УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ЕЛЕКТРОНСКИ ФАКУЛТЕТ

Иван Г. Дамњановић

НЕКИ ДОПРИНОСИ СПЕКТРАЛНОЈ ТЕОРИЈИ ГРАФОВА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2023.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF ELECTRONIC ENGINEERING

Ivan G. Damnjanović

SOME CONTRIBUTIONS TO SPECTRAL GRAPH THEORY

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2023.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	др Емина Миловановић, редовни професор, Електронски факултет, Универзитет у Нишу
Наслов:	Неки доприноси спектралној теорији графова
Резиме:	Докторска дисертација се бави решавањем три конкретна научна проблема из области спектралне теорије графова. Пре свега, нека матичан граф представља нетривијалан прост граф чија матрица суседства има једнодимензионалан нулти простор чији сви ненула чланови не садрже ниједан нула елемент. Први разрешен научни проблем јесте егзистенцијални проблем циркулантних матичних графова који се тиче одређивања свих парова (n, d), $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}_0$ за које постоји d-регуларан циркулантан матичан граф реда n. Даље, нека балансирано стабло чини коренско стабло код ког сви чворови на истом нивоу имају исти број деце. Такође, за било које $d, k \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, нека Бете стабло $\mathcal{B}_{d,k}$ чини балансирано стабло са k нивоа такво да сви чворови ван последњег нивоа имају тачно $d-1$ деце и нека је дендример $\mathcal{D}_{d,k}$ балансирано стабло са k нивоа такво да су сви чворови ван последњег нивоа степена d. Други научни проблем којим се бави дисертација је спектрална анализа балансираних стабала уз посебан фокус на израчунавање енергије Бете стабала и апроксимирање енергије дендримера. Најзад, трећа целина докторске дисертације има као циљ одређивање енергије новоуведених мартини графова ради обарања хипотезе коју су претходно изложили Akbari и др.
Научна област:	Електротехничко и рачунарско инжењерство
Научна дисциплина:	Теорија графова
Кључне речи:	спектар, карактеристични полином, енергија графа, матичан граф, циркулантан граф, циклотомичан полином, балансирано стабло, Бете стабло, дендример, мартини граф
УДК:	(510.22+519.17):(510.6+004.42)
CERIF класификација:	P110 (математичка логика, теорија скупова, комбинаторика)
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Doctoral Dissertation Data

Doctoral Supervisor:	dr Emina Milovanović, Full Professor, Faculty of Electronic Engineering, University of Niš
Title:	Some contributions to spectral graph theory
Abstract:	The doctoral dissertation deals with solving three concrete scientific problems from the field of spectral graph theory. First of all, let a nut graph represent a nontrivial simple graph whose adjacency matrix has a onedimensional null space all of whose nonzero members contain no zero elements. The first resolved scientific problem is the circulant nut graph existence problem which is connected to determining all the pairs (n, d), $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}_0$ for which there exists a d-regular circulant nut graph of order n. Furthermore, let a balanced tree be a rooted tree all of whose vertices from the same level have an equal number of children. Also, for any $d, k \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, let the Bethe tree $\mathcal{B}_{d,k}$ represent a balanced tree with k levels such that all of its vertices outside the last level have exactly $d - 1$ children, and let the dendrimer $\mathcal{D}_{d,k}$ be a balanced tree with k levels such that all of its vertices outside the last level are of degree d. The second scientific problem that the dissertation deals with is the spectral analysis of balanced trees with a special focus on computing the energy of Bethe trees and approximating the energy of dendrimers. Finally, the goal of the third part of the doctoral dissertation is to determine the energy of the newly introduced martini graphs for the purpose of disproving a conjecture previously disclosed by Akbari et al.
Scientific Field:	Electrical and Computer Engineering
Scientific Discipline:	Graph Theory
Keywords:	spectrum, characteristic polynomial, graph energy, nut graph, circulant graph, cyclotomic polynomial, balanced tree, Bethe tree, dendrimer, martini graph
UDC:	(510.22+519.17):(510.6+004.42)
CERIF Classification:	P110 (Mathematical Logic, Set Theory, Combinatorics)
Creative Commons License Type:	**CC BY-NC-ND**

Захвалница

Пре свега бих хтео да се захвалим својој породици, девојци Магдалени и њеној породици, као и свим својим пријатељима за целокупну подршку коју ми увек пружају.

Огромну захвалност дугујем Драгану Стевановићу за велику подршку коју ми је дао током докторских академских студија. Предлагањем разних интересантних проблема из области теорије графова и заједничким радом на многим од њих, Драган ми је показао лепоту ове научне гране и мотивисао ме је да себе надаље унапређујем у овој математичкој дисциплини. Веома сам захвалан за сву помоћ коју сам добио од њега, укључујући пружање многих прилика за даљи научни напредак, као и разне савете које ми је дао.

Надаље бих хтео да изразим захвалност Јовани Џунић за целокупну помоћ око упознавања са линеарном алгебром. Она ми је дала смернице око учења линеарне алгебре и показала ми је какву све примену може да има ова грана математике при решавању разних проблема из реалног света, чиме ме је инспирисала да се даље усавршавам из ове области.

Осим тога, дугујем велику захвалност Милошу Милосављевићу за неизмеран допринос који је дао нишкој математичкој заједници. Он је заједно са Николом Милосављевићем и Марком Ђикићем мени пружао константну подршку у гајењу математичког талента за време основне и средње школе. Веома сам им захвалан на свем утрошеном времену и труду.

Такође бих хтео да изразим огромну захвалност фирми Diffine LLC за велику подршку и помоћ које су ми пружили приликом вршења мог научног истраживања. Специјално бих хтео да се захвалим Игору Михајловићу и Ивани Микић.

Захвалан сам свим својим научним колабораторима који су током мојих докторских студија имали одличну сарадњу са мном и помагали ми да усавршавам и математичко знање и вештине писања радова. Осим Драгана Стевановића који је увек био уз мене, хтео бих да изразим посебну захвалност колегама из Словеније — Томажу Писанском, Нину Башићу, Арјани Житник и Слободану Филиповском.

Хтео бих да се захвалим свом ментору и члановима комисије, као и својим колегама са катедре за математику и са катедре за рачунарство, за сву помоћ коју сам добио од њих. Посебну захвалност имам према Слађани Маринковић, Марјану Матејићу, Игору Миловановићу, Јовани Џунић и Звездану Марјановићу за велики труд који су уложили око мене и за подршку коју су ми давали током мојих докторских академских студија. Такође сам захвалан Храниславу Станковићу због помоћи око давања креативног имена мартини графовима. Најзад, дугујем захвалност и свим осталим колегама са којима имам плодну сарадњу.

У Нишу, новембра 2023.

Садржај

Поглавље 1

Увод

Теорија графова представља релативно нову област математике у којој концепт графа чини централни предмет истраживања. Под појмом граф типично се сматра математичка структура која моделује колекцију задатих ентитета од интереса, као и постојање одређених односа између њих, при чему је устаљена пракса да се споменути ентитети називају чворовима, а односи међу њима гранама графа. Почетак историје теорије графова углавном се везује за 1736. годину и за Ојлерово[1] решавање познатог проблема кенигсбершких мостова [8]. У овом случају, математичка структура графа је употребљена како би се концизно моделирале четири обале између којих постоји укупно седам мостова који их спајају — обале су замишљене као чворови графа, док су мостови сагледани као гране које спајају одговарајуће чворове.

Из проблема кенигсбершких мостова проистиче један од природних начина како је могуће интерпретирати елементе графа — чворови могу да чине неке локације, а гране постојање пута којим се долази од одређене локације до неке друге. Међутим, у данашње време можемо рећи да је изузетно широк спектар примене теорије графова, одакле простичу разне технике како је све могуће употребити концепт графа ради моделирања неког система. Заправо, због инхерентно високог нивоа апстракције који се јавља у дефиницији појма графа, није тешко увидети да се он може користити при представљању разних објеката којима потенцијално желимо да се бавимо. Управо из овог разлога теорија графова налази примену у многобројним дисциплинама, као што су рачунарство [14, 56, 69], биологија и медицина [1, 49, 57, 81, 89], физика и хемија [3, 52, 88], друштвене науке [39, 65], итд.

Анализом одређених својстава датог графа, можемо доћи до одговарајућих информација које говоре о његовој природи. Самим тим, у стању смо да направимо закључке који се тичу система или објекта моделованог помоћу задатог графа. Осим класичног сагледавања графа у виду комбинаторне дискретне структуре, једна од веома честих техника за испитивање особина графа од интереса јесте такозвана спектрална анализа. Споменута метода се обично своди на посматрање неке матрице која је на одговарајући начин придружена задатом графу и разматрање њених спектралних својстава, као што су карактеристични полином, спектар, скуп сопствених вредности, итд. У данашње време, грана теорије графова која се бави оваквом спектралном анализом типично се назива спектрална теорија графова и чини врло актуелну и популарну грану примењене математике (видети, на пример, [4, 5, 10, 11, 13, 15, 16, 18, 22, 45, 48, 60, 63, 67, 82, 83]).

Главна област истраживања дате дисертације јесте спектрална теорија графова и њен примарни циљ биће комплетно или парцијално решавање одређеног броја отворених научних питања из ове области. Прецизније, у оквиру докторске дисертације биће разматрана три međусобно независна математичка проблема. Први од споменутих задатака повезан је са анали-

[1] Leonhard Euler (1707 – 1783), познати швајцарски математичар.

зом структуре матичних графова[2], који се могу дефинисати као нетривијални прости графови чија матрица суседства поседује једнодимензионалан нулти простор такав да ниједан његов ненула вектор не садржи ниједан нула елемент (видети, на пример, [74–76, 79]). За овакве графове је показано да поседују примену у области хемије (видети, на пример, [17, 35, 36]), те су многи теоретичари графова истраживали њихове особине. Унутар докторске дисертације, сагледавани су циркулантни матични графови и за њих је у потпуности решен егзистенцијални проблем типа ред–степен, чиме су такође разрешене и две хипотезе које су претходно увели Башић и др. [7, хипотезе 3.2 и 3.3]. Другим речима, одређени су сви парови (n, d), $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}_0$ за које постоји d-регуларан циркулантан матичан граф реда n [27, 29, 31].

Друго математичко питање којим се бави дисертација тиче се спектралне анализе балансираних стабала, уз посебан фокус на одређивање енергије Бете стабала и дендримера. У овом контексту, под балансираним стаблом сматрамо коренско стабло такво да сви чворови са истог нивоа нужно поседују исти број деце. Такође, за Бете стабло узимамо специјалан тип балансираног стабла код ког сви чворови ван последњег нивоа имају исти број деце, док као дендример подразумевамо балансирано стабло такво да су сви чворови ван задњег нивоа истог степена. Због своје правилне структуре, овакви типови коренских стабала су претходно истраживани од стране многих теоретичара графова (видети, на пример, [44, 70–72, 84]). Докторска дисертација бавиће се излагањем концизнијих варијанти доказа неких од већ познатих теоријских тврђења која се тичу балансираних стабала. Осим тога, биће изведена експлицитна формула за енергију Бете стабала, као и довољно прецизна апроксимација за енергију дендримера, чиме ће претходно споменути резултати бити проширени [28, 30].

Најзад, трећи научни проблем бавиће се обарањем наредне хипотезе коју су претходно поставили Akbari и др. при разматрању везе између енергије графа ($\mathcal{E}_G$), највећег броја грана у његовом спаривању (μ_G), као и његовог највећег степена чвора (Δ_G).

Хипотеза (Akbari и др. [2, хипотеза 23])**.** *За сваки повезан прост ненула граф G који задовољава $\Delta_G \in \{2, 3, 4, 5\}$, обавезно важи*

$$\mathcal{E}_G \leq 2\mu_G \sqrt{\Delta_G}.$$

Унутар докторске дисертације, биће разматрана бесконачна фамилија графова до које су путем рачунара дошли Стевановић и др. [85] и чије ћемо елементе обједињено да именујемо мартини графовима[3]. Сагледавајући овакве графове, биће обављена анализа асимптотског понашања њихове енергије у циљу доказивања чињенице да међу њима обавезно постоји бесконачно много контрапримера за претходно споменуту хипотезу.

Као спона између теорије графова и линеарне алгебре, област спектралне теорије графова је у својој основи базирана на преплетању две гране математике. Из овог разлога, секундарни циљ докторске дисертације биће демонстрирање принципа како различите научне дисциплине могу на ефикасан начин међусобно да сарађују у циљу заједничког решавања неког математичког проблема. Заправо, при излагању научних резултата који чине темељ докторске дисертације, провлачиће се тврђења која потичу из разних грана математике, као што је теорија графова, линеарна алгебра, теорија бројева и полинома, елементарна реална анализа, итд. Осим овога, на неколико важних места ће одређени математички докази зависити од тога да се одговарајућа провера мора обавити уз помоћ рачунара, што указује на огроман значај који се мора придати математичком софтверу код савременог научног процеса решавања проблема из математике.

[2] На енглеском језику, матичан граф се стандардно назива *nut graph*.
[3] У оригиналном раду на енглеском језику, мартини граф је познат као *wine glass graph*.

Докторска дисертација се састоји од увода, четири поглавља, закључка и прилога. Структура саме дисертације у огромној мери рефлектује три одвојена научна проблема којима се она бави. Пре свега, у поглављу 2 ће бити исказана сва теорија неопходна за адекватно излагање математичких доказа који имају за циљ решавање споменутих проблема. Унутар овог поглавља, прво ћемо формализовати концепт графа и затим ће бити прецизно образложена елементарна терминологија која се тиче класичне теорије графова. Надаље, навешћемо неколико основних тврђења из линеарне алгебре и дефинисаћемо две најбитније типове матрица које описују граф од интереса — матрицу суседства и Лапласову матрицу. Након тога ћемо формално да уведемо неколико додатних типова графова који ће нам бити од суштинске важности при решавању конкретних научних проблема којима се бави докторска дисертација. Међу њима спадају матичан граф, балансирано стабло, Бете стабло, дендример, мартини граф, итд. Остатак поглавља ће се бавити излагањем познатих математичких резултата везаних за одређене фамилије реалних полинома које ће се касније појављивати при извођењу математичких доказа, као што су циклотомични полиноми, Диксонови полиноми друге врсте и Геронимусови полиноми.

Поглавље 3 дисертације имаће као циљ комплетно решавање егзистенцијалног проблема циркулантних матичних графова. Унутар датог поглавља, биће спроведен математички доказ који је у великој мери конструктивног карактера и који за већину парова (n, d) демонстрира постојање d-регуларног циркулантног матичног графа реда n експлицитним навођењем таквог графа. Најкомплекснији део доказа биће углавном показивање чињенице да конструисани графови јесу матични, за шта ће нам на више места бити неопходне адекватне технике из теорије бројеве, као и разна тврђења у вези са циклотомичним полиномима, уз посебан нагласак на теорему коју су изложили Filaseta и Schinzel [33, теорема 2]. Унутар овог поглавља, биће масивно примењиван одговарајући математички софтвер који пружа подршку за симболичка израчунавања при проверавању одређених чињеница путем рачунара.

