дискретизацијом служе за апроксимацију фракционог извода у тачкама грубе дискретизације. За апроксимацију фракционог извода је битна предисторија и зато се увођењем две временске скеале повећава тачност методе. Према Грунвалд-Летњиковој репрезентацији, леви фракциони извод функције  $q(\bar{\tau})$  у тренутку времена  $\bar{\tau}$  је дефинисан као:

$${}_{GL}D_{0,\bar{\tau}}^{\alpha}q(\bar{\tau}) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^n GL_k q(\bar{\tau} - kh), \quad (4.1)$$

где је:

$$GL_k = (-1)^k \binom{\alpha}{k}. \quad (4.2)$$

Грунвалд-Летњикови коефицијенти могу такође бити представљени у рекурзивној форми на следећи начин:

$$GL_{k=0} = 1, \quad GL_k = \frac{k - \alpha - 1}{k} GL_{k-1}. \quad (4.3)$$

Овде се дефинише однос:

$$\frac{\Delta\bar{\tau}}{h} = p = 5 \div 20. \quad (4.4)$$

где је  $\Delta\bar{\tau}$  временски корак грубе мреже дискретизације, а  $h$  временски корак fine мреже. Репрезентација фракционог извода дата једначином (4.1) у финој мрежи има следећи облик:

$$q_i^{(\alpha)} = h^{-\alpha} \begin{bmatrix} GL_0 & GL_1 & \cdots & GL_{kjp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_{i-1} \\ \vdots \\ q_{i-p} \\ q_{i-p-1} \\ \vdots \\ q_{i-2p} \\ q_{i-2p-1} \\ \vdots \\ q_{kjp} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

где су:

$p$  - број чланова из прошлости дужине  $h$  у кораку временске интеграције дужине  $\Delta\bar{\tau}$ ,

$j$  - претходни временски кораци дужине  $\Delta\bar{\tau}$  који се могу апроксимирати прецизно Тејлоровим развојом уназад коришћењем померања, брзине и убрзања у одређеном временском кораку  $i$ ,

$k$  - представља укупне интервале од  $j$  временских корака који се морају узети у обзир да би се прецизно апроксимирао фракциони извод у датој тачки.

Тејлоров развој уназад последњих  $jp$  временских корака може се представити као у изразу (4.6), тј.:

$$\begin{aligned}
 q_{i-1} &= q_i - h\dot{q}_i + \frac{h^2}{2}\ddot{q}_i + O(h^3), \\
 q_{i-2} &= q_i - 2h\dot{q}_i + \frac{4h^2}{2}\ddot{q}_i + O(h^3), \\
 q_{i-3} &= q_i - 3h\dot{q}_i + \frac{9h^2}{2}\ddot{q}_i + O(h^3), \\
 &\vdots \\
 q_{i-jp} &= q_i - jph\dot{q}_i + \frac{j^2p^2h^2}{2}\ddot{q}_i + O(h^3),
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

где су  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  и  $\ddot{q}_i$  померање, брзина и убрзање у временском кораку  $i$ . Ако се занемаре чланови вишег реда ( $O(h^3)$ ), пошто је њихов утицај на тачност методе веома мали, онда једначина (4.6) може бити написана у матричном облику као у једначини (4.7), тј.:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} q_i \\ q_{i-1} \\ q_{i-2} \\ q_{i-3} \\ \vdots \\ q_{i-(jp-1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -h & \frac{h^2}{2} \\ 1 & -2h & \frac{4h^2}{2} \\ 1 & -3h & \frac{9h^2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -(jp-1)h & \frac{(jp-1)^2h^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} \\
 &= [H_0] \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Аналогно, померања од временског корака  $i - jp$  до корака  $i - (2jp - 1)$  у матричном облику у функцији померања, брзине и убрзања од корака  $i - jp$  су дата изразом (4.8), тј.:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} q_{i-jp} \\ q_{i-jp-1} \\ q_{i-jp-2} \\ q_{i-jp-3} \\ \vdots \\ q_{i-(2jp-1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -h & \frac{h^2}{2} \\ 1 & -2h & \frac{4h^2}{2} \\ 1 & -3h & \frac{9h^2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -(jp-1)h & \frac{(jp-1)^2h^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{i-j} \\ \dot{q}_{i-j} \\ \ddot{q}_{i-j} \end{bmatrix} \\
 &= [H] \begin{bmatrix} q_{i-j} \\ \dot{q}_{i-j} \\ \ddot{q}_{i-j} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Овде би и трзај ( $\ddot{q}_i$ ) могао бити укључен, али би се прецизност за потребе срачунавања у овој дисертацији безначајно мало повећала, тако да је изостављен ради једноставности. Последично следи да је  $[H] = [H_0]$ . Заменом једначина (4.6), (4.7), односно (4.8) у израз (4.5) добијају се следећи изрази:

$$\begin{aligned}
 q_i^{(\alpha)} = & h^{-\alpha} \begin{bmatrix} GL_0 & GL_1 & \cdots & GL_{jp-1} \end{bmatrix} [H_0] \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} \\
 & + h^{-\alpha} \begin{bmatrix} GL_{jp} & GL_{jp+1} & \cdots & GL_{2jp-1} \end{bmatrix} [H] \begin{bmatrix} q_{i-j} \\ \dot{q}_{i-j} \\ \ddot{q}_{i-j} \end{bmatrix} + \cdots \\
 & + h^{-\alpha} \begin{bmatrix} GL_{(k-1)jp} & \cdots & GL_{kjp-1} \end{bmatrix} [H] \begin{bmatrix} q_{i-(k-1)j} \\ \dot{q}_{i-(k-1)j} \\ \ddot{q}_{i-(k-1)j} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
 q_i^{(\alpha)} = & \begin{bmatrix} D_{01} & D_{02} & D_{03} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{i-j} \\ \dot{q}_{i-j} \\ \ddot{q}_{i-j} \end{bmatrix} \\
 & + \cdots + \begin{bmatrix} D_{(k-1)1} & D_{(k-1)2} & D_{(k-1)3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{i-(k-1)j} \\ \dot{q}_{i-(k-1)j} \\ \ddot{q}_{i-(k-1)j} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta q_i^{(\alpha)} = & \begin{bmatrix} D_{01} & D_{02} & D_{03} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_i \\ \Delta \dot{q}_i \\ \Delta \ddot{q}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_{i-j} \\ \Delta \dot{q}_{i-j} \\ \Delta \ddot{q}_{i-j} \end{bmatrix} \\
 & + \cdots + \begin{bmatrix} D_{(k-1)1} & D_{(k-1)2} & D_{(k-1)3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_{i-(k-1)j} \\ \Delta \dot{q}_{i-(k-1)j} \\ \Delta \ddot{q}_{i-(k-1)j} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Једначине кретања се дискретизују како је описано у овом поглављу и потом решавају Њумарк методом.

## 4.2 Њумарк-Бета метода

Након дискретизације, систем нелинеарних фракционих диференцијалних једначина се своди на нелинеарни систем обичних диференцијалних једначина. Исто важи и ако систем чини једна једначина, па ће се због општости користити термин систем. Тај систем се решава коришћењем Њумарк-Бета методе за нелинеарне системе на начин представљен у наставку ове дисертације. Систем нелинеарних диференцијалних једначина се може се

представити на следећи начин:

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{r}(\mathbf{u}_i, \dot{\mathbf{u}}_i) = \mathbf{f}(\tau_i), \quad (4.12)$$

односно као:

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbb{C}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbb{K}(\mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i = \mathbf{f}(\tau_i), \quad (4.13)$$

где је  $\mathbf{u}_i = [\Delta y_i \quad \Delta w_i]^T$ . За решавање овог нелинеарног система диференцијалних једначина коришћен је имплицитни предиктор-коректор алгоритам (Алгоритам 1).

---

**Algorithm 1** Њумаркова метода за нелинеарне системе диференцијалних једначина

---

```

1:  $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} \leftarrow \mathbf{0}$ 
2:  $\mathbf{u}_{i+1} \leftarrow \mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_i \Delta\tau + \ddot{\mathbf{u}}_i \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta\tau^2 + \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} \beta \Delta\tau^2$ 
3:  $\dot{\mathbf{u}}_{i+1} \leftarrow \dot{\mathbf{u}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i (1 - \gamma) \Delta\tau + \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} \gamma \Delta\tau$ 
4:  $\varepsilon \leftarrow \mathbf{f}(\tau_{i+1}) - \mathbf{r}(\mathbf{u}_{i+1}, \dot{\mathbf{u}}_{i+1}) - \mathbb{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$ 
5: while  $\|\varepsilon\| \geq Tol$  do
6:    $\Delta\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} \leftarrow (\mathbb{M} + \mathbb{C}\gamma\Delta\tau + \mathbb{K}\beta\Delta\tau^2)^{-1} \varepsilon$ 
7:    $\ddot{\mathbf{u}}_{i+1} \leftarrow \ddot{\mathbf{u}}_{i+1} + \Delta\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$ 
8:    $\dot{\mathbf{u}}_{i+1} \leftarrow \dot{\mathbf{u}}_{i+1} + \Delta\dot{\mathbf{u}}_{i+1} \gamma \Delta\tau$ 
9:    $\mathbf{u}_{i+1} \leftarrow \mathbf{u}_{i+1} + \Delta\mathbf{u}_{i+1} \beta \Delta\tau^2$ 
10:   $\varepsilon \leftarrow \mathbf{f}(\tau_{i+1}) - \mathbf{r}(\mathbf{u}_{i+1}, \dot{\mathbf{u}}_{i+1}) - \mathbb{M}\ddot{\mathbf{u}}_{i+1}$ 
11: end while

```

---

Константно просечно убрзање чини Њумарк методу безусловно стабилном. Због тога се узимају следеће вредности основних параметара Њумарк метода:  $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$ . Толеранција за излазак из петље се поставља на  $10^{-5}$ . Алтернативно, избором параметра  $\beta = \frac{1}{6}$ , метода добија назив метода линеарног убрзања, која је условно стабилна [192]. Поред тога, за случај да је  $\gamma = \frac{1}{2}$  и  $\beta = 0$ , Њумарк метода би се свела на методу централних коначних разлика. Више информација о Њумарк методи се може наћи у раду Bursi and Shing [193].

## Глава 5

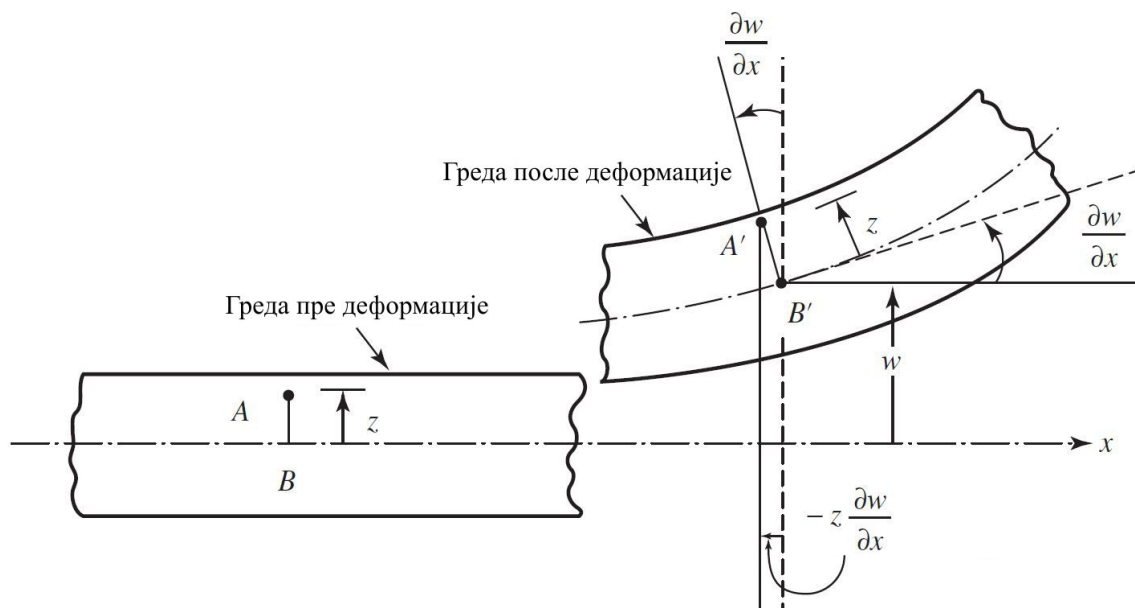
# Осцилације нелинеарне нелокалне Ојлер-Бернулијеве греде на фракционој вискоеластичној подлози Пастернаковог типа

### 5.1 Ојлер-Бернулијева теорија греде

Греда је структурни елемент који се првенствено одупире оптерећењима управним на осу греде. Ојлер-Бернулијева теорија греде представља поједностављење линеарне теорије еластичности, која обезбеђује средство за израчунавање карактеристика носивости и угиба греда. Примењује се када је греда примарно оптерећена на савијање и њене деформације су мале. Ојлер-Бернулијева теорија уноси три основне претпоставке. Прва претпоставка дефинише греду условом да је једна димензија (лонгитудинална) значајно већа од друге две. Друга је да се попречни пресек не мења дуж греде. Трећа је Ојлер-Бернулијева претпоставка да након деформације попречни пресеци остају у једној равни и нормални су на лонгитудиналну осу греде [194]. Компоненте вектора померања Ојлер-Бернулијеве греде (Слика 5.1) су:

$$u_x(x, z, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y(x, z, t) = 0, \quad u_z(x, z, t) = w(x, t), \quad (5.1)$$

где  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  означавају померање у правцу дужине, ширине и дебљине греде, редом. Величине  $u$  и  $w$  су аксијална и трансферзална померања физичке средње равни. Компоненте стања (матрице, тензора) деформација имају према нелинеарној Фон Кармановој



Слика 5.1: Савијање Ојлер-Бернулијеве греде.

теорији деформација [195] следећи облик:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), & \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

У случају линеарне теорије деформација у једначини (5.2), би једина разлика била у компоненти  $\varepsilon_{xx}$ , где би други сабирак био нула, тј. важило би  $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$ .

Заменом једначина (5.1) у једначине (5.2), једина компонента дилатације Ојлер-Бернулијеве греде са геометријском нелинеарношћу које се разликује од нуле има облик:

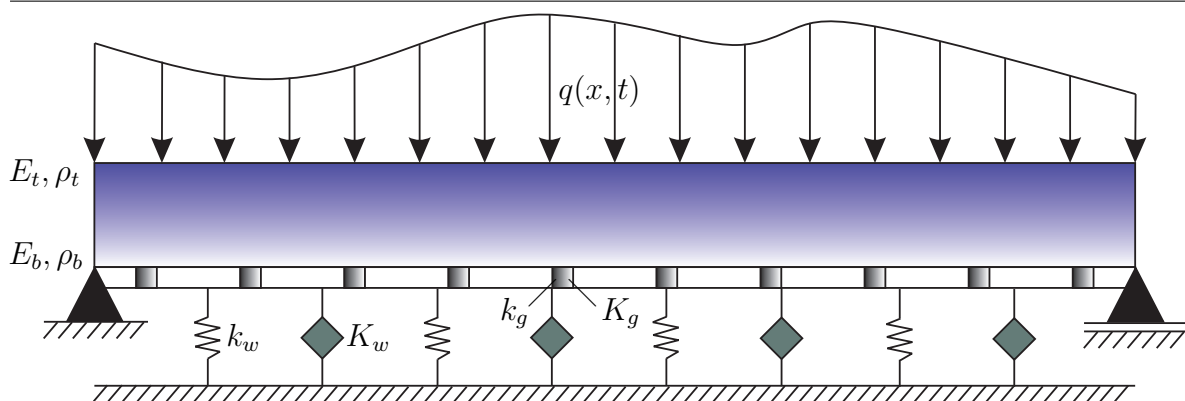
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (5.3)$$

## 5.2 Модел греде и једначине малих трансверзалних осцилација

Модел греде који је разматран у наставку је дат на слици (5.2). Разматраће се следеће компоненте главног вектора и главног момента посматраног елемента оптерећене греде:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_A t_{xx} dA, & N_{xx}^{(0)} &= \int_A \sigma_{xx} dA, & N_{xx}^{(1)} &= \int_A \sigma_{xx}^{(1)} dA, \\ M &= \int_A z t_{xx} dA, & M^{(0)} &= \int_A z \sigma_{xx} dA, & M^{(1)} &= \int_A z \sigma_{xx}^{(1)} dA, \end{aligned} \quad (5.4)$$





Слика 5.2: Модел нелинеарне нелокалне дилатацијско градијентне греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози.

где су  $t_{xx}$  - укупни напон,  $\sigma_{xx}$  - нелокални напон и  $\sigma_{xx}^{(1)}$  - нелокални напон вишег реда, као што је објашњено у поглављу 1.5.3. Након тога, коефицијенти истезања  $A_{xx}$  и савијања  $D_{xx}$  се дефинишу као:

$$\{A_{xx}, D_{xx}\} = b \int_{-\frac{h}{2}-c}^{\frac{h}{2}-c} \{1, z^2\} E(z) dz. \quad (5.5)$$

У случају хомогене греде  $A_{xx} = EA$  и  $D_{xx} = EI$ , где  $A_{xx}$  и  $D_{xx}$  и представљају аксијалну и савојну крутост. Крутост се може дефинисати као отпорност на деформацију, и математички се дефинише као однос силе која узрокује деформацију и саме деформације. Према томе, аксијална крутост представља отпорност греде на истезање дуж аксијалне осе, а савојна крутост отпорност на деформацију савијања.

Најпре се замене изрази (1.38) и (1.39) у (1.40). Потом се у првом случају интеграл цео израз по површини  $A$ , а у другом најпре помножи цео израз са  $z$ , па да онда интеграл по истој површини. С обзиром да важе изрази (5.4) за компоненте главног вектора и главног момента посматраног елемента оптерећене греде, добија се аксијална сила и момент савијања:

$$N_{xx} = N_{xx}^{(0)} - \frac{\partial N_{xx}^{(1)}}{\partial x}, \quad M = M^{(0)} - \frac{\partial M^{(1)}}{\partial x}. \quad (5.6)$$

Интеграцијом опште конститутивне релације (1.40) дуж попречног пресека  $A$ , односно множењем са  $z$  и интеграцијом дуж попречног пресека  $A$ , и коришћењем израза (5.5) и (5.4), долази се до следећих израза:

$$N_{xx} = \mu^2 \frac{\partial^2 N_{xx}}{\partial x^2} + \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) A_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right), \quad (5.7)$$

$$M = \mu^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - D_{xx} \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (5.8)$$

Промена потенцијалне енергије деформације (1.36), обележена са  $\delta U$ , за ФГ греду се може написати као у [125, 196]:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}^{(1)} \nabla \delta \varepsilon_{xx}) dV \\ &= \int_0^L \left( N_{xx} \delta \frac{\partial u}{\partial x} + N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} - M \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + \left[ N_{xx}^{(1)} \delta \frac{\partial u}{\partial x} + N_{xx}^{(1)} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} - M^{(1)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_0^L. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Промена укупне кинетичке енергије када се разматрају оба кретања, и лонгитудинално и трансверзално, је:

$$\begin{aligned} \delta K &= b \int_0^L \int_{-\frac{b}{2}-c}^{\frac{b}{2}-c} \rho(z) \frac{\partial u_x}{\partial t} \delta \frac{\partial u_x}{\partial t} dz dx + b \int_0^L \int_{-\frac{b}{2}-c}^{\frac{b}{2}-c} \rho(z) \frac{\partial u_z}{\partial t} \delta \frac{\partial u_z}{\partial t} dz dx \\ &= \int_0^L m_0 (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}) dx + \int_0^L m_2 \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \delta \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} dx. \end{aligned} \quad (5.10)$$

У изразу (5.10) моменти инерције масе су следећег облика:

$$\{m_0, m_1, m_2\} = b \int_{-\frac{b}{2}-c}^{\frac{b}{2}-c} \{1, z, z^2\} \rho(z) dz. \quad (5.11)$$

У специјалном случају хомогене греде важи  $m_0 = \rho A$  и  $m_2 = \rho I$ . Према раду Етам-а и Науфе-а [197], момент инерције масе првог реда  $m_1$  се може занемарити у изразу за промену кинетичке енергије (5.10) пошто је његов утицај релативно мали.

Рад спољашњих сила на виртуелним померањима је [198]:

$$\delta W = \int_0^L (F_m b + q) \delta w dx + \left[ \bar{Q} \delta w - \bar{M} \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right]_0^L, \quad (5.12)$$

где је:

$$\begin{aligned} F_m &= (k_w + K_w D^\alpha) w - (k_g + K_g D^\alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ q &= Q_0 + Q_1 \cos \Omega_1 t. \end{aligned} \quad (5.13)$$

У изразу (5.12),  $F_m$  је реститутивна сила виско-Пастернаковог слоја,  $q$  је специфично континуално оптерећење у трансверзалном правцу, а у попречном пресеку крајева греде делују трансверзална сила  $\bar{Q}$  и момент савијања  $\bar{M}$ . Израз (5.12) је дат за општи случај спољашњег оптерећења. За случај просте греде и њених услова ослањања на крајевима не постоје само моменти, а силе су једнаке реакцијама ослонаца. У изразу (5.13)  $D^\alpha$  је оператор Риман-Лиувиловог фракционог извода, који је дефинисан у уводу. За  $\alpha = 1$ , он прелази у први извод по временској координати ( $\frac{\partial}{\partial t}$ ).  $k_w$  и  $K_w$  су Винклерови коефицијенти еластичности подлоге, а  $k_g$  и  $K_g$  Пастернакови коефицијенти вискозности подлоге.  $Q_0$  је статичка компонента континуалног оптерећења,  $Q_1$  максимална амплитуда (магнитуда) динамичке компоненте континуалног оптерећења, а  $\Omega_1$  фреквенција динамичког побудног

оптерећења. У раду [199] је уведен слични тип подлоге, само без фракционих временских извода.

Диференцијалне једначине осциловања греде се могу извести преко Хамилтоновог принципа. То је варијациони принцип који каже да ће се од свих могућих путања кретања система између две тачке у времену, систем или тело кретати оном која је стационарна (функционал дејства има екстремну вредност, минимум или максимум), тј. оном за коју је диференцијал функционала дејства једнак нули. Хамилтоновим принципом су једнозначно одређене Лагранжове једначине које описују кретање тела. Математички се Хамилтонов принцип описује на следећи начин. Ако функционал дејства система са коначним бројем степени слободe дефинишемо као:

$$S[\mathbf{q}] := \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt, \quad (5.14)$$

где је  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$  вектор  $N$  генералисаних координата које су функције времена, његов извод по времену  $\dot{\mathbf{q}}$  су генералисане брзине, а  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  је Лагранжијан, који је функција са значењем укупне енергије система. Хамилтонов принцип од бесконачно много путања између две тачке  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1)$  и  $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}(t_2)$  одређује праву путању као путању за коју је дејство стационарно (варијација функционала (5.14) је једнака нули), тј. еволуција система је задата једначином:

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{q}(t)} = 0. \quad (5.15)$$

Према Хамилтоновом принципу следи:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U - \delta W) dt = 0. \quad (5.16)$$

Заменом израза (5.9), (5.10) и (5.12) у једначину (5.16), добијају се једначине, које представљају компоненте вектора померања тачака у средњој линији греде у следећем облику:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} - m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b F_m - q = 0, \quad (5.18)$$

са граничним условима локалних компоненти (који се јављају и у локалној теорији еластичности) за  $x = 0$  и  $x = L$ :

$$\begin{aligned} N_{xx} & \text{ или } u, \\ \frac{\partial M}{\partial x} + \bar{Q} & \text{ или } w, \end{aligned} \quad (5.19)$$

и граничним условима који се односе на нелокалне компоненте за  $x = 0$  и  $x = L$ :

$$\begin{aligned} N_{xx}^{(1)} & \text{ или } \frac{\partial u}{\partial x}, \\ M^{(1)} & \text{ или } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Над ослоњцима су познате вредности померања или деформација, сила или момента као што је дато у изразима (5.19)-(5.20) [194].

Пошто је димензија греде у аксијалном правцу знатно већа у односу на трансверзални и бочни, а услед инертности материјала греде, може се закључити да се за претпоставку брзе динамике, убрзање у аксијалном правцу у једначини (5.17) може занемарити. Одатле следи да је:

$$N_{xx} = C = const. \quad (5.21)$$

Заменом израза за дилатацију (5.3) у конститутивну релацију (1.40) и водећи рачуна о (5.4) и (5.5), аксијална сила  $N_{xx}$  се може написати као:

$$N_{xx} = \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) A_{xx} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right]. \quad (5.22)$$

Заменом израза (5.22) у (5.6) добија се:

$$N_{xx}^{(0)} - \frac{\partial N_{xx}^{(1)}}{\partial x} = \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) A_{xx} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right], \quad (5.23)$$

где се аксијалне силе од локалног и нелокалног дела, узимајући у обзир израз за тоталну аксијалну силу (5.6), могу написати као:

$$N_{xx}^{(0)} = A_{xx} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right], \quad (5.24)$$

и:

$$N_{xx}^{(1)} = l^2 A_{xx} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]. \quad (5.25)$$

У случају просто ослоњене греде, следећи гранични услови важе:

$$\begin{aligned} u(x=0) &= 0, & N^{(1)}(x=0) &= 0, \\ u(x=L) &= 0, & N^{(1)}(x=L) &= 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Заменом израза (5.25) у (5.22) добија се:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) A_{xx} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] \\ &= A_{xx} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] - \frac{\partial N_{xx}^{(1)}}{\partial x} = const. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Пошто је добијено да је аксијална сила константа (5.21), то значи да има исту вредност у било којој тачки дуж аксијалног правца, па и у крајњим тачкама у којима важе гранични услови дати изразима (5.26). Применом граничног услова за нелокалну аксијалну силу из (5.26) на једначину (5.27) се добија:

$$A_{xx} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] = const. \quad (5.28)$$

Интеграцијом израза (5.28) дуж греде и применом граничних услова померања из израза (5.26), добија се једначина за аксијалну силу у следећем облику:

$$N_{xx} = \frac{A_{xx}}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx. \quad (5.29)$$

Заменом израза (5.29) у једначину (5.18), а потом израза за  $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$  у (5.8), следи да се момент савијања може срачунати као:

$$\begin{aligned} M &= \mu^2 \left[ -\frac{A_{xx}}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + bF_m + q \right] \\ &\quad - D_{xx} (1 - l^2 \nabla^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Заменом израза (5.30) у (5.8), добија се нелинеарна једначина у димензионом облику (није бездимензионисана) по компоненти вектора померања у правцу  $z$  осе тј. по  $w$ , која описује мала трансверзална померања ФГ Ојлер-Бернулијеве греде базирана на нелокалној дилатацијско градијентној теорији:

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2 \nabla^2) \left[ -\frac{A_{xx}}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + bF_m + q \right] \\ + D_{xx} (1 - l^2 \nabla^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Након замене израза за спољашња оптерећења (5.13) у израз (5.31), добија се следећа

једначина:

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2 \nabla^2) \left[ -\frac{A_{xx}}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right. \\ \left. + bk_w w + bK_w D^\alpha w - bk_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - bK_g D^\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Q_0 + Q_1 \cos \Omega_1 t \right] \\ + D_{xx} (1 - l^2 \nabla^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Да би се једначина (5.32) приказала у бездимензионом облику, уводе се следећи параметри:

$$\begin{aligned} \bar{X} = \frac{x}{L}, \quad \bar{W} = \frac{w}{k_x}, \quad \Sigma = \frac{l}{L}, \quad \lambda = \frac{\mu}{L}, \quad \zeta = \frac{b}{L}, \quad \tau = tS \\ \tau^\alpha = t^\alpha S^\alpha, \quad S = \frac{k_x}{L^2} \sqrt{\frac{A_{xx}}{m_0}} \quad y = \frac{m_2}{m_0 L^2}, \quad F_0 = \frac{Q_0 L^4}{A_{xx} k_x^3} \\ F_1 = \frac{Q_1 L^4}{A_{xx} k_x^3}, \quad \Omega = \Omega_1 \frac{L^2}{k_x} \sqrt{\frac{m_0}{A_{xx}}}, \quad k_1 = \frac{\zeta k_w L^5}{A_{xx} k_x^2}, \\ K_1 = \frac{\zeta K_w L^5}{A_{xx} k_x^2} S^\alpha, \quad k_2 = \frac{\zeta k_g L^3}{A_{xx} k_x^2}, \quad K_2 = \frac{\zeta K_g L^3}{A_{xx} k_x^2} S^\alpha. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Величина  $k_x$ , која се јавља у изразима (5.33), је полупречник инерције, дефинисан као:

$$k_x = \sqrt{\frac{D_{xx}}{A_{xx}}}. \quad (5.34)$$

У специјалном случају хомогене греде важи:  $k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ . Коришћењем смена (5.33) у изразу (5.32) нелинеарна једначина која описује трансверзална померања је трансформисана у следећи бездимензиони облик:

$$\begin{aligned} \left( 1 - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{X}^2} \right) \left[ -\frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{X}} \right)^2 d\bar{X} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{X}^2} - y \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{X}^2 \partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \tau^2} + k_1 \bar{W} \right. \\ \left. + K_1 D_\tau^\alpha \bar{W} - k_2 \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{X}^2} - K_2 D_\tau^\alpha \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{X}^2} + F_0 + F_1 \cos \Omega \tau \right] + \left( 1 - \Sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{X}^2} \right) \frac{\partial^4 \bar{W}}{\partial \bar{X}^4} = 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Решење једначине (5.35) може се претпоставити Галерниковом апроксимацијом као збир производа сопствених (карактеристичних) и временских функција за сваки мод (облик осциловања). У општем случају за нелинеарне једначине сличне или исте као једначина (5.35), користи се најчешће дискретизација само у једном моду (као и у радовима [8, 34, 200, 201, 23, 35, 26, 19, 199, 28, 202, 18]), где се решење може претпоставити у облику (5.36):

$$\bar{W}(\bar{X}, \tau) = \phi_n(\bar{X}) q(\tau), \quad (5.36)$$

где је:  $\phi_n(\bar{X})$  карактеристична функција,  $q(\tau)$  временска функција, а  $n = 1, 2, \dots$  број мода. Употребљено је сумирање дискретизованих решења по модовима, јер постоји само

кубна нелинеарност, а Nayfeh и Lacarbonara су показали у својој студији [203] да Галеркинова апроксимација у једном моду не успева да предвиди динамичко понашање просто ослоњених греда једино у случајевима квадратне нелинеарности (што у овој дисертацији није случај) и парни модови су посматрани у одређеним субхармонијским и суперхармонијским резонантним условима.

Карактеристична функција  $\phi_n$  се може дефинисати преко тригонометријских функција, које задовољавају одређене граничне услове и дата је у наставку за три врсте граничних услова [204, 194]. За просто ослоњену греду, карактеристична функција је дефинисана као:

$$\phi_n(\bar{X}) = \sin \gamma_n \bar{X}, \quad \gamma_n = n\pi, \quad (5.37)$$

за греду која је са једне стране укљештена, а са друге просто ослоњена важи:

$$\phi_n(\bar{X}) = (\sin \gamma_n \bar{X} - \sinh \gamma_n \bar{X}) - \frac{\sin \gamma_n + \sinh \gamma_n}{\cos \gamma_n + \cosh \gamma_n} (\cos \gamma_n \bar{X} - \cosh \gamma_n \bar{X}), \quad (5.38)$$

$$\tan \gamma_n = \tanh \gamma_n,$$

док за за обострано-укљештену греду важи:

$$\phi_n(\bar{X}) = (\sin \gamma_n \bar{X} - \sinh \gamma_n \bar{X}) - \frac{\sin \gamma_n - \sinh \gamma_n}{\cos \gamma_n - \cosh \gamma_n} (\cos \gamma_n \bar{X} - \cosh \gamma_n \bar{X}), \quad (5.39)$$

$$\cos \gamma_n \cosh \gamma_n = -1.$$

Коефицијенти  $s_0 - s_5$  су одређени са:

$$\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\} = \int_0^1 \{\phi, \phi^2, \phi''\phi, \phi^{IV}\phi, \phi^{VI}\phi, \phi'^2\} d\bar{X}. \quad (5.40)$$

Заменом израза (5.36) у (5.35), и коришћењем израза (5.40) добија се следећа нелинеарна фракциона диференцијална једначина:

$$\ddot{q} + \gamma D_\tau^\alpha q + \omega_0^2 q + \theta q^3 = f_0 + f_1 \cos \Omega \tau, \quad (5.41)$$

где су параметри:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{K_1 s_1 - K_2 s_2 - \lambda^2 K_1 s_2 + \lambda^2 K_2 s_3}{s_1 - y s_2 - \lambda^2 s_2 + y \lambda^2 s_3}, \\
 \omega_0^2 &= \frac{k_1 s_1 - k_2 s_2 - \lambda^2 k_1 s_2 + \lambda^2 k_2 s_3 + s_3 - \Sigma^2 s_4}{s_1 - y s_2 - \lambda^2 s_2 + y \lambda^2 s_3}, \\
 \theta &= \frac{-\frac{1}{2} s_5 s_2 + \frac{1}{2} s_5 s_3 \lambda^2}{s_1 - y s_2 - \lambda^2 s_2 + y \lambda^2 s_3}, \\
 f_0 &= \frac{-s_0 F_0}{s_1 - y s_2 - \lambda^2 s_2 + y \lambda^2 s_3}, \\
 f_1 &= \frac{-s_0 F_1}{s_1 - y s_2 - \lambda^2 s_2 + y \lambda^2 s_3}.
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Треба напоменути да се једначина (5.32) може бездимензионисати на више различитих начина. Најпогоднији начин је овде дат. Полупречник инерције  $k_x$  (5.34) је уведен у процес бездимензионисања са сврхом смањења нелинеарног параметра  $\theta$  у једначини (5.41). Екстремно високе вредности  $\theta$  у поређењу са параметром линеарне крутости  $\omega_0^2$  би касније изазвале проблеме код решавања фракционе диференцијалне једначине кретања (5.41). Алтернативно бездимензионисање трансверзалне координате дужином греде уместо полупречником инерције, тј.  $\bar{W} = \frac{w}{L}$  уместо  $\bar{W} = \frac{w}{k_x}$  у (5.33), у случају линеарне динамике, не би дало значајан утицај на даљу анализу. Међутим, однос  $\frac{w}{k_x}$  је мањи од  $\frac{w}{L}$ , а такво бездимензионисање би изменило форму и других коефицијента у (5.33) и последично у (5.42), па би нелинеарни коефицијент  $\theta$  био много већи, што је неповољно са становишта анализе нелинеарне динамике. Алтернативним бездимензионисањем, које се показало као неповољно, би се уместо параметара (5.33) увело (5.43), тј.:

$$\begin{aligned}
 \bar{X} &= \frac{x}{L}, \quad \bar{W} = \frac{w}{L}, \quad \Sigma = \frac{l}{L}, \quad \lambda = \frac{\mu}{L}, \quad \zeta = \frac{b}{L}, \quad \tau = tS \\
 \tau^\alpha &= t^\alpha S^\alpha, \quad S = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{A_{xx}}{m_0}}, \quad y = \frac{m_2}{m_0 L^2}, \quad c_x = \frac{D_{xx}}{A_{xx} L^2}, \\
 F_0 &= \frac{Q_0 L}{A_{xx}}, \quad F_1 = \frac{Q_1 L}{A_{xx}}, \quad \Omega = \Omega_1 L \sqrt{\frac{m_0}{A_{xx}}}, \quad k_1 = \frac{\zeta k_w L^3}{A_{xx}}, \\
 K_1 &= \frac{\zeta K_w L^3}{A_{xx}} S^\alpha, \quad k_2 = \frac{\zeta k_g L}{A_{xx}}, \quad K_2 = \frac{\zeta K_g L}{A_{xx}} S^\alpha.
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

У том случају би једначина кретања задржала облик (5.41), док би њени параметри задржали вредности дате једначинама (5.42), осим параметра  $\omega_0^2$  који би се у овом случају срачунавао према једначини (5.44), тј.:

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 s_1 - k_2 s_2 - \lambda^2 k_1 s_2 + \lambda^2 k_2 s_3 + c_x s_3 - c_x \Sigma^2 s_4}{s_1 - y s_2 - \lambda^2 s_2 + y \lambda^2 s_3}. \tag{5.44}$$



## 5.3 Решења једначина осциловања и нелинеарни периодични одзив

Аналитичке пертурбационе методе, попут методе вишеструких временских скала се углавном користе за решавање фракционих диференцијалних једначина у случају слабе нелинеарности [94]. За јаке нелинеарности, уобичајеније је користити нумеричке методе попут методе диференцијалних квадратура [205] или методе инкременталног хармонијског баланса [101]. Преглед доступних нумеричких метода за решавање фракционих диференцијалних једначина кретања је дат у студији Zhou и сарадници [206]. У овој докторској дисертацији, периодична решења ће бити добијена методом ИХБ, а резултати потврђени пертурбационом методом вишеструких временских скала и Њумарк нумеричком методом.

### 5.3.1 Применом пертурбационе методе вишеструких временских скала

Метода вишеструких временских скала је аналитичка пертурбациона метода за конструисање апроксимативних решења нелинеарних диференцијалних једначина. Ова метода је добро позната у литератури, али се може применити само за мале нелинеарности и пригушења. Из тог разлога ће овде бити коришћена само за валидацију. Једначина (5.41) је добро позната као Дуфингова диференцијална једначина са пригушењем фракционог реда [207, 208, 209, 210, 211], и може се написати у облику датом изразом (5.45), као:

$$\ddot{q} + \epsilon \bar{\gamma} D_{\tau}^{\alpha} q + \omega_0^2 q + \epsilon \bar{\theta} q^3 = f \cos \Omega \tau, \quad (5.45)$$

где смо увели нове параметре:  $f = f_1$ ,  $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\epsilon}$ ,  $\bar{\theta} = \frac{\theta}{\epsilon}$  и ради једноставности анализе претпоставили да је  $f_0 = 0$  (Видети једначину (5.41)). Новоуведени мали параметар [174] узима вредност  $\epsilon \ll 1$ , а у дисертацији је код нумеричких срачунавања усвојено  $\epsilon = 0.01$ . Мали параметар  $\epsilon$  је стављен испред фракционог и нелинеарног члана да бисмо скалирањем добили слабо пригушење и слабу нелинеарност. Треба обратити пажњу да је члан побуде у једначини (5.45) првог реда (такође познато као јака побуда) што ће нам помоћи у испитивању секундарних резонанци у систему коришћењем пертурбационе анализе првог реда. Побуда реда величине  $\epsilon$  указује на примарну резонанцу у истој Дуфинговој једначини, као што је реферисано у [212].

Једначину (5.45) решавамо пертурбационом методом вишеструких временских скала. За разлику од регуларне пертурбационе теорије са директим развојем, код које се у решењима јављају секуларни чланови који неограничено расту у времену и Линштат-Поенкаре метода, где се могу ”ухватити” само промене у фреквенцији услед пертурбација, метода вишеструких временских скала, исказује супериорност јер поред периодичних решења

може наћи и апериодична [213]. Главни концепт пертурбационог развоја методом вишеструких временских скала је дефинисање нове временске променљиве  $\tau = \epsilon t$ , које се назива спором временском скалом пошто је  $\epsilon$  мало. Може се увести произвољан број брзих и спорих временских променљивих. Брза променљива се уводи као  $\tau = \frac{t}{\epsilon}$ . Без обзира на везу  $\tau = \epsilon t$ ,  $\tau$  и  $t$  се у даљој анализи разматрају као независне временске променљиве, па се једначина (5.45) може написати уз помоћ нових променљивих.