Након тога, поглавље 4 ће изложити цео доказ тражених математичких резултата који се тичу балансираних стабала. Најпре ће бити показано помоћно тврђење које су увели Jacobs и Trevisan и које говори о концизној методи за одређивање карактеристичног полинома произвољног коренског стабла [46]. У наставку, бавићемо се балансираним стаблима и њиховим спектралним својствима, уз посебан фокус на спектралне особине матрице суседства Бете стабала и дендримера. При разматрању карактеристичних полинома Бете стабала и дендримера, биће употребљена позната тврђења везана за Диксонове полиноме друге врсте и Геронимусове полиноме. На крају поглавља, искористићемо претходно добијене резултате како бисмо одредили енергију било ког Бете стабла и дендримера — за Бете стабла биће изложена егзактна формула, док ће за дендримере бити исказана адекватна апроксимација енергије.

Најзад, у оквиру поглавља 5 ћемо се бавити истраживањем мартини графова и спектралном анализом њихове матрице суседства. Пре свега ће бити искоришћена стандардна теорија из линеарне алгебре у циљу одређивања спектра оваквих графова. Након тога, обавићемо анализу асимптотског понашања енергије мартини графова помоћу основне теорије везане за монотоност и непрекидност функција, као и за Риманове интеграле. Као директна последица споменуте анализе, следиће чињеница да заиста бесконачно много по изоморфизму различитих мартини графова чини контрапример за хипотезу којом се бавимо.

Поглавље 6 докторске дисертације представља њен закључак, те ћемо у њему да обавимо кратак резиме целокупног научног доприноса који је направила дисертација. Осим тога, биће разматрани потенцијални правци даљег истраживања, као и нови отворени научни проблеми које је могуће решавати. Најзад, у прилогу A биће изложен сав програмски код неопходан за комплетирање одређених математичких доказа из докторске дисертације.

Поглавље 2

Преглед теорије

У задатом поглављу ћемо обавити преглед неопходних теоријских знања из разних области математике која ће касније бити коришћена при излагању главних резултата докторске дисертације. Узевши у обзир да у литератури постоји огромна разноликост у начину формализације концепата који се тичу теорије графова, као и уопштено неуниформност у употребљиваној терминологији [9, 32, 38, 96, 97], дато поглавље ћемо започети детаљним и поступним дефинисањем свих неопходних основних појмова из теорије графова. Заједно уз саму номенклатуру, изложићемо без доказа и нека елементарна тврђења и одговарајуће леме које се тичу новоуведених појмова.

Након тога, поглавље ће бацити фокус на теорију из линеарне алгебре која се тиче симетричних реалних матрица и циркулантних матрица. Затим, биће дефинисане матрица суседства, као и Лапласова матрица, које су придружене неком графу и имају широку примену у спектралној теорији графова (видети, на пример, [12, 19–21]). Заједно уз споменуте дефиниције, биће изложена и одговарајућа основна тврђења везана за дате типове матрица. После тога, увешћемо појмове циркулантног и матичног графа, неколико додатних типова коренских стабала, као и концепте мартини пута и циклуса, чиме употпуњујемо терминологију везану за теорију графова која је неопходна у остатку докторске дисертације. На крају поглавља ћемо изложити познате теоријске резултате везане за одређене фамилије реалних полинома које ће нам касније бити од користи при решавању главних проблема којима се бави дисертација.

2.1 Елементарна теорија графова

У датом одељку биће детаљно уведена сва терминологија која се тиче потребних елементарних појмова из теорије графова. Притом, биће коришћен систем формализације који је инспирисан теоријом изложеном у [9, поглавље 1]. За почетак, уведимо сам појам графа помоћу следеће дефиниције.

Дефиниција 2.1 (Граф). Граф G представља уређену тројку (V_G, E_G, ψ_G) која се састоји од:

- скупа V_G чије елементе називамо чворовима графа G;
- скупа E_G, дисјунктним са V_G, чије елементе називамо гранама графа G;
- функције ψ_G која свакој грани графа G додељује одговарајући двоелементни мултискуп састављен од чворова овог графа и коју називамо функцијом инциденције.

За чвор $u \in V_G$ кажемо да чини крај гране $e \in E_G$ уколико је испуњен услов $u \in \psi_G(e)$. Такође, ако важи $\psi_G(e) = [u, v]$[4] за неко $e \in E_G$, онда тврдимо да грана e спаја чворове u и v.

[4] Нотација помоћу заграда [и] ће у оквиру дисертације бити коришћена за означавање мултискупова.

Грану која спаја два различита чвора називамо везом, док грану која спаја неки чвор са самим собом називамо петљом. Даље, ако чвор $u \in V_G$ представља крај гране $e \in E_G$, онда такође можемо рећи да су чвор u и грана e инцидентни. Осим тога, за два чвора $u, v \in V_G$ кажемо да су суседни уколико постоји грана $e \in E_G$ таква да је $\psi_G(e) = [u, v]$. Скуп свих суседа задатог чвора $u \in V_G$ означавамо са $N_G(u)$. Што се тиче грана, две различите гране сматрамо суседним ако постоји бар један чвор који чини њихов заједнички крај. Коначно, за неке две различите гране можемо рећи да су паралелне уколико оне имају заједничка оба краја.

У зависности од неких основних својстава скупова V_G и E_G задатог графа G, можемо издвојити неколико често коришћених термина у вези са категоризацијом графова. Пре свега, уколико су и скуп чворова и скуп грана коначни, онда за дати граф кажемо да је коначан. Граф који не садржи ниједан чвор, и самим тим такође не садржи ниједну грану, називамо нула графом. Ако граф поседује највише један чвор, онда кажемо да се ради о тривијалном графу, док у супротном за граф кажемо да је нетривијалан. Најзад, за граф тврдимо да је празан уколико нема ниједну грану.

Узевши у обзир да дата докторска дисертација решава математичке проблеме који се тичу искључиво коначних графова, надаље ћемо подразумевано претпоставити да су сви графови о којима говоримо коначни. Осим тога, када је дат граф који садржи $n \in \mathbb{N}_0$ чворова, концизније ћемо рећи да се ради о графу реда n. У спектралној теорији графова посебну улогу имају такозвани прости графови, због чега их уводимо преко наредне дефиниције.

Дефиниција 2.2 (Прост граф)**.** Прост граф је граф код ког не постоје петље нити паралелне гране.

Надаље уводимо концепт степена чвора на истоветан начин како се то типично ради у литератури из теорије графова.

Дефиниција 2.3 (Степен чвора)**.** За дати граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$, степен неког чвора $u \in V_G$, у ознаци $\deg_G(u)$, представља укупан број грана $e \in E_G$ инцидентних са њим, при чему се петље броје два пута.

Веома је битно запажање да у било ком графу између збира степена свих чворова и укупног броја грана увек постоји прилично једноставна веза. Споменута једнакост је у литератури типично позната као лема о руковању и дата је у наставку.

Лема 2.1 (Лема о руковању)**.** *За произвољан граф* $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ *важи једнакост*

$$\sum_{u \in V_G} \deg_G(u) = 2\,|E_G|\,.$$

Уколико се за неки чвор деси да је степена нула, тј. да није инцидентан ни са једном граном, онда за такав чвор кажемо да представља изолован чвор. Осим тога, за произвољан ненула граф G, максималан степен чвора дефинишемо преко израза $\Delta_G = \max_{u \in V_G} \deg_G(u)$ и означавамо са Δ_G. Слично томе, минималан степен чвора дефинишемо уз $\delta_G = \min_{u \in V_G} \deg_G(u)$ и за њега користимо ознаку δ_G. Директно у вези са степенима чворова јесте концепт регуларности графа који дефинишемо у наставку.

Дефиниција 2.4 (Регуларан граф)**.** За неко $r \in \mathbb{N}_0$, задати граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ сматрамо r-регуларним уколико важи $\deg_G(u) = r$ за сваки чвор $u \in V_G$. За произвољан граф кажемо да је регуларан уколико је r-регуларан за неко $r \in \mathbb{N}_0$.

Познато је да концепт изоморфизма игра битну улогу у разним гранама математике и да се обично користи да диктира поседовање исте структуре од стране два одређена математичка објекта истог типа (видети, на пример, [68, поглавље 9]). У теорији графова се изоморфизам примењује на исти начин и можемо га увести преко следеће дефиниције.

Дефиниција 2.5 (Изоморфизам)**.** За графове $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ и $H = (V_H, E_H, \psi_H)$, уколико бијекције $\varphi\colon V_G \to V_H$ и $\chi\colon E_G \to E_H$ задовољавају услов

$$\psi_G(e) = [u, v] \quad \Longrightarrow \quad \psi_H(\chi(e)) = [\varphi(u), \varphi(v)]$$

за свака два чвора $u, v \in V_G$ и грану $e \in E_G$, онда уређени пар (φ, χ) називамо изоморфизмом графа G на граф H.

Ако постоји бар један изоморфизам графа G на граф H, тада кажемо да је граф H изоморфан графу G. Над неким унапред задатим скупом графова од интереса, изоморфност се може третирати као релација и није тешко установити да ова релација мора представљати релацију еквиваленције, као што је то обично случај у математици. Одговарајуће класе еквиваленције називамо класама изоморфизма. Затим, у теорији графова се често разматра изоморфизам неког графа на самог себе, те за овакву појаву постоји посебан назив, као што демонстрира наредна дефиниција.

Дефиниција 2.6 (Аутоморфизам)**.** Аутоморфизам задатог графа представља изоморфизам овог графа на самог себе.

Даље, при сагледавању неких комплекснијих појмова, често има смисла узети у обзир само одговарајући део графа од интереса. Ово нас доводи до концепта подграфа, који може да се математички формализује на следећи начин.

Дефиниција 2.7 (Подграф)**.** Нека су дати графови $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ и $H = (V_H, E_H, \psi_H)$. За граф H кажемо да представља подграф графа G ако су испуњени услови $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ и $\psi_H = \psi_G|_{E_H}$.

У наставку посебно дефинишемо два специјална типа подграфова који имају широку примену у теорији графова.

Дефиниција 2.8 (Разапињући подграф)**.** Разапињући подграф графа $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ је његов подграф $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ такав да важи $V_H = V_G$.

Дефиниција 2.9 (Индукован подграф)**.** Индукован подграф графа $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ је његов подграф $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ чији се скуп грана E_H састоји од сваке гране из E_G чија оба краја припадају скупу чворова V_H.

Надаље уводимо појам шетње у графу преко стандардне дефиниције из литературе.

Дефиниција 2.10 (Шетња)**.** Нека је задат граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$. За неко $k \in \mathbb{N}_0$, коначан низ облика $(u_0, e_1, u_1, e_2, u_2, \ldots, e_k, u_k)$ који притом задовољава услове:

- $u_0, u_1, \ldots, u_k \in V_G$;
- $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E_G$;
- $\psi_G(e_j) = [u_{j-1}, u_j]$ за свако $j = \overline{1, k}$;

назива се шетњом у графу G.

Ако је задата шетња $(u_0, e_1, u_1, \ldots, e_k, u_k)$, онда чворове $u_0, u_1, \ldots, u_k$ типично називамо чворовима дате шетње, док гране $e_1, e_2, \ldots, e_k$ називамо гранама шетње. За дужину шетње узимамо вредност k, тј. укупан број грана које садржи. Шетњу дужине нула називамо тривијалном, а сваку шетњу која садржи бар једну грану нетривијалном. Даље, у шетњи $(u_0, e_1, u_1, \ldots, e_k, u_k)$ кажемо да u_0 представља почетни чвор шетње, а да u_k чини њен крајњи чвор. Такође можемо рећи и да се ради о шетњи која иде од чвора u_0 до чвора u_k. У наставку се налази неколико корисних дефиниција које се тичу терминологије која се употребљава у теорији графова ради описивања разних типова шетњи од интереса.

Дефиниција 2.11 (Отворена шетња)**.** Отворена шетња представља нетривијалну шетњу код које се почетни и крајњи чвор разликују.

Дефиниција 2.12 (Затворена шетња)**.** Затворена шетња представља нетривијалну шетњу код које се почетни и крајњи чвор поклапају.

Дефиниција 2.13 (Стаза)**.** Стаза представља шетњу код које су све гране међусобно различите.

Дефиниција 2.14 (Пут)**.** Пут представља шетњу код које су сви чворови међусобно различити.

Дефиниција 2.15 (Циклус)**.** Циклус представља затворену стазу код које су сви чворови међусобно различити осим првог и последњег.

У зависности од тога да ли граф од интереса садржи циклус, може се направити посебан вид категоризације графова као што је демонстрирано у следећој дефиницији.

Дефиниција 2.16 (Ацикличан граф; шума)**.** Ацикличан граф (или шума) чини граф који не садржи ниједан циклус.

Тривијално је закључити да сваки ацикличан граф мора бити прост. Још један од битнијих елементарних појмова везаних за графове јесте повезаност. Под повезаним графом се у литератури сматра онај граф код ког постоји шетња која спаја било која два чвора. Алтернативно, повезаност можемо увести и на следећи концизан начин.

Дефиниција 2.17 (Досежност)**.** Нека је дат граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$. За нека два чвора $u, v \in V_G$ кажемо да је чвор v досежан из чвора u уколико постоји шетња од чвора u до чвора v.

Дефиниција 2.18 (Повезан граф)**.** За граф кажемо да је повезан уколико је сваки његов чвор досежан из сваког.

Досежност чворова има смисла третирати као релацију на скупу чворова и једноставно је установити да ова релација нужно представља релацију еквиваленције. Класе еквиваленције ове релације имају важну улогу при одређивању специфичних индукованих подграфова задатог графа, као што је описано у наредној дефиницији.

Дефиниција 2.19 (Компонента повезаности)**.** За дат граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$, под његовом компонентом повезаности сматрамо индукован подграф $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ овог графа такав да скуп чворова V_H одговара одређеној класи еквиваленције релације досежности чворова.

Очигледно је да је задати граф повезан ако и само ако не поседује више од једне компоненте повезаности. Осим тога, свака компонента повезаности било ког графа мора сама по себи да чини повезан граф. Директно у вези са повезаношћу графа јесте и појам удаљености чворова, који се може концизно увести на следећи начин.

Дефиниција 2.20 (Удаљеност чворова)**.** Нека је дат произвољан граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$. За нека два његова чвора $u, v \in V_G$, удаљеност чвора v од чвора u, у ознаци $\mathrm{d}_G(u, v)$, уводи се као:

- дужина најкраће шетње која има почетни чвор u и крајњи чвор v, уколико је чвор v досежан из чвора u;
- вредност $+\infty$, ако чвор v није досежан из чвора u.

Дефиниција 2.21 (Ексцентрицитет чвора)**.** За било који граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$, под ексцентрицитетом $\mathrm{e}_G(u)$ његовог чвора $u \in V_G$ сматрамо највећу удаљеност коју чворови графа имају од тог конкретног чвора, односно $\mathrm{e}_G(u) = \max_{v \in V_T} \mathrm{d}_G(u, v)$.

Заправо, ако је задат произвољан повезан граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$, онда није тешко установити да (V_G, d_G) нужно чини метрички простор. Даље, изузетно битна класа графова која има значајну и теоријску и практичну примену јесу они који су истовремено и ациклични и повезани. За овакве графове постоји посебан назив, као што говори следећа дефиниција.

Дефиниција 2.22 (Стабло)**.** Стабло чини граф који је истовремено ацикличан и повезан.

Стабла задовољавају разна битна својства, као што је постојање јединственог пута између произвољна два чвора. Дато тврђење је приказано у следећој леми чији се доказ може наћи, на пример, у [9, одељак 2.1].

Лема 2.2 (Јединственост пута у стаблу)**.** *Нека $T = (V_T, E_T, \psi_T)$ представља произвољно стабло. За било која два његова чвора $u, v \in V_T$, постоји јединствен пут у стаблу T чији је почетни чвор u, а крајњи чвор v.*

Осим тога, није тешко уочити да сва стабла са истим бројем чворова морају имати исти број грана. Овај резултат је приказан у оквиру наредне једноставне леме која даје карактеризацију стабала преко броја грана.

Лема 2.3 (Карактеризација стабала)**.** *Нека је задат произвољан граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$. Тада важе следеће импликације:*

а) *Ако G представља ненула стабло, онда је $|E_G| = |V_G| - 1$;*

б) *Ако G задовољава $|E_G| = |V_G| - 1$ и ацикличан је, онда он представља стабло;*

в) *Ако G задовољава $|E_G| = |V_G| - 1$ и повезан је, онда он представља стабло.*

При сагледавању стабала, понекад има смисла издвојити један конкретан чвор и дати му посебну улогу корена. На овај начин долазимо до математичке структуре која се назива коренско стабло и која се може формализовати на следећи начин.

Дефиниција 2.23 (Коренско стабло)**.** Коренско стабло T представља уређену четворку (V_T, E_G, ψ_T, r_T) код које (V_T, E_G, ψ_T) чини ненула стабло, док је $r_T \in V$ неки од чворова споменутог стабла.

Генерално, када говоримо о графовским особинама коренског стабла, мислимо на исте те особине стабла које лежи у позадини. Осим тога, вреди дефинисати неколико додатних појмова који су специфични за коренска стабла.

Дефиниција 2.24 (Ниво у коренском стаблу)**.** Нека је задато произвољно коренско стабло $T = (V_T, E_G, \psi_T, r_T)$. За свако $j \in \mathbb{N}$, $j \le \mathrm{e}_T(r_T) + 1$, тврдимо да ниво j коренског стабла представља скуп свих чворова стабла чија удаљеност од корена r_T износи $j-1$. Такође, кажемо да коренско стабло садржи укупно $l_T = \mathrm{e}_T(r_T) + 1$ нивоа.

Дефиниција 2.25 (Родитељ у коренском стаблу)**.** За било које коренско стабло $T = (V_T, E_G, \psi_T, r_T)$, под родитељем неког његовог чвора $u \in V_T \setminus \{r_T\}$ сматрамо чвор $\mathrm{p}_T(u)$ који се на јединственом путу од r_T до u налази непосредно пре чвора u. За корен стабла тврдимо да нема родитеља.

Дефиниција 2.26 (Деца у коренском стаблу)**.** У произвољном коренском стаблу $T = (V_T, E_G, \psi_T, r_T)$, под децом чвора $u \in V_T$ сматрамо скуп свих чворова $\mathrm{c}_T(u)$ којима је чвор u родитељ.

Дефиниција 2.27 (Лист у коренском стаблу)**.** Код било ког коренског стабла $T = (V_T, E_G, \psi_T, r_T)$, за његов чвор $u \in V_T$ тврдимо да је лист уколико нема ниједно дете.

Тривијално је уочити да ниво један сваког коренског стабла обавезно садржи само његов корен, док сви чворови који припадају последњем нивоу морају бити листови. Осим тога, није тешко установити да ако се неки чвор налази на нивоу $j \in \mathbb{N}$ коренског стабла, онда његов родитељ (уколико постоји) мора бити на нивоу $j - 1$, док сва његова деца обавезно припадају нивоу $j + 1$ (уколико овај ниво постоји). Дати одељак завршавамо увођењем појма спаривања у графу.

Дефиниција 2.28 (Спаривање)**.** За дати граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$, спаривање представља скуп $M \subseteq E_G$ који се састоји од веза таквих да међу њима нема суседних, тј. тако да никоје две различите везе не деле заједнички крај.

Најзад, за произвољан граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ користимо нотацију $\mu_G \in \mathbb{N}_0$ да означимо највећи могући број грана који може да садржи неко његово спаривање.

2.2 Линеарна алгебра и матрице графа

Средиште спектралне теорије графова чини анализа спектралних својстава одговарајућих матрица придруженим графовима од интереса. Из овог разлога, теорија матрица ће играти битну улогу при исказивању главних резултата докторске дисертације. Сама дисертација биће базирана на теорији из линеарне алгебре на начин како је уведена у [93]. Сходно томе, за матрице узимамо да могу имати било који индексни скуп који одговара редовима или колонама, као што показује следећа дефиниција.

Дефиниција 2.29 (Матрица)**.** Матрица над пољем $\mathbb{K}$ чини $\mathbb{S}$-фамилију $(\boldsymbol{A}_\nu \colon \nu \in \mathbb{S})$ елемената поља $\mathbb{K}$, при чему је индексни скуп $\mathbb{S}$ облика $\mathbb{S} = P \times Q$, где P представља индексни скуп редова у виду произвољног коначног скупа и Q чини индексни скуп колона такође у виду произвољног коначног скупа.

Генерално, уколико је дата нека матрица $\boldsymbol{A}$, тада ћемо њен елемент који одговара индексу (j, k) означавати са $\boldsymbol{A}_{j,k}$. Даље, нулти простор произвољне матрице $\boldsymbol{A}$ ћемо обележавати са $\mathcal{N}(\boldsymbol{A})$. Осим тога, ако се ради о квадратној матрици $\boldsymbol{A}$ над пољем $\mathbb{K}$, тада ћемо користити $\mathcal{P}_{\boldsymbol{A}}(x) \in \mathbb{K}[x]$, односно $\sigma^*_{\boldsymbol{A}}$, да означимо њен карактеристични полином, односно скуп сопствених вредности. За произвољну квадратну матрицу $\boldsymbol{A}$, нотацију $\sigma_{\boldsymbol{A}}$ ћемо додатно употребити да означимо њен спектар схваћен као мултискуп сопствених вредности код ког се сваки елемент јавља онолико пута колико му је вишеструкост као нула карактеристичног полинома.

Затим, под нотацијом $\mathbb{K}^{P\times Q}$ подразумеваћемо скуп свих матрица над пољем $\mathbb{K}$ чији је индексни скуп редова P, а индексни скуп колона Q. Најзад, матрице над пољем $\mathbb{R}$ ћемо скраћено називати реалним матрицама, док ћемо за матрице над пољем $\mathbb{C}$ тврдити да су комплексне матрице. Осталу базичну терминологију или нотацију везану за теорију матрица, или уопштено елементарну линеарну алгебру, нећемо експлицитно уводити и подразумеваћемо да су сви неопходни појмови дефинисани на начин како се то ради у стандардној литератури.

У оквиру докторске дисертације, све матрице придружене графу којима ћемо руковати биће симетричне реалне матрице. Из овог разлога, од значајне је користи посматрати спектрална својства оваквих матрица, те у наставку без доказа наводимо фундаменталну теорему о спектралној декомпозицији симетричних реалних матрица (за доказ погледати, на пример, [93, одељак 7.2]).

Теорема 2.1 (Спектрална декомпозиција симетричних матрица)**.** *За произвољну симетричну реалну матрицу $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{P\times P}$, постоје дијагонална реална матрица $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{P\times P}$ и ортогонална реална матрица $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{P\times P}$ такве да важи $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{Q}^\intercal$.*

На основу Теореме 2.1, јасно је да за сваку симетричну реалну матрицу $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{P\times P}$ мора постојати ортонормирана база простора $\mathbb{R}^P$ која се састоји од њених сопствених вектора. Осим тога, једноставно је уочити да свака симетрична реална матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{P\times P}$ мора бити дијагонализибилна и да њен карактерични полином $\mathcal{P}_{\boldsymbol{A}}(x) \in \mathbb{R}[x]$ може да се факторише на линеарне реалне факторе. Такође, за сваку сопствену вредност дате матрице, важи да се њена алгебарска и геометријска вишеструкост поклапају, тј. њена вишеструкост као нула карактеристичног полинома је нужно једнака димензији сопственог потпростора који јој одговара. Из овог разлога, алгебарску или геометријску вишеструкост неке сопствене вредности задате симетричне реалне матрице можемо скраћено називати само као њену вишеструкост.

Приликом саопштавања главних резултата докторске дисертације, још један важан тип матрица којима ћемо се интензивно бавити јесу циркулантне матрице. У складу са потребама дисертације, споменути тип матрица се може прецизно дефинисати на следећи начин.

Дефиниција 2.30 (Циркулантна матрица)**.** Циркулантна матрица је било која квадратна матрица $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n}$, $n \in \mathbb{N}$, над неким пољем $\mathbb{K}$ код које важи $\boldsymbol{A}_{j,k} = \boldsymbol{A}_{0,k-j}$ за свако $j,k \in \mathbb{Z}_n$.

У вези са циркулантним матрицама, биће нам неопходан наредни теоријски резултат који се тиче одређивања спектра произвољне циркулантне комплексне матрице. Доказ споменутог тврђења може се пронаћи, на пример, у [40, одељак 3.1].

Лема 2.4 (Спектар циркулантних матрица)**.** *Спектар било које циркулантне комплексне матрице $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n}$, $n \in \mathbb{N}$, може да се представи у виду мултискупа*

$$\sigma_{\boldsymbol{A}} = \left[P\left(e^{\frac{0\pi}{n}i}\right), P\left(e^{\frac{2\pi}{n}i}\right), P\left(e^{\frac{4\pi}{n}i}\right), \ldots, P\left(e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i}\right)\right],$$

где $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ чини полином са комплексним коефицијентима

$$P(x) = \boldsymbol{A}_{0,0} + \boldsymbol{A}_{0,1}\,x + \boldsymbol{A}_{0,2}\,x^2 + \cdots + \boldsymbol{A}_{0,n-1}\,x^{n-1}.$$

Код изучавања спектралних својстава неког графа, у теорији генерално постоји огроман број типова матрица које можемо придружити датом графу и које нам могу бити од интереса (видети, на пример, [6, 23–25, 61, 80]). Од бројних матрица помоћу којих можемо да опишемо задати граф, она која је генерално најважнија и представља најчешћи предмет истраживања јесте матрица суседства. Докторска дисертација се бави изучавањем одговарајућих спектралних својстава управо ове матрице, као и Лапласове матрице. Сходно томе, у остатку датог одељка биће уведени концепти обе ове матрице, као и одговарајућа терминологија везана за њих. Пре свега, дефинисаћемо матрицу суседства као у наставку.

Дефиниција 2.31 (Матрица суседства)**.** Нека је задат произвољан граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$. Матрица суседства придружена овом графу чини симетричну реалну матрицу $\boldsymbol{A}_G \in \mathbb{R}^{V_G \times V_G}$ код које, за свака два чвора $u, v \in V_G$, елемент $(\boldsymbol{A}_G)_{u,v}$ представља укупан број грана $e \in E_G$ таквих да важи $\psi_G(e) = [u, v]$, при чему се петље броје два пута.

Важна особина матрице суседства јесте да у потпуности диктира структуру графа који описује, односно класу изоморфизма којој он припада. Осим тога, познато је да спектар матрице суседства не поседује ово својство. Другим речима, постоје неизоморфни графови чије матрице суседства имају исти спектар (видети, на пример, [12, одељак 1.3.7]). Најзад, за произвољан граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ је једноставно установити да његова матрица суседства $\boldsymbol{A}_G \in \mathbb{R}^{V_G \times V_G}$ задовољава једнакости

$$\sum_{v \in V_G} (\boldsymbol{A}_G)_{u,v} = \deg_G(u), \qquad (\forall u \in V_G),$$
$$\sum_{u \in V_G} (\boldsymbol{A}_G)_{u,v} = \deg_G(v), \qquad (\forall v \in V_G).$$

Узевши у обзир да се углавном матрица суседства најчешће истражује од свих типова матрица које описују граф, типично је да када говоримо о спектралним својствима неког графа, да подразумевано мислимо на одговарајућа спектрална својства његове матрице суседства. У складу са тим, уместо да користимо нотацију $\mathcal{P}_{A_G}(x)$, σ_{A_G} и $\mathcal{N}(\boldsymbol{A}_G)$ да означимо карактеристични полином, спектар и нулти простор матрице суседства задатог графа G, респективно, концизније је користити ознаке $\mathcal{P}_G(x)$, σ_G и $\mathcal{N}(G)$. Осим овога, употребљаваћемо $\eta(G)$ да означимо димензију нултог простора матрице суседства задатог графа G.

У директној вези са матрицом суседства јесте и појам енергије графа који је уведен од стране Гутмана [41] и данас има широку примену у хемијској теорији графова (видети, на пример, [42, 53]). Енергија се примарно дефинише над простим ненула графовима и повезана је са одговарајућим хемијским својствима графа од интереса. Споменути појам уводимо путем следеће дефиниције.

Дефиниција 2.32 (Енергија графа)**.** За било који прост ненула граф G, његова енергија се дефинише путем формуле

$$\mathcal{E}_G = \sum_{\lambda \in \sigma_G} |\lambda|$$

и представља суму апсолутних вредности елемената спектра задатог графа[5].

Задати одељак завршавамо дефинисањем Лапласове матрице и навођењем њених особина неопходних за излагање главних резултата дисертације.