Нека је  $T_0 = \tau$  брза временска скала (брзо-променљиво време), а  $T_1 = \epsilon\tau$  спора временска скала (споро-променљиво време). Решење (5.45) се претпоставља као пертурбациони ред изразом (5.46):

$$q(T_0, T_1, \epsilon) = q_0(T_0, T_1) + \epsilon q_1(T_0, T_1) + \dots \quad (5.46)$$

Следећи временски изводи су потребни за даљи прорачун:

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \epsilon D_1 + O(\epsilon^2), \quad (5.47)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + O(\epsilon^2), \quad (5.48)$$

$$D_\tau^\alpha = D_{0+}^\alpha - \epsilon \alpha D_{0+}^{\alpha-1} D_1 + \dots, \quad (5.49)$$

где су:  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и  $D_{n+}^{\alpha-n} = \frac{\partial^{\alpha-n}}{\partial T_{n+}^{\alpha-n}}$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) класични и Риман-Лиувилев фракциони извод за нове временске скале [115, 94]. За фракционе изводе експоненцијалне функције [115, 94], ограничене на апроксимацију првог и другог реда, следећа релација је коришћена:

$$D_{0+}^\alpha e^{i\omega\tau} = (i\omega)^\alpha e^{i\omega\tau}, \quad (5.50)$$

где је  $i$  имагинарна јединица. Заменом једначина (5.46), (5.47), (5.48), (5.49) у (5.45) и груписањем коефицијената уз  $\epsilon^0$  и  $\epsilon^1$  добијају се следеће једначине:

$$\epsilon^0 : D_0^2 q_0 + \omega_0^2 q_0 = f \cos \Omega\tau, \quad (5.51)$$

$$\epsilon^1 : D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = -2D_0 D_1 q_0 - \bar{\gamma} D_{0+}^\alpha q_0 - \bar{\theta} q_0^3. \quad (5.52)$$

Решење једначине (5.51) се тражи у облику:

$$q_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \Lambda e^{i\Omega T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} + \Lambda e^{-i\Omega T_0}, \quad (5.53)$$

где је  $A$  комплексна функција са члановима споре временске скале,  $\bar{A}$  њена коњуговано комплексна функција, док је  $\Lambda$  је дефинисано као:

$$\Lambda = \frac{f}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)}. \quad (5.54)$$

## Резонанца

Резонанца (резонанција) је феномен који се јавља када подударне вибрације другог објекта или принудне периодичне силе повећавају амплитуду осцилација посматраног објекта. Код нелинеарних система са принудом, при претпоставци да принуда има једну фреквенцију и да је њена амплитуда константна, могу постојати различити типови резонанције [214]. Нека је са  $\Omega$  означена фреквенција побуда, са  $\omega_i, i = 0, 1, 2, 3, \dots$  сопствене фреквенције осциловања и ако су  $n, m$  и  $m_i$  природни бројеви, онда се резонанце могу класификовати у следеће групе:

- а) главна или хармонијска,  $\Omega \approx \omega_i$ ,
- б) суперхармонијска,  $\Omega \approx \omega_i/n$ ,
- в) субхармонијска,  $\Omega \approx n\omega_i$ ,
- г) комбинована,  $n\Omega \approx m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_i\omega_i$ ,
- д) рационална,  $\Omega \approx (m/n)\omega_i$ ,
- ђ) интерна (унутрашња),  $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_i\omega_i \approx 0$ .

Који облик резонанце може да настане зависи од вредности односа фреквенција побуде и сопствених фреквенција осциловања.

### Суперхармонијска резонанца $3\Omega \approx \omega_0$

У овом поглављу се анализира систем за суперхармонијске услове резонанце. Пошто израз (5.45) садржи само кубну нелинеарност, разматра се само случај када се варира фреквенција спољашње побуде око трећине вредности сопствене кружне фреквенције система, тј. за:

$$3\Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma, \quad (5.55)$$

где је  $\sigma$  параметар подешавања. Заменом односа фреквенција (5.55) у израз за  $q_0$  (5.53) и имајући у виду да је  $T_1 = \epsilon T_0$  добија се:

$$q_0 = A(T_1)e^{i\omega_0 T_0} + \Lambda e^{\frac{1}{3}i\omega_0 T_0} e^{\frac{1}{3}i\sigma T_1} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega_0 T_0} + \Lambda e^{-\frac{1}{3}i\omega_0 T_0} e^{-\frac{1}{3}i\sigma T_1}. \quad (5.56)$$

Заменом  $q_0$  из израза (5.56) у једначину (5.52) добија се:

$$\begin{aligned}
 D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = & -2 \left( i\omega_0 A' e^{i\omega_0 T_0} - i\omega_0 \bar{A}' e^{-i\omega_0 T_0} \right) - \bar{\gamma} \left( (i\omega_0)^\alpha A e^{i\omega_0 T_0} - (-i\omega_0)^\alpha \bar{A} e^{-i\omega_0 T_0} \right) \\
 & - \bar{\theta} \left( 3A\bar{A}^2 e^{-i\omega_0 T_0} + 3A^2 \bar{A} e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}^3 e^{-3i\omega_0 T_0} + A^3 e^{3i\omega_0 T_0} \right. \\
 & + 6A\bar{A}\Lambda e^{-\frac{1}{3}i\omega_0 T_0} e^{-\frac{1}{3}i\sigma T_1} + 6A\bar{A}\Lambda e^{\frac{1}{3}i\omega_0 T_0} e^{\frac{1}{3}i\sigma T_1} + 3\bar{A}^2 \Lambda e^{-\frac{5}{3}i\omega_0 T_0} e^{\frac{1}{3}i\sigma T_1} \\
 & + 3A^2 \Lambda e^{\frac{5}{3}i\omega_0 T_0} e^{-\frac{1}{3}i\sigma T_1} + 3\bar{A}^2 \Lambda e^{-\frac{7}{3}i\omega_0 T_0} e^{-\frac{1}{3}i\sigma T_1} + 3A^2 \Lambda e^{\frac{7}{3}i\omega_0 T_0} e^{\frac{1}{3}i\sigma T_1} \\
 & + 6\bar{A}\Lambda^2 e^{-i\omega_0 T_0} + 6A\Lambda^2 e^{i\omega_0 T_0} + 3\bar{A}\Lambda^2 e^{-\frac{1}{3}i\omega_0 T_0} e^{\frac{2}{3}i\sigma T_1} + 3A\Lambda^2 e^{\frac{1}{3}i\omega_0 T_0} e^{-\frac{2}{3}i\sigma T_1} \\
 & + 3\bar{A}\Lambda^2 e^{-\frac{5}{3}i\omega_0 T_0} e^{-\frac{2}{3}i\sigma T_1} + 3A\Lambda^2 e^{\frac{5}{3}i\omega_0 T_0} e^{\frac{2}{3}i\sigma T_1} + 3\Lambda^3 e^{-\frac{1}{3}i\omega_0 T_0} e^{-\frac{1}{3}i\sigma T_1} \\
 & \left. + 3\Lambda^3 e^{\frac{1}{3}i\omega_0 T_0} e^{\frac{1}{3}i\sigma T_1} + \Lambda^3 e^{-i\omega_0 T_0} e^{-i\sigma T_1} + \Lambda^3 e^{i\omega_0 T_0} e^{i\sigma T_1} \right). \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

Уклањањем секуларних чланова који расту у времену неограничено, тј. груписањем коефицијената уз  $e^{i\omega_0 T_0}$  из једначине (5.57) и изједначавањем њиховог збира са нулом, добија се следећа диференцијална једначина:

$$-2i\omega_0 A' - \bar{\gamma} A (i\omega_0)^\alpha - \bar{\theta} (3A^2 \bar{A} + 6A\Lambda^2 + \Lambda^3 e^{i\sigma T_1}) = 0, \quad (5.58)$$

где је  $A' = D_1 A$ . Да би се показало да је збир чланова уз  $e^{i\omega_0 T_0}$  једнак нули, било би потребно уврстити и чланове реда  $\epsilon^2$ , а занемарити оне више. Тада би поред (5.51) и (5.52) настала додатна диференцијална једначина добијена изједначавањем чланова уз  $\epsilon^2$  и у том изразу би се показало да је збир секуларних чланова на десној страни једначине (5.52) једнак нули.

За даљу анализу једначине (5.58) користи се следећа веза [94]:

$$i^\alpha = \cos \frac{\alpha\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha\pi}{2} = e^{i\frac{\alpha\pi}{2}}. \quad (5.59)$$

Да би се задатак једноставније решио прелази се на запис у поларним координатама:

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\varphi} = \frac{1}{2} a (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (5.60)$$

где су реалне функције  $a$  и  $\varphi$  амплитуда и фазно кашњење временског одзива. Извод функције (5.60) се може записати као:

$$A' = \frac{1}{2} e^{i\varphi} (a' + ai), \quad (5.61)$$

где је  $a' = \frac{da}{dT_1}$ . Заменом израза (5.60) и (5.61) у услов (5.58) уз коришћење израза (5.59) добија се:

$$-ia'\omega_0 e^{i\varphi} + a\varphi'\omega_0 e^{i\varphi} - \frac{1}{2}\bar{\gamma}a\omega_0^\alpha e^{i\varphi} e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}} - \bar{\theta} \left( \frac{3}{8}a^3 e^{i\varphi} + 3a\Lambda^2 e^{i\varphi} + \Lambda^3 e^{i\sigma T_1} \right) = 0. \quad (5.62)$$

Множењем целе једначине са  $e^{-i\varphi}$  и увођењем новог фазног угла  $\zeta = \sigma T_1 - \varphi$ , при чему је  $\varphi' = \sigma - \zeta'$ , добија се:

$$-ia'\omega_0 + a(\sigma - \zeta')\omega_0 - \frac{1}{2}\bar{\gamma}a\omega_0^\alpha e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}} - \bar{\theta}\left(\frac{3}{8}a^3 + 3a\Lambda^2 + \Lambda^3 e^{i\zeta}\right) = 0. \quad (5.63)$$

Груписањем и раздвајањем реалних и имагинарних чланова претходног израза добија се систем од две алгебарске једначине у облику:

$$\omega_0 a (\sigma - \zeta') - \frac{1}{2}\bar{\gamma}a\omega_0^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{3}{8}\bar{\theta}a^3 - 3\bar{\theta}a\Lambda^2 - \bar{\theta}\Lambda^3 \cos \zeta = 0, \quad (5.64)$$

$$\omega_0 a' + \frac{1}{2}\bar{\gamma}a\omega_0^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} - \bar{\theta}\Lambda^3 \sin \zeta = 0, \quad (5.65)$$

Ако се искористе услови стационарног стања система када се не дешавају промене амплитуде  $a$  и фазе  $\zeta$  у времену, тј. када су њихови временски изводи једнаки нули, заменом  $a' = 0$ ,  $\zeta' = 0$  у једначинама (5.64) и (5.65), добија се релација између амплитуде, фреквенција и параметра подешавања у следећем облику:

$$\frac{\bar{\theta}\Lambda^3}{\omega_0 a} \cos \zeta = \sigma - \frac{1}{2}\bar{\gamma}\omega_0^{\alpha-1} \cos \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{3}{8}\frac{\bar{\theta}a^2}{\omega_0} - 3\frac{\bar{\theta}\Lambda^2}{\omega_0}, \quad (5.66)$$

$$\frac{\bar{\theta}\Lambda^3}{\omega_0 a} \sin \zeta = -\frac{1}{2}\bar{\gamma}\omega_0^{\alpha-1} \sin \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (5.67)$$

Након квадрирања обе стране у једначинама (5.66) и (5.67) и сабирања одговарајућих страна тих једначина, добија се следећа полиномска карактеристична једначина:

$$\sigma^2 - 2\sigma K + M = 0, \quad (5.68)$$

чија решења:

$$\sigma_{1,2} = K \pm \sqrt{K^2 - M}, \quad (5.69)$$

дају једначине амплитудно-фреквентних кривих, где су  $K$  и  $M$  дати као:

$$K = \frac{1}{2}\bar{\gamma}\omega_0^{\alpha-1} \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{3}{8}\frac{\bar{\theta}a^2}{\omega_0} - 3\frac{\bar{\theta}\Lambda^2}{\omega_0}, \quad (5.70)$$

$$M = K^2 + \left(\frac{1}{2}\bar{\gamma}\omega_0^{\alpha-1} \sin \frac{\alpha\pi}{2}\right)^2. \quad (5.71)$$

Може се приметити да сви параметри доприносе појављивању суперхармонијске резонанце реда 1/3, тј. постоји интеракција фракционог, нелинеарног и члана екстерне побуде.

### 5.3.2 Применом методе инкременталног хармонијског баланса

За примену ИХБ методе, најпре се уведе нова временска скала, скалирањем времена фреквенцијом побуде као  $\bar{\tau} = \Omega\tau$  и то унесе у једначину (5.41) чиме се добија нелинеарна обична диференцијална једначина фракционог реда у следећем облику:

$$\Omega^2 \frac{d^2 q}{d\bar{\tau}^2} + \gamma \Omega^\alpha D_{\bar{\tau}}^\alpha q + \omega_0^2 q + \theta q^3 = f_0 + f_1 \cos \bar{\tau}. \quad (5.72)$$

Да би се испитало решење око стационарних стања, уводи се идеја о малим пертурбацијама и инкременталној разлици у односу на познато стационарно стање. За произвољно изабране почетне услове за  $q_0$  и  $\Omega_0$  стационарног стања амплитуде, оближње (просторно блиско) стање кретања има инкременталне промене у односу на тренутно стање, што се може изразити у следећем облику:

$$q = q_0 + \Delta q, \quad \Omega = \Omega_0 + \Delta \Omega. \quad (5.73)$$

Заменом израза (5.73) у једначину (5.72) и занемаривањем чланова вишег реда, добија се линеаризована инкрементална релација:

$$\Omega^2 \Delta q'' + \gamma \Omega_0^\alpha D_{\bar{\tau}}^\alpha \Delta q + \omega_0^2 \Delta q + 3\theta q_0^2 \Delta q = r - 2\Omega_0 q_0'' \Delta \Omega f_0 + f_1 \cos \bar{\tau}, \quad (5.74)$$

где је  $r$  члан остатка, који представља слободно осциловање у стационарном стању, дат као:

$$r = - (\Omega_0^2 q_0'' + \gamma \Omega_0^\alpha D_{\bar{\tau}}^\alpha q_0 + \omega_0^2 q_0 + \theta q_0^3). \quad (5.75)$$

Како решења за  $q$  и  $\Omega$  теже тачном решењу, тако ће  $r$  тежити нули. Да би се одредила периодична решења фракционе диференцијалне једначине,  $q_0$  и  $\Delta q$  се развијају у коначан Фуријеов ред од  $N$  чланова на следећи начин:

$$q_0 = a_0 + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(n\bar{\tau}) + b_n \sin(n\bar{\tau})] = \mathbf{C} \mathbf{A}_0, \quad (5.76)$$

$$\Delta q = \Delta a_0 + \sum_{n=1}^N [\Delta a_n \cos(n\bar{\tau}) + \Delta b_n \sin(n\bar{\tau})] = \mathbf{C} \Delta \mathbf{A}, \quad (5.77)$$

где су:

$$\mathbf{C} = [1 \quad \cos \bar{\tau} \quad \cos 2\bar{\tau} \quad \dots \quad \cos N\bar{\tau} \quad \sin \bar{\tau} \quad \sin 2\bar{\tau} \quad \dots \quad \sin N\bar{\tau}], \quad (5.78)$$

$$\mathbf{A}_0 = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_N \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_N]^T, \quad (5.79)$$

$$\Delta \mathbf{A} = [\Delta a_0 \quad \Delta a_1 \quad \Delta a_2 \quad \dots \quad \Delta a_N \quad \Delta b_1 \quad \Delta b_2 \quad \dots \quad \Delta b_N]^T. \quad (5.80)$$

Замењују се изрази (5.76)-(5.80) у једначину (5.74), и примењује Галеркинова метода, која је објашњена у поглављу о ИХБ методи (видети једначину (2.23)). Пошто фракциони извод није периодична функција, у процесу интеграције ових функција бира се временски

период  $T = \infty$  и усредњавају се резултати интеграције за фракциони извод. На исти начин, за периодичне функције се бира временски период као  $T = 2\pi$ , одакле следи следећа једначина:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\delta\Delta q)^T [\Omega^2 \Delta q'' + \omega_0^2 \Delta q + 3\theta q_0^2 \Delta q] d\bar{\tau} + \frac{1}{T} \int_0^T (\delta\Delta q)^T [\gamma\Omega^\alpha D_{\bar{\tau}}^\alpha \Delta q] d\bar{\tau} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\delta\Delta q)^T [-\Omega^2 q_0'' - \omega_0^2 q_0 - \theta q_0^3 + f_0 + f_1 \cos \bar{\tau}] d\bar{\tau} \\ & \quad - \frac{1}{T} \int_0^T (\delta\Delta q)^T [\gamma\Omega^\alpha D_{\bar{\tau}}^\alpha q_0] d\bar{\tau} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\delta\Delta q)^T [2\Omega_0 q_0''] d\bar{\tau} \Delta\Omega. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Уколико се у једначину (5.81) замене изрази (5.76) и (5.77) добија се систем од  $2N + 1$  алгебарских једначина у следећем облику:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \Omega^2 \mathbf{C}^T \frac{d^2 \mathbf{C}}{d\bar{\tau}^2} + \omega_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C} + 3\theta q_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C} \right] d\bar{\tau} \Delta \mathbf{A} + \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{C}^T [\gamma\Omega^\alpha D_{\bar{\tau}}^\alpha (\mathbf{C})] d\bar{\tau} \Delta \mathbf{A} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \Omega^2 \mathbf{C}^T \frac{d^2 \mathbf{C}}{d\bar{\tau}^2} + \omega_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C} + \theta q_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C} \right] d\bar{\tau} \mathbf{A}_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_0 \mathbf{C}^T + f_0 \cos \bar{\tau} \mathbf{C}^T] d\bar{\tau} \\ & \quad - \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{C}^T [\gamma\Omega^\alpha D_{\bar{\tau}}^\alpha (\mathbf{C})] d\bar{\tau} \mathbf{A}_0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 2\Omega_0 \mathbf{C}^T \frac{d^2 \mathbf{C}}{d\bar{\tau}^2} \right] d\bar{\tau} \mathbf{A}_0. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Систем линеаризованих алгебарских једначина у функцији од  $\Delta \mathbf{A}$  и  $\Delta\Omega$  дат изразом (5.82) може се компактније написати у следећем облику једначине (2.49), тј.:

$$\mathbf{M} \Delta \mathbf{A} + \mathbf{V} \Delta \Omega = \mathbf{R}, \quad (5.83)$$

где се: елементи Јакобијеве матрице  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2^\alpha$ , вектора корекције  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2^\alpha$ , и вектора  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2^\alpha$  добијају на следећи начин:

$$\mathbf{M}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \Omega^2 \mathbf{C}^T \frac{d^2 \mathbf{C}}{d\bar{\tau}^2} + \omega_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C} + 3\theta q_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C} \right] d\bar{\tau}, \quad (5.84)$$

$$\mathbf{M}_2^\alpha = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{C}^T [\gamma\Omega^\alpha D_{\bar{\tau}}^\alpha (\mathbf{C})] d\bar{\tau}, \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \left( \Omega^2 \mathbf{C}^T \frac{d^2 \mathbf{C}}{d\bar{\tau}^2} + \omega_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C} + \theta q_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C} \right) d\bar{\tau} \mathbf{A}_0 \right. \\ \left. + f_0 \mathbf{C}^T + f_0 \cos \bar{\tau} \mathbf{C}^T \right] d\bar{\tau}, \end{aligned} \quad (5.86)$$

$$\mathbf{R}_2^\alpha = -\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{C}^T [\gamma\Omega^\alpha D_{\bar{\tau}}^\alpha (\mathbf{C})] d\bar{\tau} \mathbf{A}_0, \quad (5.87)$$

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 2\Omega_0 \mathbf{C}^T \frac{d^2 \mathbf{C}}{d\bar{\tau}^2} \right] d\bar{\tau} \mathbf{A}_0, \quad (5.88)$$

$$\mathbf{V}_2^\alpha = 0. \quad (5.89)$$

У сваком итеративном кораку (кораку инкремантације), један линеарни систем једначина (2.49) мора да се реши да би се добили подаци за следећи корак (инкремент). Применом процедуре дате у [104, 101] елементни матрице  $M_2^\alpha$ , и вектора  $R_2^\alpha$  и  $V_2^\alpha$  се могу изразити а следећи начин:

$$M_2^\alpha = \begin{bmatrix} [M_{11}]^\alpha & [M_{12}]^\alpha \\ [M_{21}]^\alpha & [M_{22}]^\alpha \end{bmatrix}, \quad R_2^\alpha = \begin{bmatrix} R_{10}^\alpha \\ R_1^\alpha \\ R_2^\alpha \end{bmatrix}, \quad V_2^\alpha = \begin{bmatrix} V_{10}^\alpha \\ V_1^\alpha \\ V_2^\alpha \end{bmatrix}. \quad (5.90)$$

Елементи матрице  $M_2^\alpha$ , и вектора  $R_2^\alpha$  и  $V_2^\alpha$  у једначини (5.90) су:

$$\begin{aligned} [M_{11}]_{ij}^\alpha &= \delta_{ij} \gamma \Omega^\alpha \frac{i^\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \\ & i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N, \\ [M_{12}]_{ij}^\alpha &= \delta_{ij} \gamma \Omega^\alpha \frac{i^\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \\ & i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N, \\ [M_{21}]_{ij}^\alpha &= -\delta_{ij} \gamma \Omega^\alpha \frac{i^\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \\ & i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N, \\ [M_{22}]_{ij}^\alpha &= \delta_{ij} \gamma \Omega^\alpha \frac{i^\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \\ & i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} R_{10}^\alpha &= 0, \\ R_{1i}^\alpha &= -\gamma \Omega^\alpha \left[ a_i \frac{i^\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_i \frac{i^\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right], \\ & i = 1, 2, \dots, N, \\ R_{2i}^\alpha &= -\gamma \Omega^\alpha \left[ a_i \frac{i^\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_i \frac{i^\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right], \\ & i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} V_{10}^\alpha &= 0, \\ V_{1i}^\alpha &= \gamma \alpha \Omega^{\alpha-1} \left[ a_i \frac{i^\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_i \frac{i^\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right], \\ & i = 1, 2, \dots, N, \\ V_{2i}^\alpha &= \gamma \alpha \Omega^{\alpha-1} \left[ a_i \frac{i^\alpha}{2} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_i \frac{i^\alpha}{2} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right], \\ & i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.93)$$



где је  $\delta_{ij}$  Кронекеров делта симбол.

У случају да се жели решење за специфичну дату фреквенцију, изједначава се  $\Delta\Omega$  са нулом у једначини (2.49). У супротном, решава се једначина (2.49) за непознат вектор и непознат скалар ( $\mathbf{A}$  и  $\Delta\Omega$ ), с тим да се унесе  $\Delta\Omega$  као прва вредност у вектору  $\Delta\mathbf{A}$  и трансформише систем једначина. У том случају се прва вредност вектора  $\Delta\mathbf{A}$  на чије место иде  $\Delta\Omega$  сматра познатом и онда је само вектор  $\Delta\mathbf{A}$  непознат. Процес решавања се започиње уношењем претпостављених вредности  $\mathbf{A}$ , и срачунава  $\Delta\mathbf{A}$  коришћењем израза (2.49). Решење  $\Delta\mathbf{A}$  се онда додаје тренутној процењеној вредности за  $\mathbf{A}$  да би се одредио нови вектор  $\mathbf{A}$ , тј.:

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k + \Delta\mathbf{A}. \quad (5.94)$$

Овај нумерички процес се итеративно понавља заменом добијених вредности  $\mathbf{A}$  у векторе  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{V}$  (једначине (5.86)-(5.89)) и поновним решавањем система алгебарских једначина (2.49) све док вредност остатка норми  $|\mathbf{R}|$  не постане мањи од задате толеранције (у нашем случају мањи од  $10^{-5}$ ).

Применом методе нумеричке континуације се добијају одговарајући амплитудно-фреквентни одзиви система.

### 5.3.3 Применом Њумарк методе

Разматра се једначина кретања (5.72) у два узастопна временска корака:

$$\begin{aligned} &\Omega^2 \Delta \ddot{q}_i + \omega_0^2 \Delta q_i + \theta (\Delta q_i)^3 \\ &+ \gamma \Omega^\alpha \left( {}_{GL}D_{0, \bar{\tau}_i}^\alpha q_i - {}_{GL}D_{0, \bar{\tau}_{i-1}}^\alpha q_{i-1} \right) = f_0 + \Delta f_i, \end{aligned} \quad (5.95)$$

где је:

$$\Delta f_i = f_1 \cos \bar{\tau}_i. \quad (5.96)$$

Заменом израза (4.11) у једначину (5.95) добија се:

$$(\Omega^2 + \gamma \Omega^\alpha D_{03}) \Delta \ddot{q}_i + \gamma \Omega^\alpha D_{02} \Delta \dot{q}_i + (\omega_0^2 + \gamma \Omega^\alpha D_{01}) \Delta q_i + \theta (\Delta q_i)^3 = f_0 + \Delta f_i - \Delta f_{kor}, \quad (5.97)$$

где је:

$$\begin{aligned} \Delta f_{kor} = & \gamma \Omega^\alpha \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_{i-j} \\ \Delta \dot{q}_{i-j} \\ \Delta \ddot{q}_{i-j} \end{bmatrix} + \dots + \\ & \gamma \Omega^\alpha \begin{bmatrix} D_{(k-1)1} & D_{(k-1)2} & D_{(k-1)3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_{i-(k-1)j} \\ \Delta \dot{q}_{i-(k-1)j} \\ \Delta \ddot{q}_{i-(k-1)j} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Треба напоменути да у случају када је  $\Delta f_i = const$ , једначина (5.97) може бити решена Рунге-Кута методом, која је имплементирана преко функције `ode45` у програму Matlab. Ако то није случај, нелинеарна једначина (5.97) се може решити Њумарк-Бета методом, која је дата Алгоритмом 1. Треба само водити рачуна да је алгоритам дат за нелинеарни систем диференцијалних једначина, и да у алгоритму скаларна променљива  $q$  узима место векторској  $u$ . У кораку 6 алгоритма, тражење инверзне матрице и множење њоме се своди на просто дељење два броја.

## 5.4 Нумерички резултати

Методологија која је представљена у претходним поглављима је примењена да би се добило решење фракционе диференцијалне једначине Дуфинговог типа (5.41), која описује једначину временских функција малих трансверзалних осцилација модела греде са слике 5.2. Решавањем ове једначине може се испитати динамика и појава резонантних режима, као и утицаји разних параметара (параметри фракционог виско-Пастернаковог слоја, мали параметри нелокалне и дилатацијско градијентне теорије, спољашње силе побуде, степеног индекса ФГ материјала), који изазивају исте. Комбинација методе инкременталног хармонијског баланса и методе нумеричке континуације је уведена да би се пратиле и исцртале гране периодичног решења нелинеарног модела посматране греде са директном трансверзалном хармонијском побудом.

Добијени дијаграми, који представљају периодички одзив, дати су у облику амплитудно-фреквентних кривих. Најпре су одређене сопствене фреквенције осциловања за два различита модела, добијена упрошћавањем нашег модела, и резултати су компатибилни са онима који се могу наћи у литератури (Табеле 5.1 и 5.2). У другом делу нумеричке студије је испитана тачност резултата добијених методом инкременталног хармонијског баланса (Слике 5.3, 5.4, 5.6), која је касније коришћена у параметарској студији у фреквентном (Слике (5.5, 5.7-5.14)) и временском домену (Слика 5.15). Показано је да фракциони виско-Пастернаков слој има значајан утицај на амплитудно-фреквентне одзиве. Тачност резултата добијених методом инкременталног хармонијског баланса је упоређивана са резултатима добијеним пертурбационом методом вишеструких временских скала и Њумарковом методом. Након тога је урађена параметарска анализа утицаја различитих параметара на одзив. Резултати су указали на значај првог и трећег хармоника.

Вредности датог механичког модела су узети из рада [125] и проширени параметрима за фракциони виско-Пастернаков слој и функционално расподељени материјал, и представљени у табели 5.3. Статички део силе побуде  $Q_0$  је занемарен, а њен динамички део  $Q_1$  је дат у табели. Када је параметар од интереса мењан дијаграми су добијени за вредности осталих параметара које су исте као у табели 5.3. Поред тога треба напоменути да је број хармоника узетих у Фуријеовом развоју  $N = 6$  и то у свим нумеричким примерима.

Табела 5.1: Првих пет бездимензионих природних фреквенција осциловања Ојлер - Бернулијеве греде са локалним ефектом на Винклер - Пастернаковој подлози за граничне услове просто ослоњене греде ( $k_1 = 25, k_2 = 25$ )

Добијене вредности	Рад [215]	Рад [34]	Рад [216]	Рад [217]
19.2133	19.2133	19.2133	19.21	19.2178
50.7002	50.7002	50.7002	50.7	50.7804
100.6767	100.677	100.6767	100.7	-
170.0281	170.028	170.0281	170.1	-
258.9868	258.987	258.9868	259.1	-

Табела 5.2: Поређење првих пет бездимензионих природних фреквенција осциловања Ојлер-Бернулијеве греде за различите вредности нелокалног параметра  $\mu$  ( $L = 10, h = 1, \rho = 1, E = 30 \cdot 10^6, \nu = 0.3.$ )

$\mu$	Добијене вредности	Рад [14]	Рад [218]	Рад [219]
0	9.8293	9.8696	9.8298	9.8696
1	9.3774	9.4159	9.3814	9.4159
2	8.9826	9.0195	8.9892	9.0195
3	8.6338	8.6693	8.6424	8.6693
4	8.3228	8.3569	8.3329	8.3569

Амплитуде добијене методом инкременталног хармонијског баланса и одговарајући Фуријеови коефицијенти (6.21) и хармоници (6.20) су срачунати на следећи начин:

$$A_0 = a_0, \quad A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (5.99)$$

Приликом валидације пертурбационом методом вишеструких временских скала, мали бездимензиони параметар је усвојен као  $\varepsilon = 0.01$ .

### 5.4.1 Потврда резултата са више апроксимативних метода

Да би се проверило извођење једначине кретања (5.35) односно (5.32) и добијених решења, те прорачун сопствених кружних фреквенција, два упроштена модела из радова [14, 34, 215, 216, 217, 218, 219] су коришћена, модел са слике 5.2 је исти као и ови модели када се занемаре одређени параметри и резултати су дати у табелама 5.1 и 5.2.

Табела 5.1 пореди првих пет бездимензионалних природних фреквенција осциловања локалне (класичне) Ојлер-Бернулијеве просте греде, која осцилује на Винклер-Пастернаковој подлози са параметрима подлоге  $k_1 = 25, k_2 = 25$ , док су параметри  $\lambda, \Sigma, y, K_1, K_2, F_0, F_1$  и интегрални члан занемарени, са вредностима које су добили други аутори [34,

Табела 5.3: Вредности параметара представљеног механичког модела греде на подлози

Параметар	Симбол	Вредност
Фракциони извод	$\alpha$	0.5
Јунгов модуо на врху	$E_g$	390 GPa
Јунгов модуо на дну	$E_d$	210 GPa
Густина на врху	$\rho_g$	3960 kg/m <sup>3</sup>
Густина на дну	$\rho_d$	7800 kg/m <sup>3</sup>
Степени индекс	$k$	1
Висина греде	$h$	100 nm
Ширина греде	$b$	1 $\mu$ m
Дужина греде	$L$	10 $\mu$ m
Нелокални параметар	$\mu$	10 nm
Параметар дужинске скале	$l$	100 nm
Винклеров коеф. вискоеластичног слоја	$k_w$	0.0001 m <sup>-1</sup>
Винклеров коеф. вискоеластичног слоја	$K_w$	0.0001 N s <sup><math>\alpha</math></sup> /m <sup>3</sup>
Пастернаков коеф. вискоеластичног слоја	$k_g$	0.0001 m
Пастернаков коеф. вискоеластичног слоја	$K_g$	0.0001 N s <sup><math>\alpha</math></sup> /m
Амплитуда силе побуде	$Q_1$	0.003 N

215, 216, 217], где се може уочити добро поклапање резултата.

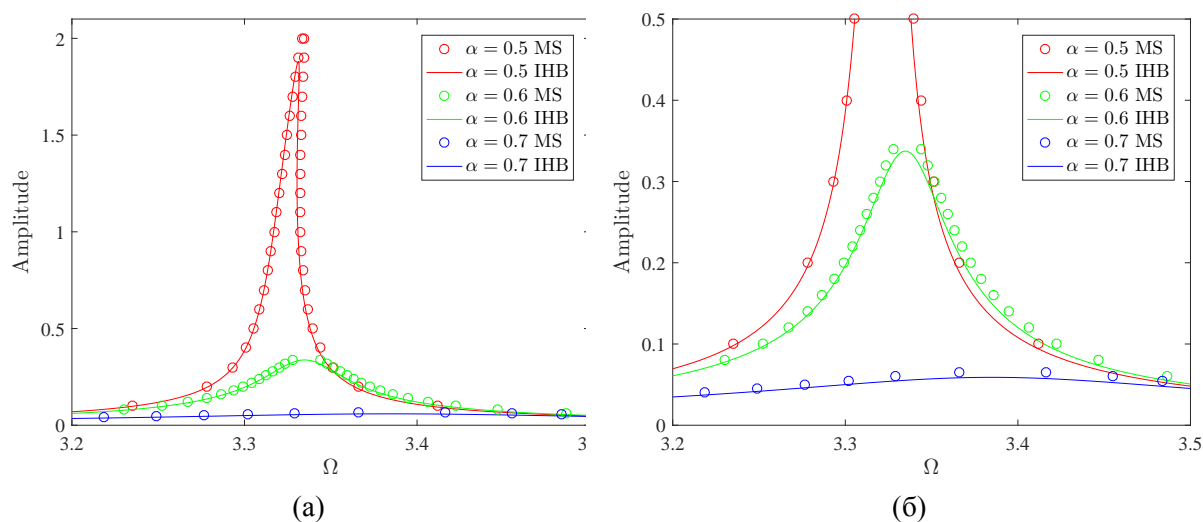
Поред тога, упоређена је прва сопствена бездимензионална фреквенција осциловања просто ослоњене нелокалне Ојлер-Бернулијеве греде са различитим вредностима нелокалног параметра (параметра напонског градијента)  $\mu$  са резултатима пронађеним у доступној литератури [14, 218, 219]. Сопствена бездимензионална фреквенција осциловања је добијена за упрошћени модел односно једначину (5.32) која је упрошћена, тако што  $l, k_w, k_g, K_w, K_g, Q_0, Q_1$  и члан са интегралом занемарујемо, а  $m_0 = \rho A, m_2 = \rho I, A_{xx} = EA, D_{xx} = EI$ . Може се видети из табеле 5.2 да резултати показују добро слагање.

У сврху демонстрације поузданости и прецизности предложеног приступа (методологије) за одређивање амплитудно-фреквентног одзива и одговарајућих периодичних решења, резултати добијени методом ИХБ упоређени са резултатима добијеним другим два методама - пертурбационом методом вишеструких временских скала и директном нумеричком интеграцијом коришћењем Њумарк методе. Прва од ове две додатне методе је употребљена за добијање и валидацију амплитудно-фреквентних дијаграма одзива, док је друга метода искоришћена да би се проверила тачност добијених резултата за периодична кретања на жељеним фреквенцијама побуде.

Најпре су резултати верификовани поређењем амплитудно-фреквентних одзива стационарног стања за суперхармонијски случај резонанције  $\Omega = \frac{1}{3}\omega_0$  добијених методом ИХБ са резултатима добијеним методом вишеструких временских скала, као што је дато на сликама 5.3 и 5.4. На тим сликама, амплитуде одзива дате на ординатној вертикалној

оси одговарају максималном отклону малих трансверзалних померања, док је фреквенција побуде  $\Omega$  на апцисној хоризонталној оси.

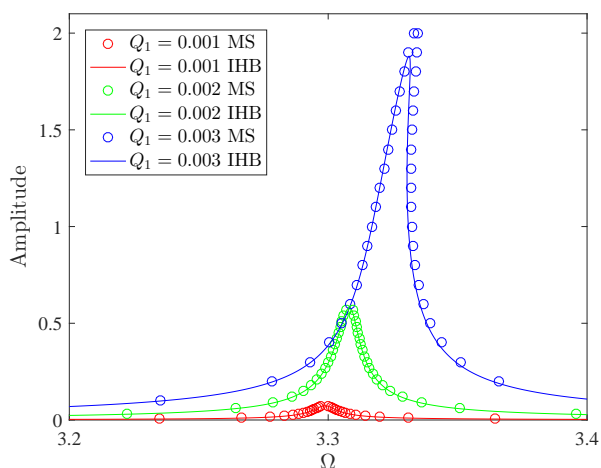
На слици 5.3 су дате криве амплитудно-фреквентног одзива за хармонијску амплитуду временске функције  $A_3$  (амплитуда трећег хармоника временске функције осциловања добијена из једначине (5.99) за  $i = 3$ , и за први карактеристични облик осциловања греде тј.  $n = 1$  у изразу (5.36)) добијене методом ИХБ, и амплитуде које одговарају фреквенцији побуде  $\Omega = \frac{1}{3}\omega_0$  добијене коришћењем метода вишеструких временских скала. Фракциони параметар  $\alpha$  је вариран. Слика 5.3 (б) представља увећан део слике 5.3 (а), да би се јасније могли упоредити добијени резултати. Са слике 5.3 се може уочити да се резултати добијени са те две методе добро поклапају. Поред тога, може се уочити да пораст фракционог параметра  $\alpha$  доводи до смањења амплитуде, која бива мало померена у десно ка већим фреквенцијама.



Слика 5.3: Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози (а). Слика (б) је увећана Слика (а). Периодични одзив добијен: ИХБ методом - пуна линија, методом вишеструких скала - кружићи.

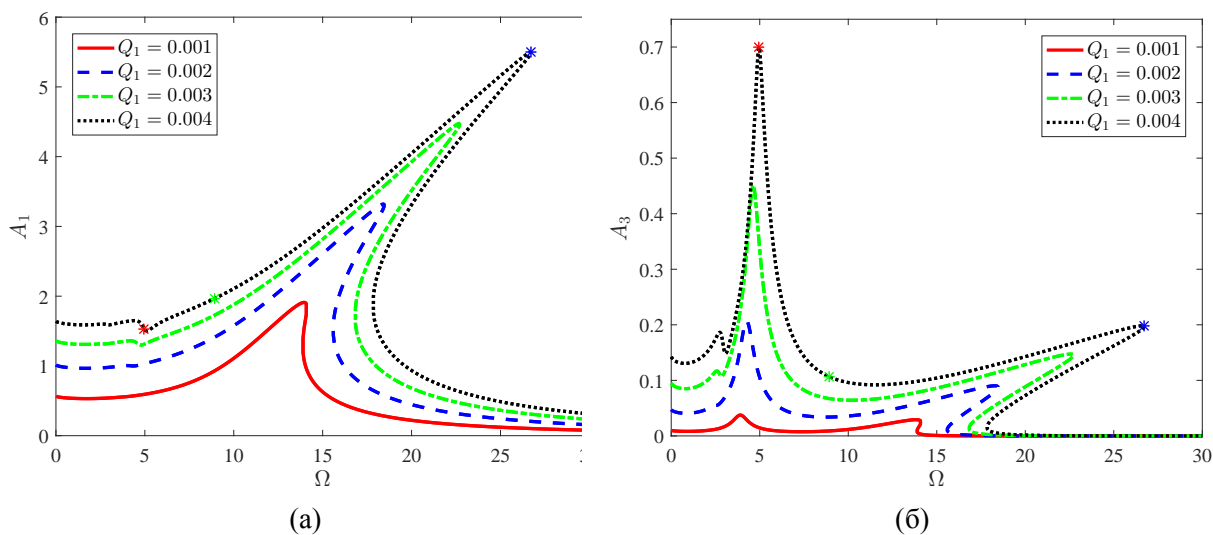
На слици 5.4 су дате криве амплитудно-фреквентног одзива за амплитуде  $A_3$  добијене коришћењем ИХБ методе и амплтуде одговарају фреквенцији побуде  $\Omega = \frac{1}{3}\omega_0$  добијене методом вишеструких временских скала. Амплитуде спољашње силе побуде су:  $Q_1 = 0.001$ ,  $Q_1 = 0.002$  и  $Q_1 = 0.003$ . Са те слике може се приметити добро поклапање резултата добијених са две различите методе. Поред тога, уочљиво је да пораст амплитуде силе спољашње побуде повећава амплитуду одзива и помера је надесно, ка већим фреквенцијама.