Дефиниција 2.33 (Лапласова матрица)**.** За произвољан граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$, Лапласова матрица придружена овом графу јесте симетрична реална матрица $\boldsymbol{L}_G \in \mathbb{R}^{V_G \times V_G}$ таква да важи

$$(\boldsymbol{L}_G)_{u,v} = \begin{cases} -(\boldsymbol{A}_G)_{u,v}, & u \neq v, \\ \deg_G(u) - (\boldsymbol{A}_G)_{u,u}, & u = v, \end{cases}$$

за свака два чвора $u, v \in V_G$.

[5]При рачунању енергије графа, апсолутна вредност сваке сопствене вредности се сабира онолико пута колико јој износи вишеструкост.

Уколико говоримо о карактеристичном полиному или спектру Лапласове матрице задатог графа, типично је користити терминологију Лапласов карактеристични полином, односно Лапласов спектар. Тривијално је уочити да додавање произвољног броја петљи не доводи ни до какве промене у Лапласовој матрици. Осим тога, није тешко установити да уколико знамо да задати граф не садржи петље, онда Лапласова матрица у потпуности одређује класу изоморфизма којој он припада. Даље, за Лапласов спектар се може установити да не диктира тачну структуру графа, узевши у обзир да постоје неизоморфни прости графови са истим Лапласовим спектром (видети, на пример, [12, одељак 1.8]). Најзад, једноставно је увидети да је збир свих елемената у произвољном реду или колони Лапласове матрице обавезно једнак нула, тј. мора бити

$$\sum_{v \in V_G} (\boldsymbol{L}_G)_{u,v} = 0, \qquad (\forall u \in V_G),$$
$$\sum_{u \in V_G} (\boldsymbol{L}_G)_{u,v} = 0, \qquad (\forall v \in V_G),$$

за Лапласову матрицу $\boldsymbol{L}_G \in \mathbb{R}^{V_G \times V_G}$ било ког графа $G = (V_G, E_G, \psi_G)$.

2.3 Неколико додатних типова графова

У датом кратком одељку ћемо увести неколико специфичних типова графова који ће чинити подлогу за исказивање главних научних резултата докторске дисертације. Пре свега, дефинишимо циркулантан граф на наведени начин.

Дефиниција 2.34 (Циркулантан граф)**.** Циркулантан граф је граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ који поседује аутоморфизам (φ, χ) такав да бијекција $\varphi\colon V_G \to V_G$ представља пермутацију са тачно једним циклусом.

Очигледно је да сваки циркулантан граф мора бити регуларан. Следећи тип графова којима ћемо се бавити јесу матични графови. Појам матичног графа су примарно увели Sciriha и Гутман у неколико радова [73–76, 79] пред сам крај двадесетог века. Каснија истраживања у вези са матичним графовима показала су да споменути графови имају примену у области хемије (видети, на пример, [17, 35, 36, 77, 78]). Овај тип графова може да се уведе на више алтернативних начина. У складу са потребама докторске дисертације, биће коришћена следећа дефиниција.

Дефиниција 2.35 (Матичан граф)**.** Матичан граф је нетривијалан прост граф такав да његова матрица суседства поседује једнодимензионалан нулти простор чији сви ненула вектори не садрже ниједан нула елемент.

И за циркулантност и за матичност је битно напоменути да представљају својства која зависе само од структуре графа. Другим речима, произвољан граф је циркулантан, односно матичан, ако и само ако је циркулантан, односно матичан, било који граф који је њему изоморфан. Надаље ћемо увести неколико типова коренских стабала са правилном структуром за коју ће се касније показати да је од користи. Бете стабла ће бити уведена на начин као што су то урадили Heilmann и Lieb у [43], док ће дендримери бити формализовани у духу претходно споменуте дефиниције Бете стабала.

Дефиниција 2.36 (Балансирано стабло)**.** Балансирано стабло је коренско стабло код ког сви чворови на истом нивоу нужно поседују исти број деце.

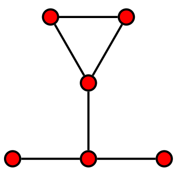
Дефиниција 2.37 (Бете стабло)**.** За било које $d, k \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, Бете стабло $\mathcal{B}_{d,k}$ чини балансирано стабло са k нивоа такво да сви чворови ван последњег нивоа имају тачно $d-1$ деце.

Дефиниција 2.38 (Дендример)**.** За било које $d, k \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, дендример $\mathcal{D}_{d,k}$ чини балансирано стабло са k нивоа такво да су сви чворови ван последњег нивоа степена d.

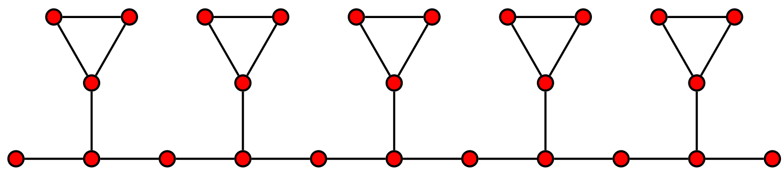
Вреди напоменути да Бете стабла и дендримери имају веома сличну структуру, узевши у обзир да се Бете стабло $\mathcal{B}_{d,k}$ и дендример $\mathcal{D}_{d,k}$ разликују једино по томе што корен има $d-1$ деце код Бете стабла, а d деце код дендримера. Одељак завршавамо навођењем две дефиниције које преко адекватне визуелне репрезентације уводе концепте мартини пута[6] и мартини циклуса[7], које ћемо обједињено називати мартини графовима. Овакве графове су оригинално разматрали и именовали Стевановић и др. [85] приликом проналажења контрапримера за хипотезу о односу између $\mathcal{E}_G$, μ_G и Δ_G коју су претходно успоставили Akbari и др. [2].

Дефиниција 2.39 (Мартини пут)**.** За свако $n \in \mathbb{N}$, мартини пут MP_n представља класу изоморфизма која садржи графове чија се структура добија надовезивањем n мартини ћелија са слике 2.1а на начин приказан на слици 2.1б.

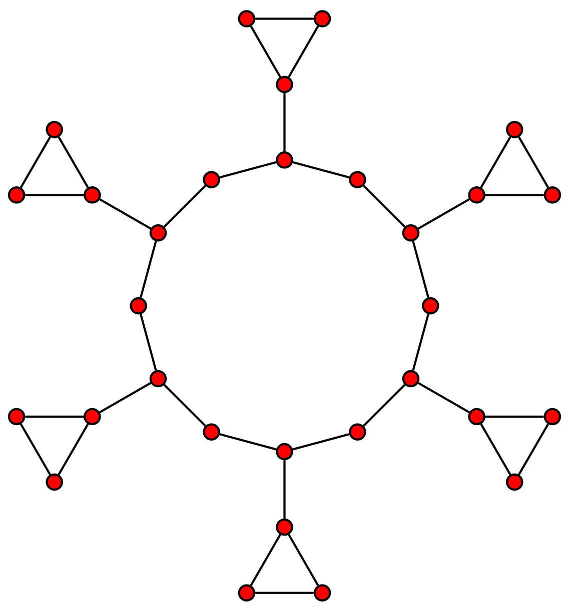
Дефиниција 2.40 (Мартини циклус)**.** За било које $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, мартини циклус MC_n чини класу изоморфизма која садржи графове чија се структура добија надовезивањем n мартини ћелија са слике 2.1а као што је демонстрирано на слици 2.1в.



(а) мартини ћелија



(б) мартини пут MP_5



(в) мартини циклус MC_6

Слика 2.1: Визуелна репрезентација мартини путева и мартини циклуса.

[6] У оригиналном раду на енглеском језику, мартини пут је познат као *wine glass path*.

[7] У оригиналном раду на енглеском језику, мартини циклус је познат као *wine glass cycle*.

2.4 Одређене фамилије реалних полинома

Задато поглавље завршавамо увођењем неколико фамилија реалних полинома заједно уз теорију везану за њих која ће нам касније при излагању главних резултата бити од користи. У питању ће бити тврђења и теореме везане за циклотомичне полиноме, Диксонове полиноме друге врсте, као и Геронимусове полиноме. Пре свега, дефинишимо циклотомичан полином као што је то урађено у наставку.

Дефиниција 2.41 (Циклотомичан полином)**.** За произвољно $n \in \mathbb{N}$, циклотомични полином $\Phi_n(x) \in \mathbb{C}[x]$ представља производ линеарних фактора облика

$$\Phi_n(x) = \prod_{\xi} (x - \xi),$$

где ξ узима вредности примитивних n-тих корена јединице.

Очигледно је да за свако $n \in \mathbb{N}$ мора бити $\deg \Phi_n(x) = \varphi(n)$, где $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ представља Ојлерову функцију. Осим тога, познато је да циклотомични полиноми имају целобројне коефицијенте, тј. да важи $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, као и да су сви овакви полиноми иредуцибилни у $\mathbb{Q}[x]$ (видети, на пример, [47]). Из овог разлога, јасно је да је неки полином из $\mathbb{Q}[x]$ садржи произвољан примитивни n-ти корен јединице међу својим нулама ако и само ако је он дељив циклотомичним полиномом $\Phi_n(x)$. У наставку наводимо два помоћна тврђења која говоре о одговарајућим једнакостима које важе код конкретних циклотомичних полинома. Доказ споменутих лема се такође може наћи у [47].

Лема 2.5 (Циклотомични полиноми типа p и $2p$)**.** *За произвољан прост број $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 3$, важе једнакости*

$$\Phi_p(x) = \sum_{j=0}^{p-1} x^j, \qquad \Phi_{2p}(x) = \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j x^j.$$

Лема 2.6 (Редукција циклотомичних полинома)**.** *Нека је дат циклотомични полином $\Phi_n(x)$ где је $n \in \mathbb{N}$ такав да важи $p^k \mid n$ за одређен прост број $p \in \mathbb{N}$ и неко $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Тада важи једнакост*

$$\Phi_n(x) = \Phi_{n/p^{k-1}}\left(x^{p^{k-1}}\right).$$

При исказивању главних резултата докторске дисертације, биће нам од огромне користи наредна теорема која говори о томе шта се дешава уколико неки циклотомичан полином дели задати полином са целобројним коефицијентима. Теорему су изложили Filaseta и Schinzel у свом раду [33] и она се тиче дељивости полинома који имају релативно мали број ненула коефицијената, као што ће управо и бити случај у дисертацији.

Теорема 2.2 (Filaseta и Schinzel [33, теорема 2])**.** *Нека је дат полином $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ који садржи $N \in \mathbb{N}$ ненула чланова и нека је $\Phi_n(x) \mid P(x)$ за неко $n \in \mathbb{N}$. Претпоставимо да су $p_1, p_2, \ldots, p_k$ различити прости бројеви такви да је*

$$\sum_{j=1}^{k} (p_j - 2) > N - 2.$$

Нека $e_j \in \mathbb{N}_0$ представља највећи могући експонент такав да важи $p_j^{e_j} \mid n$. Тада за бар једно $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq k$, мора бити да је $\Phi_{n'}(x) \mid P(x)$, где је $n' = n/p_j^{e_j}$.

Најзад, уведимо две фамилије полинома чији елементи представљају чланове низа дефинисаног путем одговарајуће рекурентне релације. У складу са потребама докторске дисертације, формализоваћемо концепт Диксонових полинома друге врсте управо онако како се то у литератури и стандардно ради (видети, на пример, [54, лема 2.3]). Осим тога, дефинисаћемо и мање познате Геронимусове полиноме на начин као што је то урађено у [55, одељак 3.1].

Дефиниција 2.42 (Диксонови полиноми друге врсте)**.** За произвољно $a \in \mathbb{R}$, Диксонови полиноми друге врсте $(E_n(x;a))_{n\in\mathbb{N}_0}$ чине низ реалних полинома који се добија преко наредне рекурентне релације:

$$\begin{aligned}
&E_0(x;a) = 1,\\
&E_1(x;a) = x,\\
&E_n(x;a) = x\,E_{n-1}(x;a) - a\,E_{n-2}(x;a) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}_0,\ n \geq 2).
\end{aligned}$$

Дефиниција 2.43 (Геронимусови полиноми)**.** За било које $a \in \mathbb{R}$, Геронимусови полиноми $(G_n(x;a))_{n\in\mathbb{N}_0}$ представљају низ реалних полинома одређен путем следеће рекурентне релације:

$$\begin{aligned}
&G_0(x;a) = 1,\\
&G_1(x;a) = x,\\
&G_2(x;a) = x^2 - a,\\
&G_n(x;a) = x\,G_{n-1}(x;a) - (a-1)\,G_{n-2}(x;a) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}_0,\ n \geq 3).
\end{aligned}$$

Јасно је да је степен било ког Диксоновог полинома друге врсте $E_n(x;a)$ или Геронимусовог полинома $G_n(x;a)$ обавезно једнак n. Осим тога, важно је напоменути да постоји веома једноставна веза која спаја ове две фамилије полинома. У наредној леми ће бити исказана споменута релација коју је могуће врло лако и природно доказати путем математичке индукције.

Лема 2.7 (Веза између Геронимусових полинома и Диксонових полинома друге врсте)**.** *За произвољно $a \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, важи једнакост*

$$G_n(x;a) = E_n(x;a-1) - E_{n-2}(x;a-1).$$

Даље, за произвољно $a > 0$ није тешко установити да Диксонови полиноми друге врсте задовољавају једнакост $E_n(x;a) = \left(\sqrt{a}\right)^n U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right)$, где је са $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ означен познати низ Чебишевљевих полинома друге врсте (видети, на пример, [94, поглавље 1]). Узевши у обзир да су нуле Чебишевљевих полинома друге врсте у науци опште познате (видети, на пример, [95, одељак 2.2.13]), једноставно је доћи до наредне леме која говори о нулама Диксонових полинома друге врсте.

Лема 2.8 (Нуле Диксонових полинома друге врсте)**.** *За произвољну позитивну вредност $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ и било које $n \in \mathbb{N}_0$, Диксонов полином друге врсте $E_n(x;a)$ се може факторисати на линеарне реалне факторе и садржи тачно n простих нула:*

$$2\sqrt{a}\cos\left(\frac{1}{n+1}\pi\right), 2\sqrt{a}\cos\left(\frac{2}{n+1}\pi\right), \ldots, 2\sqrt{a}\cos\left(\frac{n}{n+1}\pi\right).$$

Иако су низови Диксонових полинома друге врсте и Геронимусових полинома повезани и описани сличном рекурентном релацијом, испоставља се да је драстично теже доћи до експлицитне формуле за нуле Геронимусових полинома. У складу са главним резултатима који ће бити изложени у оквиру докторске дисертације, уместо експлицитне формуле, биће примењена одговарајућа апроксимација која говори о локализацији нула оваквих полинома. Поглавље завршавамо навођењем леме која даје тражени резултат и чији се доказ може пронаћи, на пример, у [55, одељак 3.1].

Лема 2.9 (Локализација нула Геронимусових полинома)**.** *За било који број $a \in \mathbb{R}$, $a > 2$ и произвољан индекс $n \in \mathbb{N}_0$, Геронимусов полином $G_n(x; a)$ се може факторисати на линеарне реалне факторе и садржи тачно n простих нула $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n$ таквих да важи*

$$2\sqrt{a-1}\,\cos\left(\frac{j+\frac{1}{2}}{n+1}\pi\right) < \beta_j < 2\sqrt{a-1}\,\cos\left(\frac{j-\frac{1}{2}}{n+1}\pi\right) \qquad \left(\forall j \in \overline{1,n}\right).$$

Поглавље 3

Егзистенцијални проблем циркулантних матичних графова

Иако релативно скоро уведени, матични графови су због своје примене у области хемије привукли солидну пажњу од стране многих теоретичара графова. Пошто у општем случају могу поседовати прилично неправилну структуру, један од потенцијалних начина како можемо поједноставити проблем којим се бавимо јесте тако што изучавамо матичне графове који имају додатно наметнуто својство регуларности. Један од популарних праваца истраживања у вези са регуларним матичним графовима јесте одређивање колико све чворова d-регуларан матичан граф може имати, за неко фиксирано $d \in \mathbb{N}_0$. Овај математички проблем ћемо концизно називати егзистенцијалним проблемом регуларних матичних графова. Није компликовано уочити да споменути проблем постаје тривијалан за решавање у случају да се ради о вредности $d \leq 2$, те су од интереса само параметри облика $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$.

Прве значајне резултате у вези са егзистенцијалним проблемом регуларних матичних графова дали су Gauci и др. тако што су одредили скупове који диктирају од колико се све чворова може састојати 3-регуларан матичан граф [37, теорема 2] и 4-регуларан матичан граф [37, теорема 3]. У каснијем раду, Fowler и др. су унапредили споменуте резултате и дали комплетно решење егзистенцијалног проблема регуларних матичних графова за случај $d \leq 11$ [34, теорема 7]. Најзад, Башић и др. су успели да пронађу колико све може износити ред 12-регуларног матичног графа [7, теорема 1.3] уз помоћ одређених конструкција базираних на циркулантним матичним графовима. На тај начин је започето истраживање везано за овај тип графова, те су у споменутом раду изложени и неки резултати који се тичу одређивања услова када су специфични циркулантни графови матични [7, теореме 2.3 и 2.4]. Коначно, постављен је отворен математички проблем који се бави одређивањем свих могућих редова које d-регуларан циркулантан матичан граф може имати, за неко фиксирано $d \in \mathbb{N}_0$ [7, хипотезе 3.2 и 3.3].

У оквиру датог поглавља докторске дисертације, биће изложено комплетно решење егзистенцијалног проблема циркулантних матичних графова. Другим речима, биће у потпуности одређени сви парови (n, d), $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}_0$, за које постоји d-регуларан циркулантан матичан граф реда n. Решење описано у дисертацији биће базирано на резултатима које су добили првобитно Дамњановић и Стевановић [31], а касније Дамњановић [27, 29]. Уколико за свако $d \in \mathbb{N}_0$ искористимо нотацију $\mathfrak{N}_d$ да означимо скуп свих редова које може имати d-регуларан циркулантан матичан граф, онда се решење егзистенцијалног проблема циркулантних матичних графова може комотно изразити у виду наредне теореме.

Теорема 3.1 (Егзистенцијални проблем циркулантних матичних графова)**.** *За свако* $d \in \mathbb{N}_0$*, скуп* $\mathfrak{N}_d$ *се може добити преко следећег израза:*

$$\mathfrak{N}_d = \begin{cases} \varnothing, & d = 0 \lor 4 \nmid d, \\ \{n \in \mathbb{N} \colon 2 \mid n \land n \geq d+4\}, & d \equiv_8 4, \\ \{14\} \cup \{n \in \mathbb{N} \colon 2 \mid n \land n \geq 18\}, & d = 8, \\ \{n \in \mathbb{N} \colon 2 \mid n \land n \geq d+6\}, & 8 \mid d \land d \geq 16. \end{cases}$$

У остатку поглавља биће дат комплетан математички доказ теореме 3.1, при чему ће подела поглавља на одељке одговарати структури самог доказа. Пре свега, у одељку 3.1 ће бити изложени неки елементарни резултати везани за то када циркулантни графови поседују својство матичности. Заједно уз њих, биће исказан кратак доказ да за било које $d \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, сигурно не постоји d-регуларан циркулантан матичан граф реда n уколико важи $n \notin \mathfrak{N}_d$ у складу са теоремом 3.1. Након тога, комплетираћемо доказ наведене теореме тако што ћемо демонстрирати постојање d-регуларног циркулантног матичног графа реда n за свако $d \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$, код којих важи $n \in \mathfrak{N}_d$. Постојање споменутих графова биће показано експлицитном конструкцијом. Укупно ћемо искористити већи број различитих конструкционих шаблона, при чему ће сваки од преосталих шест одељака имати као циљ доказивање исправности бар једног од њих.

3.1 Уводни резултати

На основу дефиниција 2.30 и 2.34 једноставно је закључити да сваки циркулантан граф реда $n \in \mathbb{N}$ мора бити изоморфан графу са скупом чворова $\mathbb{Z}_n$ чија матрица суседства представља циркулантну матрицу. Узевши у обзир да својство матичности зависи само од структуре графа, одавде је лако установити да је при сагледавању егзистенцијалног проблема циркулантних матичних графова довољно узети у обзир само просте графове чија је матрица суседства циркулантна. Међутим, код оваквих графова важи да матрица суседства, осим што је циркулантна, мора додатно бити и симетрична, бинарна и шупља, тј. садржи само нуле на дијагонали, а јединице или нуле ван дијагонале. Из овог разлога, матрицу суседства A_G таквог графа G реда $n \in \mathbb{N}$ је могуће у потпуности одредити навођењем свих индекса $j \in \mathbb{N}$, $j \leq \frac{n}{2}$ који задовољавају $(A_G)_{0,\, j \bmod n} = 1$. Скуп свих оваквих индекса ћемо надаље називати генераторским скупом и користићемо нотацију $\mathrm{Circ}(n, S)$ да означимо циркулантан прост граф реда $n \in \mathbb{N}$ чија матрица суседства представља циркулантну матрицу одговарајућег реда са генераторским скупом S.

Применом леме 2.4 сада постаје врло лако да се одреди спектар циркулантног простог графа од интереса. Уколико је дат граф G типа $\mathrm{Circ}(n, S)$, где је $n \in \mathbb{N}$ и $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}\}$, при чему је $1 \leq s_0 < s_1 < \cdots < s_{k-1} \leq \frac{n}{2}$, тада лема о спектру циркулантних матрица диктира да мора бити

$$\sigma_G = \left[\mathcal{W}_G\left(e^{\frac{0\pi}{n}i}\right), \mathcal{W}_G\left(e^{\frac{2\pi}{n}i}\right), \mathcal{W}_G\left(e^{\frac{4\pi}{n}i}\right), \ldots, \mathcal{W}_G\left(e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i}\right)\right], \tag{3.1}$$

где $\mathcal{W}_G(x)$ чини израз

$$\mathcal{W}_G(x) = (x^{s_0} + x^{n-s_0}) + (x^{s_1} + x^{n-s_1}) + \cdots + (x^{s_{k-2}} + x^{n-s_{k-2}}) + (x^{s_{k-1}} + x^{n-s_{k-1}}) \tag{3.2}$$

ако важи $s_{k-1} < \frac{n}{2}$, односно

$$\mathcal{W}_G(x) = (x^{s_0} + x^{n-s_0}) + (x^{s_1} + x^{n-s_1}) + \cdots + (x^{s_{k-2}} + x^{n-s_{k-2}}) + x^{s_{k-1}} \tag{3.3}$$

под претпоставком да је $s_{k-1} = \frac{n}{2}$. Коришћењем израза (3.1), (3.2) и (3.3) надаље долазимо до следеће леме која исказује потребне и довољне услове да неки циркулантан прост граф буде матичан.

Лема 3.1. *Циркулантан прост граф облика* $\mathrm{Circ}(n, S)$*, где је* $n \in \mathbb{N}$ *и* $S \subseteq \left\{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right\}$*, је матичан ако и само ако су задовољени наредни услови:*

- *n је паран;*
- *$S \neq \varnothing$, $\frac{n}{2} \notin S$ и S садржи подједнако парних и непарних елемената;*
- $\displaystyle\sum_{s \in S} (\zeta^s + \zeta^{-s}) \neq 0$ *за свако* $\zeta \in \mathbb{C}$ *такво да је* $\zeta^n = 1$ *и* $\zeta \notin \{1, -1\}$.

Доказ. Нека је задат циркулантан прост граф G облика $\mathrm{Circ}(n, S)$ и нека је $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{k-1}\}$ уз $1 \le s_0 < s_1 < \dots < s_{k-1} \le \frac{n}{2}$. Пре свега ћемо доказати да су услови наведени у леми довољни да граф G буде матичан. Претпоставимо да их граф G заиста задовољава. Применом формуле (3.2) директно добијамо

$$\mathcal{W}_G(1) = 2k \neq 0, \tag{3.4}$$

$$\mathcal{W}_G(-1) = 2(-1)^{s_0} + 2(-1)^{s_1} + \dots + 2(-1)^{s_{k-1}} = 2\left(\frac{k}{2} - \frac{k}{2}\right) = 0. \tag{3.5}$$

Узевши у обзир једнакости (3.1), (3.4) и (3.5), трећи услов изложен у леми, као и чињеницу да 1 и -1 јесу n-ти корени јединице, долазимо до закључка да сигурно важи $\eta_G = 1$. Осим тога, применом другог услова из леме је једноставно установити да вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_n}$ дефинисан преко израза

$$\boldsymbol{u}_{j \bmod n} = (-1)^j \qquad (\forall j = \overline{0, n-1})$$

задовољава једнакост $\boldsymbol{A}_G\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Одавде следи да се $\mathcal{N}_G$ састоји тачно од вектора колинеарних са $\boldsymbol{u}$, што управо значи да граф G јесте матичан.

Сада ћемо доказати да су услови дати у леми такође и потребни да граф G буде матичан. Претпоставимо да споменути граф јесте матичан. Из формула (3.2) и (3.3) се јасно види да мора бити $\mathcal{W}_G(\zeta) = \mathcal{W}_G\left(\overline{\zeta}\right)$ за свако $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$. Одавде следи да је немогуће да буде $\mathcal{W}_G(\zeta) = 0$ за неко $\zeta \in \mathbb{C}$ такво да је $\zeta^n = 1$ и $\zeta \notin \{1, -1\}$, јер би онда било и $\mathcal{W}_G\left(\overline{\zeta}\right) = 0$, те би израз (3.1) диктирао да је $\eta_G \ge 2$, што је немогуће у случају да је граф G матичан. Осим тога, кад би било $\mathcal{W}_G(1) = 0$, онда би следило да је граф G празан, одакле је једноставно установити да он поново не би могао бити матичан. Дакле, како би био испуњен услов $\eta_G = 1$, мора бити да -1 чини n-ти корен јединице и да је управо $\mathcal{W}_G(-1) = 0$. Из датог запажања следи да је број n сигурно паран, па важи први услов дат у леми.

Даље, кад би било $\frac{n}{2} \in S$, онда би једнакост (3.3) дала

$$0 = \mathcal{W}_G(-1) = 2(-1)^{s_0} + 2(-1)^{s_1} + \dots + 2(-1)^{s_{k-2}} + (-1)^{s_{k-1}},$$

што очигледно не би било могуће пошто би десна страна сигурно била непаран број. Одатле следи да је $\frac{n}{2} \notin S$, те из једнакости (3.2) одмах добијамо трећи услов исказан у леми. Осим тога, јасно је да је $S \neq \varnothing$, јер би у супротном граф G био празан, за шта смо већ констатовали да није могуће. Најзад, израз (3.2) даје

$$0 = \mathcal{W}_G(-1) = 2(-1)^{s_0} + 2(-1)^{s_1} + \dots + 2(-1)^{s_{k-2}} + 2(-1)^{s_{k-1}},$$

што директно имплицира да скуп S мора садржати подједнако парних и непарних елемената. Узевши све у обзир, јасно је да мора важити и други услов наведен у леми, чиме је доказ готов. □

На основу другог услова датог у леми 3.1, могуће је установити да су сви циркулантни матични графови обавезно d-регуларни за неко $d \in \mathbb{N}$, $4 \mid d$. Из овог разлога, за било које $d \in \mathbb{N}_0$ такво да је $d = 0$ или $4 \nmid d$, сигурно важи $\mathfrak{N}_d = \varnothing$, као што је у складу са теоремом 3.1. Надаље ћемо посматрати само вредности $d \in \mathbb{N}$ за које услов $4 \mid d$ заиста важи, те ћемо ради концизности узети да је $d = 4t$ за одговарајуће $t \in \mathbb{N}$. Имајући у виду да ред произвољног циркулантног матичног графа мора бити паран, јасно је да за свако $t \in \mathbb{N}$ сигурно важи $\mathfrak{N}_{4t} \subseteq \{4t+2, 4t+4, 4t+6, 4t+8, \dots\}$. Заправо, могуће је добити прецизније ограничење за све споменуте скупове, као што показују наредне две кратке леме.