На сликама 5.5(а) и 5.5(б) су дате криве амплитудно-фреквентног одзива за амплитуде првог и трећег хармоника временске функције осциловања  $A_1$  и  $A_3$ , редом, које су представљене на ординати, док је фреквенција побуде  $\Omega$  на апсцији. Виши модови имају мање вредности амплитуда и то се види на сликама. На сликама се уочава да не само да



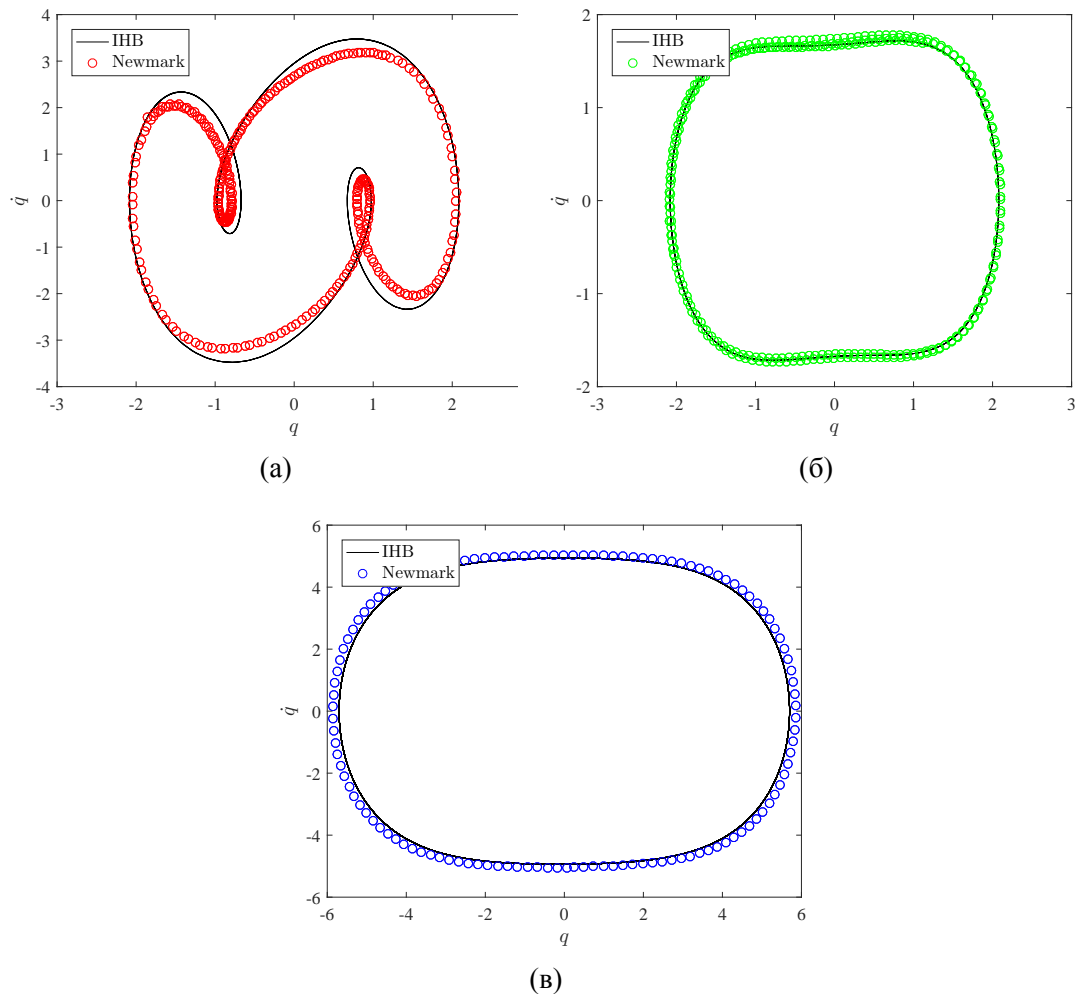
Слика 5.4: Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Периодични одзив добијен: ИХБ методом - пуна линија, методом вишеструких скала - кружићи.

максимална амплитуда расте, него су и криве фреквентног одзива померене у правцу виших фреквенција побуде, што одговара ефекту очвршћавања крутости (stiffness hardening) услед повећања магнитуде спољашње побудне силе. Ово померање може бити уочено за обе, прву (Слика 5.5 а) и трећу хармонијску амплитуду (Слика 5.5 б)). Такође, повећање магнитуде спољашње силе побуде доводи до значајног савијања амплитудно фреквентне криве тако да вишеструка периодична решења могу постојати у случају примарне резонанције код прве и треће хармонијске амплитуде.



Слика 5.5: Амплитудно-фреквентне криве одзива  $A_1$  - Слика (а) и  $A_3$  - Слика (б) нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози за различите вредности амплитуде побуде  $Q_1$ .

Три периодичне орбите су изабране са криве одзива за вредности фреквенција (означене звездицама на слици 5.5), које су онда валидоване методом базираном на Њумарк

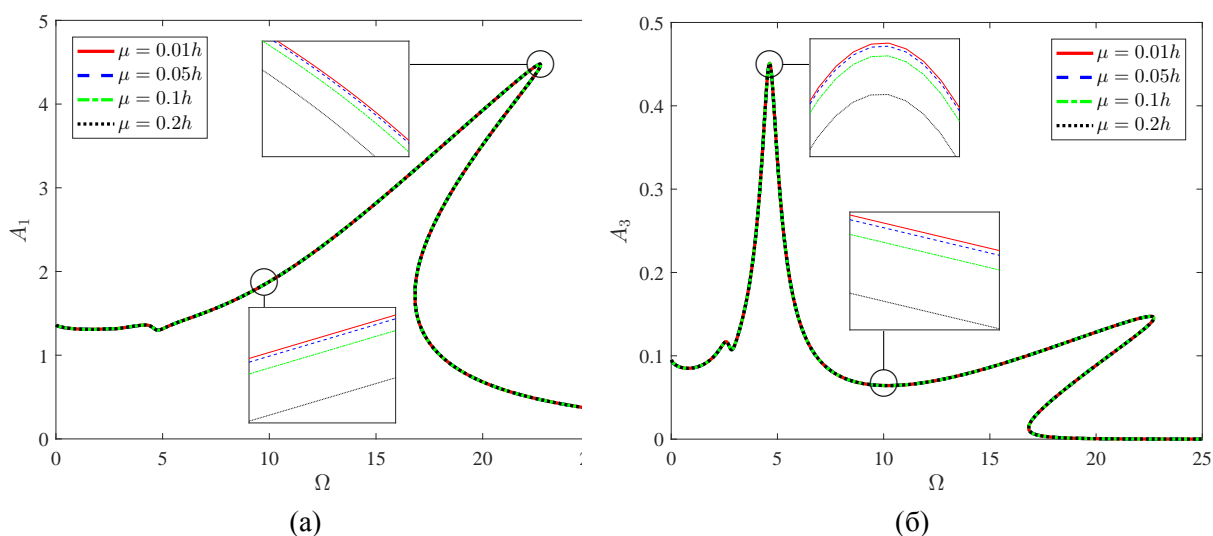


Слика 5.6: Периодични одзив добијен ИХБ и Њумарк методама за 3 различите фреквенције означене звездицама на слици 5.5 за вредности (а)  $\Omega \approx 5$ , (б)  $\Omega \approx 9$ , (в)  $\Omega \approx 27$ .

методи. Периодична решења су представљена у фазној равни, у којој је брзина дата на ординатној оси, док је померање представљено на апсциси, као што је представљено на подсликама а), б) и в) слике 5.6. Изабране су две тачке у близини резонантног стања и једна далеко од њега (звездице на слици 5.5). Са слике 5.6 се може уочити добро подударање резултата добијеним методама ИХБ и Њумарк. Међутим, боље поклапање резултата се постиже далеко од резонантног стања.

#### 5.4.2 Испитивање утицаја различитих параметара на динамику овог модела

У наредним примерима у овом поглављу је приказан утицај различитих параметара на амплитудно-фреквентни одзив, као што су: нелокални параметар, параметар дилатацијског градијента, степени индекс и параметри фракционе виско-Пастернакове подлоге. Утицај принудне силе је дискутован у претходном поглављу.



Слика 5.7: Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде  $A_1$  (а) и  $A_3$  (б) за различите вредности нелокалног параметра  $\mu$ .

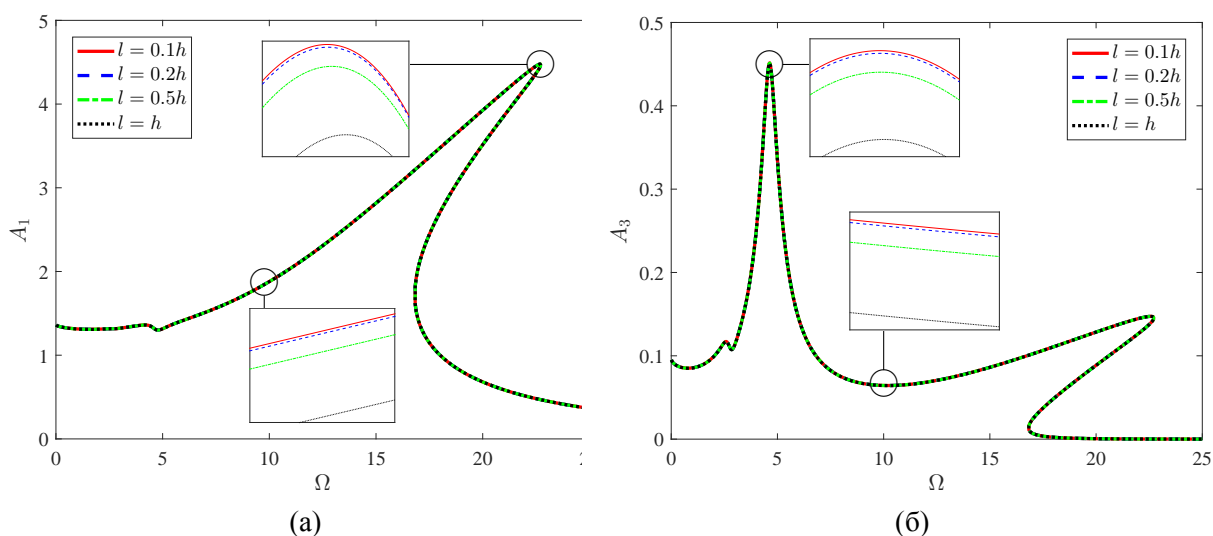
Слика 5.7 приказује карактеристични нелинеарни амплитудно-фреквентни одзив ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози са спољашњом силом принуде за амплитуде првог и трећег хармоника временске функције осциловања и различите вредности нелокалног параметра  $\mu$ . Поред тога, изабрани делови далеко и близу резонантног стања су увећани на сликама. На слици 5.7 се може уочити да промена нелокалног параметра има слаб утицај на обе, и прву и трећу хармонијску амплитуду осциловања. Као последица велике нелинеарности и крутости система, утицај нелокалног параметра на амплитудно-фреквентни одзив је мали, јер не може да дође до изражаја поред друге две величине. Другим речима, нелинеарност редукује утицај нелокалног параметра на динамички одзив система.

Криве амплитудно-фреквентног одзива за различите вредности параметра дужинске скале  $l$  су дате на слици 5.8 за амплитуду првог  $A_1$  и трећег  $A_3$  хармоника временске функције осциловања. Поред тога, одабрани делови далеко и блиско резонантном стању су увећани на сликама. Може се лако уочити да промена дужинског параметра  $l$  има мали утицај на амплитуде осцилација у случају примарне резонанце и мали утицај на максималну вредност амплитуде одзива. Услед велике нелинеарности и крутости система, утицај параметра дужинске скале на амплитудно-фреквентни одзив је мали. Другим речима, нелинеарност редукује утицај параметра дужинске скале на динамички одзив система.

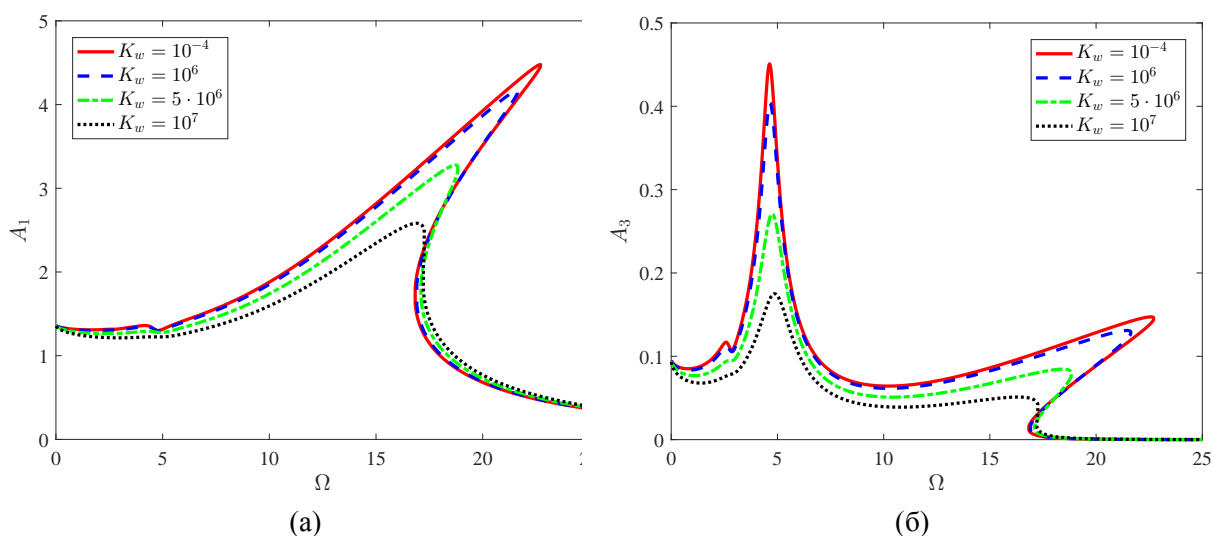
Иако је утицај параметра  $\mu$  и  $l$  мали ипак долази до незнатног смањења вредности амплитуда при порасту вредности ових параметара.

Утицај промене параметра  $K_w$  фракционе виско-Пастернакове подлоге на амплитудно-фреквентни одзив је испитан за амплитуде првог  $A_1$  (Слика 5.9 а)) и трећег хармоника  $A_3$  (Слика 5.9 б)) временске функције осциловања. Може се уочити да повећање параме-





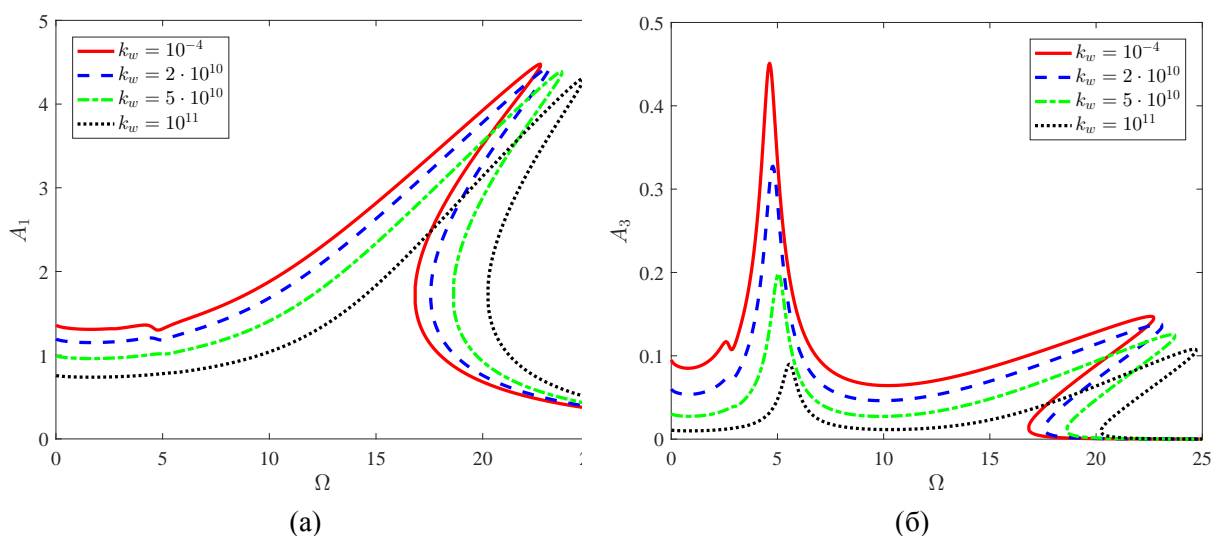
Слика 5.8: Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде  $A_1$  (а) и  $A_3$  (б) за различите вредности нелокалног малог параметра дужинске скале  $l$ .



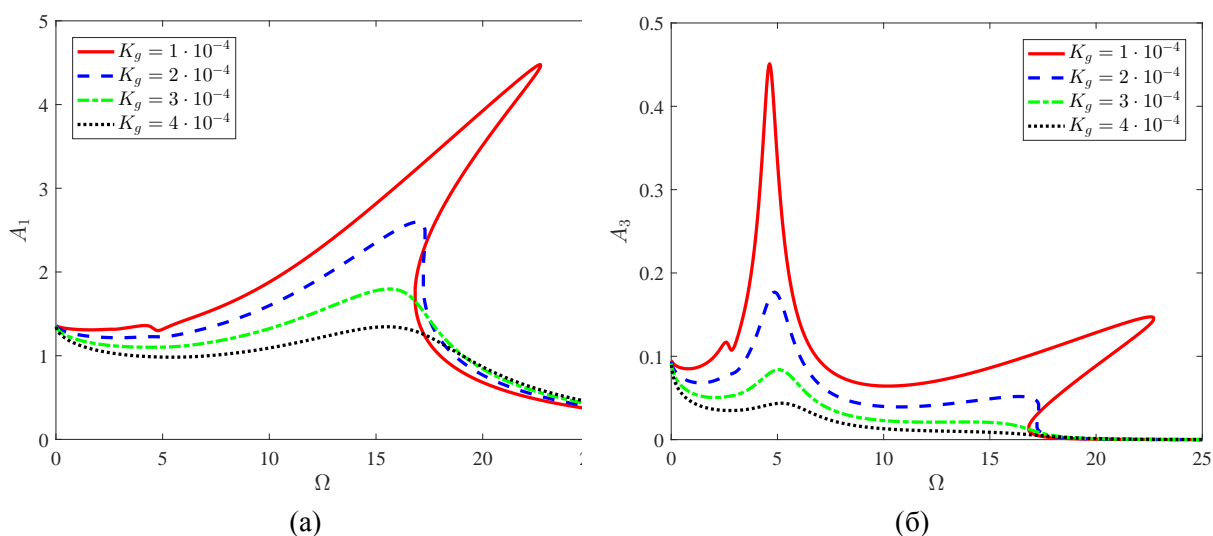
Слика 5.9: Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде  $A_1$  (а) и  $A_3$  (б) за различите вредности параметра  $K_w$ .

тра  $K_w$  доводи до смањења амплитуде одзива и последично повећавања укупне крутости система. Штавише, повећањем  $K_w$  као параметра пригушења, смањују се природне фреквенције осциловања система и због тога се резонантна фреквенција помера улево. Поред тога, може се уочити да се угао нагиба криве у односу на вертикалну осу, као и амплитуда, смањују са повећањем параметра  $K_w$ , што за резултат истовремено има слабљење укрупљујућег нелинеарног ефекта (hardening type).

Слика 5.10 приказује криве амплитудно-фреквентног одзива за прву  $A_1$  (Слика 5.10 а)) и трећу хармонијску амплитуду  $A_3$  (Слика 5.10 б)) при промени параметра подлоге



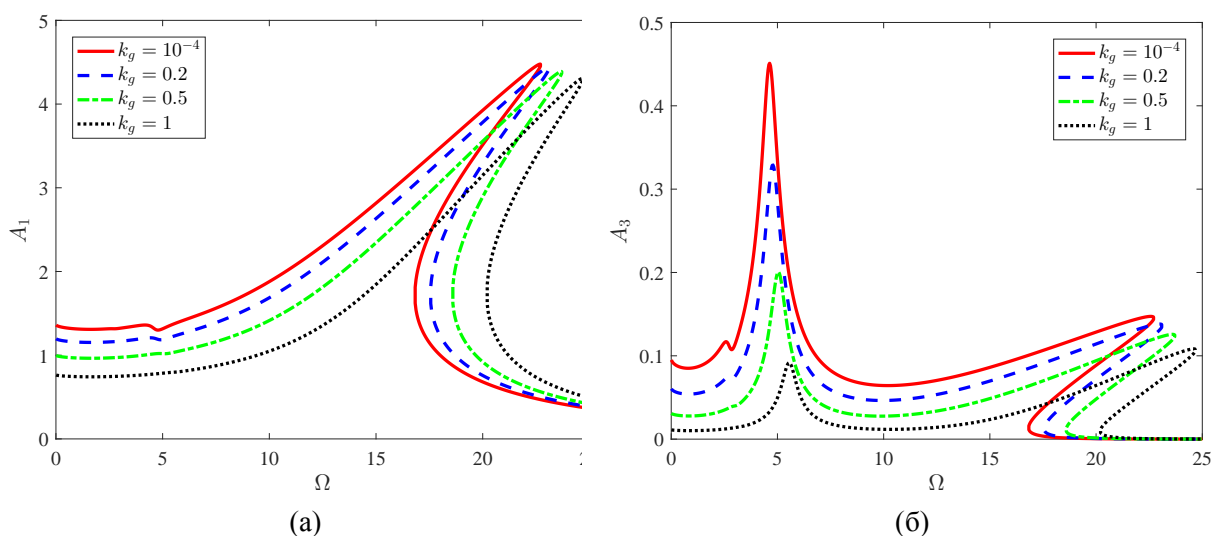
Слика 5.10: Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде  $A_1$  (а) и  $A_3$  (б) за различите вредности параметра  $k_w$ .



Слика 5.11: Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде  $A_1$  (а) и  $A_3$  (б) за различите вредности параметра  $K_g$ .

$k_w$ . Може се уочити да повећање параметра  $k_w$  доводи до смањења амплитуде са ефектом стабилизације осцилација система и тиме се укупна крутост система увећава. Поред тога, повећање  $k_w$  као параметра пригушења смањује природне фреквенције система и помера резонантну фреквенцију удесно.

Амплитудно-фреквентне криве одзива амплитуда првог  $A_1$  (Слика 5.11 а)) и трећег  $A_3$  (Слика 5.11 б)) хармоника осциловања су дате за различите вредности параметра фракционе виско-Пастернакове подлоге  $K_g$ . Са слике се може приметити да повећање параметра  $K_g$  доводи до смањења резонантних амплитуда, које су уједно померене улево. То је ин-



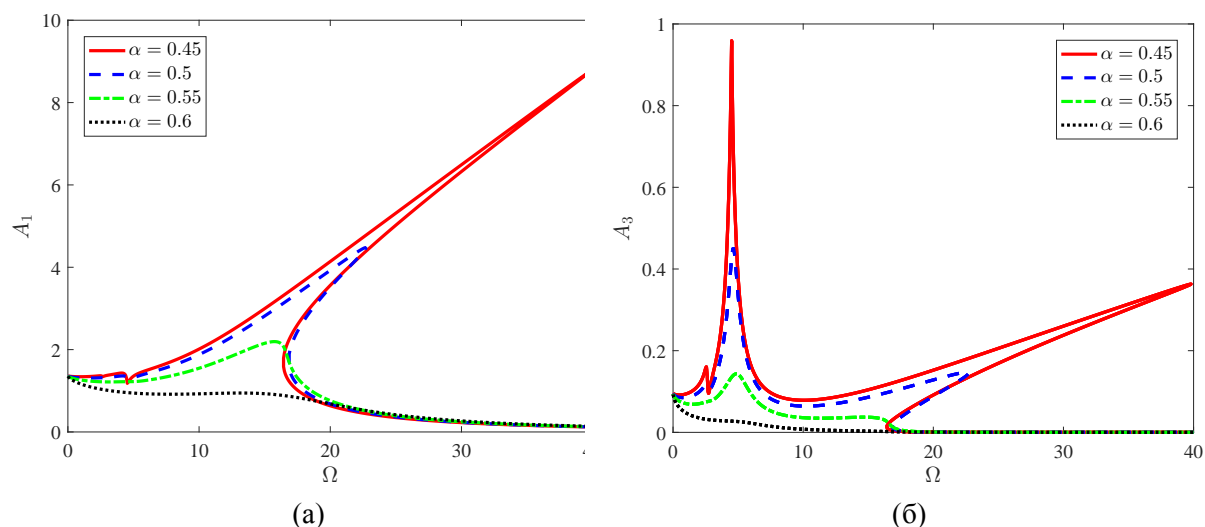
Слика 5.12: Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде  $A_1$  (а) и  $A_3$  (б) за различите вредности параметра  $k_g$ .

дикатор да пораст параметра  $K_g$  повећава укупну крутост система. Штавише, повећање параметра  $K_g$  проузрокује слабљење утицаја ефекта нелинеарног очвршћавања. Наиме, очвршћујући тип (hardening-type) нелинеарности, као што је случај на слици 2.1 в) има израженији утицај, када је параметар пригушења  $K_g$  мањи.

Слика 5.12 приказује криве амплитудно-фреквентног одзива за прву  $A_1$  (Слика 5.12 а)) и трећу хармонијску амплитуду  $A_3$  (Слика 5.12 б)) при различитим вредностима параметра подлоге  $k_g$ . Може се приметити да повећање параметра  $k_g$  доводи до смањења резонантне амплитуде која истовремено бива померена удесно значајно појачавајући ефекат очвршћавања нелинеарности. То указује да пораст параметра  $k_g$  повећава укупну крутост система.

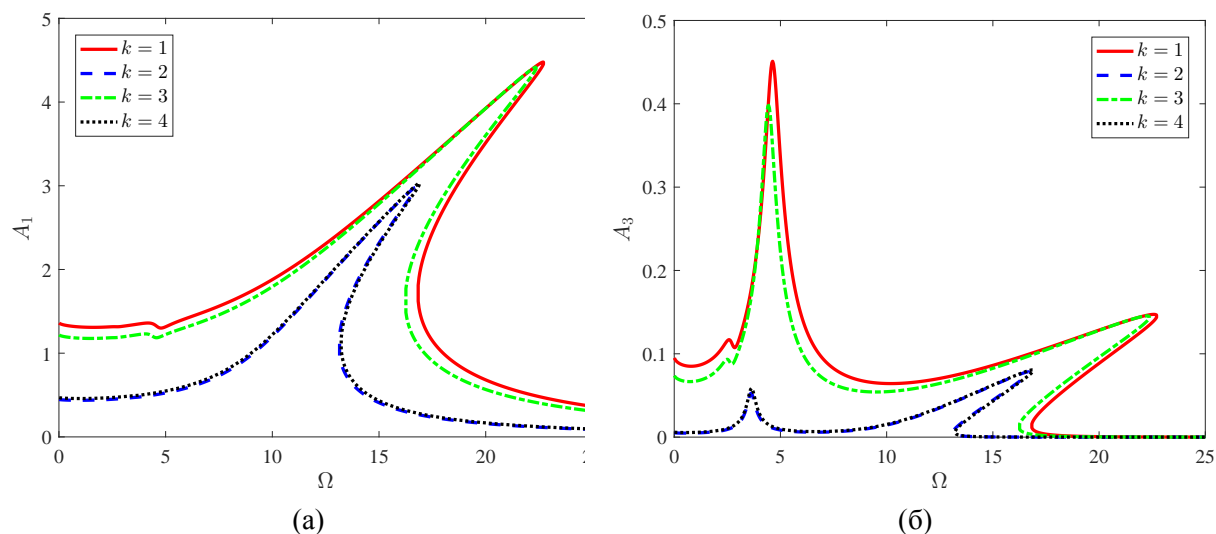
Поређењем утицаја параметара  $K_w, k_w, K_g, k_g$ , може се приметити да повећање параметра  $K_g$  има већи утицај на повећање укупне крутости система од повећања параметра  $K_w$ , без обзира на то што оба параметра доприносе смањењу амплитуде. С друге стране, повећања  $k_g$  и  $k_w$  стварају сличне ефекте померања амплитудно-фреквентних кривих надесно ка вишим вредностима фреквенције спољашње побуде са благим смањењем амплитуде.

Амплитудно-фреквентне криве одзива за прву  $A_1$  (Слика 5.13 а)) и трећу хармонијску амплитуду  $A_3$  (Слика 5.13 б)) су дате за различите вредности параметра фракционог извода  $\alpha$  у моделу виско-Пастернакове подлоге. Може се приметити да смањење фракционог параметра  $\alpha$  за корак 0,05 доводи до скоро двоструког увећавања амплитуде у случају примарне резонације. Овај значајан утицај параметра  $\alpha$  је проузрокован тиме што својства пригушења система постају мање изражена услед еластичног понашања фракционог члана. Штавише, смањење параметра реда фракционог извода  $\alpha$  доводи до повећања



Слика 5.13: Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде  $A_1$  (а) и  $A_3$  (б) за различите вредности фракционог параметра  $\alpha$ .

коэффициента еквивалентне крутости, што резултује савијањем амплитудно-фреквентних кривих удесно и већим фреквенцијама примарне резонанције.



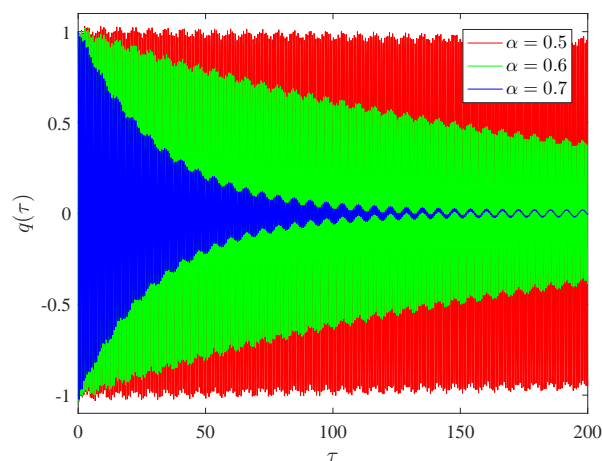
Слика 5.14: Амплитудно-фреквентне криве одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде  $A_1$  (а) и  $A_3$  (б) за различите вредности степеног индекса материјала  $k$ .

Амплитуде првог  $A_1$  (Слика 5.14 а)) и трећег хармоника  $A_3$  (Слика 5.14 б)) амплитудно-фреквентног одзива су дате за различите вредности степеног индекса  $k$  који описује ФГ материјал. Може се приметити да за  $k = 1$  и  $k = 3$  резонантне фреквенције и домен нелинеарног хистереzиса постају већи и амплитудно-фреквентне криве више померене и савијене ка позитивном смеру апсцисне осе у односу на случај када је  $k = 2$  и  $k = 4$ . Ово се може приписати повећаном својству крутости нелокалне греде за непарне вред-

ности степеног индекса, које повећавају нелинеарност отврдњавања и својства крутости система.

### 5.4.3 Анализа амплитудно-временских дијаграма

У овом поглављу су приказани временски одзиви система добијени Њумарк методом. Утицаји параметра фракционог извода  $\alpha$  (Слика 5.15) су испитани да би се показао њихов утицај на временски-зависно понашање система. Да би се разумео утицај фракционог виско-Пастернаковог слоја на почетну хармонијску побуду греде, следећи почетни услови су усвојени  $q(0) = 1$ ,  $\dot{q}(0) = 1$ . За фракциони параметар су усвојене вредности  $\alpha = 0.5, 0.6, 0.7$ . Бездимензиони временски период  $T = 200$  је коришћен у симулацији. Овде се може доћи до сличних закључака као и за амплитудно-фреквентни одзив. Може се уочити да повећање фракционог параметра  $\alpha$  доводи до јачег пригушења у времену и смањења и слабљења амплитуда. Такође, може се уочити феномен слабог подрхтавања са скраћивањем периода осциловања.



Слика 5.15: Временски одзив нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози. Амплитуде за различите вредности фракционог параметра  $\alpha$ .

### 5.4.4 Стабилност за специјални случај без фракционих извода ( $\alpha = 1$ )

У овом поглављу се испитује стабилност периодичних решења за специјални случај када параметар реда извода, који је у претходном поглављу био фракциони, износи  $\alpha = 1$ . У том случају се нелинеарна диференцијална једначина са фракционим изводом (5.72) своди на облик (2.56), односно нелинеарну диференцијалну једначину другог реда [175]. Стабилност решења је овде испитана применом Флокеове теорије, која је представљена у поглављу 2. Примењене су методе ИХБ и нумеричке континуације за праћење грана пе-

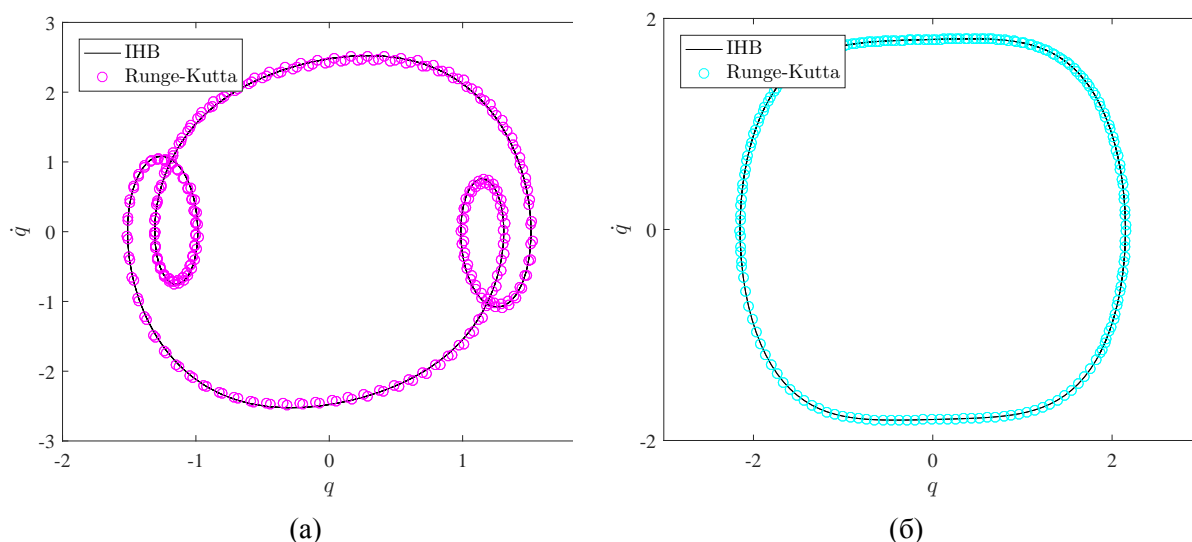
риодичних решења нелинеарних осцилација нелокалне ФГ греде на виско-Пастернаковој подлози са трансверзалном хармонијском побудом.

Флокеова теорија је примењена да би се проверила стабилност периодичних решења на датим амплитудно-фреквентним кривама. Да би решења за варијацију одређених параметара била графички добро уочљива, коришћене су вредности физичких параметара из табеле 5.4, које се мало разликују у односу на вредности које су коришћене за претходне анализе, када је било  $0 < \alpha < 1$ . Преостале вредности параметара су узете из табеле 5.3.

Табела 5.4: Вредности параметара представљеног механичког модела греде на подлози, за  $\alpha = 1$

Параметар	Симбол	Вредност
Винклеров коеф. вискоеластичног слоја	$k_w$	$1e-8 \text{ m}^{-1}$
Винклеров коеф. вискоеластичног слоја	$K_w$	$1e-8 \text{ N s}^\alpha / \text{m}^3$
Пастернаков коеф. вискоеластичног слоја	$k_g$	$1e-8 \text{ m}$
Пастернаков коеф. вискоеластичног слоја	$K_g$	$1e-8 \text{ N s}^\alpha / \text{m}$
Амплитуда силе побуде	$Q_1$	$0.002 \text{ N}$

И овде је број хармоника узетих након Фуријеовог развоја  $N = 6$ . Амплитуде добијене методом ИНВ и одговарајући Фуријеови коефицијенти (5.79) и хармоници (5.78) су срачунати преко једначине (5.99).



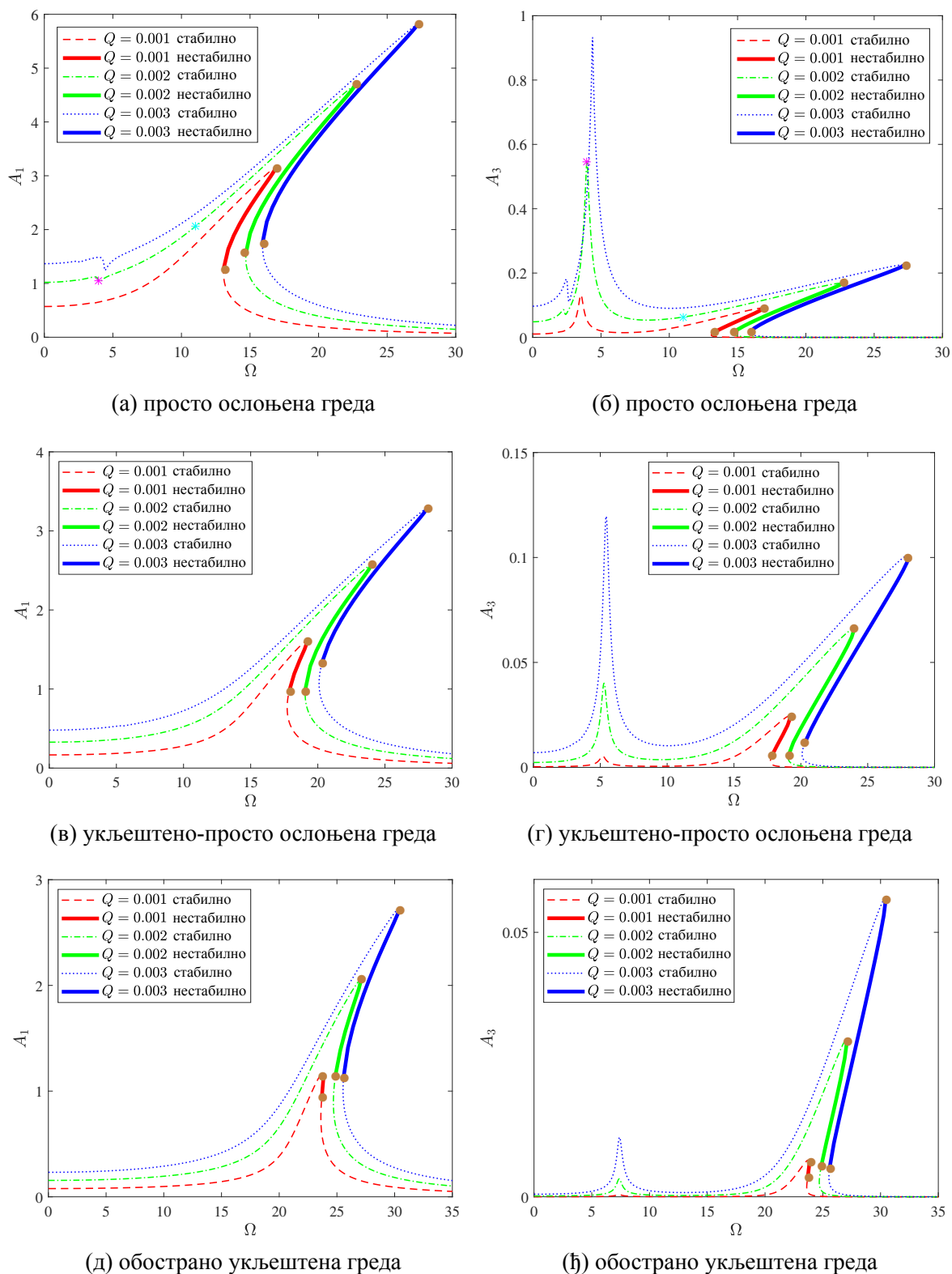
Слика 5.16: Периодични одзив добијен ИХБ и Рунге-Кута методом за 2 тачке обележене љубичастом и светло плавом звездом на слици 5.17 (а), (б).

Да би се демонстрирала поузданост и прецизност представљених метода за одређивање периодичних решења и амплитудно-фреквентних одзива, добијени резултати са ИХБ методом су упоређени са резултатима добијеним директном нумеричком интеграцијом

применом Рунге-Кута (Runge-Kutta) методе. Два периодична решења су упоређена на слици 5.16. Та изабрана периодична решења су обележена са љубичастом и плавом звездом на слици 5.17 (a,b). Може се приметити добро поклапање решења добијених са поменуте две методе на слици 5.16.

У наставку је приказано како сила побуде, параметри ФГ материјала и подлоге, утичу на амплитудно-фреквентни одзив и стабилност решења, код амплитуде првог и трећег хармоника временске функције осциловања за различите граничне услове посматране греде.

Слика 5.17 (a) и (b) приказује криве амплитудно-фреквентног одзива просто ослоњене греде за амплитуде првог и трећег хармоника временске функције, које су дате на ординати, док је фреквенција побуде  $\Omega$  на апсциси. Овде се може приметити да се максимална амплитуда повећава у две резонантне фреквенције. Два таква региона могу се приметити на фреквенцијама око  $\Omega = 4$  и  $\Omega = 16 - 27$ , у зависности од силе побуде  $Q$ . У случају прве доминантне амплитуде  $A_1$ , ова промена је слаба у првом резонантном региону, док је веома висока у другом региону, где се нелинеарна крутост учвршћава (повећан нагиб на десно). Овде се може посматрати понашање скока надоле и скока навише, као и коегзистирајућа периодична решења, што је карактеристика овог нелинеарног феномена [220]. С друге стране, упркос много нижим вредностима од  $A_1$ , амплитуде  $A_3$  показују повећање у првом резонантном региону које је израженије у поређењу са онима које се јављају у другом региону, али приказују само линеарно понашање. Међутим, у другом резонантном региону, јака нелинеарна крутост се јавља, чак и за веома ниске вредности амплитуде. Повећањем магнитуде силе побуде  $Q$ , повећава се и вредности амплитуде и резонантни скокови. Услед повећања фреквенције побуде  $\Omega$ , почевши од малих вредности, долази до промене амплитуда одзива до тачке када периодични одзив губи своју стабилност. Ова критична тачка позната као тачка прегипа (fold point) дата је као горња браон тачка на слици 5.17. Може се приметити да даље померање фреквенције унапред производи другу грану стабилних периодичних решења, која је такође позната као доња грана периодичних решења. Може се приметити да горња грана амплитуде расте до критичног момента (пика одзива) који представља максималну вредност амплитуде одзива. У овој вршној тачки, периодична решења губе своју стабилност што доводи до феномена скока амплитуде одзива, односно наглог скока амплитуде одзива на знатно ниже вредности. Даље повећање фреквенције производи стабилна периодична решења. С друге стране, у смеру смањивања фреквенције почев од вредности виших од резонантне фреквенције, амплитуда одзива се полако повећава до критичне тачке (још једна тачка преклопа) где периодично решење губи стабилност и долази до појаве скока. Ако додатно смањимо фреквенцију побуде, јавља се још једна стабилна (горња) грана периодичних решења. Гране нестабилних периодичних решења приказаних као дебеле пуне линије могу се детектовати између две различите тачке прегипа (fold points) исте криве применом методе праћења путање (нумеричке континуације) у комбинацији са Флокеовом теоријом. Слична запажања се могу направити на слици 5.17 (ц)-(ф), за граничне услове укљештено-просто ослоњене и обо-



Слика 5.17: Криве амплитудно-фреквентих одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози за следеће граничне услове: просто ослоњени (а,б), укљештено-просто ослоњени (в,г) и обострано укљештени (д,ђ). Амплитуде  $A_1$  и  $A_3$  за различите вредности магнитуде спољашње силе побуде  $Q$ . Нестабилна периодична решења су представљена задебљаним пуним линијама.



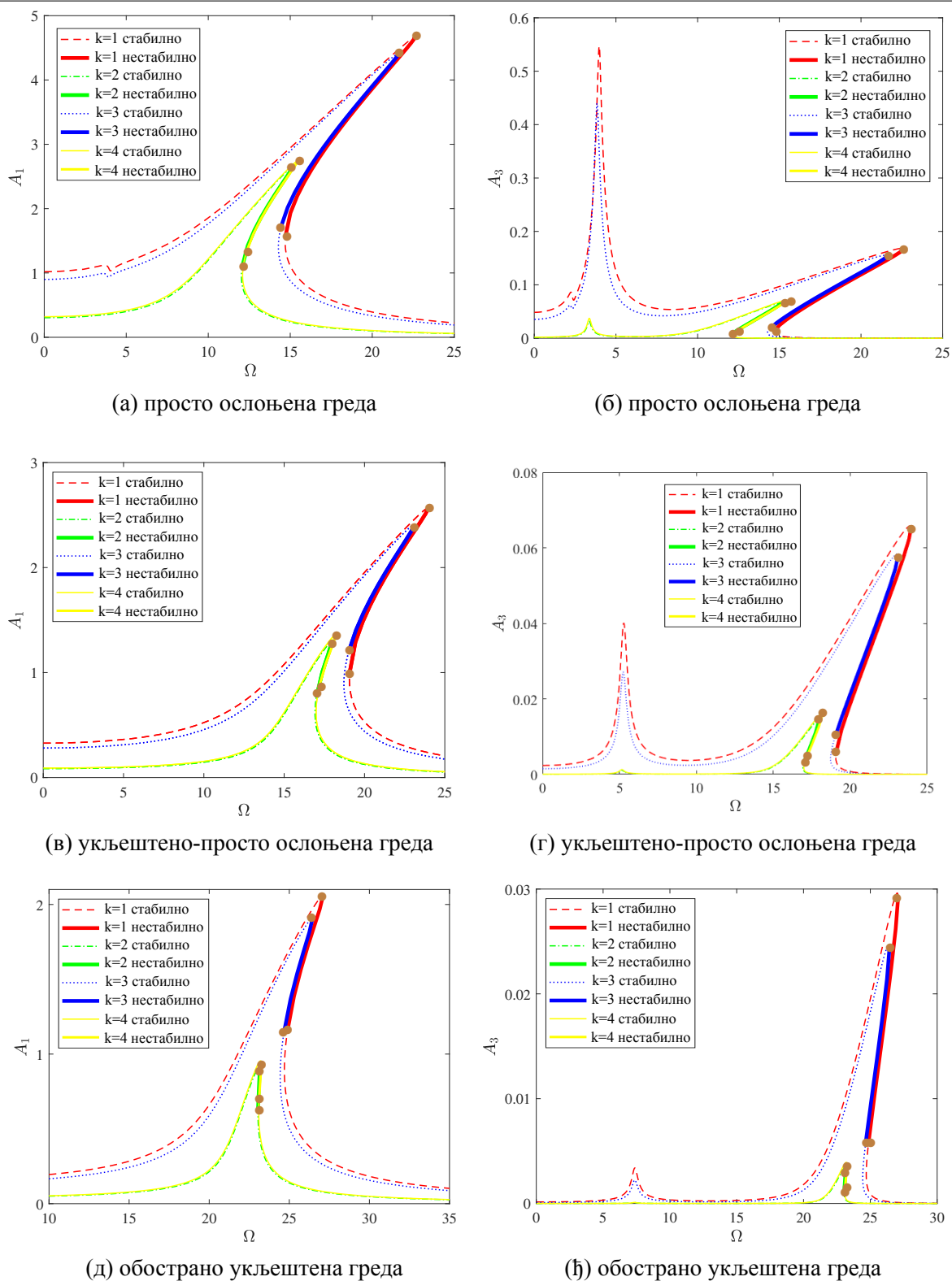
страно укљештене греде.

Слика 5.18 приказује амплитудно-фреквентни одзив за четири различите вредности параметра  $k$  ФГ материјала. Код просто ослоњене греде прате се први (Слика 5.18 (а)) и трећи хармоник (Слика 5.18 (б)) временске амплитуде, који приказују стабилну и нестабилну грану одзива. Линеарни раст амплитуде одзива  $A_1$  (или  $A_3$ ) се јавља за повећање фреквенције побуде од неких малих вредности до тачке прегипа (fold point) када периодични одзив губи своју стабилност. Исто као у претходном случају, даље повећање фреквенције производи доњу грану стабилних периодичних решења. Дакле, горња грана амплитуде расте до критичног момента (пика одзива) који представља максималну вредност амплитуде одзива. На овом врхунцу, периодична решења губе своју стабилност што доводи до феномена скока наниже амплитуде одзива. С друге стране, у смеру смањења фреквенције, почевши од вредности виших од резонантне фреквенције, показује споро повећање до критичне тачке у којој периодично решење губи стабилност и долази до феномена скока навише. Даље смањење фреквенције побуде даје стабилну (горњу) грану периодичних одзива. Гране нестабилних периодичних решења могу се детектовати између две тачке нестабилности (доња и горња браон тачка на слици 5.18 и представљене су дебљим пуним линијама. У овим нестабилним тачкама, Флокеови множитељи излазе из јединичног круга комплексне равни као што је приказано на слици 5.21. Слична запажања се могу направити за граничне услове укљештено-просто ослоњене и обострано укљештене греде. (Слика 5.18 (ц)-(ф)).

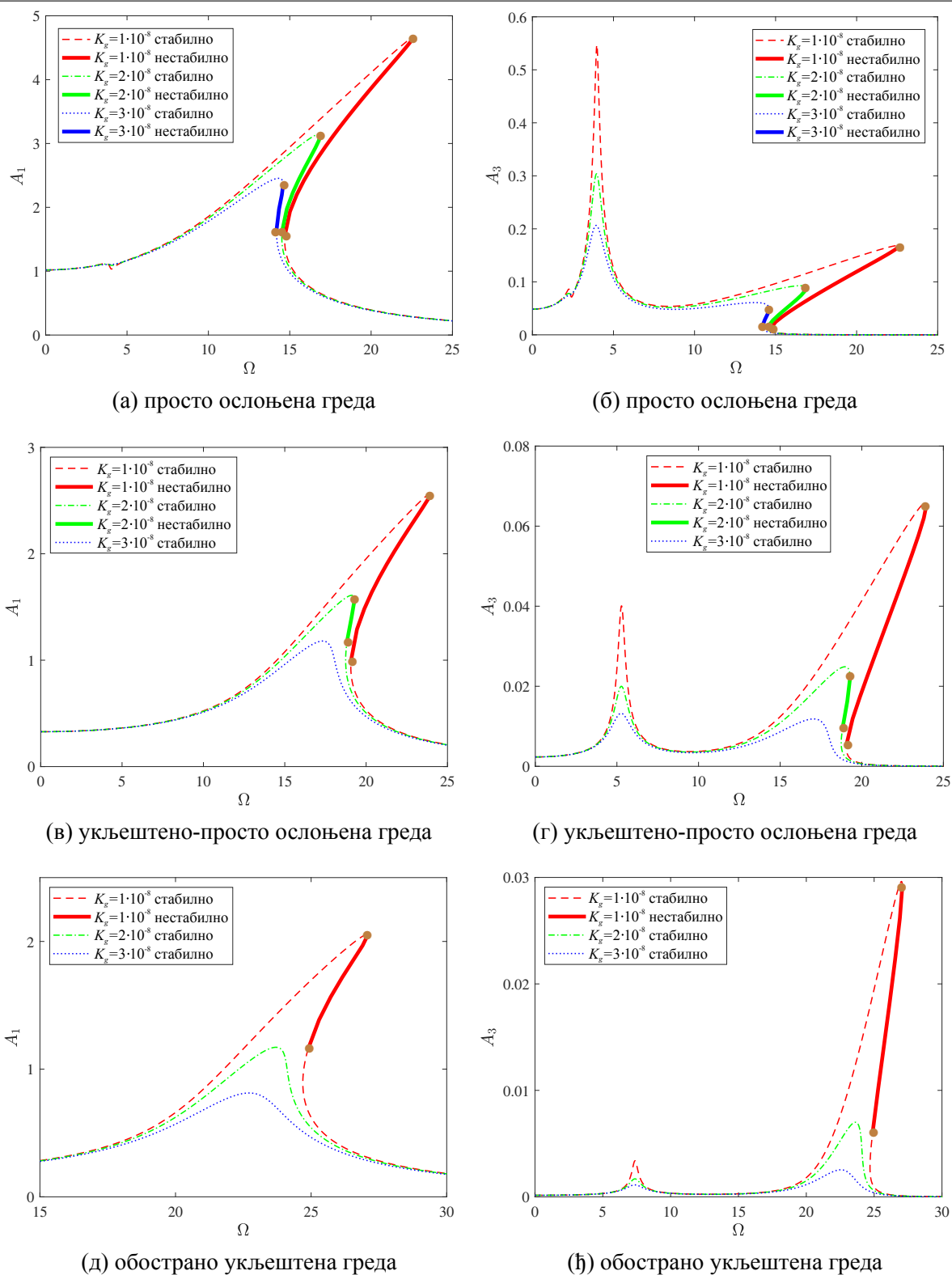
Слика 5.19 приказује криве амплитудно-фреквентног одзива за промене параметра  $K_g$  виско-Пастернакове подлоге. Може се приметити да промена овог параметра даје сличне облике криве амплитудно-фреквентног одзива, које показују нелинеарно понашање крутости учвршћивања. Штавише, повећање параметра  $K_g$ , повезаног са вискозним својствима темеља, доводи до смањења вредности амплитуде пика. Последице, то доводи до скраћења нестабилних грана (дебље пуне линије) периодичних решења која се налазе између одговарајућих тачака прегипа (fold points). Ово понашање се може посматрати за обе амплитуде  $A_1$  и  $A_3$ . За граничне услове укљештено-просто ослоњене и обострано укљештене греде, повећање параметра  $K_g$  може чак да стабилизује систем тако што нестане нестабилни регион (подебљана линија).

Да би се проучио утицај типа граничних услова на криву амплитудно-фреквентног одзива, три различита случаја (просто ослоњена, укљештено-просто ослоњена и обострано укљештена греда) су приказана на једној слици 5.20. Може се приметити, да се смањењем степена слободе у ослонцима, смањује и максимална амплитуда и помера резонантна фреквенција удесно, што је очекивано понашање.

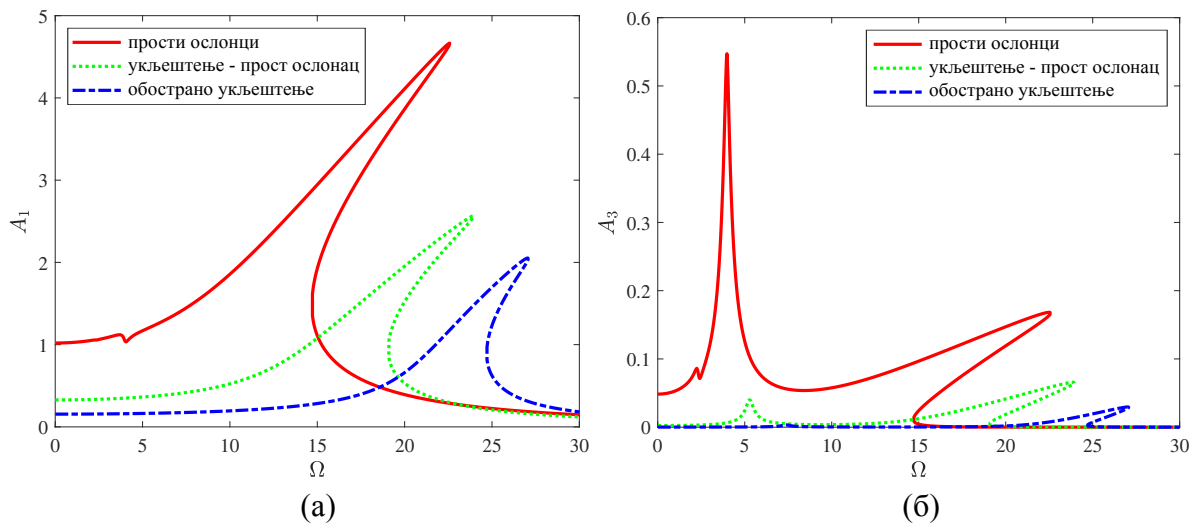
У свим претходним примерима, нестабилна периодична решења се детектују израчунавањем Флокеових множитеља, где бар један од њих прелази јединични круг у комплексној равни у правцу +1. Слика 5.21 приказује јединични круг у комплексној равни и Флокеове множитеље за случај параметара усвојених из табеле 5.4. Може се приметити-



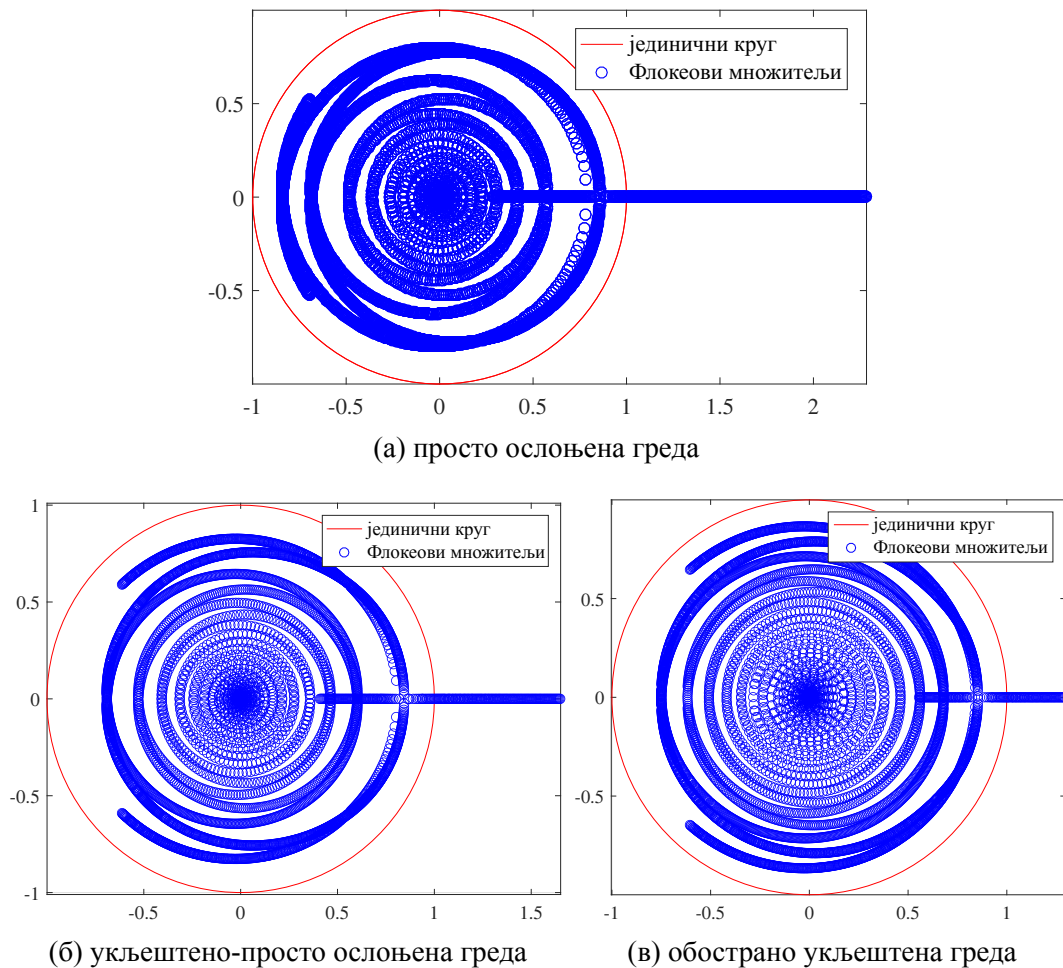
Слика 5.18: Криве амплитудно-фреквентних одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози за следеће граничне услове: просто ослоњени (а,б), укљештено-просто ослоњени (в,г) и обострано укљештени (д,ђ). Амплитуде  $A_1$  и  $A_3$  за различите вредности параметра  $k$ . Нестабилна периодична решења су представљена задебљаним пуним линијама.



Слика 5.19: Криве амплитудно-фреквентних одзива нелинеарне нелокалне ФГ греде на фракционој виско-Пастернаковој подлози за следеће граничне услове: просто ослоњени (а,б), укљештено-просто ослоњени (в,г) и обострано укљештени (д,ђ). Амplitude  $A_1$  и  $A_3$  за различите вредности параметра  $K_g$ . Нестабилна периодична решења су представљена задебљаним пуним линијама.



Слика 5.20: Различити гранични услови.

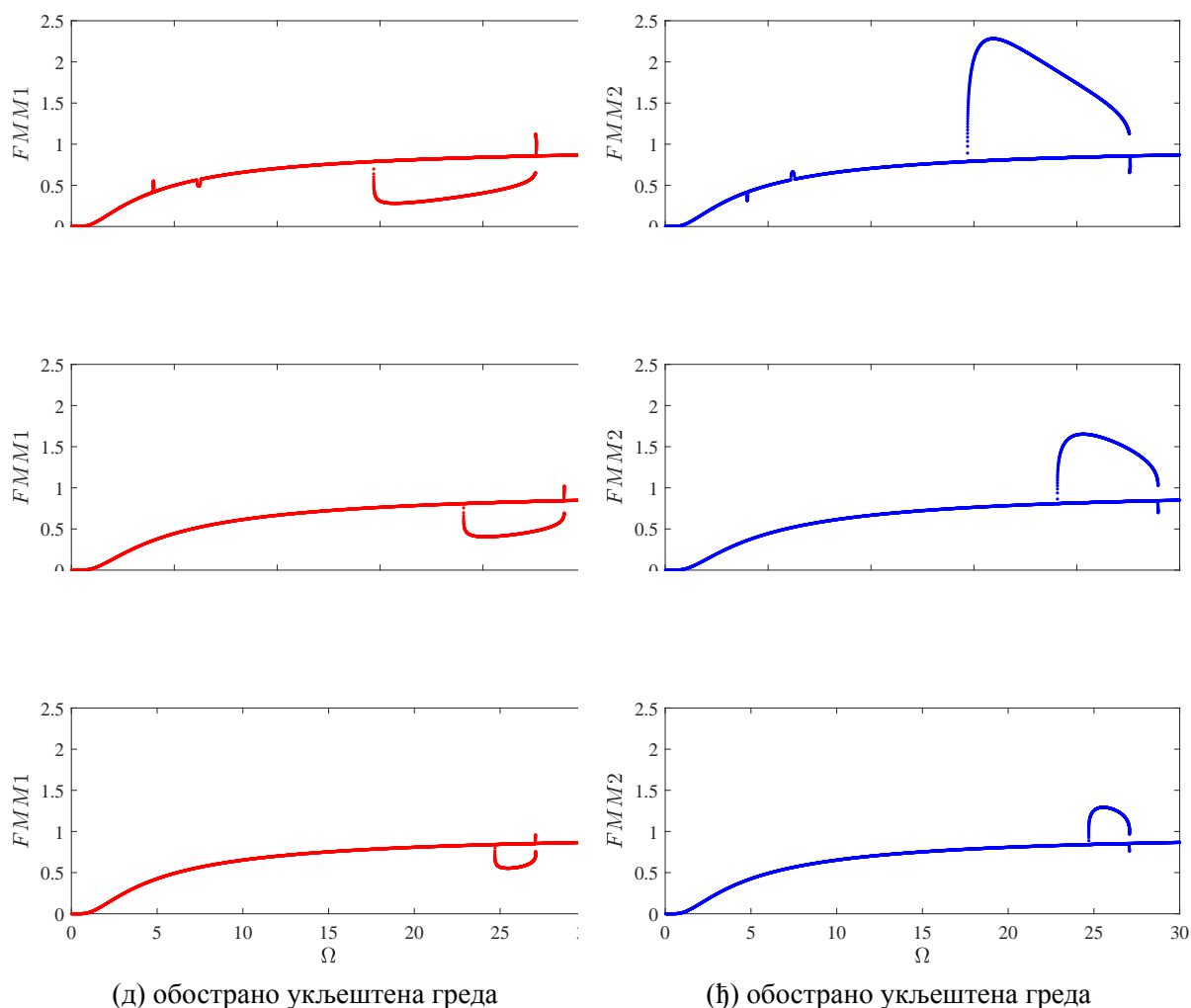


Слика 5.21: Флокеови множитељи који прелазе јединични круг у комплексној равни (реална оса је хоризонтална, а имагинарна вертикална).

ти да Флокеови множитељи прелазе јединични круг у комплексној равни у правцу +1 за нестабилна периодична решења, која се налазе између две различите тачке прегипа кри-

ве амплитудно-фреквентног одзива. Добро је познато да се различите тачке бифуркације могу детектовати у зависности од тога где Флокеови множитељи прелазе јединични круг. Стога, када Флокеови множитељи прелазе јединични круг у правцу +1, може се схватити да се у том случају јавља бифуркација типа седло-чвор. Такође примећује се да је број Флокеових множитеља, који прелазе јединични круг највећи у случају просто ослоњене греде и да су они који прелазе јединични круг најудаљенији од њега у поређењу са другим граничним условима.

С друге стране, у случају обострано-укљештених греда, број Флокеових множитеља који прелазе јединични круг и њихово растојање до њега је минималан. Као последица оваквог понашања, гранични услови обострано-укљештене греде одговарају највише, а

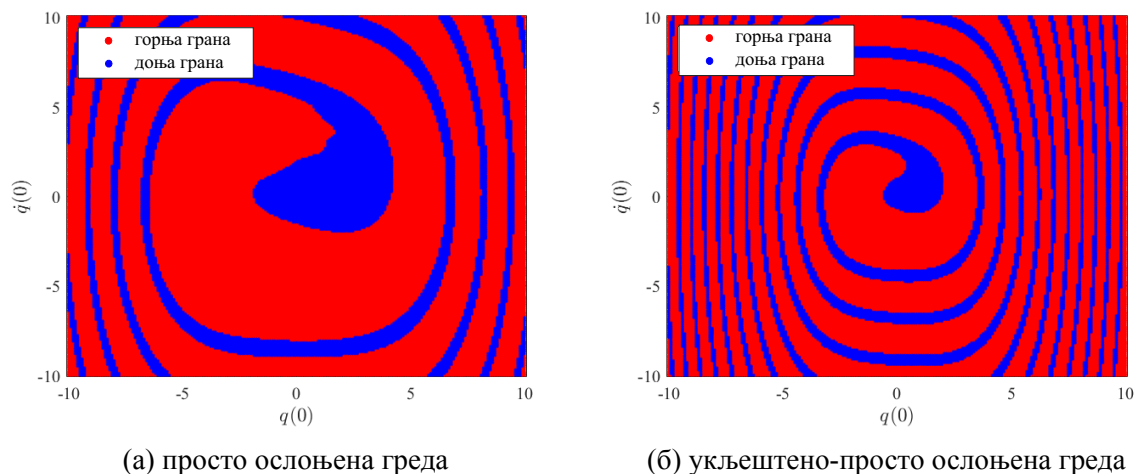


Слика 5.22: Модуо првих (FMM1) и других (FMM2) Флокеових множитеља у функцији фреквенције побуде  $\Omega$ .

Слика 5.22 приказује пар Флокеових множитеља за тачке са различитом фреквенцијом побуде  $\Omega$ . На слици 5.22 (a-b) се може приметити да између приближно  $\Omega = 14.5$  и

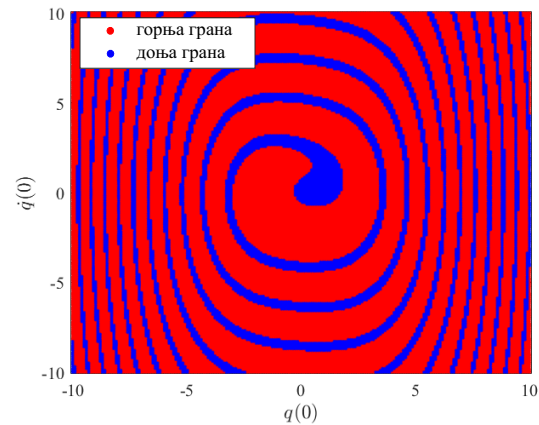
$\Omega = 23$ , бар један од два Флокеових множитеља има модуо већи од један, што значи да је овај регион нестабилан. Граница стабилности је достигнута када је модуо Флокеовог множитеља (ФММ) једнак један. Степен нестабилности је дефинисан растојањем тачке у региону нестабилности од јединичног круга (Слика 5.21), што је еквивалентно растојању криве која полако расте (са малим нагибом) на слици 5.22.

На пример, за случај просто ослоњене греде и  $\Omega = 16$ , нестабилност је већа него у случају  $\Omega = 22$  (Слика 5.22 (а-б)). Такође се може приметити са слике 5.22 да са повећањем крутости система смањењем степена слободe у граничним условима, главна област нестабилности се смањује и помера удесно ка вишим фреквенцијама побуде. Стабилност решења за веће фреквенције побуде може се постићи увођењем граничних услова просто ослоњене греде. С друге стране, стабилност на нижим фреквенцијама побуде може се постићи уз граничне услове обострано-укљештене греде. Нестабилна област са граничним условима укљештено-просто ослоњене греде је између нестабилних региона остала два пара граничних услова.



Слика 5.23: Базени привлачности за  $\Omega = 20$ .

Штавише, у амплитудно-фреквентним одзивима може се приметити да постоје коегзистирајућа стабилна периодична решења за одређене фреквентне опсеге. Знајући да амплитуде ових периодичних решења зависе од почетних услова и почетних позиција у померању фреквенције побуде, за различите почетне услове ће амплитуда одговора конвергирати према доњој или горњој грани периодичних решења, чиме се формира базен привлачења два атрактора, као што је дато на сликама 5.23 и 5.24. Према томе, систем ће поседовати два атрактора за дату фреквенцију побуде и параметре система. Базени привлачности два атрактора су означени са две различите боје и добијени за различите парове почетних услова (померање  $q(0)$  и брзина  $\dot{q}(0)$ ) из опсега  $[-10, 10]$ . За представљени нелинеарни систем са различитим почетним условима, базен привлачности је дат на сликама 5.23 и 5.24, а за фреквенцију побуде  $\Omega = 20$  и  $\Omega = 25$  коегзистирајућа стабилна периодична



Слика 5.24: Базени привлачности за  $\Omega = 25$  и обострано укљештене граничне услове.

решења из криве амплитудно-фреквентног одзива дате на слици 5.17. Случај са почетним стањем означеним црвеном бојом конвергира ка горњој стабилној грани, док случај са почетним условима истакнутим плавом бојом конвергира ка доњој стабилној грани.

У посебном случају просто ослоњене греде, скуп почетних услова који конвергира у горњу стабилну грану периодичних решења доминира над скупом почетних услова који конвергира у доњу грану решења.

## Глава 6

# Динамички апсорбер у систему са пригушењем фракционог реда

### 6.1 Извођење једначина кретања разматраног модела

У овом поглављу ће бити испитане осцилације система од два крута тела (Слика (6.1)). Мање тело (2) је уведено са сврхом смањења амплитуде осциловања главног тела (1) на критичној фреквенцији осциловања. Маса  $m_1$  је повезана са фиксираном подлогом преко опруге крутости  $k_1$ , фракционе пригушнице  $c_1$  и инертера  $b_1$ , такође је споља побуђена силом  $F = F_0 \cos \omega t$ , где су  $F_0$  и  $\omega$  магнитуда и побудна фреквенција спољашње принудне силе. Маса  $m_2$  је повезана за главно тело преко следећих паралелно повезаних елемента: линеарне опруге крутости  $k_{21}$ , нелинеарне опруге крутости  $k_{22}$ , пригушнице  $c_2$  и инертера  $b_2$ .

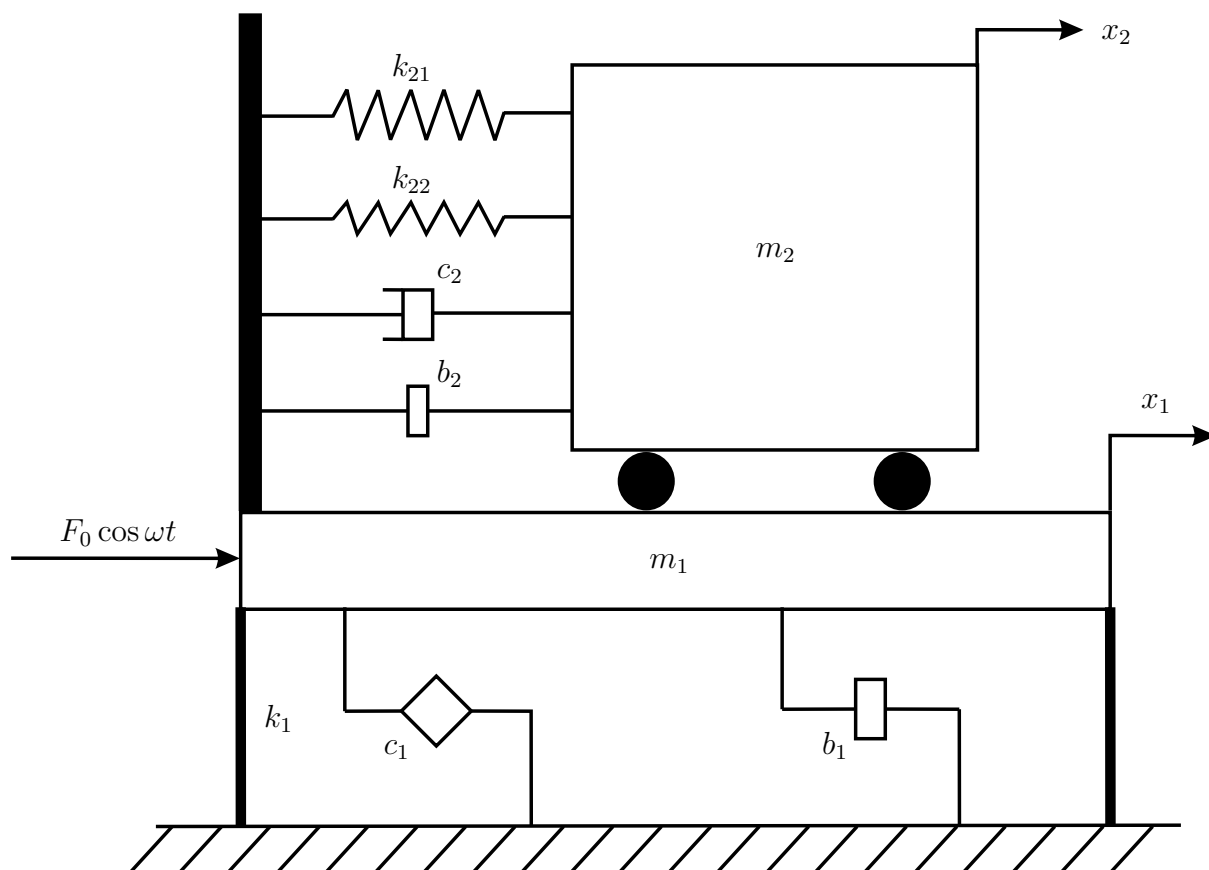
Да би се боље разумеле силе, које делују на систем са слике 6.1, исти систем је представљен на начин приказан на слици 6.2, где су унешене све силе које дејствују и непрекиданим правоугаоником је престављен могући положај након почетног дејства силе спољашње побуде. Онда су одговарајући елементи (опруге, инертери, пригушнице) оптерећени на притисак односно затезање и силе реакције тих елемената су представљене црвеном бојом на слици 6.2. Применом другог Њутновог закона  $m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{i=n} F_i$  на сваку од маса, добијају се једначине (6.1) у следећем облику:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -F_{k1} - F_{c1} - F_{b1} - F_{k21} - F_{k22} - F_{c2} - F_{b2} + F_0 \cos \omega t, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= F_{k21} + F_{k22} + F_{c2} + F_{b2}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где су силе, приказане на слици 6.2, дате као:

$$\begin{aligned} F_{k1} &= k_1 x_1, \quad F_{c1} = D_t^\alpha x_1, \quad F_{b1} = b_1 \ddot{x}_1, \quad F_{k21} = k_{21} (x_1 - x_2), \\ F_{k22} &= k_{22} (x_1 - x_2)^3, \quad F_{c2} = c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad F_{b2} = b_2 (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2). \end{aligned} \quad (6.2)$$





Слика 6.1: Шематски приказ система са два степена слободe.

Заменом израза (6.2) у једначине добијене из другог Њутновог закона, (6.1) добијају се једначине кретања у следећем облику:

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \ddot{x}_1 + c_1 D_t^\alpha x_1 + k_1 x_1 + b_2 (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{21} (x_1 - x_2) + k_{22} (x_1 - x_2)^3 = F_0 \cos \omega t, \quad (6.3)$$

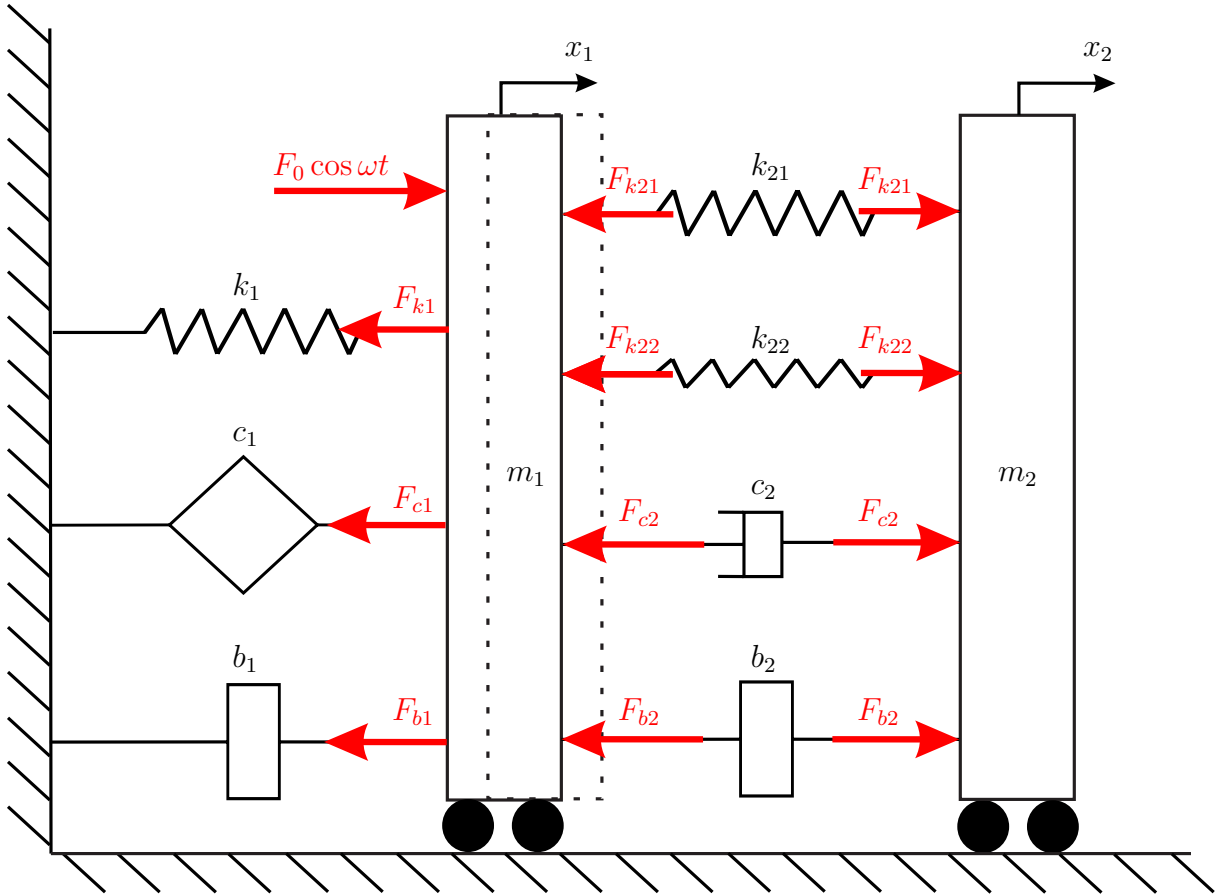
$$m_2 \ddot{x}_2 + b_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{21} (x_2 - x_1) + k_{22} (x_2 - x_1)^3 = 0. \quad (6.4)$$

Увођењем смене  $z = x_1 - x_2$  и заменом друге једначине кретања (6.4) у прву (6.3), следи следећи систем:

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \ddot{x}_1 + c_1 D_t^\alpha x_1 + k_1 x_1 + m_2 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{z} = F_0 \cos \omega t, \quad (6.5)$$

$$m_2 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{z} - b_2 \ddot{z} - c_2 \dot{z} - k_{21} z - k_{22} z^3 = 0. \quad (6.6)$$

Разлог увођења нове координате  $z$ , која заправо даје координату релативног померања масе  $m_2$  у односу на масу главног елемента масе  $m_1$ , је упроштавање једначина (6.3)-(6.4), тако да се систем може лакше решити. Овако добијене једначине кретања (6.5)-(6.6)



Слика 6.2: Силе које дејствују на систем са 2 степена слобде.