Лема 3.2. *Ни за једно $t \in \mathbb{N}$ не постоји $4t$-регуларан циркулантан матичан граф реда $4t+2$.*

Доказ. Као што је већ образложено и као што тврди лема 3.1, довољно је посматрати само циркулантне просте графове G облика $\mathrm{Circ}(4t+2, S)$, где се S састоји од тачно t парних и t непарних бројева из скупа $\{1, 2, \dots, 2t\}$. Међутим, одавде следи да мора бити управо $S = \{1, 2, \dots, 2t\}$, те није тешко увидети да матрица суседства таквог графа G неопходно има облик

$$A_G = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 2t+1 \\ 1 \\ 2t+2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 2t \\ 4t+1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 2t+1 & 1 & 2t+2 & \cdots & \cdots & 2t & 4t+1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Сада је лако закључити да важи $\eta_G = 2t+1 > 1$, те граф G никако не може бити матичан. □

Лема 3.3. *Ни за једно парно $t \in \mathbb{N}$ не постоји $4t$-регуларан циркулантан матичан граф реда $4t+4$.*

Доказ. Слично као при доказивању леме 3.2, довољно је узети у обзир само циркулантне просте графове G типа $\mathrm{Circ}(4t+4, S)$ код којих се S састоји од t парних и t непарних бројева из скупа $\{1, 2, \dots, 2t+1\}$. У овом случају, за генераторски скуп S важи да мора бити облика $S = \{1, 2, \dots, 2t+1\} \setminus \{\beta\}$, где је $\beta \in \{1, 2, \dots, 2t+1\}$ и $2 \nmid \beta$. Уочимо да за свако $s \in \mathbb{N}$ важи

$$i^s + i^{-s} = \begin{cases} 0, & 2 \nmid s, \\ 2, & 4 \mid s, \\ -2, & s \equiv_4 2. \end{cases}$$

Узевши у обзир да се скуп S мора састојати од t непарних елемената, $\frac{t}{2}$ њих који су дељиви са четири и $\frac{t}{2}$ парних елемената који нису дељиви са четири, директно следи

$$\mathcal{W}_G(i) = 0 \cdot t + 2 \cdot \frac{t}{2} + (-2) \cdot \frac{t}{2} = t - t = 0.$$

Како i јесте $(4t+4)$-ти корен јединице, видимо да граф G обавезно не задовољава трећи услов из леме 3.1, те он не може бити матичан. □

На основу лема 3.2 и 3.3 закључујемо да за свако $t \in \mathbb{N}$, ред $4t$-регуларног циркулантног матичног графа мора бити паран број не испод $4t+4$, уколико важи $2 \nmid t$, односно паран број не мањи од $4t+6$, ако је $2 \mid t$. У циљу даљег доказивања теореме 3.1, биће неопходно показати да не постоји 8-регуларан циркулантан матичан граф реда 16, те долазимо до следеће леме.

Лема 3.4. *Не постоји* 8*-регуларан циркулантан матичан граф реда* 16.

Доказ. У сличном духу као при доказивању лема 3.2 и 3.3, при сагледавању 8-регуларних циркулантних матичних графова реда 16, довољно је узети у обзир графове облика $\mathrm{Circ}(16, S)$ код којих се S састоји од два парна и два непарна броја из скупа $\{1, 2, \ldots, 7\}$. Једноставно је избројати да сада имамо укупно 18 могућности за скуп S, те долазимо до циркулантних простих графова следећих облика:

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Circ}(16, \{1,3,2,4\}), & \mathrm{Circ}(16, \{1,3,2,6\}), & \mathrm{Circ}(16, \{1,3,4,6\}), \\
\mathrm{Circ}(16, \{1,5,2,4\}), & \mathrm{Circ}(16, \{1,5,2,6\}), & \mathrm{Circ}(16, \{1,5,4,6\}), \\
\mathrm{Circ}(16, \{1,7,2,4\}), & \mathrm{Circ}(16, \{1,7,2,6\}), & \mathrm{Circ}(16, \{1,7,4,6\}), \\
\mathrm{Circ}(16, \{3,5,2,4\}), & \mathrm{Circ}(16, \{3,5,2,6\}), & \mathrm{Circ}(16, \{3,5,4,6\}), \\
\mathrm{Circ}(16, \{3,7,2,4\}), & \mathrm{Circ}(16, \{3,7,2,6\}), & \mathrm{Circ}(16, \{3,7,4,6\}), \\
\mathrm{Circ}(16, \{5,7,2,4\}), & \mathrm{Circ}(16, \{5,7,2,6\}), & \mathrm{Circ}(16, \{5,7,4,6\}).
\end{array}$$

У овом моменту постаје тривијално да се провери да ли неки од споменутих графова може бити матичан коришћењем одговарајућег математичког софтвера који пружа подршку за симболичка израчунавања. Примера ради, употребом Wolfram Mathematica кода који је изложен у прилогу А.1, можемо се брзо уверити у то да је димензија нултог простора матрице суседства сваког од наведених графова нужно једнака бар три. Дакле, ниједан од њих сигурно није матичан. □

Узевши у обзир све претходно доказане леме у датом одељку, закључујемо да је код сваког $4t$-регуларног циркулантног матичног графа реда n обавезно задовољен услов $n \in \mathfrak{N}_{4t}$, у складу са теоремом 3.1. Како бисмо комплетирали доказ главне теореме, биће неопходно демонстрирати постојање бар једног $4t$-регуларног циркулантног матичног графа реда n за свако $t \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, који задовољавају $n \in \mathfrak{N}_{4t}$ по датој теореми. Остатак поглавља ће се бавити решавањем управо овог задатка и то применом разних конструкционих шаблона који деле решавање проблема на следеће случајеве:

- $t = 2$ и $n \in \{14\} \cup \{18, 20, 22, 24, \ldots\}$;
- $2 \nmid t$ и $4 \mid n$, $n \geq 4t + 4$;
- $t \in \mathbb{N}$ и $n \equiv_4 2$, $n \geq 4t + 6$;
- $2 \mid t$, $t \geq 4$ и $n = 4t + 8$;
- $2 \mid t$, $t \geq 4$ и $8 \mid n$, $n \geq 4t + 16$;
- $2 \mid t$, $t \geq 4$ и $n \equiv_8 4$, $n \geq 4t + 12$.

Сваки од преосталих шест одељака бавиће се доказивањем исправности шаблона који одговарају тачно по једном датом случају. Пре навођења самих конструкција, завршићемо дати одељак описивањем једне просте леме која се тиче дељивости полинома и која ће у оквиру остатка поглавља бити примењивана већи број пута.

Лема 3.5. *Нека је дат полином $U(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $U(x) \not\equiv 0$ такав да су степени свих његових ненула чланова дељиви задатим природним бројем $\beta \in \mathbb{N}$. Уколико важи $U(x) \mid V(x)$ за неки полином $V(x) \in \mathbb{Q}[x]$, онда за свако $j = \overline{0, \beta - 1}$, следи да $U(x)$ мора да дели и полином састављен од свих ненула чланова полинома $V(x)$ чији степен даје остатак j по модулу β.*

Доказ. Нека су дати полиноми $U(x)$ и $V(x)$ такви да важе сва тврђења наведена у леми. Пошто $U(x) \mid V(x)$, можемо узети да је $V(x) = U(x)\, W(x)$ за неки полином $W(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Даље, за свако $j \in \overline{0, \beta - 1}$, нека нотација $V^{(\beta, j)}(x)$ означава полином састављен од свих ненула чланова полинома $V(x)$ чији степен даје остатак j по модулу β. У сличном духу, нека за произвољно $j = \overline{0, \beta - 1}$ нотација $W^{(\beta, j)}(x)$ обележава полином састављен од свих ненула чланова полинома $W(x)$ чији је степен конгруентан са j по модулу β. Узевши у обзир да су степени свих ненула чланова полинома $U(x)$ дељиви са β, из једнакости $V(x) = U(x)\, W(x)$ директно следи да мора бити $V^{(\beta, j)} = U(x)\, W^{(\beta, j)}(x)$ за свако $j = \overline{0, \beta - 1}$. Одавде добијамо $U(x) \mid V^{(\beta, j)}(x)$, као што је и било потребно показати. □

3.2 Конструкција за случај $t = 2$ и $n \in \{14\} \cup \{18, 20, 22, 24, \ldots\}$

У датом краћем одељку биће демонстрирано постојање 8-регуларног циркулантног матичног графа било ког реда из скупа $\{14\} \cup \{18, 20, 22, 24, \ldots\}$. Пре свега, показаћемо да постоји овакав граф реда 14 тако што ћемо доказати да граф облика $\mathrm{Circ}(14, \{1, 2, 3, 4\})$ јесте матичан.

Лема 3.6. *Граф облика* $\mathrm{Circ}(14, \{1, 2, 3, 4\})$ *чини* 8*-регуларан циркулантан матичан граф реда* 14*.*

Доказ. Употребом леме 3.1 је лако закључити да је за доказивање ове леме довољно установити да ниједан 14-ти корен јединице $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^{14} = 1$ различит од 1 и -1 не задовољава једнакост $\mathcal{W}_{\mathrm{Circ}(14, \{1,2,3,4\})}(\zeta) = 0$. Међутим, за свако такво ζ важи низ еквиваленција

$$
\begin{aligned}
& & \mathcal{W}_{\mathrm{Circ}(14, \{1,2,3,4\})}(\zeta) &= 0 \\
&\iff & \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \zeta^{-3} + \zeta^{-4} &= 0 \\
&\iff & \zeta^4 \left(\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} + \zeta^{-3} + \zeta^{-4}\right) &= 0 \\
&\iff & \zeta^8 + \zeta^7 + \zeta^6 + \zeta^5 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 &= 0 \\
&\iff & (\zeta - 1)\left(\zeta^8 + \zeta^7 + \zeta^6 + \zeta^5 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1\right) &= 0 \\
&\iff & \zeta^9 - \zeta^5 + \zeta^4 - 1 &= 0 \\
&\iff & \left(\zeta^5 - 1\right)\left(\zeta^4 - 1\right) &= 0.
\end{aligned}
$$

Једноставно је увидети да ниједан 14-ти корен јединице не представља четврти или пети корен јединице, изузев бројева 1 и -1. Из овог разлога, јасно је да обавезно важи

$$\left(\zeta^5 - 1\right)\left(\zeta^4 - 1\right) \neq 0$$

за свако $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^{14} = 1$ такво да $\zeta \notin \{1, -1\}$. Одавде директно следи тврђење исказано у леми. □

У остатку одељка ћемо искористити другачију конструкцију у циљу доказивања постојања 8-регуларног циркулантног матичног графа реда n, где n чини било који паран број из скупа $\{18, 20, 22, 24, \ldots\}$. Испоставља се да је све преостале тражене графове могуће конструисати применом истоветног шаблона на начин како је то описано у следећој леми.

Лема 3.7. *За сваки паран број $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 18$, граф облика $\mathrm{Circ}(n, \{3, 4, 5, 8\})$ представља 8-регуларан циркулантан матичан граф реда n.*

Доказ. Применом леме 3.1, видимо да је за доказивање траженог тврђења довољно показати да ниједан n-ти корен јединице $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$ различит од 1 и -1 не задовољава једнакост $\mathcal{W}_{\mathrm{Circ}(n, \{3,4,5,8\})}(\zeta) = 0$. За овакве вредности ζ обавезно важи низ еквиваленција

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}_{\mathrm{Circ}(n, \{3,4,5,8\})}(\zeta) = 0 \\ \iff \quad & \zeta^8 + \zeta^5 + \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^{-3} + \zeta^{-4} + \zeta^{-5} + \zeta^{-8} = 0 \\ \iff \quad & \zeta^8 \left(\zeta^8 + \zeta^5 + \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^{-3} + \zeta^{-4} + \zeta^{-5} + \zeta^{-8}\right) = 0 \\ \iff \quad & \zeta^{16} + \zeta^{13} + \zeta^{12} + \zeta^{11} + \zeta^5 + \zeta^4 + \zeta^3 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Како је

$$\begin{aligned} \zeta^{16} + \zeta^{13} + \zeta^{12} + \zeta^{11} + \zeta^5 + \zeta^4 + \zeta^3 + 1 = (\zeta + 1)^2 \Big(& \zeta^{14} - 2\zeta^{13} + 3\zeta^{12} - 3\zeta^{11} \\ & + 4\zeta^{10} - 4\zeta^9 + 4\zeta^8 - 4\zeta^7 + 4\zeta^6 - 4\zeta^5 + 4\zeta^4 - 3\zeta^3 + 3\zeta^2 - 2\zeta + 1\Big), \end{aligned}$$

јасно је да за свако $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$, $\zeta \notin \{1, -1\}$, $\mathcal{W}_{\mathrm{Circ}(n, \{3,4,5,8\})}(\zeta) = 0$ мора бити еквивалентно са $Z_1(\zeta) = 0$, где $Z_1(x) \in \mathbb{Q}[x]$ чини полином

$$\begin{aligned} Z_1(x) = x^{14} - 2x^{13} + 3x^{12} - 3x^{11} + 4x^{10} - 4x^9 + 4x^8 \\ - 4x^7 + 4x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Међутим, коришћењем математичког софтвера није тешко установити да полином $Z_1(x)$ не садржи нулу која представља корен јединице. Примера ради, могуће је употребити одговарајући Wolfram Mathematica код на начин као што је то описано у прилогу А.2. Из овог разлога, сигурно је $\mathcal{W}_{\mathrm{Circ}(n, \{3,4,5,8\})}(\zeta) \neq 0$ за свако $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$, $\zeta \notin \{1, -1\}$, те је за свако парно $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 18$ циркулантан прост граф облика $\mathrm{Circ}(n, \{3, 4, 5, 8\})$ обавезно матичан. □

3.3 Конструкција за случај $2 \nmid t$ и $4 \mid n$, $n \geq 4t + 4$

Први крупнији корак при решавању егзистенцијалног проблема циркулантних матичних графова биће доказивање нужног постојања $4t$-регуларног циркулантног матичног графа реда n кад год је вредност t непарна, а ред n дељив са четири и не испод $4t+4$. Споменути резултат чини директну последицу следеће теореме чије ће доказивање бити примарни фокус датог одељка.

Теорема 3.2. *За свако непарно $t \in \mathbb{N}$ и било које $n \geq 4t + 4$ такво да $4 \mid n$, граф облика*

$$\mathrm{Circ}\left(n, \{1, 2, \ldots, t-1\} \cup \left\{\frac{n}{4}, \frac{n}{4} + 1\right\} \cup \left\{\frac{n}{2} - (t-1), \ldots, \frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 1\right\}\right)$$

представља $4t$-регуларан циркулантан матичан граф реда n.

Пре свега, вреди напоменути да је генераторски скуп

$$\{1, 2, \dots, t-1\} \cup \left\{\frac{n}{4}, \frac{n}{4}+1\right\} \cup \left\{\frac{n}{2}-(t-1), \dots, \frac{n}{2}-2, \frac{n}{2}-1\right\}$$

увек добро дефинисан. Наиме, јасно је да важи $t-1 < \frac{n}{4}$, као и $\frac{n}{4}+1 < \frac{n}{2}-(t-1)$, за произвољно непарно $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 3$ и свако $n \geq 4t+4$ такво да $4 \mid n$. Осим тога, дати скуп сигурно садржи једнак број парних и непарних елемената, пошто се скупови $\{1, 2, \dots, t-1\}$ и $\left\{\frac{n}{2}-(t-1), \dots, \frac{n}{2}-2, \frac{n}{2}-1\right\}$ састоје од парног броја узастопних природних бројева. Из овог разлога, лема 3.1 тврди да је за доказивање теореме 3.2 довољно установити да једнакост

$$\sum_{j=1}^{t-1}\left(\zeta^{j}+\zeta^{-j}\right)+\zeta^{\frac{n}{4}+1}+\zeta^{\frac{n}{4}}+\zeta^{-\frac{n}{4}}+\zeta^{-\frac{n}{4}-1}+\sum_{j=1}^{t-1}\left(\zeta^{\frac{n}{2}-j}+\zeta^{j-\frac{n}{2}}\right)=0 \tag{3.6}$$

не наступа ни за један n-ти корен јединице $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$ различит од 1 и -1.