се могу написати у бездимензионој форми на следећи начин:

$$(1 + B_1 + \mu)y'' + \zeta_1 D_{\bar{\tau}}^\alpha y + y - \mu w'' - \cos \Omega \bar{\tau} = 0, \quad (6.7)$$

$$y'' - (1 + B_2)w'' - \zeta_2 w' - \theta^2 w - \gamma w^3 = 0, \quad (6.8)$$

где су уведени следећи параметри:

$$\begin{aligned} y = \frac{x_1}{x_0}, \quad w = \frac{z}{x_0}, \quad x_0 = \frac{F_0}{k_1}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad B_1 = \frac{b_1}{m_1}, \\ B_2 = \frac{b_2}{m_2}, \quad \bar{\tau} = \omega_1 t, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_{21}}{m_2}}, \quad \theta = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \\ \Omega = \frac{\omega}{\omega_1}, \quad \zeta_1 = \frac{c_1}{k_1} \omega_1^\alpha, \quad \zeta_2 = \frac{c_2}{m_2 \omega_1}, \quad \gamma = \frac{k_{22} x_0^2}{k_1 \mu}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

## 6.2 Решења једначина кретања и нелинеарни периодични одзив

### 6.2.1 Применом методе инкременталног хармонијског баланса

Уводимо нову бездимензиону временску променљиву  $\tau$  тако да је:

$$\tau = \Omega \bar{\tau}, \quad (6.10)$$

где су  $\Omega$  и  $\bar{\tau}$  бездимензиона побудна фреквенција и време. Увођењем нове бездимензионе временске променљиве,  $\Omega$  у косинусном члану се неће појављивати, док ће се појавити на позицијама где се његов утицај на амплитуде може лакше пратити. Након замене израза (6.10) у бездимензионим једначинама кретања (6.7)-(6.8), добија се:

$$(1 + B_1 + \mu)\Omega^2 y'' + \zeta_1 \Omega^\alpha D_\tau^\alpha y + y - \mu \Omega^2 w'' - \cos \tau = 0, \quad (6.11)$$

$$\Omega^2 y'' - (1 + B_2)\Omega^2 w'' - \zeta_2 \Omega w' - \theta^2 w - \gamma w^3 = 0. \quad (6.12)$$

У поглављу 2.2 се види да се код ИХБ методе прво претпостави почетно решење, које се онда у итеративном поступку инкрементира све док се не стигне до решења прихватљиве тачности:

$$y = y_0 + \Delta y, \quad w = w_0 + \Delta w, \quad \Omega = \Omega_0 + \Delta \Omega. \quad (6.13)$$

Приликом замене израза (6.13) у једначину (6.11), јављају се степени нецелог реда на биномним изразима. Таква форма није погодна за примену ИХБ методе јер  $\Omega_0$  и  $\Delta \Omega$  требају бити раздвојени. Из тог разлога се примењује општа биномна теорема:

$$(\Omega_0 + \Delta \Omega)^\alpha = \Omega_0^\alpha + \alpha \Omega_0^{\alpha-1} \Delta \Omega + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} \Omega_0^{\alpha-2} \Delta \Omega^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} \Omega_0^{\alpha-3} \Delta \Omega^3 + \dots \quad (6.14)$$

Заменом израза (6.13)-(6.14) у једначине (6.11)-(6.12) и занемаривањем чланова вишег реда, који имају занемарљиво мале величине, линеаризовани инкрементални систем једначина је одређен у следећем облику:

$$\begin{aligned} & (1 + B_1 + \mu)\Omega_0^2 \Delta y'' + \zeta_1 \Omega_0^\alpha D_\tau^\alpha \Delta y + \Delta y - \mu \Omega_0^2 \Delta w'' \\ & = -(1 + B_1 + \mu)\Omega_0^2 y_0'' - \zeta_1 \Omega_0^\alpha D_\tau^\alpha y_0 - y_0 + \mu \Omega_0^2 w_0'' + \cos \tau \\ & \quad - \{2(1 + B_1 + \mu)\Omega_0 y_0'' + \zeta_1 \alpha \Omega_0^{\alpha-1} D_\tau^\alpha y_0 - 2\mu \Omega_0 w_0''\} \Delta \Omega, \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} & \Omega_0^2 \Delta y'' - (1 + B_2)\Omega_0^2 \Delta w'' - \zeta_2 \Omega_0 \Delta w' - \theta^2 \Delta w - 3\gamma w_0^2 \Delta w \\ & = -\Omega_0^2 y_0'' + (1 + B_2)\Omega_0^2 w_0'' + \zeta_2 \Omega_0 w_0' + \theta^2 w_0 + \gamma w_0^3 - \{2\Omega_0 y_0'' - 2(1 + B_2)\Omega_0 w_0'' - \zeta_2 w_0'\} \Delta \Omega. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Да би се добила периодична решења система диференцијалних једначина (6.15)-(6.16), величине  $y_0$ ,  $w_0$  и њихови инкременти (прираштаји) се развијају у коначни Фуријеов ред од  $N$  чланова на следећи начин:

$$y_0(\tau) = a_{10} + \sum_{n=1}^N [a_{1n} \cos(n\tau) + b_{1n} \sin(n\tau)] = \mathbf{C} \mathbf{A}_1, \quad (6.17)$$

$$w_0(\tau) = a_{20} + \sum_{n=1}^N [a_{2n} \cos(n\tau) + b_{2n} \sin(n\tau)] = \mathbf{C} \mathbf{A}_2, \quad (6.18)$$

$$\Delta y = \mathbf{C} \Delta \mathbf{A}_1, \quad \Delta w = \mathbf{C} \Delta \mathbf{A}_2, \quad (6.19)$$

где су:

$$\mathbf{C} = [1 \quad \cos \tau \quad \cos 2\tau \quad \dots \quad \cos N\tau \quad \sin \tau \quad \sin 2\tau \quad \dots \quad \sin N\tau], \quad (6.20)$$

$$\mathbf{A}_s = [a_{s0} \quad a_{s1} \quad a_{s2} \quad \dots \quad a_{sN} \quad b_{s1} \quad b_{s2} \quad \dots \quad b_{sN}]^T, \quad (s = 1, 2), \quad (6.21)$$

$$\Delta \mathbf{A}_s = [\Delta a_{s0} \quad \Delta a_{s1} \quad \Delta a_{s2} \quad \dots \quad \Delta a_{sN} \quad \Delta b_{s1} \quad \Delta b_{s2} \quad \dots \quad \Delta b_{sN}]^T, \quad (s = 1, 2). \quad (6.22)$$

Може се приметити да су изрази за случај система једначина (6.17)-(6.22) аналогни изразима за случај само једне диференцијалне једначине (5.76)-(5.80). Сада, заменом израза (6.17)-(6.19) у једначине (6.15)-(6.16) и применом Галеркинове методе са циљем елиминасања временског параметра  $\tau$  кроз услове ортогоналности се добија:

$$\langle g(\tau), f(\tau) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g(\tau) f(\tau) d\tau = 0, \quad (6.23)$$

где се занемаривањем чланова вишег реда добија систем алгебарских једначина (2.49) односно (6.24). Треба напоменути да код чланова где је извод природан број важи  $T = 2\pi$ .

$$\mathbf{M} \Delta \mathbf{A} + \mathbf{V} \Delta \Omega = \mathbf{R}, \quad (6.24)$$

где је  $\Delta \Omega$  скаларна величина, а матрица  $\mathbf{M}$  и вектори  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\Delta \mathbf{A}$  се добијају на начин дат у наставку:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{A}_1 \\ \Delta \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{A}_1 \\ \Delta \mathbf{A}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{Bmatrix} \Delta \Omega = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{Bmatrix}, \quad (6.26)$$

где су:

$$\mathbf{K}_{11} = \overline{\mathbf{K}}_{11} + \mathbf{K}_{11}^\alpha, \quad (6.27)$$

$$\overline{\mathbf{K}}_{11} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{(1 + B_1 + \mu)\Omega_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C}'' + \mathbf{C}^T \mathbf{C}\} d\tau, \quad (6.28)$$

$$\mathbf{K}_{11}^{\alpha} = \frac{1}{T} \int_0^T \zeta_1 \Omega_0^{\alpha} \mathbf{C}^T D_{\tau}^{\alpha}(\mathbf{C}) d\tau, \quad (6.29)$$

$$\mathbf{K}_{12} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \Omega_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C}'' d\tau, \quad (6.30)$$

$$\mathbf{K}_{21} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C}'' d\tau, \quad (6.31)$$

$$\mathbf{K}_{22} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{(1 + B_2) \Omega_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C}'' + \zeta_2 \Omega_0 \mathbf{C}^T \mathbf{C}' + \theta^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C} + 3\gamma w_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C}\} d\tau, \quad (6.32)$$

$$\mathbf{R}_1 = \bar{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{R}_1^{\alpha}, \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}_1 = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{(1 + B_1 + \mu) \Omega_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C}'' + \mathbf{C}^T \mathbf{C}\} d\tau \mathbf{A}_1 \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \Omega_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C}'' d\tau \mathbf{A}_2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{C}^T \cos \tau d\tau, \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\mathbf{R}_1^{\alpha} = -\frac{1}{T} \int_0^T \zeta_1 \Omega_0^{\alpha} \mathbf{C}^T D_{\tau}^{\alpha}(\mathbf{C}) d\tau \mathbf{A}_1, \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C}'' d\tau \mathbf{A}_1 \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{(1 + B_2) \Omega_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C}'' + \zeta_2 \Omega_0 \mathbf{C}^T \mathbf{C}' + \theta^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C} + \gamma w_0^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C}\} d\tau \mathbf{A}_2, \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\mathbf{V}_1 = \bar{\mathbf{V}}_1 + \mathbf{V}_1^{\alpha}, \quad (6.37)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2(1 + B_1 + \mu) \Omega_0 \mathbf{C}^T \mathbf{C}'' d\tau \mathbf{A}_1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\mu \Omega_0 \mathbf{C}^T \mathbf{C}'' d\tau \mathbf{A}_2, \quad (6.38)$$

$$\mathbf{V}_1^{\alpha} = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha \Omega_0^{\alpha-1} \mathbf{C}^T D_{\tau}^{\alpha}(\mathbf{C}) d\tau \mathbf{A}_1, \quad (6.39)$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\Omega_0 \mathbf{C}^T \mathbf{C}'' d\tau \mathbf{A}_1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{2(1 + B_2) \Omega_0 \mathbf{C}^T \mathbf{C}'' + \zeta_2 \mathbf{C}^T \mathbf{C}'\} d\tau \mathbf{A}_2. \quad (6.40)$$

Да би се одредило једно периодично решење за специфичну вредност фреквентног параметра  $\Omega$ , потребно је поставити  $\Delta\Omega = 0$  у систему линеарних алгебарски једначина (6.24). Након тога, коришћењем Њутн-Рапсонове итеративне процедуре, где процес решавања почиње са иницијализацијом коефицијената  $\mathbf{A}$  тако да је тангентна матрица крутости  $\mathbf{M}$  несингуларна матрица, налазе се решења  $\Delta\mathbf{A}$  итеративно решавањем следећег система једначина:

$$\Delta\mathbf{A}_i = \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{R}_i \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}_{i+1} = \mathbf{A}_i + \Delta\mathbf{A}_i, \quad (6.41)$$

где се у  $i$ -том кораку на основу познате матрице  $M_i$  и вектора  $R_i$  који у себи садрже елементе вектора  $A_i$  срачунава инкремент промене вредности Фуријеових коефицијената  $\Delta A_i$ . Након срачунавања вредности новог вектора Фуријеових коефицијената  $A_{i+1}$ , може се срачунати нова матрица  $M_{i+1}$  и вектор  $R_{i+1}$ . Овај поступак се итеративно понавља све док Еуклидска норма остатка  $\|R\|$  не буде мања од унапред дефинисане толеранције (у нашем случају  $10^{-12}$ ), тако да корективни векторски члан  $R$  тежи нула вектору, када вредности координата  $y$  и  $w$  теже егзактним решењима. Следеће периодично решење  $\Omega_n$  може бити срачунато додавањем мале вредности  $\Delta\Omega$  фреквентном параметру ( $\Omega_n = \Omega_s + \Delta\Omega$ ) и коришћењем Њутн-Рапсонове итеративне процедуре, у којој се добијена фреквенција из претходног корака  $\Omega_s$  користи као иницијално претпостављено решење у наредном кораку за одређивање фреквенције у њему. Овај тип метода праћења путање тј. метода нумеричке континуације је такође позната у литератури [178, 182, 184] као ”природно параметарска нумеричка континуација”. У сваком случају, коришћењем ове методе за праћење амплитудно-фреквентног одзива, периодично решење може бити добијено у близини неке превојне тачке (turning point), за коју тангентна матрица крутости  $M$  постаје сингуларна. Да би се нашла решења у свим тачкама, користи се метода нумеричке континуације описана у 2. поглављу ове дисертације. Она је базирана на предиктор-коректор методи, која прати гране периодичног решења, тј. амплитудно-фреквентне криве одзива предложеног нелинеарног система.

Применом методе нумеричке континуације се добијају одговарајући амплитудно-фреквентни одзиви система.

## 6.2.2 Применом Њумарк методе

Њумарк је метода нумеричке интеграције, у литератури позната и као Њумарк-Бета метода, за решавање диференцијалне једначине или система диференцијалних једначина, који могу бити линеарни или нелинеарни. Evangelatos и Spanos [98] су предложили методу базирану на Њумарк метода, којом се може решити једна нелинеарна фракциона диференцијална једначина. У овој дисертацији је та метода проширена и уопштена на систем од две диференцијалне једначине кретања од којих само једна садржи фракционе изводе (изрази (6.11)-(6.12)). Гринвалд-Летњикова репрезентација фракционог извода (1.13)-(1.15) [101] је употребљена и Њумарк-Бета метода примењена за нумеричку интеграцију система диференцијалних једначина. Да би се повећала прецизност методе, две скале су уведене, и то груба мрежа за временску интеграцију и фина мрежа за апроксимацију фракционог извода, као што је већ описано у 4. поглављу, при чему се сада уместо променљиве  $q$  користи променљива  $y$ .

Разматрају се једначине кретања (6.11)-(6.12) у два узастопна временска корака  $i - 1$

и  $i$ :

$$(1 + B_1 + \mu)\Omega^2 \Delta y_i'' + \zeta_1 \Omega^\alpha \left( {}_{GL}D_{0,\tau_i}^\alpha y_i - {}_{GL}D_{0,\tau_{i-1}}^\alpha y_{i-1} \right) + y_i - \mu \Omega^2 \Delta w_i'' = \Delta f_i, \quad (6.42)$$

$$\Omega^2 \Delta y_i'' - (1 + B_2)\Omega^2 \Delta w_i'' - \zeta_2 \Omega \Delta w_i' - \theta^2 \Delta w_i - \gamma (\Delta w_i)^3 = 0, \quad (6.43)$$

где је:

$$\Delta f_i = \cos \tau_i. \quad (6.44)$$

Заменом израза (4.11) у једначине (6.42)-(6.43) добија се нелинеарни систем фракционих диференцијалних једначина у облику:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (1 + B_1 + \mu)\Omega^2 + \zeta_1 \Omega^\alpha D_{03} & -\mu \Omega^2 \\ \Omega^2 & -(1 + B_2)\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_i'' \\ \Delta w_i'' \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \zeta_1 \Omega^\alpha D_{02} & 0 \\ 0 & -\zeta_2 \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_i' \\ \Delta w_i' \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 1 + \zeta_1 \Omega^\alpha D_{01} & 0 \\ 0 & -\theta^2 - \gamma (\Delta w_i)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_i \\ \Delta w_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta f_i - \Delta f_{kor} \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.45)$$

где је корекциони члан:

$$\begin{aligned} \Delta f_{kor} = & \zeta_1 \Omega^\alpha \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{i-j} \\ \Delta \dot{y}_{i-j} \\ \Delta \ddot{y}_{i-j} \end{bmatrix} + \dots + \\ & \zeta_1 \Omega^\alpha \begin{bmatrix} D_{(k-1)1} & D_{(k-1)2} & D_{(k-1)3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_{i-(k-1)j} \\ \Delta \dot{y}_{i-(k-1)j} \\ \Delta \ddot{y}_{i-(k-1)j} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Треба напоменути да у случају када је  $\Delta f_i = const$ , систем нелинеарних диференцијалних једначина (6.45) може бити решен Рунге-Кута методом (функција ode45 у програму Matlab). У примеру разматраном у овој дисертацији је  $\Delta f_i \neq const$ . Због тога је нелинеарни систем диференцијалних једначина (6.45) решен коришћењем Њумарк-Бета метода за нелинеарне системе на начин претстављен у 4. поглављу. Систем нелинеарних диференцијалних једначина (6.45) може се краће написати у матричном облику преко једначине (4.13), где је  $\mathbf{u}_i = [\Delta y_i \quad \Delta w_i]^T$ . За решавање овог нелинеарног система диференцијалних једначина коришћен је имплицитни предиктор-коректор алгоритам (Алгоритам 1).

### 6.3 Нумерички резултати

У овом поглављу су презентовани нумерички резултати. У првом делу је извршена провера тачности резултата на четири периодична решења, при чему су упоређене две

методе, ИХБ и Њумарк. У другом делу је спроведена параметарска студија, где је испитан утицај различитих параметара на амплитудно-фреквентне одзиве.

Табела 6.1: Вредности параметара представљеног механичког модела.

Параметар	Симбол	Вредност	Јединица
Фракциони извод	$\alpha$	0.5	-
Маса	$m_1$	1	$kg$
Маса	$m_2$	0.02	$kg$
Инертанца	$b_1$	0.01	$Ns^2/m$
Инертанца	$b_2$	0.0001	$Ns^2/m$
Линеарна крутост	$k_1$	1	$N/m$
Линеарна крутост	$k_{21}$	0.5	$N/m$
Нелинеарна крутост	$k_{22}$	4	$N/m^3$
Фракционо пригушење	$c_1$	0.1	$Ns^\alpha/m$
Пригушење	$c_2$	0.0001	$Ns/m$
Амплитуда силе побуде	$F_0$	10	$N$

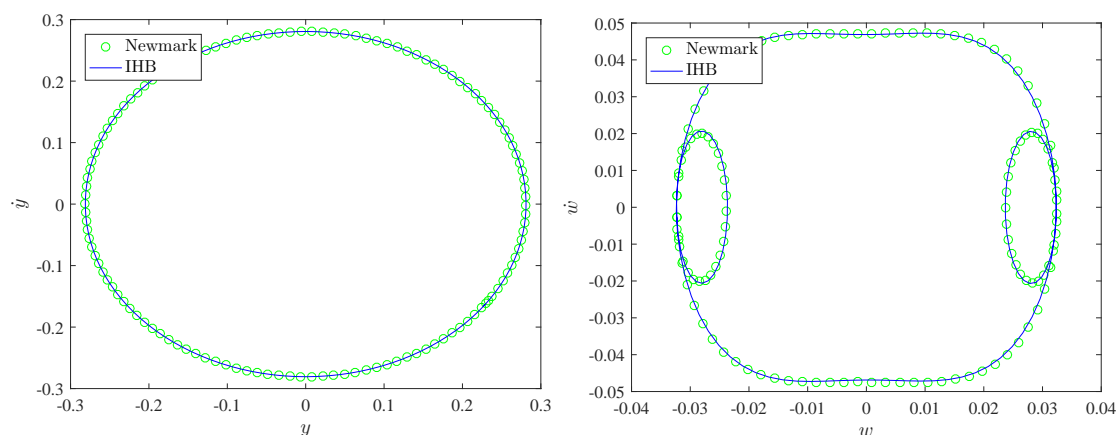
Параметри представљени у табели 6.1 су коришћени у нумеричким срачунавањима. Када је неки параметар мењан, да би се показао његов утицај, то је приказано на одговарајућим сликама, тексту у наслову слике или у тексту који описује слику, а вредности преосталих параметара су узете из табеле 6.1.

### 6.3.1 Потврда резултата са више апроксимативних метода

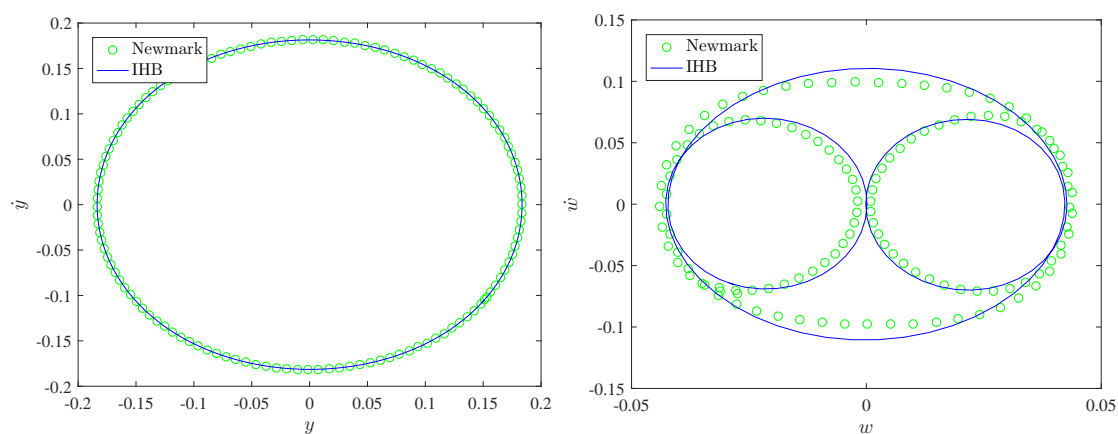
Да би се приказала прецизност и поузданост представљеног приступа за одређивање периодичних решења, тачност резултата добијених методом ИХБ је упоређивана са резултатима директне нумеричке интеграције применом Њумарк методе. Периодична решења су добијена у жељеним фреквенцијама побуде са ове две методе и резултати упоређени. Сlike 6.3 - 6.6 приказују периодична решења за различите вредности побудне фреквенције  $\Omega$  и фракционог параметра  $\alpha$ . За фреквенције које су далеко од резонантних ( $\Omega = 4$ ), могу се опазити добра поклапања резултата двеју метода (Сlike 6.5-6.6). Наспрам тога, када периодична решења почну да праве орбите које саме себе секу правећи вишеструке петље, решења почињу да дивергирају, што је очекивано (Сlike 6.3-6.4).

За тачке у решењима где се амплитуде мењају брзо, методе нумеричке интеграције попут Рунге-Кута и Њумарк не могу прецизно одредити периодичну орбиту. Из тог разлога је у даљој анализи овог примера у докторској дисертацији само ИХБ метода коришћена за испитивање утицаја различитих параметара на амплитудно-фреквентне криве одзива.

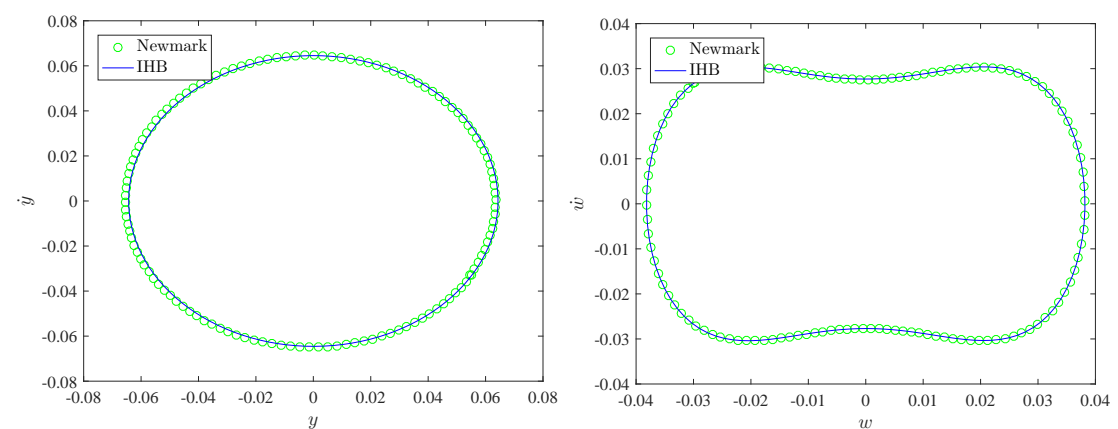




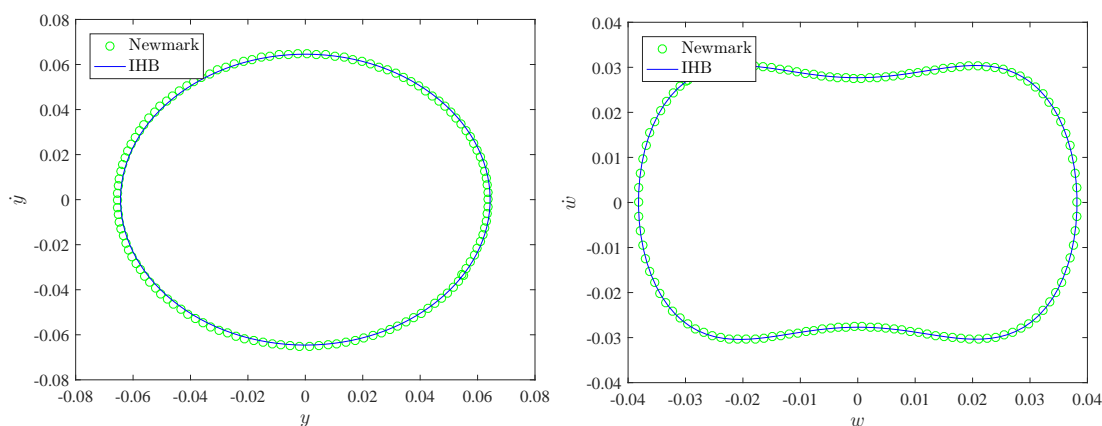
Слика 6.3: Периодично решење у фазној равни (дијаграм померање-брзина) генералисаних координата  $(y, \dot{y})$  - лево и  $(w, \dot{w})$  - десно за  $\alpha = 1$  и  $\Omega = 2.1$ .



Слика 6.4: Периодично решење у фазној равни (дијаграм померање-брзина) генералисаних координата  $(y, \dot{y})$  - лево и  $(w, \dot{w})$  - десно за  $\alpha = 1$  и  $\Omega = 2.5$ .



Слика 6.5: Периодично решење у фазној равни (дијаграм померање-брзина) генералисаних координата  $(y, \dot{y})$  - лево и  $(w, \dot{w})$  - десно за  $\alpha = 0.2$  и  $\Omega = 4$ .



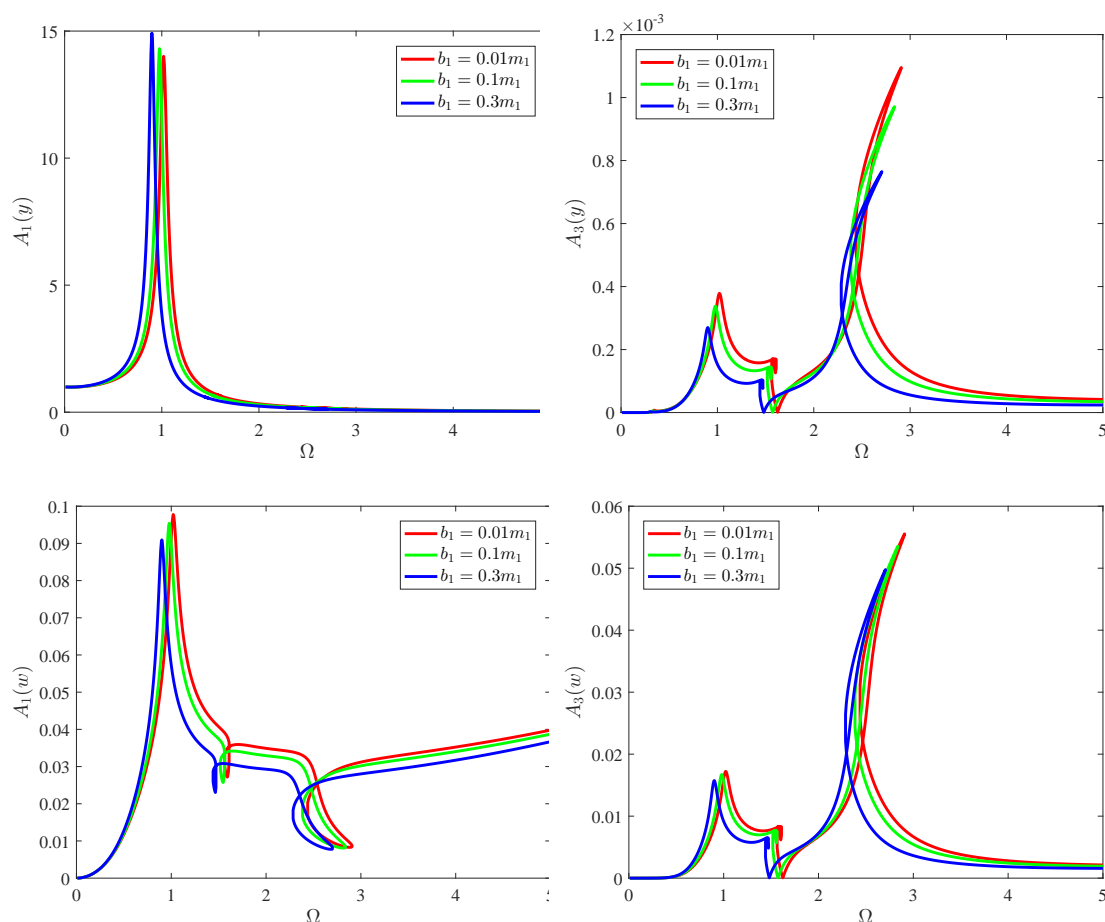
Слика 6.6: Периодично решење у фазној равни (дијаграм померање-брзина) генералисаних координата  $(y, \dot{y})$  - лево и  $(w, \dot{w})$  - десно за  $\alpha = 0.6$  и  $\Omega = 4$ .

### 6.3.2 Испитивање утицаја различитих параметара на динамику овог модела

У наредним примерима је приказан утицај различитих параметара, као што су параметар инертера (инертанца)  $(b_1, b_2)$ , нелинеарна крутост опруге  $(k_{22})$ , фракциони коефицијент пригушења  $(c_1)$ , параметар реда фракционог извода  $(\alpha)$  и амплитуда силе спољне побуде  $(F_0)$  на амплитудно-фреквентни одзив. Леви дијаграми на сликама са амплитудно-фреквентним одзивима представљају прву  $A_1$ , а десни дијаграми трећу  $A_3$  хармонијску амплитуду (Слике 6.7-6.12).

На слици 6.7 је приказан амплитудно-фреквентни одзив системских координата  $y, w$  за прву  $A_1$  и трећу  $A_3$  хармонијску амплитуду, за различите вредности параметра инертера  $b_1$ . Посматрањем слике 6.7, може се закључити да промена параметра инертанце  $b_1$  има утицаја на обе хармонијске амплитуде (прву и трећу) за обе координате  $y, w$ . На све четири подслике слике 6.7 око јединичне фреквенције се може уочити резонантни пик који је последица линеарних чланова у једначинама кретања. Вишеструка периодична решења око  $\Omega = 1.5$  и  $\Omega = 2.5$  приказана петљама на дијаграму, као и нелинеарни енергетски хистерезис око  $\Omega = 2.5$  су резултат додатног нелинеарног осцилатора (нелинеарни енергетски понор). Слично понашање се може уочити и на осталим сликама које следе. Такође се може приметити да је трећи хармоник од  $y$  много мање амплитуде, која би у случају практичне реализације система на слици 6.1 са параметрима из табеле 6.1 била готово неприметна.

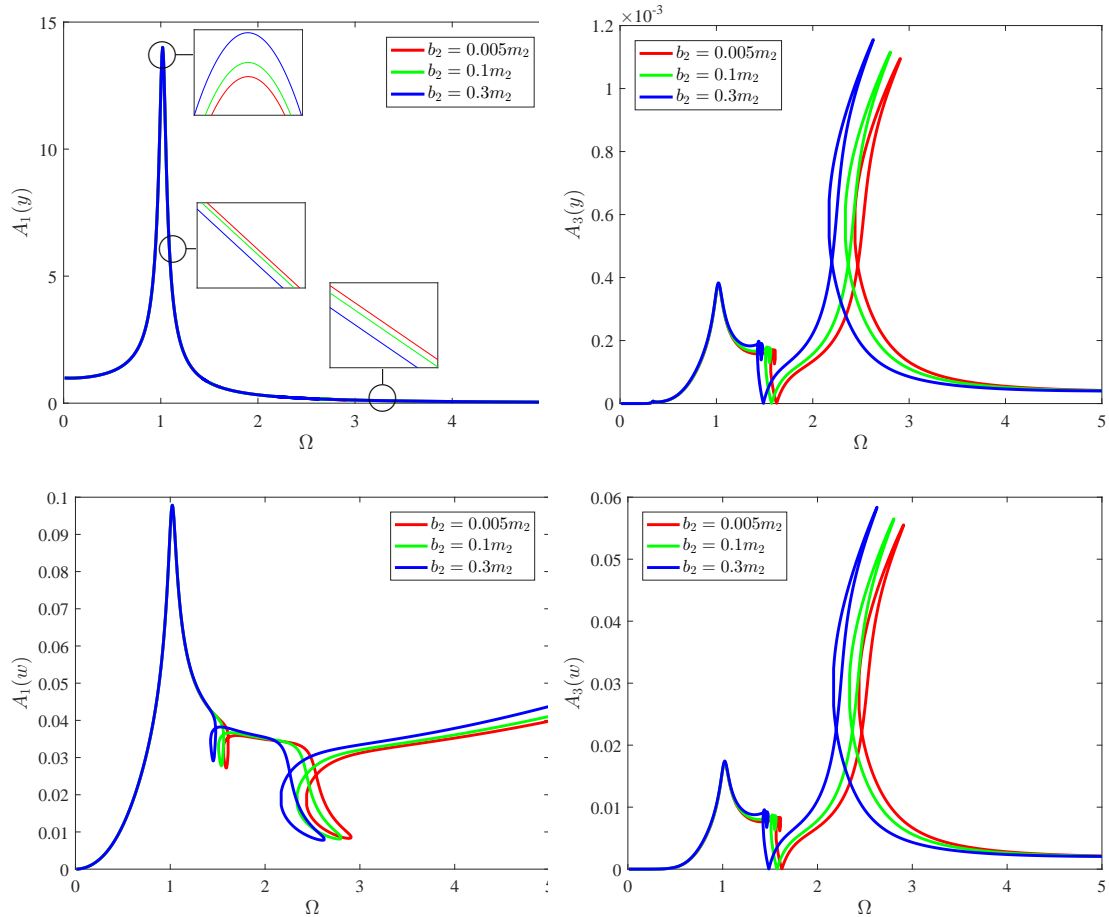
На слици 6.8 се може уочити да инертанца  $b_2$  има мали утицај на амплитудно-фреквентни одзив системске координате  $y$  за прву хармонијску амплитуду  $A_1$ , и системске координате  $w$  за фреквенције мање од 1.2. У другим случајевима, повећање параметра  $b_2$  помера вишеструка периодична решења и нелинеарни хистерезис налево, у правцу мањих фреквенција побуде. Пошто генералисана координата  $y$  одговара основном систему,



Слика 6.7: Амплитудно-фреквенциона крива одзива нелинеарног фракционог динамичког пригушивача. Амплитуде  $A_1$  и  $A_3$  координата  $y$  и  $w$  за различите вредности параметра инертера  $b_1$ .

а координата  $w$  релативном кретању додатне масе није ни за очекивати да параметар  $b_2$  значајно утиче на  $y$ . Поред тога, пошто је амплитуда трећег хармоника од  $y$  реда величине 0.001 занемарљиво мања у односу на амплитуду првог хармоника координате  $y$ , која је реда величине 10, у случају практичне конструктивне реализације система на слици 6.1 са параметрима из табеле 6.1, утицај амплитуде трећег хармоника би био мали и занемарљив. Такође и мале амплитуде пригушивача у односу на основни систем  $w$  које су реда величине 0.1 за прву хармонијску амплитуду  $A_1$  указују на мале осцилације пригушивача у односу на основни систем.

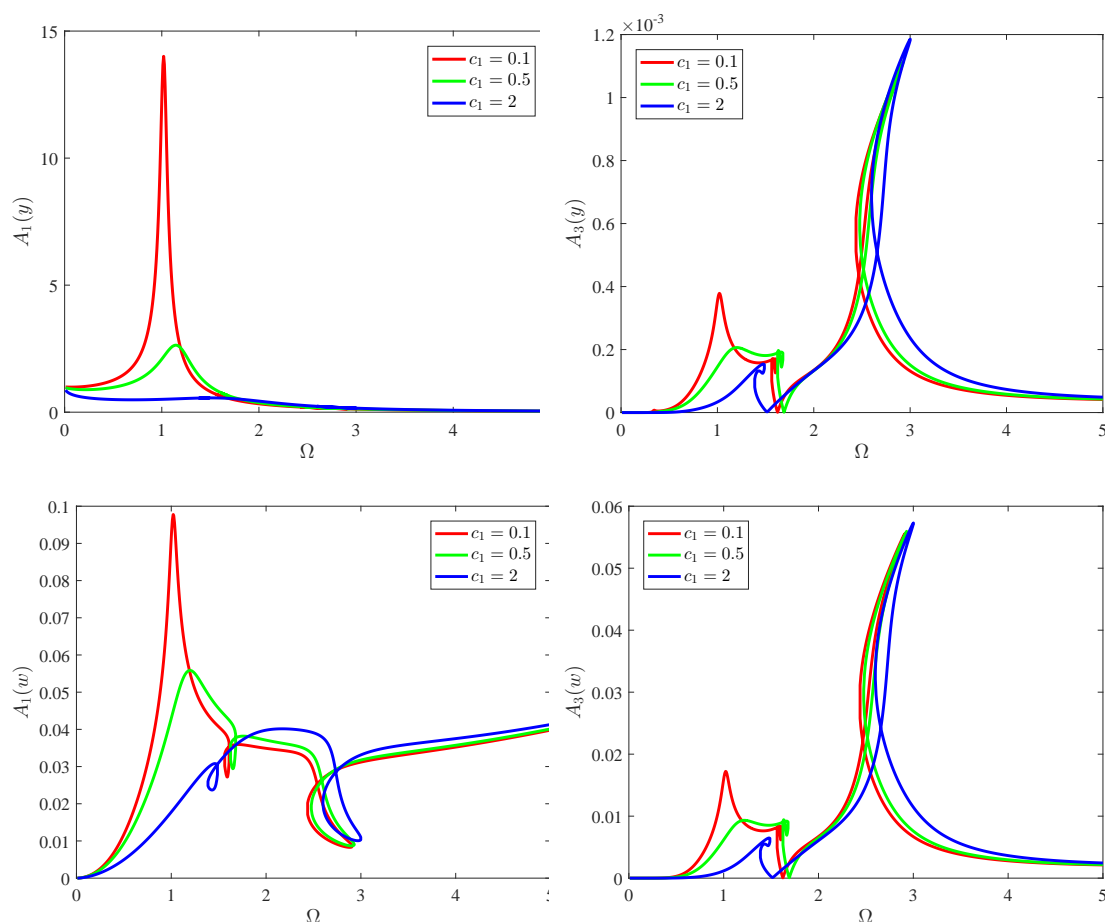
Слика 6.9 приказује утицај коефицијента фракционог пригушења  $c_1$  на амплитудно-фреквентни одзив система. Са слике је очигледно да повећање параметра  $c_1$  смањује амплитуде обеју координата  $y, w$  у првој  $A_1$  и трећој  $A_3$  хармонијској амплитуди око најкритичније фреквенције побуде у близини  $\Omega = 1$ . Међутим, утицај промене фракционог параметра пригушења је мали, што се може уочити на подсликама слике 6.9 за  $A_3$ . Поред тога, повећање параметра  $c_1$  помера удесно у правцу виших фреквенција побуде: резонантни фреквентни пик, вишеструка периодична решења око  $\Omega = 2.5$  и нелинеарни хи-



Слика 6.8: Амплитудно-фреквенциона крива одзива нелинеарног фракционог динамичког пригушивача. Амплитуде  $A_1$  и  $A_3$  координата  $y$  и  $w$  за различите вредности параметра инертера  $b_2$ .

стерезис око  $\Omega = 2.5$ . Такође се може приметити да је трећи хармоник од  $y$  много мање амплитуде од првог.

На слици 6.10 је представљен утицај амплитуде побудне силе на амплитудно-фреквентни одзив системских координата  $y, w$  за прву  $A_1$  и трећу  $A_3$  хармонијску амплитуду. Може се уочити да за сет параметара из табеле 6.1, промена  $F_0$  минимално утиче на амплитуду одзива  $A_1$  координате  $y$ , што је жељено дејство присуства додатне масе  $m_2$ , стабилизација рада примарног система под дејством побуде. Међутим, у сва четири случаја представљена на подсликама слике 6.10 може се лако уочити да повећање амплитуде силе побуде  $F_0$  смањује резонантне амплитуде у сваком појединачном случају, тј. за обе системске координте ( $y, w$ ) у обема хармонијским амплитудама ( $A_1, A_3$ ). Ово је пожељно понашање додатне масе  $m_2$  која пригушује нагле скокове амплитуде главне масе ( $m_1$ ), без обзира на повећање магнитуде (амплитуде) побудне силе. Насупрот томе, повећање  $F_0$  увећава петље, тј. проширује област вишеструких периодичних решења у нелинеарном делу криве. Те области се померају у правцу виших фреквенција за веће  $F_0$  амплитуде побуде. Поред тога, померање резонантне фреквенције удесно са повећањем амплитуде

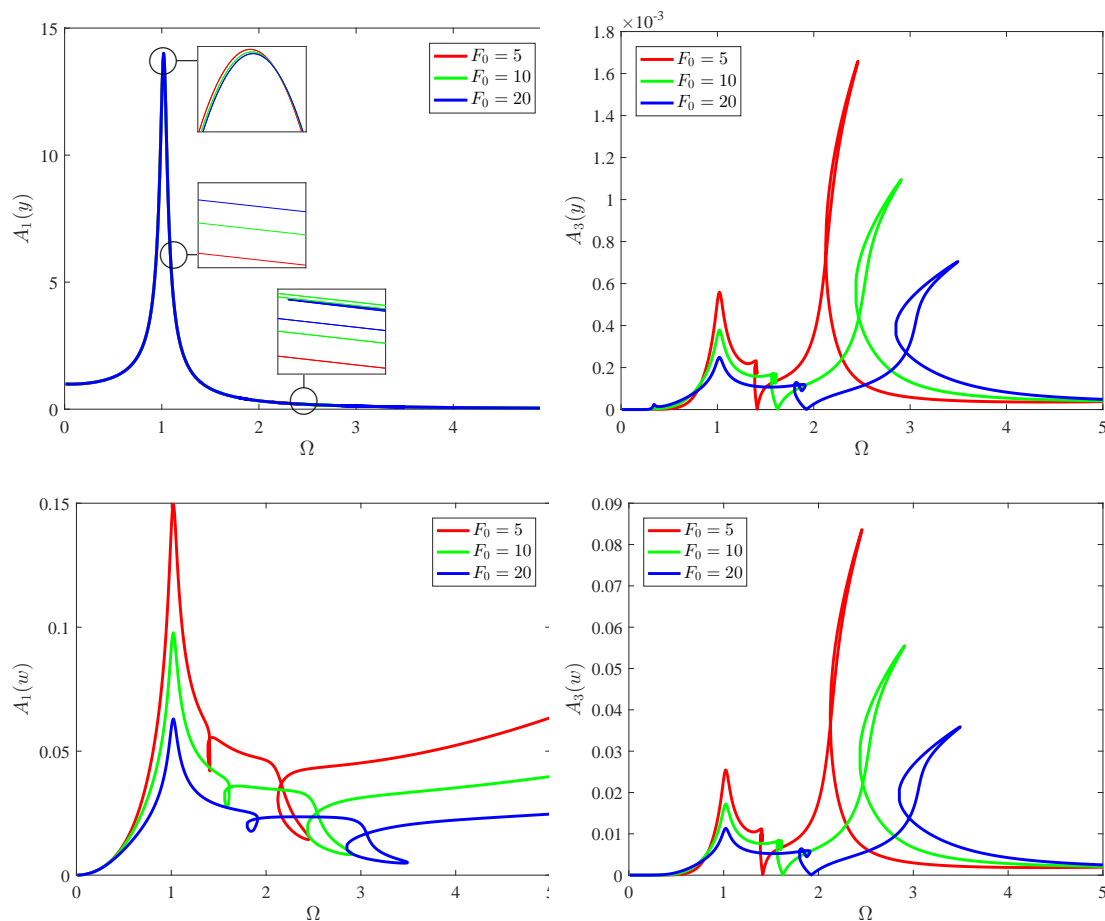


Слика 6.9: Амплитудно-фреквенциона крива одзива нелинеарног фракционог динамичког пригушивача. Амплитуде  $A_1$  и  $A_3$  координата  $y$  и  $w$  за различите вредности параметра пригушења  $c_1$ .

силе је видљиво у сва четири случаја. Трећи хармоник од  $y$  је много мање амплитуде, која би у случају практичне реализације система на слици 6.1 са параметрима из табеле 6.1 била готово не приметна. С друге стране, релативно померање апсорбера по главном телу  $w$  је стабилизовано такође, иако амплитуде спољашње побуде расту.

Са слике 6.11 се може лако уочити да је амплитудно-фреквентни одзив нарочито осетљив на промену параметра фракционог извода  $\alpha$  око прве и најкритичније резонантне фреквенције, где се услед повећања  $\alpha$  смањује амплитуда, и то у сва четири случаја. Поред тога, може се уочити мало померање улево резонантног пика у близини  $\Omega = 1$ . Утицај параметра  $\alpha$  на позицију вишеструког периодичног решења је мали. Такође се може приметити да је трећи хармоник од  $y$  много мање амплитуде, па би се у случају практичне реализације система могао занемарити.

На слици 6.12 је приказано како крутост нелинеарне опруге утиче на амплитудно-фреквентни одзив система. Као што је приказано на слици 6.12, повећање нелинеарне крутости  $k_{22}$  доводи до смањења амплитуда код обе координате  $y, w$ , у првој  $A_1$  и трећој  $A_3$  хармонијској амплитуди. Поред тога, повећање  $k_{22}$  помера резонантни пик и последично



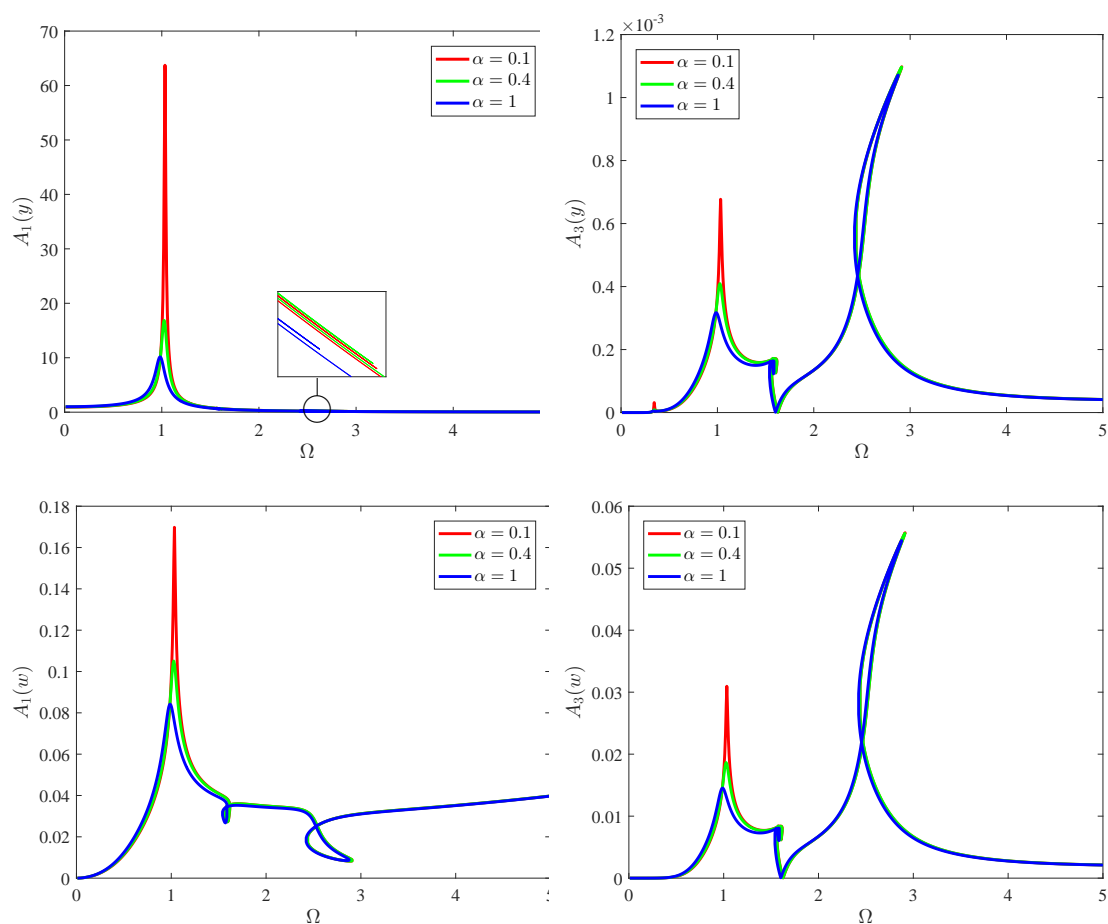
Слика 6.10: Амплитудно-фреквенциона крива одзива нелинеарног фракционог динамичког пригушивача. Амплитуде  $A_1$  и  $A_3$  координата  $y$  и  $w$  за различите вредности амплитуде побудне силе  $F_0$ .

целу криву одзива на десно укључујући петље са вишеструким периодичним решењима, према вишим фреквенцијама побуде. И овде је трећи хармоник од  $y$  много мање амплитуде од првог, па се може као и у претходном случају закључити да би се за практичну изведбу система на слици 6.1 са параметрима из табеле 6.1 могао занемарити.

Са слика 6.7 - 6.12 (десно) се може уочити да се јавља интеракција модова, поготово трећих хармоника основног тела, који има мале амплитуде, али даје заправо понашање на пригушивач, који на готово идентичним фреквенцијама има енергетске поноре и смањења амплитуда. Због тога су амплитудно-фреквентни одзиви на десним подсликама на свакој од слика 6.7 - 6.12 скоро идентичног облика иако се разликују по реду величине.

### 6.3.3 Анализа амплитудно-временских дијаграма

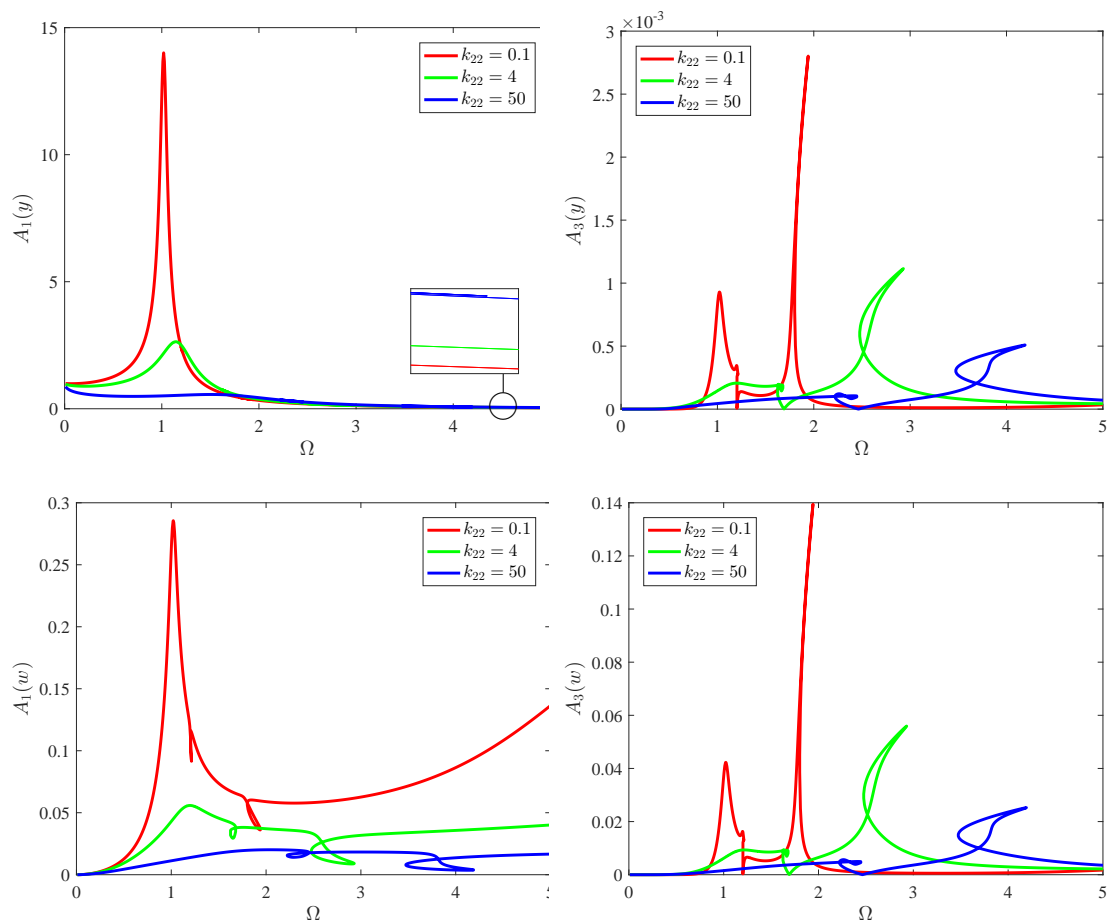
Циљ овог проглавља је спровођење транзијентне анализе која представља анализу амплитудних одзива у временском домену, односно испитивање понашања амплитуда померања маса у времену преко амплитудно-временских дијаграма. Слика 6.13 описује безди-



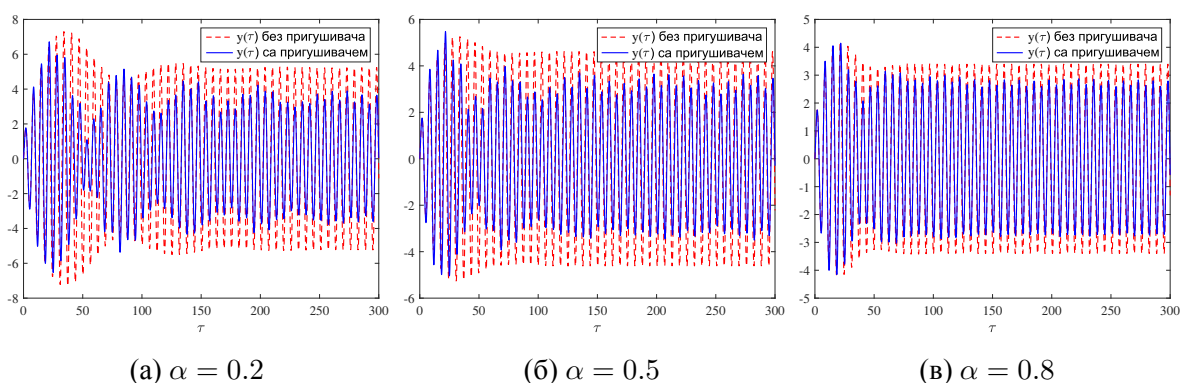
Слика 6.11: Амплитудно-фреквенциона крива одзива нелинеарног фракционог динамичког пригушивача. Амплитуде  $A_1$  и  $A_3$  координата  $y$  и  $w$  за различите вредности фракционог параметра  $\alpha$ .

мензионо померање  $y$  примарне масе у бездимензионом времену  $\tau$ . Плава пуна и црвена испрекидана линија одсликавају промену амплитуда  $y$  у времену  $\tau$ , са и без пригушивача на свакој од подслика.

Овде је примењена директна нумеричка интеграција Њумарк методом за решавање система датог са (4.13). За боље разумевање феномена енергетског трансфера, следећи почетни услови су усвојени  $y(0) = 0$ ,  $w(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 1$ ,  $\dot{w}(0) = 0$  у свакој од представљених симулација. Изабрани су следећи параметри крутости  $k_{21} = 0.0001N/m$ ,  $k_{22} = 0.0005N/m^3$  и фреквенције побуде  $\Omega = 1.15$ . На слици 6.13 је представљен утицај параметра фракционог извода код пригушења  $\alpha$  на временски одзив са и без додатне масе. За мање вредности  $\alpha$  релативно смањење амплитуде је веће, али амплитуде и даље имају велике вредности од око 4, док за веће  $\alpha$  цео систем има мање амплитуде, а додата пригушујућа маса додатно смањује амплитуду до реда величине 2.5. Поред тога, услед близине резонантног стања ( $\Omega = 1.15$ ) може се уочити феномен подрхтавања на слици 6.13.



Слика 6.12: Амплитудно-фреквенциона крива одзива нелинеарног фракционог динамичког пригушивача. Амплитуде  $A_1$  и  $A_3$  координата  $y$  и  $w$  за различите вредности нелинеарног параметра  $k_{22}$ .



(а)  $\alpha = 0.2$

(б)  $\alpha = 0.5$

(в)  $\alpha = 0.8$

Слика 6.13: Временски одзив фракционог система са (плава пуна линија) и без нелинеарног динамичког пригушивача (црвена испрекидана линија). Бездимензиони одзив основног тела за  $\Omega = 1.15$  и различите вредности параметра  $\alpha$ .



## Глава 7

### Закључак

У овој докторској дисертацији су изучавани динамички одзиви нелинеарног система са фракционим пригушењем применом апроксимативних метода, пре свега методе инкременталног хармонијског баланса, пертурбационе методе вишеструких временских скала и Њумарк методе. Након презентовања коришћене методологије, урађена су два примера, на којима је урађена параметарска анализа и поређење метода. Код првог примера је задатак из структурне динамике осцилација греде на подлози сведен на једну фракциону диференцијалну једначину осциловања, а код другог задатак из динамичке апсорпције вибрација система од два крута тела, моделиран је нелинеарни систем фракционих диференцијалних једначина.

У првом примеру, представљеном у поглављу 5, анализиране су нелинеарне принудне осцилације нелокалне греде на фракционом виско-Пастернаковим слоју. Греда је описана коришћењем нелокалне дилатацијско градијентне теорије, а слој садржи пригушење пропорционално фракционом изводу по времену координате померања и њеног другог просторног извода. Једначина малих трансверзалних осцилација је изведена коришћењем Хамилтоновог принципа, а потом дискретизована Галеркиновом апроксимацијом, чиме се добила нехомогена нелинеарна фракциона диференцијална једначина Дуфинговог типа. Решење је нађено за суперхармонијске услове стационарног стања коришћењем пертурбационе методе вишеструких временских скала у случају слабе нелинеарности, односно коришћењем метода ИХБ и Њумарк у случају јаке нелинеарности. Из верификационе студије је показано да се резултати добијени ИХБ методом добро поклапају са резултатима добијеним методом вишеструких временских скала у случају слабе нелинеарности. Поред тога је показано да се у случају јаке нелинеарности резултати добијени помоћу метода ИХБ и Њумарк добро поклапају. Главна предност ИХБ методе наспрам пертурбационе методе вишеструких временских скала лежи у чињеници да не захтева увођење малог параметра и према томе се и случајеви са јаком нелинеарношћу могу испитивати. С друге стране, супериорност ИХБ методе наспрам Њумарк методе је простија компјутерска имплементација и лакше одређивање периодичних решења, нарочито када се јављају петље

у дијаграму фазног портрета стационарног стања. Такође је показано да увођењем ИХБ методе у анализу малих трансверзалних осцилација деформабилних структура са нелокалним ефектима, много поузданије студије нелинеарних система могу бити урађене.

У анализи утицаја различитих параметара, закључено је да нелокални и параметар дужинске скале имају мали утицај на амплитудно-фреквентни одзив. С друге стране, параметри виско-Пастернакове подлоге значајно утичу на амплитуде одзива. Коначно, степени индекс има значајан утицај на амплитудно-фреквентни одзив, што је такође дискутовано у нумеричкој анализи. Уопштено говорећи, амплитуде осцилација система су веће за непарне вредности степеног индекса у односу на материјале са парним вредностима овог параметра.

Поред тога се показало да сви параметри доприносе појави суперхармонијске резонанце реда  $1/3$ , тј. имамо интеракцију фракционог, нелинеарног и члана екстерне побуде. Пораст фракционог параметра доводи до смањења резонантне амплитуде, која бива мало померена у десно ка већим фреквенцијама. Такође, пораст магнитуде силе спољашње побуде амплитуду одзива повећава и помера надесно, ка већим фреквенцијама. Уочено је и добро подударање резултата добијеним методама ИХБ и Њумарк, с тим да се боље поклапање резултата постиже, када су фреквенције побуде далеко од сопствених фреквенција система и појаве резонантног стања. Као последица велике нелинеарности и крутости система, утицај нелокалног параметра на амплитудно-фреквентни одзив је мали, јер не може да дође до изражаја поред друге две величине. Другим речима, нелинеарност редукује утицај нелокалног параметра на динамички одзив система. Услед велике нелинеарности и крутости система, утицај параметра дужинске скале на амплитудно-фреквентни одзив је такође мали. Другим речима, нелинеарност редукује утицај параметра дужинске скале на динамички одзив система.

Такође су анализирани утицаји различитих параметара фракционог виско-Пастернаковог слоја и то:  $K_w, k_w, K_g, k_g$ . Уочено је да повећање еластичног параметра  $K_w$  доводи до смањења амплитуде одзива и последично повећавања укупне крутости система, затим се смањују природне фреквенције осциловања система и због тога се резонантна фреквенција помера улево. Поред тога, детаљнијом анализом, је уочено да се угао нагиба криве у односу на вертикалну осу, као и амплитуда, смањују са повећањем параметра  $K_w$ , што за резултат истовремено има слабљење укрупљујућег нелинеарног ефекта (hardening type). Када је реч о еластичном параметру  $k_w$ , показано је да његово повећање доводи до смањења амплитуде са ефектом стабилизације осцилација система и тиме се укупна крутост система увећава. Поред тога, повећање  $k_w$  као параметра пригушења смањује природне фреквенције система и помера резонантну фреквенцију удесно. Повећање вискозног параметра  $K_g$  виско-Пастернаковог слоја, проузрокује слабљење утицаја ефекта нелинеарног очвршћавања. Наиме, очвршћујући тип (hardening-type) нелинеарности има израженији утицај, када је параметар пригушења  $K_g$  мањи. Може се приметити да повећање параметра  $k_g$  доводи до смањења резонантне амплитуде, која истовремено бива померена удесно

значајно појачавајући ефекат очврђавања нелинеарности. То указује да пораст параметра  $k_g$  повећава укупну крутост система.

Што се тиче утицаја фракционог параметра  $\alpha$  виско-Пастернакове подлоге, може се приметити да његово смањење за корак 0,05 доводи до скоро двоструког увећавања амплитуде у случају примарне резонације. Овај значајан утицај параметра  $\alpha$  је проузрокован тиме што својства пригушења система постају мање изражена услед еластичног понашања фракционог члана. Штавише, смањење параметра реда фракционог извода  $\alpha$  доводи до повећања коефицијента еквивалентне крутости, што резултује савијањем амплитудно-фреквентних кривих удесно и већим фреквенцијама примарне резонанције.

У специјалном случају за  $\alpha = 1$  је испитана стабилност периодичних решења. Резултати добијени ИХБ методом су потврђени техником директне нумеричке интеграције (метода Рунге-Кута) и потврђено је добро слагање. Параметарска студија је изведена кроз амплитудно-фреквентне одговоре, а стабилност сваког периодичног решења је испитана коришћењем Флокеове теорије стабилности. Главни доприноси овог дела рада могу се сажети на следећи начин. Показано је да нелинеарност крутости очврђавања постаје очигледнија за повећање амплитуде побуде и за ниже вредности параметра функционално класификованог материјала, што последично доводи до повећања нестабилних грана периодичних решења. Насупрот томе, повећање параметра који се односи на вискозна својства подлоге доводи до нижих пикова у амплитудно-фреквентном одзиву и мањих нестабилних грана, чиме се повећава стабилност система. Истраживање Флокеових множитеља и њиховог понашања у комплексној равни открило је природу тачака бифуркације у којима се појављује нестабилно решење. Излазак Флокеових множитеља из јединичног круга у правцу  $+1$  је показао постојање бифуркације типа седло-чвор. Модул Флокеовог множитеља је упоређен за различите вредности побудних фреквенција и показано је да је у нестабилном региону степен нестабилности већи за ниже побудне фреквенције. Да би се добила стабилна решења на вишим фреквенцијама побуде, треба применити граничне услове просто ослоњене греде. С друге стране, стабилност на нижим фреквенцијама побуде може се постићи уз граничне услове обострано-укљештене греде. Нестабилан регион са граничним условима укљештено-слободно ослоњене греде је између нестабилних региона за друга два пара граничних услова. Потврђена је појава коегзистирајућих периодичних решења и ефекта крутости учвршћивања код јако нелинеарних ФГ греда на виско-Пастернаковој подлози, као и њена зависност од почетних услова и почетних позиција померања побудне фреквенције. Због тога се добија базен привлачења за такав систем, па се показало, које од стабилних периодичних решења ће превладати за различите скупове почетних услова.

У другом примеру ове докторске дисертације на којем се разматрала примена апроксимационих метода је анализирано динамичко понашање модела уопштеног система са динамичким апсорбером, пре свега кроз дијаграме амплитудно-фреквентног одзива. У ту сврху, нумеричка методологија је развијена, а њена тачност је испитивана коришћењем

ИХБ и Њумарк метода. Модел динамичког апсорбера је максимално усложен са неколико уведених додатних елемената, као што су инертери, нелинеарне опруге и фракционе пригушнице, да би могао да се користи при опису динамике што већег броја практичних изведби масеног пригушивача. Ови додатни елементи доприносе реалистичнијем приказу физичких феномена и практичној реализацији система са динамичким апсорбером. Вискоеластична отпорност на клизање подлоге испод основне масе може описати шири опсег фундамената у поређењем са примерима који већ постоје у литератури. Инертери, могу да редукују амплитуде и реалистичније опишу контакт између две масе, или везу главне масе са фундаментом. Увођењем модела нелинеарне крутости се показало да је утицај пригушења осцилација главне масе израженији.

За систем са динамичким апсорбером изведене су коначне једначине кретања применом основне једначине динамичке равнотеже. Изведене су две спрегнуте једначине кретања. Прва од њих описује кретање основне масе и она је фракциона диференцијална једначина Дуфинговог типа, а друга описује релативно кретање апсорбера (мале додатне масе) и она је нелинеарна диференцијална једначина другог реда. Овај систем једначина кретања је решен методом ИХБ. Изабране периодичне орбите су валидоване Њумарк методом. У параметарској анализи су испитани утицаји различитих параметара, као што су: инертанце инертера, крутост нелинеарне опруге, амплитуда принудне хармонијске силе и параметри фракционог пригушења на амплитудно-фреквентни одзиве који су добијени методом ИХБ и техником нумеричке континуације. Као закључак анализе издвајамо чињеницу да се у првој једначини кретања јављају само линеарни чланови. Нелинеарни члан постоји само у другој једначини. Из тог разлога, одзив координате кретања основне масе за прву хармонијску амплитуду на свим сликама амплитудно-фреквентног одзива је налик линеарном. Нелинеарни део такође постоји, али је мали, као што се може видети у увећаним деловима дијаграма на сликама 6.10-6.12. Поред тога, може се уочити исти облик дијаграма за трећу хармонијску амплитуду код обеју бездимензионих координата кретања система. Међутим, они се разликују у скали. Такође, прва и трећа хармонијска амплитуда се разликују значајније у интензитету код координате померања основне масе, него код координате релативног померања додатне масе у односу на основну масу.

Увођењем фракционог пригушења, уместо класичног пригушења пропорционалног брзини, представљени механички модел је уопштен. Тиме су увећане могућности за развијање модела подешавањем параметара и коришћењем експерименталних резултата, што све доприноси практичној употребљивости резултата овог дела дисертације. Поред тога, ако уместо пасивног управљања, треба развити активно управљање, уопштени модел, који је представљен може много реалније да опише физичке феномене и тиме је у предности у односу на друге студије које се могу наћи у литератури.

# Литература

- [1] Mergen H Ghayesh **and** Ali Farajpour. “A review on the mechanics of functionally graded nanoscale and microscale structures”. **in:** *International Journal of Engineering Science* 137 (2019), **pages** 8–36.
- [2] Fehmi Najar, Ali H Nayfeh, Eihab M Abdel-Rahman, Slim Choura **and** Sami El-Borgi. “Dynamics and global stability of beam-based electrostatic microactuators”. **in:** *Journal of Vibration and Control* 16.5 (2010), **pages** 721–748.
- [3] John Peddieson, George R Buchanan **and** Richard P McNitt. “Application of nonlocal continuum models to nanotechnology”. **in:** *International journal of engineering science* 41.3-5 (2003), **pages** 305–312.
- [4] Paul M Zavracky, Nicol E McGruer, Richard H Morrison **and** David Potter. “Microswitches and microrelays with a view toward microwave applications”. **in:** *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering: Co-sponsored by the Center for Advanced Manufacturing and Packaging of Microwave, Optical, and Digital Electronics (CAMPmode) at the University of Colorado at Boulder* 9.4 (1999), **pages** 338–347.
- [5] Yves Moser **and** Martin AM Gijs. “Miniaturized flexible temperature sensor”. **in:** *Journal of Microelectromechanical Systems* 16.6 (2007), **pages** 1349–1354.
- [6] XQ He, S Kitipornchai **and** KM Liew. “Resonance analysis of multi-layered graphene sheets used as nanoscale resonators”. **in:** *Nanotechnology* 16.10 (2005), **page** 2086.
- [7] Zhong Lin Wang **and** Wenzhuo Wu. “Nanotechnology-enabled energy harvesting for self-powered micro-/nanosystems”. **in:** *Angewandte Chemie International Edition* 51.47 (2012), **pages** 11700–11721.
- [8] Sami El-Borgi, Ralston Fernandes **and** JN Reddy. “Non-local free and forced vibrations of graded nanobeams resting on a non-linear elastic foundation”. **in:** *International Journal of Non-Linear Mechanics* 77 (2015), **pages** 348–363.
- [9] Yin Fan, Yang Xiang **and** Hui-Shen Shen. “Nonlinear dynamics of temperature-dependent FG-GRC laminated beams resting on visco-Pasternak foundations”. **in:** *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 20.01 (2020), **page** 2050012.

- [10] Meisam Moory-Shirbani, Hamid M Sedighi, Hassen M Ouakad **and** Fehmi Najar. “Experimental and mathematical analysis of a piezoelectrically actuated multilayered imperfect microbeam subjected to applied electric potential”. **in:** *Composite Structures* 184 (2018), **pages** 950–960.
- [11] Xiaodong Li, Bharat Bhushan, Kazuki Takashima, Chang-Wook Baek **and** Yong-Kweon Kim. “Mechanical characterization of micro/nanoscale structures for MEMS/NEMS applications using nanoindentation techniques”. **in:** *Ultramicroscopy* 97.1-4 (2003), **pages** 481–494.
- [12] David CC Lam, Fan Yang, ACM Chong, Jianxun Wang **and** Pin Tong. “Experiments and theory in strain gradient elasticity”. **in:** *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51.8 (2003), **pages** 1477–1508.
- [13] Fahimeh Mehralian, Yaghoub Tadi Beni **and** Mehran Karimi Zeverdejani. “Calibration of nonlocal strain gradient shell model for buckling analysis of nanotubes using molecular dynamics simulations”. **in:** *Physica B: Condensed Matter* 521 (2017), **pages** 102–111.
- [14] JN Reddy. “Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams”. **in:** *International journal of engineering science* 45.2-8 (2007), **pages** 288–307.
- [15] SC Pradhan **and** JK Phadikar. “Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 325.1-2 (2009), **pages** 206–223.
- [16] Ivan R Pavlović, Ratko Pavlović, Goran Janevski, Nikola Despenić **and** Vladimir Pajković. “Dynamic behavior of two elastically connected nanobeams under a white noise process”. **in:** *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering* 18.2 (2020), **pages** 219–227.
- [17] FACM Yang, ACM Chong, David Chuen Chun Lam **and** Pin Tong. “Couple stress based strain gradient theory for elasticity”. **in:** *International Journal of Solids and Structures* 39.10 (2002), **pages** 2731–2743.
- [18] Gang-Feng Wang **and** Xi-Qiao Feng. “Effects of surface elasticity and residual surface tension on the natural frequency of microbeams”. **in:** *Applied physics letters* 90.23 (2007), **page** 231904.
- [19] CW Lim, G Zhang **and** JN Reddy. “A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation”. **in:** *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 78 (2015), **pages** 298–313.
- [20] Yang Gao, Wanshen Xiao **and** Haiping Zhu. “Nonlinear vibration of functionally graded nano-tubes using nonlocal strain gradient theory and a two-steps perturbation method”. **in:** *Struct. Eng. Mech* 69.2 (2019), **pages** 205–219.

- [21] G Janevski, N Despenić **and** I Pavlović. “Thermal buckling and free vibration of Euler-Bernoulli FG nanobeams based on the higher-order nonlocal strain gradient theory.” **in:** *Archives of Mechanics* 72.2 (2020).
- [22] Goran Janevski, Ivan Pavlović **and** Nikola Despenić. “Thermal buckling and free vibration of Timoshenko FG nanobeams based on the higher-order nonlocal strain gradient theory”. **in:** *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 15.1 (2020), **pages** 107–133.
- [23] Ilgar Jafarsadeghi-Pournaki, Saber Azizi, Mohammadreza Zamanzadeh, Hadi Madinei, Rasool Shabani **and** Ghader Rezazadeh. “Size-dependent dynamics of a FG nanobeam near nonlinear resonances induced by heat”. **in:** *Applied Mathematical Modelling* (2020).
- [24] Jing Wang **and** Huoming Shen. “Nonlinear vibrations of axially moving simply supported viscoelastic nanobeams based on nonlocal strain gradient theory”. **in:** *Journal of Physics: Condensed Matter* 31.48 (2019), **page** 485403.
- [25] MH Jalaei, A Ghorbanpour Arani **and** H Nguyen-Xuan. “Investigation of thermal and magnetic field effects on the dynamic instability of FG Timoshenko nanobeam employing nonlocal strain gradient theory”. **in:** *International Journal of Mechanical Sciences* 161 (2019), **page** 105043.
- [26] Li Li, Yujin Hu **and** Xiaobai Li. “Longitudinal vibration of size-dependent rods via nonlocal strain gradient theory”. **in:** *International Journal of Mechanical Sciences* 115 (2016), **pages** 135–144.
- [27] Xiaobai Li, Li Li, Yujin Hu, Zhe Ding **and** Weiming Deng. “Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory”. **in:** *Composite Structures* 165 (2017), **pages** 250–265.
- [28] Mesut Şimşek. “Nonlinear free vibration of a functionally graded nanobeam using nonlocal strain gradient theory and a novel Hamiltonian approach”. **in:** *International Journal of Engineering Science* 105 (2016), **pages** 12–27.
- [29] Hu Liu, Zheng Lv **and** Han Wu. “Nonlinear free vibration of geometrically imperfect functionally graded sandwich nanobeams based on nonlocal strain gradient theory”. **in:** *Composite Structures* 214 (2019), **pages** 47–61.
- [30] Li Li **and** Yujin Hu. “Wave propagation in fluid-conveying viscoelastic carbon nanotubes based on nonlocal strain gradient theory”. **in:** *Computational materials science* 112 (2016), **pages** 282–288.
- [31] Yaxin Zhen **and** Lin Zhou. “Wave propagation in fluid-conveying viscoelastic carbon nanotubes under longitudinal magnetic field with thermal and surface effect via nonlocal strain gradient theory”. **in:** *Modern Physics Letters B* 31.08 (2017), **page** 1750069.

- [32] Li Li, Yujin Hu, Xiaobai Li **and** Ling Ling. “Size-dependent effects on critical flow velocity of fluid-conveying microtubes via nonlocal strain gradient theory”. **in:** *Microfluidics and nanofluidics* 20.5 (2016), **page** 76.
- [33] Guoqi Zhang, Zhiqiang Wu **and** Yajie Li. “Nonlinear Dynamic Analysis of Fractional Damped Viscoelastic Beams”. **in:** *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 19 (11)(2019) 1950129 (2019).
- [34] Guy Joseph Eyebe, Gambo Betchewe, Alidou Mohamadou **and** Timoleon Crepin Kofane. “Nonlinear vibration of a nonlocal nanobeam resting on fractional-order viscoelastic Pasternak foundations”. **in:** *Fractal and Fractional* 2.3 (2018), **page** 21.
- [35] Roman Lewandowski **and** Przemysław Wielentejczyk. “Nonlinear vibration of viscoelastic beams described using fractional order derivatives”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 399 (2017), **pages** 228–243.
- [36] Udbhau Bhattiprolu, Anil K Bajaj **and** Patricia Davies. “Periodic response predictions of beams on nonlinear and viscoelastic unilateral foundations using incremental harmonic balance method”. **in:** *International Journal of Solids and Structures* 99 (2016), **pages** 28–39.
- [37] Sondipon Adhikari. “Damping modelling using generalized proportional damping”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 293.1-2 (2006), **pages** 156–170.
- [38] Sondipon Adhikari **and** Jim Woodhouse. “Identification of damping: part 1, viscous damping”. **in:** *Journal of Sound and vibration* 243.1 (2001), **pages** 43–61.
- [39] Sondipon Adhikari **and** Jim Woodhouse. “Identification of damping: part 2, non-viscous damping”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 243.1 (2001), **pages** 63–88.
- [40] Charles W Bert. “Material damping: An introductory review of mathematic measures and experimental technique”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 29.2 (1973), **pages** 129–153.
- [41] David Koblar **and** MJET Boltežar. “Evaluation of the frequency-dependent Young’s modulus and damping factor of rubber from experiment and their implementation in a finite-element analysis”. **in:** *Experimental Techniques* 40.1 (2016), **pages** 235–244.
- [42] J Gregory McDaniel, Pierre Dupont **and** Liming Salvino. “A wave approach to estimating frequency-dependent damping under transient loading”. **in:** *Journal of sound and vibration* 231.2 (2000), **pages** 433–449.
- [43] Fabian Duvigneau, Lars Spannan, Maria Gavila Lloret, Elmar Woschke **and** Ulrich Gabbert. “Characterization of the frequency-dependent properties of damping materials”. **in:** *PAMM* 18.1 (2018), e201800018.



- [44] Manex Martinez-Agirre **and** María Jesús Elejabarrieta. “Dynamic characterization of high damping viscoelastic materials from vibration test data”. **in:** *Journal of sound and vibration* 330.16 (2011), **pages** 3930–3943.
- [45] Der-Wen Chang, JM Roesset **and** Chan-Hua Wen. “A time-domain viscous damping model based on frequency-dependent damping ratios”. **in:** *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 19.8 (2000), **pages** 551–558.
- [46] Yuriy A Rossikhin **and** Marina V Shitikova. “New approach for the analysis of damped vibrations of fractional oscillators”. **in:** *Shock and Vibration* 16.4 (2009), **pages** 365–387.
- [47] Hermann Frahm. *Device for damping vibrations of bodies*. US Patent 989,958. **april** 1911.
- [48] Gianluca Gatti. “Fundamental insight on the performance of a nonlinear tuned mass damper”. **in:** *Meccanica* 53.1 (2018), **pages** 111–123.
- [49] Luyu Li **and** Yongjia Du. “Design of Nonlinear Tuned Mass Damper by Using the Harmonic Balance Method”. **in:** *Journal of Engineering Mechanics* 146.6 (2020), **page** 04020056.
- [50] C Sun, S Nagarajaiah **and** AJ Dick. “Experimental investigation of vibration attenuation using nonlinear tuned mass damper and pendulum tuned mass damper in parallel”. **in:** *Nonlinear Dynamics* 78.4 (2014), **pages** 2699–2715.
- [51] D Pun **and** YB Liu. “On the design of the piecewise linear vibration absorber”. **in:** *Nonlinear dynamics* 22.4 (2000), **pages** 393–413.
- [52] Malcolm C Smith. “Synthesis of mechanical networks: the inerter”. **in:** *IEEE Transactions on automatic control* 47.10 (2002), **pages** 1648–1662.
- [53] David J Wagg. “A review of the mechanical inerter: historical context, physical realisations and nonlinear applications”. **in:** *Nonlinear Dynamics* (2021), **pages** 1–22.
- [54] Malcolm C Smith. “The inerter: A retrospective”. **in:** *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems* 3 (2020), **pages** 361–391.
- [55] Michael ZQ Chen **and** Yinlong Hu. *Inerter and Its Application in Vibration Control Systems*. Springer, 2019.
- [56] Malcolm C Smith **and** Fu-Cheng Wang. “Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters”. **in:** *Vehicle system dynamics* 42.4 (2004), **pages** 235–257.
- [57] Simos Evangelou, David JN Limebeer, Robin S Sharp **and** Malcolm C Smith. “Mechanical steering compensators for high-performance motorcycles”. **in:** (2007).
- [58] Fu-Cheng Wang, Min-Kai Liao, Bo-Huai Liao, Wei-Jiun Su **and** Hsiang-An Chan. “The performance improvements of train suspension systems with mechanical networks employing inerters”. **in:** *Vehicle System Dynamics* 47.7 (2009), **pages** 805–830.