Како бисмо у остатку одељка изложили што концизнији доказ теореме 3.2, структура доказа ће бити раздељена на неколико помоћних лема. Пре излагања самих лема, уведимо неколико потребних појмова. За било који непаран број $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 3$, нека $Q_t^{(1)}(x), R_t^{(1)}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ чине следећа два полинома са целобројним коефицијентима:

$$Q_t^{(1)}(x) = 2x^{2t-1} + x^{t+1} - x^{t} + x^{t-1} - x^{t-2} - 2,$$
$$R_t^{(1)}(x) = 2x^{2t-1} - x^{t+1} - 3x^{t} + 3x^{t-1} + x^{t-2} - 2.$$

Узевши у обзир да за свако непарно $t \geq 3$ важи

$$0 < t-2 < t-1 < t < t+1 < 2t-1,$$

јасно је да сваки од наведених полинома мора да има тачно шест ненула чланова. Означимо скуп степена свих ненула чланова полинома $Q_t^{(1)}(x)$ и $R_t^{(1)}(x)$ са $L_t^{(1)}$, тј. нека је

$$L_t^{(1)} = \{0, t-2, t-1, t, t+1, 2t-1\}$$

за свако непарно $t \geq 3$. За скуп $L_t^{(1)}$ се испоставља да поседује једно битно својство које ће нам касније бити од интереса. Одговарајуће тврђење је образложено у наредној леми.

Лема 3.8. *За свако непарно $t \geq 3$ и било који број $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 5$, скуп $L_t^{(1)}$ поседује елемент чији је остатак по модулу β јединствен у оквиру датог скупа.*

Доказ. Како су цели бројеви $t-2, t-1, t, t+1$ узастопни, јасно је да сви они морају имати међусобно различите остатке по модулу β, пошто је $\beta \geq 5$. Без обзира на то који су њихови остаци по модулу β, бар два од њих мора да имају остатак по модулу β који је различит од остатака које дају и 0 и $2t-1$. □

Лема 3.8 се затим може концизно искористити при сагледавању својстава $Q_t^{(1)}(x)$ и $R_t^{(1)}(x)$ полинома која се тичу њихове дељивости циклотомичним полиномима. У наставку наводимо две леме које исказују споменуте особине датих полинома.

Лема 3.9. *За било које непарно $t \geq 3$, ни $Q_t^{(1)}(x)$ ни $R_t^{(1)}(x)$ не могу бити дељиви циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ код ког важи $3^3 \mid b$ или $p^2 \mid b$ за неки прост број $p \geq 5$.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да циклотомичан полином $\Phi_b(x)$ дели $Q_t^{(1)}(x)$ или $R_t^{(1)}(x)$, а да притом важи $3^3 \mid b$ или $p^2 \mid b$ за неки прост број $p \geq 5$. Уколико је $3^3 \mid b$, тада лема 2.6 говори да степени свих ненула чланова полинома $\Phi_b(x)$ морају бити дељиви са девет. Са друге стране, ако је $p^2 \mid b$ за неки прост број $p \geq 5$, онда лема 2.6 диктира да су степени свих ненула чланова полинома $\Phi_b(x)$ сигурно дељиви са p. У сваком случају, добијамо да су степени свих ненула чланова полинома $\Phi_b(x)$ обавезно дељиви неким бројем $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 5$. Без обзира на то да ли важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(1)}(x)$ или $\Phi_b(x) \mid R_t^{(1)}(x)$, употребом лема 3.5 и 3.8 долазимо до тога да мора бити $\Phi_b(x) \mid c\,x^a$ за неко $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $a \in \mathbb{N}_0$, што очигледно није могуће. □

Лема 3.10. *За произвољно непарно $t \geq 3$, ни $Q_t^{(1)}(x)$ ни $R_t^{(1)}(x)$ сигурно нису дељиви циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ код ког важи $2^2 \mid b$.*

Доказ. Нека је дат циклотомичан полином $\Phi_b(x)$ код ког је $4 \mid b$. На основу леме 2.6, знамо да степени свих његових ненула чланова морају бити парни. Имајући у виду да су бројеви $t-2, t, 2t-1$ непарни, а $0, t-1, t+1$ парни, није тешко довршити доказ леме тако што добијемо контрадикцију након што претпоставимо да важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(1)}(x)$ или $\Phi_b(x) \mid R_t^{(1)}(x)$.

Ако претпоставимо да важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(1)}(x)$, онда применом леме 3.5 следи да мора бити

$$\Phi_b(x) \mid 2x^{2t-1} - x^t - x^{t-2}, \tag{3.7}$$

$$\Phi_b(x) \mid x^{t+1} + x^{t-1} - 2. \tag{3.8}$$

Узевши у обзир да је $2x^{2t-1} - x^t - x^{t-2} = x^{t-2}\,(2x^{t+1} - x^2 - 1)$, формула (3.7) нам омогућава да дођемо до

$$\Phi_b(x) \mid 2x^{t+1} - x^2 - 1. \tag{3.9}$$

Одузимањем десних страна израза (3.8) и (3.9), надаље закључујемо да је

$$\begin{aligned}
& \Phi_b(x) \mid (2x^{t+1} - x^2 - 1) - (x^{t+1} + x^{t-1} - 2) \\
\implies\ & \Phi_b(x) \mid x^{t+1} - x^{t-1} - x^2 + 1 \\
\implies\ & \Phi_b(x) \mid (x^{t-1} - 1)(x^2 - 1) \\
\implies\ & \Phi_b(x) \mid x^{t-1} - 1.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Даље, ако одузмемо десне стране израза (3.8) и (3.10), добијамо $\Phi_b(x) \mid x^{t+1} - 1$, што директно имплицира

$$\begin{aligned}
& \Phi_b(x) \mid (x^{t+1} - 1) - (x^{t-1} - 1) \\
\implies\ & \Phi_b(x) \mid x^{t+1} - x^{t-1} \\
\implies\ & \Phi_b(x) \mid x^{t-1}\,(x^2 - 1) \\
\implies\ & \Phi_b(x) \mid x^2 - 1,
\end{aligned}$$

што није могуће, те долазимо до контрадикције.

Са друге стране, ако претпоставимо да важи $\Phi_b(x) \mid R_t^{(1)}(x)$, долазимо до:

$$\Phi_b(x) \mid 2x^{2t-1} - 3x^t + x^{t-2}, \tag{3.11}$$

$$\Phi_b(x) \mid -x^{t+1} + 3x^{t-1} - 2. \tag{3.12}$$

Како је $2x^{2t-1} - 3x^t + x^{t-2} = x^{t-2}\,(2x^{t+1} - 3x^2 + 1)$, формула (3.11) даје

$$\Phi_b(x) \mid 2x^{t+1} - 3x^2 + 1. \tag{3.13}$$

Одузимањем десних страна израза (3.12) и (3.13), брзо можемо да дођемо до

$$\begin{aligned}
&\Phi_b(x) \mid (2x^{t+1} - 3x^2 + 1) - (-x^{t+1} + 3x^{t-1} - 2) \\
\implies\quad &\Phi_b(x) \mid 3x^{t+1} - 3x^{t-1} - 3x^2 + 3 \\
\implies\quad &\Phi_b(x) \mid 3(x^{t-1} - 1)(x^2 - 1) \\
\implies\quad &\Phi_b(x) \mid x^{t-1} - 1. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Ако узмемо десну страну израза (3.14), помножимо је са два и онда одузмемо од десне стране израза (3.12), доћи ћемо до још једног полинома који је дељив полиномом $\Phi_b(x)$. Другим речима, имамо да је

$$\begin{aligned}
&\Phi_b(x) \mid (-x^{t+1} + 3x^{t-1} - 2) - 2(x^{t-1} - 1) \\
\implies\quad &\Phi_b(x) \mid -x^{t+1} + x^{t-1} \\
\implies\quad &\Phi_b(x) \mid x^{t-1}(1 - x^2) \\
\implies\quad &\Phi_b(x) \mid 1 - x^2,
\end{aligned}$$

што је немогуће. Дакле, поново долазимо до контрадикције, те је доказ леме комплетиран. □

Леме 3.9 и 3.10 нам заједно говоре да једини циклотомични полиноми $\Phi_b(x)$ који потенцијално могу да деле било $Q_t^{(1)}(x)$ било $R_t^{(1)}(x)$ су они код којих $b \in \mathbb{N}$ није дељив квадратом ниједног простог броја, осим евентуално тројке, при чему тада не сме да важи $3^3 \mid b$. Заправо, може се показати да за свако непарно $t \geq 3$, једини циклотомични полиноми који деле ове полиноме су $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$. Касније ће се испоставити да је наведено запажање кључно при доказивању теореме 3.2. Пре него што изложимо доказ споменутог тврђења, биће нам потребне још две додатне помоћне леме. Наводимо их обе у наставку.

Лема 3.11. *За било које непарно $t \geq 3$ и произвољан прост број $p \geq 7$, ни $Q_t^{(1)}(x)$ ни $R_t^{(1)}(x)$ не могу бити дељити циклотомичним полиномом $\Phi_p(x)$ или циклотомичним полиномом $\Phi_{2p}(x)$.*

Доказ. Употребом леме 2.5 добијамо да очигледно важи $\deg \Phi_p(x) = \deg \Phi_{2p}(x) = p - 1$. Доказивање леме ћемо надаље да поделимо на два случаја у зависности од тога да ли се бавимо полиномом $\Phi_p(x)$ или $\Phi_{2p}(x)$, при чему ћемо под $p \in \mathbb{N}$ да подразумевамо произвољан задат прост број не мањи од седам.

Случај $\Phi_p(x)$. Претпоставимо да за неки фиксиран непаран број $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 3$ важи да $\Phi_p(x)$ дели $Q_t^{(1)}(x)$ или $R_t^{(1)}(x)$. Нека су $U(x)$ и $V(x)$ следећа два полинома:

$$\begin{aligned}
U(x) &= 2x^{(2t-1) \bmod p} + x^{(t+1) \bmod p} - x^{t \bmod p} + x^{(t-1) \bmod p} - x^{(t-2) \bmod p} - 2, \\
V(x) &= 2x^{(2t-1) \bmod p} - x^{(t+1) \bmod p} - 3x^{t \bmod p} + 3x^{(t-1) \bmod p} + x^{(t-2) \bmod p} - 2.
\end{aligned}$$

Пошто важи $\Phi_p(x) \mid Q_t^{(1)}(x) \iff \Phi_p(x) \mid U(x)$, као и $\Phi_p(x) \mid R_t^{(1)}(x) \iff \Phi_p(x) \mid V(x)$, јасно је да циклотомични полином $\Phi_p(x)$ мора да дели $U(x)$ или $V(x)$. Узевши у обзир да је $\deg U(x) \leq p - 1$ и $\deg V(x) \leq p - 1$, одавде следи да бар једно од следећа два тврђења мора бити тачно:

- $U(x) \equiv 0$ или $V(x) \equiv 0$;
- $U(x) = c\,\Phi_p(x)$ или $V(x) = c\,\Phi_p(x)$ за неко $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

На основу леме 3.8 добијамо да обавезно постоји ненула члан и полинома $Q_t^{(1)}(x)$ и полинома $R_t^{(1)}(x)$ чији степен има јединствен остатак по модулу p. Одавде брзо добијамо да ниједан од полинома $U(x)$ и $V(x)$ не може бити једнак нула полиному. Са друге стране, кад би за неко $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ важило $U(x) = c\,\Phi_p(x)$ или $V(x) = c\,\Phi_p(x)$, онда би то значило да бар један од споменута два полинома мора да има исти број ненула чланова као $\Phi_p(x)$. Међутим, ово је немогуће да се деси зато што полиноми $U(x)$ и $V(x)$ имају највише шест ненула чланова, док $\Phi_p(x)$ има тачно $p \geq 7$. На овај начин долазимо до контрадикције.

Случај $\Phi_{2p}(x)$. Сада, претпоставимо да за неки фиксиран непаран број $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 3$ важи да $\Phi_{2p}(x)$ дели $Q_t^{(1)}(x)$ или $R_t^{(1)}(x)$. Дефинишимо полиноме $U(x), V(x) \in \mathbb{Q}[x]$ на наведени начин:

$$\begin{aligned}
U(x) = 2(-1)^{\lfloor \frac{2t-1}{p} \rfloor} x^{(2t-1) \bmod p} &+ (-1)^{\lfloor \frac{t+1}{p} \rfloor} x^{(t+1) \bmod p} - (-1)^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} x^{t \bmod p} \\
&+ (-1)^{\lfloor \frac{t-1}{p} \rfloor} x^{(t-1) \bmod p} - (-1)^{\lfloor \frac{t-2}{p} \rfloor} x^{(t-2) \bmod p} - 2, \\
V(x) = 2(-1)^{\lfloor \frac{2t-1}{p} \rfloor} x^{(2t-1) \bmod p} &- (-1)^{\lfloor \frac{t+1}{p} \rfloor} x^{(t+1) \bmod p} - 3(-1)^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} x^{t \bmod p} \\
&+ 3(-1)^{\lfloor \frac{t-1}{p} \rfloor} x^{(t-1) \bmod p} + (-1)^{\lfloor \frac{t-2}{p} \rfloor} x^{(t-2) \bmod p} - 2.
\end{aligned}$$

Пошто сваки $2p$-ти примитивни корен јединице даје -1 када се дигне на степен p, није тешко установити да је обавезно $\Phi_{2p}(x) \mid Q_t^{(1)}(x) \iff \Phi_{2p}(x) \mid U(x)$, као и да такође мора да важи $\Phi_{2p}(x) \mid R_t^{(1)}(x) \iff \Phi_{2p}(x) \mid V(x)$. Међутим, директно се види да је $\deg U(x) \leq p-1$ и $\deg V(x) \leq p-1$, те можемо да закључимо да је бар једно од наредна два тврђења сигурно тачно:

- $U(x) \equiv 0$ или $V(x) \equiv 0$;
- $U(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$ или $V(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$ за неко $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Лема 3.8 нам гарантује да оба полинома $Q_t^{(1)}(x)$ и $R_t^{(1)}(x)$ поседују ненула члан чији је степен по модулу p јединствен, те је јасно да не може бити ни $U(x) \equiv 0$ ни $V(x) \equiv 0$. Осим тога, кад би за неко $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ важило $U(x) = c\,\Phi_p(x)$ или $V(x) = c\,\Phi_p(x)$, онда би следило да бар један од полинома $U(x)$ и $V(x)$ сигурно има исти број ненула чланова као $\Phi_{2p}(x)$. Слично као при решавању претходног случаја, долазимо до контрадикције, узевши у обзир да полиноми $U(x)$ и $V(x)$ могу имати највише шест ненула чланова, при чему $\Phi_{2p}(x)$ има тачно $p \geq 7$. □

Лема 3.12. *За било који непаран број* $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 3$ *и произвољан природан број* $b \in \mathbb{N}$ *из скупа*

$$\{3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\},$$

циклотомични полином $\Phi_b(x)$ *не дели ни* $Q_t^{(1)}(x)$ *ни* $R_t^{(1)}(x)$.