- [59] Yuta Hanazawa, Hiroyuki Suda **and** Masaki Yamakita. “Analysis and experiment of flat-footed passive dynamic walker with ankle inerter”. **in:** *2011 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*. IEEE. 2011, **pages** 86–91.
- [60] Yinlong Hu, Michael ZQ Chen **and** Yonghui Sun. “Comfort-oriented vehicle suspension design with skyhook inerter configuration”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 405 (2017), **pages** 34–47.
- [61] YL Cheung **and** Wai On Wong. “Isolation of bending vibration in a beam structure with a translational vibration absorber and a rotational vibration absorber”. **in:** *Journal of Vibration and Control* 14.8 (2008), **pages** 1231–1246.
- [62] Xiaoling Jin, Michael ZQ Chen **and** Zhilong Huang. “Minimization of the beam response using inerter-based passive vibration control configurations”. **in:** *International Journal of Mechanical Sciences* 119 (2016), **pages** 80–87.
- [63] JD Simonovic. “Influence of rolling visco-elastic coupling on non-linear dynamics of double plates system”. **in:** *Iranian Journal of Science and Technology. Transactions of Mechanical Engineering* 39.1271 M1+ (2015), **pages** 163–173.
- [64] Michael ZQ Chen, Yinlong Hu, Lixi Huang **and** Guanrong Chen. “Influence of inerter on natural frequencies of vibration systems”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 333.7 (2014), **pages** 1874–1887.
- [65] Yinlong Hu, Michael ZQ Chen **and** Malcolm C Smith. “Natural frequency assignment for mass-chain systems with inerters”. **in:** *Mechanical Systems and Signal Processing* 108 (2018), **pages** 126–139.
- [66] Alicia Gonzalez-Buelga, Irina F Lazar, Jason Z Jiang, Simon A Neild **and** Daniel J Inman. “Assessing the effect of nonlinearities on the performance of a tuned inerter damper”. **in:** *Structural Control and Health Monitoring* 24.3 (2017), e1879.
- [67] Gioacchino Alotta **and** Giuseppe Failla. “Improved inerter-based vibration absorbers”. **in:** *International Journal of Mechanical Sciences* 192 (2021), **page** 106087.
- [68] IF Lazar, SA Neild **and** DJ Wagg. “Using an inerter-based device for structural vibration suppression”. **in:** *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 43.8 (2014), **pages** 1129–1147.
- [69] Laurentiu Marian **and** Agathoklis Giaralis. “Optimal design of a novel tuned mass-damper–inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems”. **in:** *Probabilistic Engineering Mechanics* 38 (2014), **pages** 156–164.
- [70] IF Lazar, SA Neild **and** DJ Wagg. “Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers”. **in:** *Engineering Structures* 122 (2016), **pages** 62–71.

- [71] Nicos Makris **and** Georgios Kampas. “Seismic protection of structures with supplemental rotational inertia”. **in:** *Journal of Engineering Mechanics* 142.11 (2016), **page** 04016089.
- [72] Wenai Shen, Abdou Niyitangamahoro, Zhouquan Feng **and** Hongping Zhu. “Tuned inerter dampers for civil structures subjected to earthquake ground motions: optimum design and seismic performance”. **in:** *Engineering Structures* 198 (2019), **page** 109470.
- [73] Christos Papageorgiou, Neil E Houghton **and** Malcolm C Smith. “Experimental testing and analysis of inerter devices”. **in:** *Journal of dynamic systems, measurement, and control* 131.1 (2009).
- [74] Zheng Ge **and** Weirui Wang. “Modeling, testing, and characteristic analysis of a planetary flywheel inerter”. **in:** *Shock and Vibration* 2018 (2018).
- [75] Karthik Madhamshetty **and** James M Manimala. “Low-rate characterization of a mechanical inerter”. **in:** *Machines* 6.3 (2018), **page** 32.
- [76] Daniele Pietrosanti, Maurizio De Angelis **and** Agathoklis Giaralis. “Experimental study and numerical modeling of nonlinear dynamic response of SDOF system equipped with tuned mass damper inerter (TMDI) tested on shaking table under harmonic excitation”. **in:** *International Journal of Mechanical Sciences* 184 (2020), **page** 105762.
- [77] Ali H Nayfeh. *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [78] Xianren Kong, Haiqin Li **and** Chen Wu. “Dynamics of 1-dof and 2-dof energy sink with geometrically nonlinear damping: application to vibration suppression”. **in:** *Nonlinear Dynamics* 91.1 (2018), **pages** 733–754.
- [79] Yi Hui, Siu-Seong Law, Weidong Zhu **and** Qingshan Yang. “Extended IHB method for dynamic analysis of structures with geometrical and material nonlinearities”. **in:** *Engineering Structures* 205 (2020), **page** 110084.
- [80] Huai Xiong, Xianren Kong, Haiqin Li **and** Zhenguo Yang. “Vibration analysis of nonlinear systems with the bilinear hysteretic oscillator by using incremental harmonic balance method”. **in:** *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 42 (2017), **pages** 437–450.
- [81] R Ju, W Fan, WD Zhu **and** JL Huang. “A modified two-timescale incremental harmonic balance method for steady-state quasi-periodic responses of nonlinear systems”. **in:** *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 12.5 (2017).
- [82] JL Huang **and** WD Zhu. “An incremental harmonic balance method with two timescales for quasiperiodic motion of nonlinear systems whose spectrum contains uniformly spaced sideband frequencies”. **in:** *Nonlinear Dynamics* 90.2 (2017), **pages** 1015–1033.
- [83] JL Huang, WJ Zhou **and** WD Zhu. “Quasi-periodic motions of high-dimensional nonlinear models of a translating beam with a stationary load subsystem under harmonic boundary excitation”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 462 (2019), **page** 114870.

- [84] Suguang Dou **and** Jakob Søndergaard Jensen. “Optimization of hardening/softening behavior of plane frame structures using nonlinear normal modes”. **in:** *Computers & Structures* 164 (2016), **pages** 63–74.
- [85] Danilo Karličić, Tanmoy Chatterjee, Milan Cajić **and** Sondipon Adhikari. “Parametrically amplified Mathieu-Duffing nonlinear energy harvesters”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* (2020), **page** 115677.
- [86] Danilo Karličić, Milan Cajić, Stepa Paunović **and** Sondipon Adhikari. “Periodic response of a nonlinear axially moving beam with a nonlinear energy sink and piezoelectric attachment”. **in:** *International Journal of Mechanical Sciences* 195 (2021), **page** 106230.
- [87] Danilo Karličić, Predrag Kozić, Ratko Pavlović **and** Nikola Nešić. “Dynamic stability of single-walled carbon nanotube embedded in a viscoelastic medium under the influence of the axially harmonic load”. **in:** *Composite Structures* 162 (2017), **pages** 227–243.
- [88] Rudolf Hilfer. *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific, 2000.
- [89] Duarte Valério, José Tenreiro Machado **and** Virginia Kiryakova. “Some pioneers of the applications of fractional calculus”. **in:** *Fractional Calculus and Applied Analysis* 17 (2014), **pages** 552–578.
- [90] HongGuang Sun, Yong Zhang, Dumitru Baleanu, Wen Chen **and** YangQuan Chen. “A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering”. **in:** *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 64 (2018), **pages** 213–231.
- [91] Yuriy A Rossikhin **and** Marina V Shitikova. “Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results”. **in:** *Applied Mechanics Reviews* 63.1 (2010).
- [92] Yuriy A Rossikhin **and** Marina V Shitikova. “Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges”. **in:** *Journal of Engineering Mechanics* 124.9 (1998), **pages** 1029–1036.
- [93] Yury A Rossikhin **and** Marina V Shitikova. “Nonlinear dynamic response of a fractionally damped suspension bridge subjected to small external force”. **in:** *Int J Mech* 7.3 (2013), **page** 155.
- [94] Marina V Shitikova. “The fractional derivative expansion method in nonlinear dynamic analysis of structures”. **in:** *Nonlinear Dynamics* 99.1 (2020), **pages** 109–122.
- [95] Anatoliĭ Aleksandrovich Kilbas, Hari M Srivastava **and** Juan J Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*. **volume** 204. elsevier, 2006.
- [96] Teodor M Atanackovic, Marko Janev, Stevan Pilipovic **and** Dusan Zorica. “Convergence analysis of a numerical scheme for two classes of non-linear fractional differential equations”. **in:** *Applied Mathematics and Computation* 243 (2014), **pages** 611–623.

- [97] QX Liu, JK Liu **and** YM Chen. “A second-order scheme for nonlinear fractional oscillators based on Newmark- $\beta$  algorithm”. **in:** *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 13.8 (2018).
- [98] Georgios I Evangelatos **and** Pol D Spanos. “An accelerated Newmark scheme for integrating the equation of motion of nonlinear systems comprising restoring elements governed by fractional derivatives”. **in:** *Recent advances in mechanics*. Springer, 2011, **pages** 159–177.
- [99] Christian Bucher **and** Antonina Pirrotta. “Dynamic Finite Element analysis of fractionally damped structural systems in the time domain”. **in:** *Acta Mechanica* 226.12 (2015), **pages** 3977–3990.
- [100] Kai Diethelm, Neville J Ford **and** Alan D Freed. “A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations”. **in:** *Nonlinear Dynamics* 29.1 (2002), **pages** 3–22.
- [101] Nikola Nešić, Milan Cajić, Danilo Karličić **and** Goran Janevski. “Nonlinear superharmonic resonance analysis of a nonlocal beam on a fractional visco-Pasternak foundation”. **in:** *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 235.20 (2021), **pages** 4594–4611.
- [102] Nikola Nešić, Milan Cajić, Danilo Karličić, Aleksandar Obradović **and** Julijana Simonović. “Nonlinear vibration of a nonlocal functionally graded beam on fractional visco-Pasternak foundation”. **in:** *Nonlinear Dynamics* 107.3 (2022), **pages** 2003–2026.
- [103] Yong-Jun Shen, Shao-Fang Wen, Xiang-Hong Li, Shao-Pu Yang **and** Hai-Jun Xing. “Dynamical analysis of fractional-order nonlinear oscillator by incremental harmonic balance method”. **in:** *Nonlinear Dynamics* 85.3 (2016), **pages** 1457–1467.
- [104] Shao-Fang Wen, Yong-Jun Shen, Xiao-Na Wang, Shao-Pu Yang **and** Hai-Jun Xing. “Dynamical analysis of strongly nonlinear fractional-order Mathieu-Duffing equation”. **in:** *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 26.8 (2016), **page** 084309.
- [105] Jun Dai, Zhao-Dong Xu **and** Pan-Pan Gai. “Dynamic analysis of viscoelastic tuned mass damper system under harmonic excitation”. **in:** *Journal of Vibration and Control* 25.11 (2019), **pages** 1768–1779.
- [106] Giorgio Barone, M Di Paola, F Lo Iacono **and** Giacomo Navarra. “Viscoelastic bearings with fractional constitutive law for fractional tuned mass dampers”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 344 (2015), **pages** 18–27.
- [107] A Batou **and** S Adhikari. “Optimal parameters of viscoelastic tuned-mass dampers”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 445 (2019), **pages** 17–28.
- [108] Finn Rüdinger. “Tuned mass damper with fractional derivative damping”. **in:** *Engineering Structures* 28.13 (2006), **pages** 1774–1779.

- [109] Bertram Ross. “The development of fractional calculus 1695–1900”. **in:** *Historia Mathematica* 4.1 (1977), **pages** 75–89.
- [110] Yuriy A Rossikhin **and** Marina V Shitikova. “Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids”. **in:** *Applied Mechanics Review* 50.1 (1997).
- [111] Ronald L Bagley **and** PJ Torvik. “A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity”. **in:** *Journal of Rheology* 27.3 (1983), **pages** 201–210.
- [112] Lokenath Debnath. “Recent applications of fractional calculus to science and engineering”. **in:** *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 2003.54 (2003), **pages** 3413–3442.
- [113] JA Tenreiro Machado, Manuel F Silva, Ramiro S Barbosa, Isabel S Jesus, Cecília M Reis, Maria G Marcos **and** Alexandra F Galhano. “Some applications of fractional calculus in engineering”. **in:** *Mathematical problems in engineering* 2010 (2010).
- [114] Davood Younesian, Ali Hosseinkhani, Hassan Askari **and** Ebrahim Esmailzadeh. “Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications”. **in:** *Nonlinear Dynamics* (2019), **pages** 1–43.
- [115] Igor Podlubny. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. Elsevier, 1998.
- [116] G Sales Teodoro, JA Tenreiro Machado **and** E Capelas De Oliveira. “A review of definitions of fractional derivatives and other operators”. **in:** *Journal of Computational Physics* 388 (2019), **pages** 195–208.
- [117] Ivo Petráš. *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [118] Dumitru Baleanu, Kai Diethelm, Enrico Scalas **and** Juan J Trujillo. *Fractional calculus: models and numerical methods*. **volume** 3. World Scientific, 2012.
- [119] MFGM Koizumi. “FGM activities in Japan”. **in:** *Composites Part B: Engineering* 28.1-2 (1997), **pages** 1–4.
- [120] Reza Ghanavati **and** Homam Naffakh-Moosavy. “Additive manufacturing of functionally graded metallic materials: A review of experimental and numerical studies”. **in:** *Journal of Materials Research and Technology* 13 (2021), **pages** 1628–1664.
- [121] Mino Naebe **and** Kamyar Shirvanimoghaddam. “Functionally graded materials: A review of fabrication and properties”. **in:** *Applied materials today* 5 (2016), **pages** 223–245.

- [122] Bassiouny Saleh, Jinghua Jiang, Reham Fathi, Tareq Al-hababi, Qiong Xu, Lisha Wang, Dan Song **and** Aibin Ma. “30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges”. **in:** *Composites Part B: Engineering* 201 (2020), **page** 108376.
- [123] Vasavi Boggarapu, Raghavendra Gujjala, Shakuntla Ojha, Sk Acharya, Somaiah Chowdary, Dheeraj kumar Gara **and others**. “State of the art in functionally graded materials”. **in:** *Composite Structures* 262 (2021), **page** 113596.
- [124] Raffaele Barretta, Luciano Feo, Raimondo Luciano, Francesco Marotti de Sciarra **and** Rosa Penna. “Functionally graded Timoshenko nanobeams: a novel nonlocal gradient formulation”. **in:** *Composites Part B: Engineering* 100 (2016), **pages** 208–219.
- [125] Li Li **and** Yujin Hu. “Nonlinear bending and free vibration analyses of nonlocal strain gradient beams made of functionally graded material”. **in:** *International Journal of Engineering Science* 107 (2016), **pages** 77–97.
- [126] AS Yigit **and** AP Christoforou. “Coupled axial and transverse vibrations of oilwell drill-strings”. **in:** *Journal of sound and vibration* 195.4 (1996), **pages** 617–627.
- [127] Marcelo A Trindade, Claudio Wolter **and** Rubens Sampaio. “Karhunen–Loeve decomposition of coupled axial/bending vibrations of beams subject to impacts”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 279.3-5 (2005), **pages** 1015–1036.
- [128] JR Banerjee **and** A Ananthapuvirajah. “Coupled axial-bending dynamic stiffness matrix for beam elements”. **in:** *Computers & Structures* 215 (2019), **pages** 1–9.
- [129] A Cemal Eringen. *Nonlocal continuum field theories*. Springer Science **and** Business Media, 2002.
- [130] A Cemal Eringen. “Nonlocal polar elastic continua”. **in:** *International journal of engineering science* 10.1 (1972), **pages** 1–16.
- [131] A Cemal Eringen. “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”. **in:** *Journal of applied physics* 54.9 (1983), **pages** 4703–4710.
- [132] Harm Askes **and** Elias C Aifantis. “Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results”. **in:** *International Journal of Solids and Structures* 48.13 (2011), **pages** 1962–1990.
- [133] Raymond David Mindlin **and** NN0166 Eshel. “On first strain-gradient theories in linear elasticity”. **in:** *International Journal of Solids and Structures* 4.1 (1968), **pages** 109–124.

- [134] Mergen H Ghayesh **and** Ali Farajpour. “Nonlinear mechanics of nanoscale tubes via nonlocal strain gradient theory”. **in:** *International Journal of Engineering Science* 129 (2018), **pages** 84–95.
- [135] Lu Lu, Xingming Guo **and** Jianzhong Zhao. “Size-dependent vibration analysis of nanobeams based on the nonlocal strain gradient theory”. **in:** *International Journal of Engineering Science* 116 (2017), **pages** 12–24.
- [136] Mergen H Ghayesh, Hamed Farokhi **and** Marco Amabili. “Nonlinear dynamics of a microscale beam based on the modified couple stress theory”. **in:** *Composites Part B: Engineering* 50 (2013), **pages** 318–324.
- [137] Milan S Cajić. “Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела”. **in:** *Универзитет у Београду* (2017).
- [138] Danilo Z Karličić. “Primena nelokalne teorije kontinuuma u analizi dinamičkog ponašanja i stabilnosti sistema spregnutih nano-struktura”. **in:** *Универзитет у Нишу* (2016).
- [139] Katica Hedrih. *Izabrana poglavlja teorije elastičnosti, II Izdanje-prošireno i dopunjeno*. Niš, 1988.
- [140] J Fernández-Sáez, R Zaera, JA Loya **and** JN3434393 Reddy. “Bending of Euler - Bernoulli beams using Eringen’s integral formulation: a paradox resolved”. **in:** *International Journal of Engineering Science* 99 (2016), **pages** 107–116.
- [141] NA Fleck **and** JW1248268 Hutchinson. “A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity”. **in:** *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41.12 (1993), **pages** 1825–1857.
- [142] Elias C Aifantis. “Strain gradient interpretation of size effects”. **in:** *Fracture scaling*. Springer, 1999, **pages** 299–314.
- [143] RC Batra. “Misuse of Eringen’s nonlocal elasticity theory for functionally graded materials”. **in:** *International Journal of Engineering Science* 159 (), **page** 103425.
- [144] A Apuzzo, R Barretta, SA Faghidian, R Luciano **and** F Marotti De Sciarra. “Free vibrations of elastic beams by modified nonlocal strain gradient theory”. **in:** *International Journal of Engineering Science* 133 (2018), **pages** 99–108.
- [145] Andrea Apuzzo, Raffaele Barretta, S Ali Faghidian, Raimondo Luciano **and** F Marotti De Sciarra. “Nonlocal strain gradient exact solutions for functionally graded inflected nano-beams”. **in:** *Composites Part B: Engineering* 164 (2019), **pages** 667–674.
- [146] Raffaele Barretta **and** Francesco Marotti de Sciarra. “Constitutive boundary conditions for nonlocal strain gradient elastic nano-beams”. **in:** *International Journal of Engineering Science* 130 (2018), **pages** 187–198.



- [147] H Salehipour, AR Shahidi **and** H Nahvi. “Modified nonlocal elasticity theory for functionally graded materials”. **in:** *International Journal of Engineering Science* 90 (2015), **pages** 44–57.
- [148] Malte Krack **and** Johann Gross. *Harmonic balance for nonlinear vibration problems*. **volume** 1. Springer, 2019.
- [149] SL Lau **and** YK Cheung. “Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic systems”. **in:** *ASME Journal of Applied Mechanics* 48 (1981), **pages** 959–964.
- [150] Lijun Pei, Antonio SE Chong, Ekaterina Pavlovskaja **and** Marian Wiercigroch. “Computation of periodic orbits for piecewise linear oscillator by Harmonic Balance Methods”. **in:** *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 108 (2022), **page** 106220.
- [151] SL Lau **and** SW Yuen. “Solution diagram of non-linear dynamic systems by the IHB method”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 167.2 (1993), **pages** 303–316.
- [152] A Raghothama **and** S Narayanan. “Bifurcation and chaos in escape equation model by incremental harmonic balancing”. **in:** *Chaos, Solitons & Fractals* 11.9 (2000), **pages** 1349–1363.
- [153] A Raghothama **and** S Narayanan. “Bifurcation and chaos of an articulated loading platform with piecewise non-linear stiffness using the incremental harmonic balance method”. **in:** *Ocean Engineering* 27.10 (2000), **pages** 1087–1107.
- [154] Ko-Choong Woo, Albert A Rodger, Richard D Neilson **and** Marian Wiercigroch. “Application of the harmonic balance method to ground moling machines operating in periodic regimes”. **in:** *Chaos, Solitons & Fractals* 11.15 (2000), **pages** 2515–2525.
- [155] JH Shen, KC Lin, SH Chen **and** KY Sze. “Bifurcation and route-to-chaos analyses for Mathieu–Duffing oscillator by the incremental harmonic balance method”. **in:** *Nonlinear Dynamics* 52.4 (2008), **pages** 403–414.
- [156] Yongjun Shen, Shaopu Yang **and** Xiandong Liu. “Nonlinear dynamics of a spur gear pair with time-varying stiffness and backlash based on incremental harmonic balance method”. **in:** *International journal of mechanical sciences* 48.11 (2006), **pages** 1256–1263.
- [157] Richard Hayes **and** Simão P Marques. “Prediction of limit cycle oscillations under uncertainty using a harmonic balance method”. **in:** *Computers & Structures* 148 (2015), **pages** 1–13.
- [158] Guanghui Sun **and** Xilin Fu. “Discontinuous dynamics of a class of oscillators with strongly nonlinear asymmetric damping under a periodic excitation”. **in:** *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 61 (2018), **pages** 230–247.

- [159] Lucien Charroyer, Olivier Chiello **and** Jean-Jacques Sinou. “Self-excited vibrations of a non-smooth contact dynamical system with planar friction based on the shooting method”. **in:** *International Journal of Mechanical Sciences* 144 (2018), **pages** 90–101.
- [160] Lijun Pei **and** Shuo Wang. “Dynamics and the periodic solutions of the delayed non-smooth Internet TCP-RED congestion control system via HB–AFT”. **in:** *Applied Mathematics and Computation* 361 (2019), **pages** 689–702.
- [161] Wei Dai, Jian Yang **and** Baiyang Shi. “Vibration transmission and power flow in impact oscillators with linear and nonlinear constraints”. **in:** *International Journal of Mechanical Sciences* 168 (2020), **page** 105234.
- [162] C Pierre, AA Ferri **and** EH Dowell. “Multi-harmonic analysis of dry friction damped systems using an incremental harmonic balance method”. **in:** (1985).
- [163] CW Wong, WS Zhang **and** SL Lau. “Periodic forced vibration of unsymmetrical piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 149.1 (1991), **pages** 91–105.
- [164] SL Lau **and** W-S Zhang. “Nonlinear vibrations of piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method”. **in:** (1992).
- [165] L Xu, MW Lu **and** Q Cao. “Nonlinear vibrations of dynamical systems with a general form of piecewise-linear viscous damping by incremental harmonic balance method”. **in:** *Physics Letters A* 301.1-2 (2002), **pages** 65–73.
- [166] Suguang Dou **and** Jakob Søndergaard Jensen. “Optimization of nonlinear structural resonance using the incremental harmonic balance method”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 334 (2015), **pages** 239–254.
- [167] Danilo Karličić, Milan Cajić, Stepa Paunović **and** Sondipon Adhikari. “Nonlinear energy harvester with coupled Duffing oscillators”. **in:** *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* (2020), **page** 105394.
- [168] Shihua Zhou, Guiqiu Song, Yiming Li, Zhilong Huang **and** Zhaohui Ren. “Dynamic and steady analysis of a 2-DOF vehicle system by modified incremental harmonic balance method”. **in:** *Nonlinear Dynamics* 98.1 (2019), **pages** 75–94.
- [169] Ivana Kovacic **and** Michael J Brennan. *The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*. John Wiley & Sons, 2011.
- [170] Ivana Kovacic, Richard Rand **and** Si Mohamed Sah. “Mathieu’s equation and its generalizations: overview of stability charts and their features”. **in:** *Applied Mechanics Reviews* 70.2 (2018).
- [171] Sergey Repin. “One hundred years of the Galerkin method”. **in:** *Computational Methods in Applied Mathematics* 17.3 (2017), **pages** 351–357.

- [172] Martin J Gander **and** Gerhard Wanner. “From Euler, Ritz, and Galerkin to modern computing”. **in:** *Siam Review* 54.4 (2012), **pages** 627–666.
- [173] A Raghothama **and** S Narayanan. “Periodic response and chaos in nonlinear systems with parametric excitation and time delay”. **in:** *Nonlinear dynamics* 27 (2002), **pages** 341–365.
- [174] Ali H Nayfeh **and** Dean T Mook. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 2008.
- [175] Nikola Nešić, Milan Cajić, Danilo Karličić, Mihailo Lazarević **and** Sondipon Adhikari. “Vibration and stability of a nonlinear nonlocal strain-gradient FG beam on a visco-Pasternak foundation”. **in:** *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering* (2023).
- [176] Sebastian Engelnkemper, Svetlana V Gurevich, Hannes Uecker, Daniel Wetzel **and** Uwe Thiele. “Continuation for thin film hydrodynamics and related scalar problems”. **in:** *Computational Modelling of Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics*. Springer, 2019, **pages** 459–501.
- [177] Sheng Wang, Lin Hua, Can Yang, Xinghui Han **and** Zhuoyu Su. “Applications of incremental harmonic balance method combined with equivalent piecewise linearization on vibrations of nonlinear stiffness systems”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 441 (2019), **pages** 111–125.
- [178] Jon Juel Thomsen. *Vibrations and stability: advanced theory, analysis, and tools*. Springer Science & Business Media, 2021.
- [179] Ali H Nayfeh **and** Balakumar Balachandran. *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational, and experimental methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [180] Jon Juel Thomsen. *Vibrations and stability: advanced theory, analysis, and tools*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [181] Bernd Krauskopf, Hinke M Osinga **and** Jorge Galán-Vioque. *Numerical continuation methods for dynamical systems*. **volume** 2. Springer, 2007.
- [182] Eugene L Allgower **and** Kurt Georg. *Numerical continuation methods: an introduction*. **volume** 13. Springer Science & Business Media, 2012.
- [183] Grigorios Dimitriadis. *Introduction to nonlinear aeroelasticity*. John Wiley & Sons, 2017.
- [184] Rüdiger Seydel. *Practical bifurcation and stability analysis*. **volume** 5. Springer Science & Business Media, 2009.
- [185] YK Cheung, SH Chen **and** S\_L Lau. “Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 140.2 (1990), **pages** 273–286.

- [186] JL Huang, RKL Su, YY Lee **and** SH Chen. “Nonlinear vibration of a curved beam under uniform base harmonic excitation with quadratic and cubic nonlinearities”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 330.21 (2011), **pages** 5151–5164.
- [187] CS Hsu. “On approximating a general linear periodic system”. **in:** *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 45.1 (1974), **pages** 234–251.
- [188] Carl M Bender, Steven Orszag **and** Steven A Orszag. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*. **volume** 1. Springer Science & Business Media, 1999.
- [189] Mark H Holmes. *Introduction to perturbation methods*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [190] Jirayr Kevorkian **and** Julian D Cole. *Perturbation methods in applied mathematics*. **volume** 34. Springer Science & Business Media, 2013.
- [191] James A Murdock. *Perturbations: theory and methods*. SIAM, 1999.
- [192] George Lindfield **and** John Penny. *Numerical methods: using MATLAB*. Academic Press, 2018.
- [193] Oreste S Bursi **and** P–SB SHING. “Evaluation of some implicit time-stepping algorithms for pseudodynamic tests”. **in:** *Earthquake engineering & structural dynamics* 25.4 (1996), **pages** 333–355.
- [194] Singiresu S Rao. *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons, 2019.
- [195] Loc V Tran **and** Jarkko Niiranen. “A geometrically nonlinear Euler–Bernoulli beam model within strain gradient elasticity with isogeometric analysis and lattice structure applications”. **in:** *Mathematics and Mechanics of Complex Systems* 8.4 (2020), **pages** 345–371.
- [196] Pezhman Sourani, Mohammad Hashemian, Mostafa Pirmoradian **and** Davood Toghraie. “A comparison of the Bolotin and incremental harmonic balance methods in the dynamic stability analysis of an Euler–Bernoulli nanobeam based on the nonlocal strain gradient theory and surface effects”. **in:** *Mechanics of Materials* (2020), **page** 103403.
- [197] Samir A Emam **and** Ali H Nayfeh. “Postbuckling and free vibrations of composite beams”. **in:** *Composite Structures* 88.4 (2009), **pages** 636–642.
- [198] AR Askarian, MR Permoon **and** M Shakouri. “Vibration analysis of pipes conveying fluid resting on a fractional Kelvin–Voigt viscoelastic foundation with general boundary conditions”. **in:** *International Journal of Mechanical Sciences* (2020), **page** 105702.
- [199] Shahab Saffari, Mohammad Hashemian **and** Davood Toghraie. “Dynamic stability of functionally graded nanobeam based on nonlocal Timoshenko theory considering surface effects”. **in:** *Physica B: Condensed Matter* 520 (2017), **pages** 97–105.

- [200] Majid Ghadiri **and** S Hamed S Hosseini. “Parametric excitation of pre-stressed graphene sheets under magnetic field: nonlinear vibration and dynamic instability”. **in:** *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 19.11 (2019), **page** 1950135.
- [201] Mohammad Hashemian, Malihe Falsafioon, Mostafa Pirmoradian **and** Davood Toghraie. “Nonlocal dynamic stability analysis of a Timoshenko nanobeam subjected to a sequence of moving nanoparticles considering surface effects”. **in:** *Mechanics of Materials* (2020), **page** 103452.
- [202] M Trabelssi, S El-Borgi **and** MI Friswell. “A high-order FEM formulation for free and forced vibration analysis of a nonlocal nonlinear graded Timoshenko nanobeam based on the weak form quadrature element method”. **in:** *Archive of Applied Mechanics* (2020), **pages** 1–24.
- [203] Ali H Nayfeh **and** Walter Lacarbonara. “On the discretization of distributed-parameter systems with quadratic and cubic nonlinearities”. **in:** *Nonlinear Dynamics* 13.3 (1997), **pages** 203–220.
- [204] Hu Liu, Han Wu **and** Zheng Lyu. “Nonlinear resonance of FG multilayer beam-type nanocomposites: effects of graphene nanoplatelet-reinforcement and geometric imperfection”. **in:** *Aerospace Science and Technology* 98 (2020), **page** 105702.
- [205] Salwa A Mohamed. “A fractional differential quadrature method for fractional differential equations and fractional eigenvalue problems”. **in:** *Mathematical Methods in the Applied Sciences* (2020).
- [206] Yongtao Zhou, Jorge L Suzuki, Chengjian Zhang **and** Mohsen Zayernouri. “Implicit-explicit time integration of nonlinear fractional differential equations”. **in:** *Applied Numerical Mathematics* (2020).
- [207] Long-Jye Sheu, Hsien-Keng Chen, Juhn-Horng Chen **and** Lap-Mou Tam. “Chaotic dynamics of the fractionally damped Duffing equation”. **in:** *Chaos, Solitons & Fractals* 32.4 (2007), **pages** 1459–1468.
- [208] Yongjun Shen, Shaopu Yang, Haijun Xing **and** Guosheng Gao. “Primary resonance of Duffing oscillator with fractional-order derivative”. **in:** *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 17.7 (2012), **pages** 3092–3100.
- [209] Yongjun Shen, Shaopu Yang, Haijun Xing **and** Huaixiang Ma. “Primary resonance of Duffing oscillator with two kinds of fractional-order derivatives”. **in:** *International Journal of Non-Linear Mechanics* 47.9 (2012), **pages** 975–983.
- [210] Yongjun Shen, Hang Li, Shaopu Yang, Mengfei Peng **and** Yanjun Han. “Primary and subharmonic simultaneous resonance of fractional-order Duffing oscillator”. **in:** *Nonlinear Dynamics* 102.3 (2020), **pages** 1485–1497.

- [211] Junyi Cao, Chengbin Ma, Hang Xie **and** Zhuangde Jiang. “Nonlinear dynamics of duffing system with fractional order damping”. **in:** *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 5.4 (2010).
- [212] Venkatanarayanan Ramakrishnan **and** Brian F Feeny. “Resonances of a forced Mathieu equation with reference to wind turbine blades”. **in:** *Journal of vibration and acoustics* 134.6 (2012).
- [213] J Nathan Kutz. “Advanced differential equations: Asymptotics & perturbations”. **in:** *arXiv preprint arXiv:2012.14591* (2020).
- [214] Seshadri Sridhar, Ali H Nayfeh **and** Dean T Mook. “Nonlinear resonances in a class of multi-degree-of-freedom systems”. **in:** *The Journal of the Acoustical Society of America* 58.1 (1975), **pages** 113–123.
- [215] Necla Togun **and** Süleyman Murat Bağdatlı. “Nonlinear vibration of a nanobeam on a Pasternak elastic foundation based on non-local Euler-Bernoulli beam theory”. **in:** *Mathematical and Computational Applications* 21.1 (2016), **page** 3.
- [216] T Yokoyama. “Vibrations and transient responses of Timoshenko beams resting on elastic foundations”. **in:** *Ingenieur-Archiv* 57.2 (1987), **pages** 81–90.
- [217] KB Mustapha **and** ZW Zhong. “Free transverse vibration of an axially loaded non-prismatic single-walled carbon nanotube embedded in a two-parameter elastic medium”. **in:** *Computational Materials Science* 50.2 (2010), **pages** 742–751.
- [218] Reza Ansari, Raheb Gholami, K Hosseini **and** S Sahmani. “A sixth-order compact finite difference method for vibrational analysis of nanobeams embedded in an elastic medium based on nonlocal beam theory”. **in:** *Mathematical and Computer Modelling* 54.11-12 (2011), **pages** 2577–2586.
- [219] X Zhao, CF Wang, WD Zhu, YH Li **and** XS Wan. “Coupled thermoelastic nonlocal forced vibration of an axially moving micro/nano-beam”. **in:** *International Journal of Mechanical Sciences* (2021), **page** 106600.
- [220] MJ Brennan, I Kovacic, A Carrella **and** TP Waters. “On the jump-up and jump-down frequencies of the Duffing oscillator”. **in:** *Journal of Sound and Vibration* 318.4-5 (2008), **pages** 1250–1261.

# Биографија

Никола Д. Нешић је рођен 17.02.1986. године у Нишу, где је завршио основну школу и природно-математички смер гимназије Бора Станковић. Дипломирао је на Машинском факултету Универзитета у Нишу 2010. године са просечном оценом 9.98, а 2016. завршио мастер студије на Факултету за електротехнику и информатику Ернст-Абе Универзитета у Јени у Немачкој. У току докторских студија се усавршавао на више универзитета у иностранству, као што су: Департман за механику континуума института за техничку механику (ИТМ) Универзитета у Карлсруеу (КИТ), Институт за Биомеханику, Техничког Универзитета у Грацу, Технички универзитет Илменау, Центар за напредна нумеричка срачунавања (High Performance Computing Center (HLRS)) на Универзитету у Штутгарту, Институт за примењену динамику Техничког универзитета у Дармштату, Институт за структурну и функционалну керамику у Леобену. До сада је публикувао четири коауторска рада у часописима међународног значаја са СЦИ листе и учествовао на бројним научним конференцијама из области механике у земљи и иностранству. Радио је више година као истраживач на Математичком институту Српске академије наука и уметности. Тренутно је запошљен као асистент на катедри за механику Факултета техничких наука, Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици на предметима: Механика 1 - статика, Механика 2 - кинематика, Механика 3 - динамика, Теорија осцилација, Динамика возила, Кинематика и динамика робота, Мехатроника. Говори немачки и енглески језик. Отац је једног детета.

**ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ****ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ**

Презиме, име једног  
родитеља и име Нешић, Драган, Никола  
Датум и место рођења 17.02.1986., Ниш

**Основне студије**

Универзитет Универзитет у Нишу  
Факултет Машински факултет  
Студијски програм Мехатроника  
Звање Дипломирани машински инжењер (Мастер инжењер машинства, 10 семестара)  
Година уписа 2005.  
Година завршетка 2010.  
Просечна оцена 9.98 (девет и 98/100)

**Мастер студије, магистарске студије**

Универзитет Универзитет у Нишу  
Факултет Машински факултет  
Студијски програм Мехатроника  
Звање Дипломирани машински инжењер (Мастер инжењер машинства, 10 семестара)  
Година уписа 2005.  
Година завршетка 2010.  
Просечна оцена 9.98 (девет и 98/100)

Научна област Мехатроника  
Наслов завршног рада Развој и израда епрувете хибридне структуре и испитивање везе силикон-метал за примене код хируршких имплантаната

**Мастер студије, магистарске студије**

Универзитет Ернст-Абе Универзитет у Јени, Немачка  
Факултет Факултет за електротехничко и рачунарско инжењерство  
Студијски програм Мехатроника  
Звање Мастер инжењер  
Година уписа 2014  
Година завршетка 2016  
Просечна оцена 1.8  
Научна област Електротехничко и рачунарско инжењерство  
Наслов завршног рада Software-based measurement and reporting of stop time of the axes of optical measurement systems according to standard EN 13855

**Докторске студије**

Универзитет Универзитет у Нишу  
Факултет Машински факултет  
Студијски програм Теоријска и примењена механика  
Година уписа 2010.  
Остварен број ЕСПБ бодова 120  
Просечна оцена 9.78

**МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ У НИШУ**

Примљено: 20.7.2023.			
Орг.јед.	Број	Прилог	Бредности
	6/2-80-115/23		

**НАСЛОВ ТЕМЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Наслов теме докторске Анализа нелинеарне динамике механичких структура са пригушењем



дисертације	фракционог реда применом апроксимативних метода
Име и презиме ментора, звање	Др Јулијана Симоновић, ванредни професор
Број и датум добијања сагласности за тему докторске дисертације	НСВ број 8/20-01-004/22-026 01.06.2022. године

### ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Број страна	146
Број поглавља	7
Број слика (шема, графикона)	41
Број табела	5
Број прилога	0
Број референци	220

### ПРИКАЗ НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КАНДИДАТА који садрже резултате истраживања у оквиру докторске дисертације

Р. бр.	Аутор-и, наслов, часопис, година, број волумена, странице	Категорија
1	<p><b>Nešić N, Čajić M, Karličić D, Obradović D, Simonović J, (2021), Nonlinear vibration of a nonlocal functionally graded beam on fractional visco-Pasternak foundation, Nonlinear Dynamics, 107, pp.2003–2026 (2022), Springer. <a href="https://doi.org/10.1007/s11071-021-07081-z">https://doi.org/10.1007/s11071-021-07081-z</a></b></p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> Овај рад проучава нелинеарно динамичко понашање нелокалне функционално градијентне Ојлер-Берноулијеве греде која лежи на фракционој виско-Пастернаковој подлози и подвргнута је хармонијским оптерећењима. Предложени модел обухвата оба параметра и то, нелокални параметар узимајући у обзир поље градијента еластичног напона и параметар скале дужине материјала узимајући у обзир поље напона градијента деформације. Приказана је методологија за одређивање амплитудско-фреквентних одзива у стационарном стању методама инкременталног хармонијског баланса и нумеричке континуације. Добијена периодична решења верификована су пертурбационом методом вишеструких временских скала, у случају где је нелинеарност мала, и Њумарковом методом нумеричке интеграције у случају јаке нелинеарности. Утицај различитих параметара на амплитудно фреквентни одзив је испитан и дискутован.</p>	M21
2	<p><b>Karličić Danilo, Predrag Kozić, Ratko Pavlović, Nikola Nešić, Dynamic stability of single-walled carbon nanotube embedded in a viscoelastic medium under the influence of the axially harmonic load, Composite Structures 162 (2017), pp. 227-243. <a href="https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.003">https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.003</a></b></p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> Нелинеарни модел угљеничне наноцеви са једним зидом моделоване као наногреда уграђена у Келвин-Воитову вискоеластичну средину развијен је коришћењем теорије нелокалног континуума. Претпоставља се да наногреда вибрира под утицајем уздужног магнетног поља и временски променљивог аксијалног оптерећења. На основу нелокалне теорије Ојлер-Берноулијеве греде, Максвелових једначина и фон Карманове нелинеарне везе деформација-померања, добијамо нелинеарне парцијалне диференцијалне једначине попречног кретања наногреде са различитим граничним условима. Однос између нелинеарне амплитуде и фреквенције променљивог аксијалног оптерећења у присуству уздужног магнетног поља је изведен применом пертурбационе методе вишеструких скала. У овом раду разматра се и приближно аналитичко решење за нелинеарне фреквентне одзиве и нестабилне области за линеарни и нелинеарни случај вибрација. Да би се анализирале области нелинеарне динамичке стабилности наноцеви, примењена је метода инкременталног хармонијског баланса (ИХБ) за добијање итеративног односа фреквенције и амплитуде временски променљивог аксијалног оптерећења. Показано је да нелокални параметар, ефекти магнетног поља и коефицијент крутости вискоеластичне средине имају значајне ефекте на вибрације и стабилност наноцеви. Поред тога, из приказаних нумеричких резултата може се видети утицај нелокалног параметра, магнетног поља и коефицијената вискоеластичне подлоге на криву фреквенцијског одзива, фреквенције за нелинеарне случајеве и области нестабилности за линеарне и нелинеарне случајеве.</p>	M21
3	<p><b>Nikola Nešić, Milan Čajić, Danilo Karličić, and Goran Janevski, Nonlinear superharmonic resonance analysis of a nonlocal beam on a fractional visco-Pasternak foundation, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science 235, no. 20 (2021): pp. 4594-4611.</b></p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> У овом раду се истражује динамичко понашање геометријски нелинеарне наногреде која лежи на фракционој виско-Пастернаковој подлози под утицајем динамичких аксијалних и попречних оптерећења. Једначина осциловања је изведена и затим дискретизована коришћењем Галеркинове дискретизације у првом моду. Одговарајућа Матије-Дуфингова једначина је решена коришћењем пертурбационе методе вишеструких временских скала у случају где је нелинеарност мала и методом инкременталног хармонијског баланса за јако нелинеаран случај. У студији валидације за слабо нелинеарни случај извршено је поређење резултата из две методе и постигнуто је добро слагање. Изведена је параметарска студија и разматране су предности и недостаци сваке методе за услове суперхармоничне резонанције другог и трећег реда. Резултати показују значајан утицај пригушења виско-Пастернаковог слоја као и нелокалног параметра и спољњег оптерећења на фреквенцијски одзив система. Предложена методологија се може користити у процедурама при пројектовању нових уређаја за прикупљање енергије и сензорских уређаја у малим размерама који показују нелинеарно динамичко понашање.</p>	M23
4	<p><b>Slaviša Šalinić, Aleksandar Vranić, Nikola Nešić, Aleksandar Tomović, On the Torque Transmission</b></p>	M24



	<p>by a Cardan-Hooke Joint, FME Transactions 45 (2017), стр 117-121</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> Истражује се кинематика и динамика Кардан-Хуковог зглоба. Кинематичка анализа се заснива на правилу кинематичког ланца за векторе угаоне брзине. Динамика Кардан-Хуковог зглоба анализирана је помоћу Лагранжових једначина друге врсте. Кардан-Хуков зглоб се анализира у различитим условима рада, односно претпоставља се да улазна осовина има променљиву угаону брзину. Разматрана су два случаја: (1) раван погонског јарма се поклапа са равнином вратила; (2) раван погонског јарма је нормална на раван осовине. Развијен је израз за пренос обртног момента у Кардан-Хуковом зглобу у различитим радним условима. Израз садржи појмове који представљају инерцију вратила и крст Кардан-Хуковог зглоба. Теоријска разматрања су пропраћена нумеричким примером.</p>	
5	<p><b>Nikola Nešić</b>, <i>Forced oscillations of a membrane on nonlinear elastic foundation</i>, Scientific review: Special Issue Nonlinear Dynamics S2 (2013) dedicated to Milutin Milankovic, стр 413-418.</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> У овом истраживању разматране су принудне попречне осцилације правоугаоне мембране на нелинеарној еластичној основи, а за посебан случај дате су аналитичке апроксимације решења. На основу нумеричког експеримента изведене су специфичне визуелизације асимптотске апроксимације амплитудно/фазно-фреквентних кривих које одговарају асимптотској апроксимацији решења. Ова апроксимација описује квалитативне особине једнофреквентних нелинеарних осцилација у стационарним и нестационарним режимима осциловања.</p>	M14
6	<p><b>N. Nešić</b>, R. Uhlig, U. Risto, L. Zentner, <i>Development of hybrid layered structures consisting of silicone and metal and their static tensile behavior</i>, Proceedings of International Conference on Damage Mechanics ICDM Belgrade, 2012. стр 253-256.</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> Циљ овог истраживања је развој нових производних концепата за креирање хибридних епрувета за испитивање и за извођење тестова затезања на њима. Испитне епрувете су направљене од силикона са уметнутим равним металним опругама. Разматрају се укупно 4 различита облика опруга. За производњу хибридних тест епрувета користе се методе ливења и топлог пресовања. Испитне епрувете настале ливењем имају мању деформацију лиснате опруге од оних произведених топлотним пресовањем. Током испитивања затезања већина епрувета показује оштећење при деформацијама између 11% и 25% њихове дужине у зависности од облика уметнуте металне опруге. Анализа резултата испитивања показује висок степен релативних померања за различите коришћене материјале.</p>	M33
7	<p><b>N. Nešić</b>, G. Janevski, P. Kozić, <i>Transverse Vibration of a Clamped-Clamped Beam with One Step Change Subjected to Axial Force</i>, Proceedings of 2<sup>nd</sup> International Conference – Mechanical Engineering of the XXI Century (Masing 2013), Niš</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> У овом раду се разматрају трансверзалне осцилације двостепене Ојлер-Берноулијевог греде под утицајем аксијалне силе. Разматрана греда има различита својства крутости, пригушења и масе у сваком од два дела. Гранични услови укљештења се претпостављају на сваком крају. Аналитички је одређено неколико најнижих сопствених вредности при пригушеним и недовољно пригушеним осцилацијама.</p>	M33
8	<p>G. Janevski, <b>N. Nešić</b>, P. Kozić, I. Pavlović, <i>Transverse Vibration of a Damped Beam with One Step Change Subjected to Axial Force</i>, Proceedings of the Fourth Serbian (29<sup>th</sup> Yu) Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Vrnjačka Banja, Serbia, 2013</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> У овом раду се разматрају трансверзалне осцилације двостепене Ојлер-Берноулијевог греде под утицајем аксијалне силе. Разматрана греда има различита својства крутости, пригушења и масе у сваком од два дела. Претпостављају се различити гранични услови на сваком крају. Анализиране су три типа греде са наглом променом попречног пресека које се обично јављају у инжењерској пракси и дато је њихово критично оптерећење извијања. Прве две греде су правоугаоног пресека, и то, једна са константном ширином а наглом променом висине а друга са константном висином а наглом променом ширине. Трећи тип греде је са кружним попречним пресеком са степенастим променама пречника. Одређено је неколико најнижих сопствених вредности са подкритичним и надкритичним пригушењем.</p>	M33
9	<p>M. Stamenković Atanasov, P. Kozić, A. Atanasov, <b>N. Nešić</b>, <i>Thermal and magnetic effects on the forced vibration of an elastically connected nonlocal orthotropic double-nanoplate system</i>, Proceedings of the 6<sup>th</sup> Serbian Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Mountain Tara, Serbia, 2017</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> У раду се разматра проблем принудних трансверзалних осцилација ортотропног система двоструких нелокалних наноплоча под дејством термичких и магнетних ефеката. Обе наноплоче су правоугаоне, просто ослоњене и спојене Винклеровим еластичним слојем. Узимањем у обзир ефеката малих размера, користимо Ерингенову нелокалну теорију континуума. На основу нелокалне конститутивне релације и теорије Кирхоф-Ловове плоче, изведен је систем од две спрегнуте нехомогене парцијалне диференцијалне једначине за разматрање динамичких померања ортотропног система две наноплоче изложених дејству равномерно распоређеног хармонијског површинског оптерећења. Такође, изведена су коначна решења за амплитудне функције принудних осцилација. Детаљно се разматрају нелокални параметар, термални параметар, параметар магнетног поља и параметри побуде.</p>	M33
10	<p><b>N. Nešić</b>, D. Jovanović, G. Janevski, <i>Analysis of Natural Frequency in Beam with Multiple Cracks and General Boundary Conditions</i>, Proceedings of 4<sup>th</sup> International Conference – Mechanical Engineering of the XXI Century (Masing 2018), Niš, Serbia, 2018</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> Детекција пукотина у гредама и конструкцијама коришћењем неинвазивних метода је важно питање у инжењерству. Једна од ових метода може бити мерење фреквенције осциловања. Овај рад се бави анализом сопствене фреквенције осциловања греде са више пукотина. Пукотине се моделују ротационим опругама. Примењују се општи гранични услови. Једначине кретања су добијене коришћењем Хамилтоновог или Даламберовог принципа. Након примене принципа раздвајања променљивих, добијене су две једначина кретања, једна зависна од времена, а друга од амплитудне координате. На једначину са амплитудним функцијама примењена је метода преносне матрице за</p>	M33



	<p>добијање сопствених вредности осцилаторног система, које се затим користе у једначини са временским функцијама за израчунавање природне фреквенције. Овде су коришћени општи гранични услови, укључујући и еластично ослањање на крајевима. Предност приказаног поступка је елиминисање нумеричког израчунавања детерминанте високог реда, што последично скраћује време срачунавања природних фреквенција. Приказани су и дискутовани утицаји броја пукотина, положаја и дубине пукотине на сопствену фреквенцију греде.</p>	
11	<p><b>N. Nešić, P. Kozić, G. Janevski, <i>Vibration of Damped Nonhomogeneous Cantilever Beam on Winkler Layer</i>, Proceedings of 4<sup>th</sup> International Conference – Mechanical Engineering of the XXI Century (Masing 2018), Niš, Serbia, 2018</b></p> <p><i>Кратак опис садржине:</i>  Степенасте греде имају широку примену у инжењерским системима, као структурни и функционални елементи. Многи механички делови се могу моделовати као конзолне степенасте греде. У овом раду је уведен еластични Винклеров слој, који представља околни медијум. Због тога је важно истражити вибрационе карактеристике такве греде. У раду је представљено одређивање сопствених вредности пригушених осцилација двостепене конзолне греде положене на Винклеров слој применом методе преносне матрице. Резултати су верификовани аналитичком методом. Једначине кретања су добијене коришћењем Хамилтоновог или Даламберовог принципа. Бернули-Фуријерова метода је затим примењена на једначине кретања што даје две функције – амплитудну и временску функцију осциловања греде. Затим се примењује аналитичка метода и метода преносне матрице за добијање сопствених вредности вибрационог система. Резултати добијени коришћењем две различите методе су упоређени и уочено је добро слагање вредности одређених сопствених фреквенција осциловања.</p>	M33
12	<p><b>Nikola Nešić, Dragan B. Jovanović and Dušan Stojiljković, <i>Experimental investigation of the influence of crack on the frequency of prismatic beam oscillations</i>, Proceedings of the XIV International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements Niš, Serbia, November 14th-16th, 2018</b></p> <p><i>Кратак опис садржине:</i>  Важан задатак у инжењерском одржавању је откривање пукотина и процена њиховог положаја и потенцијалне опасности од лома конструкције. Овај рад има за циљ да покаже да дубина пукотина утиче на природну фреквенцију греде. Примењене су две врсте граничних услова – просто-ослоњена греда и греда са једним простим ослоњем и другим слободним крајем. Фреквенција осциловања неоштећених греда се израчунава према добро утврђеној теорији и упоређује са измереном природном фреквенцијом неоштећених греда. Разлика у резултатима је мала. На гредама се праве различите дефинисане пукотине у облику слова V. Мери се природна фреквенција напуклих греда. Показано је да повећање дубине пукотине смањује сопствене фреквенције осциловања.</p>	M33
13	<p><b>Ivana D. Atanasovska, Dejan B. Momcilovic, Radivoje M. Mitrovic, Natasa D. Soldat and Nikola Nesic, <i>Nonlinear Dynamics as a Tool in Selection of Working Conditions for Radial Ball Bearing</i>, Springer IUTAM book series: Proceedings of IUTAM (International Union of Theoretical and Applied Mechanics) Symposium entitled ‘Exploiting Nonlinear Dynamics for Engineering Systems’ (ENOLIDES 2018), Novi Sad, Serbia, 15–19 July 2018</b></p> <p><i>Кратак опис садржине:</i>  Овај рад садржи елементе свеобухватног истраживања посвећеног динамичком понашању радијалних кугличних лежачева у реалним условима рада. Општа мотивација за ову тему произилази из захтева за високим перформансама рада лежачева у сложеним механичким системима, дефинисаних у многим индустријским гранама последњих деценија. Разматрани су различити приступи за анализу вибрационог одзива котрљајућих кугличних лежачева у циљу избора оптималних услова рада. Објашњена су одређена поједностављења и редукације које се користе за анализу радијалних кугличних лежачева. Развијени поступак се може користити за истраживање утицаја различитих оштећења и променљивих услова рада на динамику котрљајних лежачева. Детаљне анализе динамичког понашања котрљајних лежачева су изведене за поједине типове радијалних кугличних лежачева у две студије случаја: за оштећену спољашњу површину колника у складу са стварним облицима и димензијама оштећења услед замора и за променљиву радну температуру. Добијени резултати су приказани упоредним дијаграмима вибрација и портрета у фазној равни. Приказани резултати могли би да буду основа за шире истраживање нелинеарне динамике радијалних кугличних лежачева са различитим оштећењима и за примену анализе фазне равни у циљу избора оптималних услова рада.</p>	M33
14	<p><b>Nikola Nesic, Lena Zentner, <i>Free vibration of compliant mechanisms consisting of Euler-Bernoulli beams</i>, Advances in Mechanism and Machine Science: Proceedings of the 15<sup>th</sup> IFToMM World Congress on Mechanism and Machine Science, Springer Mechanisms and Machine Science book series, Volume 73, ISBN 978-3-030-20130-2, ISBN 978-3-030-20131-9 (eBook), <a href="https://doi.org/10.1007/978-3-030-20131-9">https://doi.org/10.1007/978-3-030-20131-9</a>, стр 3255-3262, 2019</b></p> <p><i>Кратак опис садржине:</i>  У раду је приказана методологија за прорачун фреквенције осцилација гипког механизма који се састоји од сегмената танких еластичних греда. Греде су различитих попречних пресека и свака од њих је моделована коришћењем Ојлер-Бернулијеве теорије греда. Спојевци су моделовани мањим танким гредама, док су сегменти представљени већим танким гредама. За аналитичко израчунавање фреквенција осциловања примењена је метода преносне матрице. Дат је пример механизма са два сегмента и једним зглобом. Аналитички резултати су упоређени са експерименталним и нумеричким резултатима добијеним коришћењем комерцијалног софтвера коначних елемената.</p>	M33
15	<p><b>Nikola Nešić, Dragan Jovanović, Goran Janevski, Dušan Stojiljković, Srdan Jović, <i>Transversal vibration of thin cracked beams: experiments, theory and numerics</i>, Proceedings of the 7<sup>th</sup> Serbian Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Sremski Karlovci, Serbia, 2019.</b></p> <p><i>Кратак опис садржине:</i>  У овом раду су приказани аналитички, нумерички и експериментални резултати слободних осцилација греде са пукотином. Греде су израђене од алуминијума и имају пукотине у облику слова V, које су узане и правоугаоног пресека. За експерименталну поставку користе се слободно ослоњене греде и конзоле. Померања која су временски периодична мере се на одређеном положају греде, а фреквенције се рачунају из периода вибрација. У раду је приказана и општа методологија за добијање сопствених фреквенција слободних осцилација греда методом преносне матрице. Коришћењем ове методологије, општи гранични услови се примењују на крајеве греда и услови</p>	M33



	<p>континуитета на положај прсине. Расправља се о утицају броја пукотина, положаја и дубине пукотине на фреквенцију. Резултати се такође потврђују коришћењем коначних елемената.</p>	
16	<p><b>N. Nestic</b>, <i>Nonlinear Oscillations of a Membrane on the Elastic Foundation</i>, Proceedings of Abstracts, European Solid Mechanics Conference ESMC Graz, 2012.</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i></p> <p>У овом истраживању разматрају се слободне и принудне попречне нелинеарне осцилације правоугаоне мембране на еластичној подлози и дате су аналитичке апроксимације решења методом Крилов-Богољубов-Митропољски. На основу нумеричког експеримента спроведене су специфичне визуелизације асимптотске апроксимације решења, које описује квалитативне особине једно- фреквентног режима осциловања.</p>	M34
17	<p><b>N. Nestic</b>, <i>Forced oscillations of a membrane on nonlinear elastic foundation</i>, Proceedings of Symposium Nonlinear Dynamics, Multidisciplinary and Interdisciplinary Applications (SNDMIA 2012), Belgrade, стр 151-152.</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i></p> <p>У овом истраживању разматрају се принудне попречне осцилације правоугаоне мембране на нелинеарној еластичној основи, а за посебан случај дате су аналитичке апроксимације решења методом Крилов-Богољубов-Митропољски. На основу нумеричког експеримента спроведене су специфичне визуелизације асимптотске апроксимације амплитудно- фреквенцијских и фазно- фреквентних кривих које одговарају асимптотској апроксимацији решења, која описује квалитативне особине једнофреквентних нелинеарних стационарних и нестационарних режима осциловања.</p>	M34
18	<p><b>K. (Stevanovic) Hedrih, M. Stamenkovic, N. Nestic</b>, <i>Hybrid system dynamics on layer with nonlinear elastic and inertia properties</i>, Proceedings of Symposium Nonlinear Dynamics, Multidisciplinary and Interdisciplinary Applications (SNDMIA 2012), Belgrade. стр 147-148.</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i></p> <p>Разматрани хибридни систем садржи низ деформабилних тела једнаких типова (греде, плоче или мембране) спојених дискретним слојевима са линеарним или нелинеарно-еластичним и инерционим својствима. Овај хибридни систем вибрира на континуалном слоју моделираном дискретним системом са нелинеарно-еластичним и инерцијским својствима. Урађен је математички опис динамике хибридног система на дискретном слоју са нелинеарно-еластичним и инерционим својствима. Приказани су изрази за добијање генерализаних сила интеракција између деформабилних тела, као и између хибридног система и дискретног слоја основе, одговарају независним генерализаним координатама динамике хибридног система. Коришћењем феноменолошког мапирања идентификује се математичка аналогија између временских функција у првом моду динамике хибридног система за одговарајуће системе са више греда, више плоча или више мембрана повезаних континуалним слојем дискретних елемената са различитим својствима. На основу овог феноменолошког мапирања и математичке аналогије, могуће је решења за једну врсту хибридног система користити за квалитативну анализу линеарних или нелинеарних појава које се појављују у динамици другог система деформабилних тела.</p>	M34
19	<p><b>Nikola Nešić</b>, <i>Anisotropic 3D damage modeling of silicon nitride</i>, Proceedings of 5th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Arandelovac, Serbia, June 15-17, 2015.</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i></p> <p>Овај рад представља методу за моделирање оштећења силицијум нитрида. Коришћени метод моделирања континуираног оштећења је веома сличан многим моделима пластичности познатим у литератури. Главна идеја овде је да се матрица крутости материјала мења (смањују се вредности њених елемената) током оптерећења. Предност овог модела у односу на друге моделе је у томе што се може лако експериментално доказати, јер се различите константе крутости могу мерити у било ком кораку процеса оштећења материјала. Направљене су две основне претпоставке: а) Модули еластичности се бирају као скуп интерних варијабли оштећења; б) Важи принцип максималне дисипације оштећења. Друга претпоставка је слична принципу рада при максималној пластичној деформацији. Правац оштећења је дефинисан на почетку тока оштећења и благо се мења током ширења оштећења и смањења вредности елемената матрице крутости. Три површине оштећења описују деградацију материјала, једна главна и две додатне. Главни допринос овом раду је унапређење нумеричког алгоритма и валидација резултата на примеру силицијум нитрида. Модел је имплементиран у UMAT потпрограма стандардног програма коначних елемената Абакус. Поред тога, истражује се паралелизација нумеричког алгоритма који има за циљ побољшање ефикасности брзине прорачуна дељењем прорачуна на више језгара процесора или више процесора.</p>	M34
20	<p><b>Lazarević Mihailo, Cajić Milan, Nešić Nikola, Karličić Danilo, Đurović Nikola, Bučanović Ljubiša</b>, <i>Nonlocal vibration of a nanoplate influenced by inplane magnetic field using finite element method</i>, Proceedings of the 13th International Conference on Nanoscience &amp; Nanotechnology (NN16), LTFN, Aristotel Uni. of Thessaloniki (AUTH), Greece, 5-8 July 2016, ISBN 2214-7853</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i></p> <p>У овом раду су изведене једначине коначних елемената за попречну вибрацију ортотропне нелокалне наноплоче (која представља графенски лист) на коју утичу аксијалне силе настале услед магнетног поља. Такође су испитани ефекти нелокалног параметра и магнетног поља на осцилације наноплоче.</p>	M34
21	<p><b>N. Nešić, M. Cajić, D. Karličić</b>, <i>Non-linear principal resonance of an orthotropic and magnetoelastic rectangular plate oscillating on fractional viscoelastic layer</i>, Proceedings of the 6<sup>th</sup> Serbian Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Mountain Tara, Serbia, 2017</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i></p> <p>У овом раду изведена је основна једначина осциловања танке ортотропне плоче која лежи на фракционом вискоеластичном слоју под комбинованим дејством магнетног поља и попречног хармонијског оптерећења. У модел је уведена фон Карманова теорија велике дилатације плоче и утицај магнетне Лоренцове силе изазване вртложним струјама. Амплитудно фреквентне једначине се даље изводе помоћу методе вишеструких скала. Нумерички примери показују утицај различитих физичких параметара на понашање система.</p>	M34
22	<p><b>Nikola D. Nešić, Srđan Jović</b>, <i>Dynamics of compliant mechanism consisting of Euler-Bernoulli beams</i>, The Symposium "Nonlinear dynamics - Scientific work of Prof. Dr Katica (Stevanovic) Hedrih", Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, September 04 - 06, 2019,</p>	M34



	<p>Belgrade, Serbia</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> Овај рад представља методологију израчунавања фреквенције осциловања гипког механизма који се састоји од сегмената танких еластичних греда. Греде су различитих попречних пресека и свака од њих је моделована коришћењем Еулер-Берноулијеве теорије греда. Спојеве су моделовани танким гредама, док су сегменти представљени преко великих греда. Метода преносне матрице се користи за аналитичко израчунавање фреквенција осциловања. Дат је пример механизма са два сегмента и једним зглобом. Аналитички резултати су упоређени са експерименталним и нумеричким резултатима добијеним коришћењем комерцијалног софтвера коначних елемената.</p>	
23	<p><b>Nikola Nešić, Milan Cajić, Danilo Karličić, Fractionally damped nonlinear parametric vibration of a functionally graded nonlocal beam</b>, Proceedings of the 7<sup>th</sup> Serbian Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Sremski Karlovci, Serbia, 2019.</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> Нелинеарно динамичко понашање функционално градијентних (ФГ) структура јавља се у многим инжењерским апликацијама на макро, као и на микро-/нано-скалама. У овом раду су разматране параметарске осцилације ФГ нелокалне греде са геометријском нелинеарношћу, која је садржана у фракционој Келвин-Војтовој вискоеластичној средини. Својства материјала ФГ наногреде континуирано варирају у правцу дебљине на основу степеног закона дистрибуције. Нелинеарне парцијалне диференцијалне једначине кретања су изведене коришћењем Даламберовог принципа. За анализу области нестабилности ФГ наногреда, коришћена је метода инкременталног хармонијског баланса за добијање итеративних односа између фреквенције и амплитуде аксијалног оптерећења које се мења у времену.</p>	M34
24	<p><b>Nešić N, Cajić M, Karličić D, Jović S, Simonović J, (2021), Nonlinear Vibration of Fractional Viscoelastic Beam on Nonlinear Layer</b>, 8<sup>th</sup> International Congress of Serbian Society of Mechanics Kragujevac, Serbia, June 28-30, 2021, pp.636-637, ISBN 978-86-909973-8-1</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> Основни циљ приказаног рада је анализа нелинеарних осцилација фракционо вискоеластичне греде на нелинеарној еластичној основи под хармонијском побудом применом методе инкременталног хармонијског баланса. За описивање понашања материјала користи се фракциона Келвин-Војтова конститутивна једначина. Референтне једначине су изведене коришћењем Хамилтоновог принципа заснованог на Ојлер-Берноулијевој теорији греда, са нелинеарном еластичном осномом и Фон Кармановим нелинеарностима услед истезања. Ове нелинеарне парцијалне диференцијалне једначине су сведене на нелинеарне обичне диференцијалне једначине техником Галеркинове пројекције узимајући у обзир прва два мода. Метода инкременталног хармонијског баланса се користи за добијање одзива греде под дејством побуде. Резултати су упоређени са онима из доступне литературе. Параметарска анализа је урађена да би се утврдио утицај фракционог Келвин-Војтовог вискоеластичног слоја на примарне и секундарне резонанције.</p>	M34
25	<p><b>Nikola Nešić, The free vibration problem of classical and nonlocal stepped beams</b>, Mini-Symposium "Nonlocal theory of mechanical structures", Mathematical Institute of the SASA, Belgrade 2017, Serbia, стр 25-26.</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> Степенасте греде се најчешће користе за моделирање делова у механичким склоповима као што су вратила, при чему једна страна греде може бити потопљена у флуид. Степенасте греде се најчешће састоје од <math>n</math> делова исте геометрије али различитих попречних пресека и маса. Утицај медија који окружује се може моделирати еластичним слојем Винклер-овог типа и спољашње пригушење које је различито на сваком сегменту које је Релијевог типа. Еластични слој је представљен низом континуално распоређених опруга дуж степенасте греде. Комплетно извођење је дато за опште граничне услове. Коришћењем Даламберовог принципа и нелокалне теорије еластичности, изведене су парцијалне диференцијалне једначине осциловања. За одређивање сопствених вредности и сопствених вектора су примењене Бернули-Фуријеова методу и методу трансфер матрица. Проучаване су осцилације са јаким и slabим пригушењем. Анализиран је утицај нелокалног параметра и утицај Винклеровог слоја на сопствене карактеристике. Детаљно је дискутована могућност примене нелокалних степенастих греда у класичним инжењерским системима када је нелокални параметар занемарен и у нано системима када је ефект величине кроз нелокални параметар узет у обзир.</p>	M34
26	<p><b>Nikola Nešić, Milan Cajić, Danilo Karličić and Julijana Simonović, Nonlinear vibration of small size beams on fractional visco-elastic foundation</b>, Third International Nonlinear Dynamics Conference (NODYCON 2023), Rome, Italy, June 18-22, 2023.</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> У овом раду је анализирано динамичко понашање геометријски нелинеарне наногреде која лежи на фракционој виско-Пастернаковој подлози и подвргнута је динамичким аксијалним и попречним оптерећењима. Нелинеарност је уведена у модел са фон Кармановом релацијом деформација-померај. Једначина кретања је изведена Хамилтоновим принципом, дискретизована Галеркиновим принципом и решена коришћењем три различите методе: методе вишеструке пертурбације, методе инкременталног хармонијског баланса и Њумаркове методе. Проучавају се случајеви са slabом и јаким нелинеарношћу. Детаљно је размотрен утицај различитих параметара, као што су параметри малих размера, спољашња побуда, параметри фракционо вискоеластичне подлоге итд., на амплитудно-фреквентне дијаграме.</p>	M34
27	<p><b>Milan Cajić, Nikola Nešić, Danilo Karličić, Parametric Amplification in Periodic Chain System</b>, 9<sup>th</sup> International Congress of the Serbian Society of Mechanics July 5-7, 2023, Vrnjačka Banja, Serbia</p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> У раду је приказан периодични ланчани систем који показује тополошка стања интерфејса. Утицај параметарског појачања на стања интерфејса је приказан за случај са осцилатором типа Матије-Дуфинг на интерфејсу.</p>	M34
28	<p><b>Julijana Simonović, Nikola Nešić, José Manoel Balthazar, Maurício Aparecido Ribeiro, Jorge Luis Palacios Felix, Steady State Solution for Dynamics of a Nonideal Crank-Slider Mechanism with an Active Mass Damper (AMD)</b>, 9<sup>th</sup> International Congress of the Serbian Society of Mechanics July 5-7, 2023, Vrnjačka Banja, Serbia</p>	M34



	<p><i>Кратак опис садржине:</i> Активни динамички апсорбери (АМД) су уређаји који се користе за контролу вибрација конструкција и машина. Повећава се њихова примена у инжењерској пракси. Основа оквира конструкције је побуђена неидеалним мотором, а вибрације конструкције се контролишу помоћу АМД колица који се налазе на његовом врху. Овај систем је математички моделован и једначине кретања су изведене коришћењем Лагранжових једначина друге врсте. Бездимензионалне једначине кретања се решавају применом методе пертурбације вишеструких временских скала и експлицитно се добијају периодична стабилна решења.</p>	
29	<p><b>Nikola Nešić, Predrag Kozić, Goran Janevski, Modes of non-homogeneous damped beams on an elastic layer of Winkler type, Inovative Mechanical Engineering, University of Niš, Faculty of Mechanical Engineering, Vol. 1 No. 2 (2022), pp. 130 - 152</b></p> <p><i>Кратак опис садржине:</i> Степенаста греда проучавана у овом раду може се користити за моделовање многих делова у механичким склоповима, као што су радилице, мењачи, итд., где је греда потопљена у неки медијум. У овим случајевима, греда се састоји од два дела са различитим особинама материјала (маса, крутост), споља је нехомогено пригушена и ослања се на Винклеров еластични слој. Еластични слој представљају континуирано распоређене опруге дуж степенасте греде. Користећи други Њутнов закон и класичну теорију еластичности, изведен је систем парцијалних диференцијалних једначина кретања. Примењени су различити гранични услови. Да би се одредиле сопствене вредности и сопствени векторе, користи се метода коначних разлика за решавање проблема вибрација степенастих греда. Резултати добијени методом коначних разлика упоређени су са аналитичким резултатима, који су добијени применом Бернули-Фуријеове методе. Утврђено је да је разлика у добијеним вредностима применом две различите методе занемарљиво мала. За аналитичко решење дато је комплетно извођење карактеристичне једначине за граничне услове обостраног укљештења. За остале граничне услове (слободно ослоњена, конзола, обострано слободна), карактеристичне једначине су дате без извођења пошто је поступак сличан. Истражене су прекомерно пригушене и недовољно пригушене вибрације. Разматран је утицај крутости Винклеровог слоја на сопствене карактеристике.</p>	M54

**НАПОМЕНА:** уколико је кандидат објавио више од 3 рада, додати нове редове у овај део документа

### ИСПУЊЕНОСТ УСЛОВА ЗА ОДБРАНУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Кандидат испуњава услове за оцену и одбрану докторске дисертације који су предвиђени Законом о високом образовању, Статутом Универзитета и Статутом Факултета.

**НЕ**

*Образложење:* На основу приложене документације утврђено је да кандидат Никола Нешић испуњава све критеријуме правилника о поступку припреме и услова за одбрану докторске дисертације. Положио је све испите предвиђене планом и програмом докторских студијског програма Теоријска и примењена механика на Машинском факултету Универзитета у Нишу. Никола је првопотписани аутор у два рада у часописима са SCI листе (категирија M21 и M23), као и првопотписани аутор једног рада који издаје Машински факултет Универзитета у Нишу. Поменути радови су уско повезани са темом његове докторске дисертације. Учествовао је на већем броју међународних и домаћих конференција, на којима је излагао истраживачке резултате. Након именовања комисије за процену заснованости теме докторске дисертације, поднетог извештаја, а затим и именовања комисије за одбрану докторске дисертације, кандидат је израдио и предао радну верзију докторске дисертације задовољавајуће садржине и обима, у складу са одобреном темом докторске дисертације.

### ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Кратак опис појединих делова дисертације (до 500 речи)

Ова докторска дисертација је конципирана и написана у 7 поглавља.

Прво поглавље је уводно поглавље. У њему су дискутовани објављени резултати актуелних истраживања која су користила исте или сличне методологије за решавање сродних математичких модела. Пошто се дисертација бави проучавањем осцилација механичких система са фракционим пригушењем, у овом уводном поглављу су дате основне дефиниције левих и десних извода нецелог реда и то: Риман-Лиувилев, Гринвалд-Летников и Капутоов извод. Поред тога су дата основна својства фракционих извода. Пошто је у једном од модела испитивана нелокална греда од функционалног градијентног (ФГ) материјала, овде су дате основе о ФГ материјалима, као и основе нелокалних теорија механике континуума и то: нелокалне теорије еластичности, дилатацијско градијентне теорије еластичности и нелокалне дилатацијско градијентне теорије.

У другом поглављу је представљена метода инкременталног хармонијског баланса (ИХБ) на чијој примени у испитивању нелинеарних осцилација са фракционим пригушењем је базирана ова докторска дисертација. Најпре је дат увод у методу хармонијског баланса, а затим у методу инкременталног хармонијског баланса. Након тога се кандидат осврнуо на потешкоће у представљању резултата само применом ИХБ методе, те је дао оригиналан приступ у превазилажењу ових потешкоћа. У ту сврху представио је примену ИХБ методе заједно са методом нумеричке континуације и описао како се ове две методе заједно примењују. Кандидат је такође приликом описивања методе нумеричке континуације дао увод у секвенцијалну континуацију, континуацију псеудолуком и параметризацију. На крају поглавља је дао опис Флокеове теорије за испитивање стабилности.

У трећем поглављу је дат увод у пертурбационе методе. Описана је директна примена пертурбација, Линштат-Поенкаре метода и метода вишеструких временских скала.

Четврто поглавље представља Њумарк методу за решавање фракционих диференцијалних једначина. Овде је појашњена употреба ове нумеричке методе, кроз дискретизацију у две скале и то дискретизацију фракционог извода Гринвалд-Летниковом апроксимацијом и дискретизацију диференцијалне једначине и система диференцијалних једначина за интеграцију.

У петом поглављу је приказан први нумерички пример. У њему су испитиване осцилације нелинеарне Ојлер-



Бернулијеве греде моделиране нелокалном теоријом и теоријом дилатацијског градијента на фракционој вискоеластичној подлози Пастернаковог типа. Кандидат је најпре представио Ојлер-Бернулијеву теорију греде и модел греде и подлоге и извео једначину малих трансверзалних осцилација. Затим је приказано решавање те једначине и представљање нелинеарног периодичног одзива методама: ИХБ, пертурбационе методе вишеструких временских скала и Њумарк методом. Након тога су представљени нумерички резултати и то: резултати који су потврђени са више различитих метода, а за упроштени модел и са радовима других аутора у литератури; испитан је утицај различитих параметара на динамику овог модела и представљен на амплитудно-фреквентним дијаграмима; дата је анализа амплитудно-временских дијаграма; за специјални случај када фракциони извод постаје први извод функције испитана је стабилност применом Флокеове теорије.

Шесто поглавље разматра дискретни механички систем са више степени слободe кретања. Изабрани пример је динамички апсорбер у систему са пригушењем фракционог реда. Најпре је представљен модел и изведене су две једначине кретања. Овај систем фракционих диференцијалних једначина је решен и нелинеарни периодични одзиви добијени су методама ИХБ и Њумарк. Нумерички резултати су добијени и груписани у резултате потврде решења са више апроксимативних метода, резултате испитивања утицаја различитих параметара на динамику модела и анализу амплитудно-временских дијаграма.

У седмом поглављу су дати закључци везано за примењене методе и математичке моделе.

### **ВРЕДНОВАЊЕ РЕЗУЛТАТА ДОКТОРСKE ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Ниво остваривања постављених циљева из пријаве докторске дисертације (до 200 речи)

Постављени циљеви предвиђени пријавом у потпуности су реализовани у оквиру предате дисертације.

Циљ овог научног истраживања је био анализирати примере динамичких система са пригушеним принудним осцилацијама, који се свде на нелинеарне фракционе диференцијалне једначине или системе нелинеарних фракционих диференцијалних једначина Дуфинговог или Матије-Дуфинговог типа. Пригушење код оваквих система је моделирано и дефинисано са изводом нецелог реда. Овај циљ је у потпуности остварен.

Следећи остварени циљ је креирање фазних портрета и амплитудно-фреквентних одзива и испитање утицаја различитих параметара на динамичка понашања оваквих система. Као најзначајнији међу тим параметрима издвајају се ред фракционог извода, нелинеарни параметри и параметри побуде чији су утицаји дискутовани.

Од великог значаја је био циљ испитивања могућности примене методе инкременталног хармонијског баланса (ИХБ) у комбинацији са методом нумеричке континуације за одређивање амплитудно-фреквентних одзива нелинеарних динамичких система. Такође, циљ је био испитати ефикасност и применљивост методе ИХБ на решавање једне или система нелинеарних фракционих диференцијалних једначина горе поменута два типа. Поред тога, циљ је био и упоређивање ИХБ методе са другим методама исте намене, као што су на пример пертурбациона метода вишеструких скала или Њумаркова метода и дискутовати предности, мане, ефикасност и опсег проблема на које се метода може применити. Ова група циљева је у потпуности реализована.

Такође је био циљ примена методе нумеричке континуације, јер се захваљујући њој могу добити амплитудно-фреквентне карактеристике нелинеарних система са великим нелинеарностима и то без тачака прекида на дијаграму. Овај циљ је у потпуности остварен, чиме је добијена много потпунија слика понашања система.

Циљ верификације резултата и њихово упоређивање са резултатима других аутора је такође остварен.

Вредновање значаја и научног доприноса резултата дисертације (до 200 речи)

У оквиру докторске дисертације поред осталих издвајају се следећи значајни резултати:

- моделирање актуелних нелинеарних проблема из динамичких апсорбера и осцилација греда на подлози, који се адекватним бездимензионисањем свде на нелинеарне фракционе диференцијалне једначине сличне проблему осцилатора Дуфинговог типа;
- издвајање и дефинисање групе примера и генералних закључака, где је метода инкременталног хармонијског баланса погоднија од пертурбационе методе вишеструких скала и Њумарк методе за решавање система нелинеарних фракционих диференцијалних једначина осциловања;
- извршена је анализа различитих значајних параметара на амплитудно-фреквентним дијаграмима представљених система, те је коментарисан њихов утицај на нелинеарно динамичко понашање тих система.

Добијени резултати дају значајан допринос како у теоријском проучавању нелинеарних проблема структурне динамике, тако и у применама погодних нумеричких метода за њихово решавање.

Оцена самосталности научног рада кандидата (до 100 речи)

Кандидат Никола Нешић, мастер инжењера машинства, је извршио свеобухватну, детаљну и савремену анализу постојеће научне литературе из области теме докторске дисертације на основу које се види потреба за спроведеним истраживањем. Испољио је изузетан ниво самосталности у раду, анализи научних сазнања у области истраживања и оригиналност у осмишљавању и креирању нових научних решења. Резултати спроведених истраживања, публиковани и у високорангираним часописима из уже научне области којој припада тема докторске дисертације, у потпуности потврђују да је кандидат оспособљен за самостални научно-истраживачки рад.



## ЗАКЉУЧАК (до 100 речи)

На основу прегледа поднете верзије докторске дисертације и увидом у публиковане научне радове кандидата чланови Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације закључују следеће:

- поднети рукопис одговара теми докторске дисертације одобреној од стране Наставно научног већа Машинског факултета у Нишу и Научно стручног већа Универзитета у Нишу;
- рад је адекватно конципиран и технички квалитетно одрађен;
- научни допринос и оригиналност дисертације потврђени су објављивањем већег броја радова;
- рад представља оригиналан и вредан научни и стручни допринос у области истраживања, који отвара нова поља примене приказаних метода на велики број реалних примера.

Имајући у виду напред наведено комисија предлаже Наставно научног већу Машинског факултета у Нишу да се поднети рукопис кандидата **Николе Нешића** под називом **Анализа нелинеарне динамике механичких структура са пригушењем фракционог реда применом апроксимативних метода** прихвати као докторска дисертација, те да кандидата позове на усмену јавну одбрану.






## КОМИСИЈА

Број одлуке ННВ о именовану Комисије

НСВ број 8/20-01-006/23-036

Датум именовања Комисије

10. 07. 2023. год

Р. бр.	Име и презиме, звање		Потпис
1.	<b>Јулијана Симоновић, ванредни професор</b> Теоријска и примењена механика (Ужа научна област)	ментор, председник Машински факултет Универзитета у Нишу (Установа у којој је запослен)	
2.	<b>Јелена Манојловић, редовни професор</b> Математика (Ужа научна област)	члан Природно-математички факултет Универзитета у Нишу (Установа у којој је запослен)	
3.	<b>Михаило Лазаревић, редовни професор</b> Механика (Ужа научна област)	члан Машински факултет Универзитета у Београду (Установа у којој је запослен)	
4.	<b>Иван Павловић, ванредни професор</b> Теоријска и примењена механика (Ужа научна област)	члан Машински факултет Универзитета у Нишу (Установа у којој је запослен)	
5.	<b>Срђан Јовић, редовни професор</b> Механика (Ужа научна област)	члан Факултет техничких наука Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици (Установа у којој је запослен)	

Датум и место:

У Нишу, Београду и Косовској Митровици, 20. јул 2023. године



## Изјава 1.

### ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом:

**„Анализа нелинеарне динамике механичких структура са пригушењем фракционог реда применом апроксимативних метода“**

која је одбрањена на Машинском факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 06.10.2023.

Потпис аутора дисертације:



---

Никола Нешић

## Изјава 2.

### ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

**„Анализа нелинеарне динамике механичких структура са пригушењем  
фракционог реда применом апроксимативних метода“**

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу**, истоветан штампаном облику.

У Нишу, 06.10.2023.

Потпис аутора дисертације:



---

Никола Нешић

### Изјава 3:

#### ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

**„Анализа нелинеарне динамике механичких структура са пригушењем фракционог реда применом апроксимативних метода“**

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде **(CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)<sup>4</sup>**

У Нишу, 06.10.2023.

Потпис аутора дисертације:



Никола Нешић

---

<sup>4</sup> Аутор дисертације обавезан је да изабере и означи (заокружи) само једну од шест понуђених лиценци; опис лиценци дат је у наставку текста.