Доказ. Нека је $b \in \{3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$ фиксиран природан број и нека су за свако $t \in \mathbb{N}_0$ полиноми $U_t(x)$ и $V_t(x)$ дефинисани на следећи начин:

$$\begin{aligned}
U_t(x) &= 2x^{(2t-1) \bmod b} + x^{(t+1) \bmod b} - x^{t \bmod b} + x^{(t-1) \bmod b} - x^{(t-2) \bmod b} - 2, \\
V_t(x) &= 2x^{(2t-1) \bmod b} - x^{(t+1) \bmod b} - 3x^{t \bmod b} + 3x^{(t-1) \bmod b} + x^{(t-2) \bmod b} - 2.
\end{aligned}$$

Пре свега, вреди уочити да за свако непарно $t \geq 3$ важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(1)}(x) \iff \Phi_b(x) \mid U_t(x)$ заједно уз $\Phi_b(x) \mid R_t^{(1)}(x) \iff \Phi_b(x) \mid V_t(x)$. Осим тога, на основу саме њихове дефиниције, очигледно је да полинома $U_t(x)$ и $V_t(x)$ постоји свега коначно много. Из овог разлога, у стању смо да докажемо да $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(1)}(x)$ или $\Phi_b(x) \mid R_t^{(1)}(x)$ никад не важи тако што једноставно испитамо све могућности за полиноме $U_t(x)$ и $V_t(x)$. Прецизније, за доказивање дате леме је довољно да покажемо да обавезно важи $\Phi_b(x) \nmid U_t(x)$ и $\Phi_b(x) \nmid V_t(x)$ за свако $b \in \mathbb{N}$ из наведеног скупа и свако $t = \overline{0, b-1}$. Оваква провера се тривијално може одрадити адекватним математичким софтвером. У прилогу А.3 налази се Wolfram Mathematica код који обавља тражену проверу и самим тим довршава доказ тврђења задатим у леми. □

Као што је претходно било напоменуто, следећи корак у доказивању теореме 3.2 биће показивање да полиноми $Q_t^{(1)}(x)$ и $Q_t^{(1)}(x)$ не могу бити дељиви ниједним циклотомичним полиномом осим $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$. У овом тренутку је важно уочити да се теорема 2.2 може комотно примењивати над полиномима $Q_t^{(1)}(x)$ и $R_t^{(1)}(x)$, узевши у обзир да имају само шест ненула чланова. Ако важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(1)}(x)$ или $\Phi_b(x) \mid R_t^{(1)}(x)$, а да је природан број b дељив неким простим бројем $p \ge 7$, онда теорема 2.2 тврди да је броју b могуће скратити све просте факторе p, а да одговарајућа дељивост настави да важи. Имајући у виду дато запажање, могуће је доћи до наредне леме.

Лема 3.13. *За свако непарно $t \ge 3$, ни $Q_t^{(1)}(x)$ ни $R_t^{(1)}(x)$ нису дељиви ниједним циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ код ког је $b \ge 3$.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(1)}(x)$ или $\Phi_b(x) \mid R^{(1)}(X)$ за неко непарно $t \ge 3$ и за неко $b \ge 3$. На основу лема 3.9 и 3.10, знамо да мора бити $3^3 \nmid p$, као и $p^2 \nmid b$ за сваки прост број $p \ne 3$. Надаље ћемо доказивање леме поделити на два случаја у зависности од тога да ли број b садржи прост фактор из скупа $\{3, 5\}$.

Случај $3 \nmid b$ и $5 \nmid b$. У овом случају, јасно је да b има бар један прост фактор већи од пет, пошто је $b \notin \{1, 2\}$. Сада је могуће ланчано примењивати теорему 2.2 тако да броју b скраћујемо све просте факторе веће од пет, све док не остане само један. На овај начин долазимо до тога да мора бити $\Phi_{b'} \mid Q_t^{(1)}(x)$ или $\Phi_{b'} \mid R_t^{(1)}(x)$ за неко $b' \in \mathbb{N}$ које задовољава следеће услове:

- $2^2 \nmid b'$, $3 \nmid b'$, $5 \nmid b'$;
- b' поседује тачно један прост фактор $p \ge 7$;
- $p^2 \nmid b'$.

Другим речима, важи $b' = p$ или $b' = 2p$, те је бар један од полинома $Q_t^{(1)}(x)$ и $R_t^{(1)}(x)$ обавезно дељив циклотомичним полиномом $\Phi_p(x)$ или $\Phi_{2p}(x)$, где је $p \ge 7$ неки прост број. Међутим, лема 3.11 говори да је ово немогуће, те долазимо до контрадикције.

Случај $3 \mid b$ или $5 \mid b$. Овде је могуће да ланчано употребљавамо теорему 2.2 све док не скратимо све просте факторе броја b који су већи од пет. Из овог разлога, долазимо до тога да сигурно важи $\Phi_{b'} \mid Q_t^{(1)}(x)$ или $\Phi_{b'} \mid R_t^{(1)}(x)$ за неко b' које задовољава услове:

- b' има бар један прост фактор из скупа $\{3, 5\}$;
- сви прости фактори броја b' припадају скупу $\{2, 3, 5\}$;
- $2^2 \nmid b'$, $3^3 \nmid b'$, $5^2 \nmid b'$.

Није тешко закључити да из наведених услова директно следи

$$b' \in \{3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\},$$

те поново долазимо до контрадикције применом леме 3.12. □

Лема 3.13 нам најзад омогућава да комплетирамо доказ теореме 3.2. У остатку датог одељка наводимо завршне кораке доказа.

Доказ теореме 3.2. Доказ за случај $t = 1$ се веома једноставно може одрадити. Једнакост (3.6) се директно своди на

$$\zeta^{\frac{n}{4}+1} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-1} = 0, \tag{3.15}$$

што је за сваки n-ти корен јединице $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$ различит од 1 и -1 даље еквивалентно са

$$\begin{aligned} & \zeta^{\frac{n}{4}+1} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-1} = 0 \\ \iff \quad & \zeta^{\frac{n}{4}+1}\left(\zeta^{\frac{n}{4}+1} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-1}\right) = 0 \\ \iff \quad & \zeta^{\frac{n}{2}+2} + \zeta^{\frac{n}{2}+1} + \zeta + 1 = 0 \\ \iff \quad & (\zeta + 1)\left(\zeta^{\frac{n}{2}+1} + 1\right) = 0 \\ \iff \quad & \zeta^{\frac{n}{2}+1} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Када би једнакост (3.15) била тачна за неко $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$, $\zeta \notin \{1, -1\}$, тада би из $\zeta^{\frac{n}{2}+1} + 1 = 0$ и $\zeta^{\frac{n}{2}} \in \{1, -1\}$ одмах следило $\zeta = 1$ или $\zeta = -1$, што је немогуће. Дакле, једнакост (3.15) сигурно не може да важи ни за један n-ти корен јединице ζ различит од 1 и -1, чиме је готов доказ за случај $t = 1$.

Надаље ћемо претпоставити да $t \in \mathbb{N}$ чини произвољан непаран број не мањи од три. У овом случају је лако уочити да се једнакост (3.6) директно своди на

$$\left(\zeta^{\frac{n}{4}+1} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-1}\right) + \sum_{j=1}^{t-1} \left(\zeta^{j} + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}}\right) = 0. \tag{3.16}$$

Доказ ћемо комплетирати тако што ћемо да покажемо да једнакост (3.16) није задовољена ни за један n-ти корен јединице $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$ такав да је $\zeta \notin \{1, -1\}$. Ради добијања концизнијег доказа, решавање проблема ћемо поделити на два случаја у зависности од тога да ли је $\zeta^{\frac{n}{2}}$ једнако 1 или -1.

Случај $\zeta^{\frac{n}{2}} = -1$. У овом случају, имамо да је $\zeta^{\frac{n}{2}-j} = -\zeta^{-j}$ и $\zeta^{j-\frac{n}{2}} = -\zeta^{j}$, што доводи до тога да мора бити

$$\zeta^{j} + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}} = 0$$

за свако $j = \overline{1, t-1}$. Дакле, једнакост (3.16) се своди на

$$\zeta^{\frac{n}{4}+1} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-1} = 0.$$

Међутим, добијена формула је у потпуности иста као једнакост (3.15) са којом смо се сусрели при решавању случаја $t = 1$. Из овог разлога се апсолутно исти доказ може искористити како би се показало да споменута једнакост не важи ни за један n-ти корен јединице $\zeta \notin \{1, -1\}$.

Случај $\zeta^{\frac{n}{2}} = 1$. Овде добијамо $\zeta^{\frac{n}{2}-j} = \zeta^{-j}$, као и $\zeta^{j-\frac{n}{2}} = \zeta^{j}$, те важи да је

$$\zeta^{j} + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}} = 2\left(\zeta^{j} + \zeta^{-j}\right)$$

за свако $j = \overline{1, t-1}$. Сада је једноставно закључити да за свако $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^{\frac{n}{2}} = 1$, $\zeta \notin \{1, -1\}$, једнакост (3.16) мора бити еквивалентна са

$$\begin{aligned}
& \left(\zeta^{\frac{n}{4}+1} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-1}\right) + \sum_{j=1}^{t-1} \left(\zeta^{j} + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}}\right) = 0 \\
\iff \quad & \left(\zeta^{\frac{n}{4}+1} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-1}\right) + 2\sum_{j=1}^{t-1} \left(\zeta^{j} + \zeta^{-j}\right) = 0 \\
\iff \quad & \left(\zeta^{\frac{n}{4}+1} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-1}\right) - 2 + 2\sum_{j=1-t}^{t-1} \zeta^{j} = 0 \\
\iff \quad & \zeta^{t-1}\left(\left(\zeta^{\frac{n}{4}+1} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-1}\right) - 2 + 2\sum_{j=1-t}^{t-1} \zeta^{j}\right) = 0 \\
\iff \quad & \left(\zeta^{t+\frac{n}{4}} + \zeta^{t+\frac{n}{4}-1} + \zeta^{t-\frac{n}{4}-1} + \zeta^{t-\frac{n}{4}-2}\right) - 2\zeta^{t-1} + 2\sum_{j=0}^{2t-2} \zeta^{j} = 0 \\
\iff \quad & (\zeta - 1)\left(\zeta^{t+\frac{n}{4}} + \zeta^{t+\frac{n}{4}-1} + \zeta^{t-\frac{n}{4}-1} + \zeta^{t-\frac{n}{4}-2} - 2\zeta^{t-1} + 2\sum_{j=0}^{2t-2} \zeta^{j}\right) = 0 \\
\iff \quad & \zeta^{t+\frac{n}{4}+1} - \zeta^{t+\frac{n}{4}-1} + \zeta^{t-\frac{n}{4}} - \zeta^{t-\frac{n}{4}-2} - 2\zeta^{t} + 2\zeta^{t-1} + 2\zeta^{2t-1} - 2 = 0. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Сада ћемо решавање проблема да поделимо на још два подслучаја у зависности од тога да ли је $\zeta^{\frac{n}{4}}$ једнако 1 или -1.

Подслучај $\zeta^{\frac{n}{4}} = 1$. У овом подслучају је једноставно видети да једнакост (3.17) даље постаје еквивалентна са

$$\begin{aligned}
& \zeta^{t+\frac{n}{4}+1} - \zeta^{t+\frac{n}{4}-1} + \zeta^{t-\frac{n}{4}} - \zeta^{t-\frac{n}{4}-2} - 2\zeta^{t} + 2\zeta^{t-1} + 2\zeta^{2t-1} - 2 = 0 \\
\iff \quad & \zeta^{t+1} - \zeta^{t-1} + \zeta^{t} - \zeta^{t-2} - 2\zeta^{t} + 2\zeta^{t-1} + 2\zeta^{2t-1} - 2 = 0 \\
\iff \quad & 2\zeta^{2t-1} + \zeta^{t+1} - \zeta^{t} + \zeta^{t-1} - \zeta^{t-2} - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Дакле, ако претпоставимо да је спомenута једнакост задовољена за неки n-ти корен јединице $\zeta \notin \{1, -1\}$, онда добијамо да ζ чини нулу полинома $Q_t^{(1)}(x)$. На овај начин долазимо до тога да важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(1)}(x)$ за неко $b \geq 3$, узевши у обзир да спомenути број ζ чини b-ти примитивни корен јединице за одређено $b \geq 3$. Међутим, ово није могуће да се деси на основу леме 3.13, те долазимо до контрадикције.

Подслучај $\zeta^{\frac{n}{4}} = -1$. Овде једнакост (3.17) брзо постаје еквивалентна са

$$\begin{aligned}
& \zeta^{t+\frac{n}{4}+1} - \zeta^{t+\frac{n}{4}-1} + \zeta^{t-\frac{n}{4}} - \zeta^{t-\frac{n}{4}-2} - 2\zeta^{t} + 2\zeta^{t-1} + 2\zeta^{2t-1} - 2 = 0 \\
\iff \quad & -\zeta^{t+1} + \zeta^{t-1} - \zeta^{t} + \zeta^{t-2} - 2\zeta^{t} + 2\zeta^{t-1} + 2\zeta^{2t-1} - 2 = 0 \\
\iff \quad & 2\zeta^{2t-1} - \zeta^{t+1} - 3\zeta^{t} + 3\zeta^{t-1} + \zeta^{t-2} - 2 = 0.
\end{aligned}$$

У сличном духу, ако претпоставимо да је једнакост (3.17) задовољена за неки n-ти корен јединице $\zeta \notin \{1, -1\}$, директно следи да полином $R_t^{(1)}(x)$ мора да има нулу која чини b-ти примитивни корен јединице за неко $b \geq 3$. Дакле, закључујемо да важи $\Phi_b(x) \mid R_t^{(1)}(x)$ за неко $b \geq 3$, што применом леме 3.13 поново доводи до контрадикције. □

3.4 Конструкција за случај $t \in \mathbb{N}$ и $n \equiv_4 2,\ n \geq 4t+6$

У оквиру датог одељка биће доказана исправност конструкције која показује нужно постојање $4t$-регуларног циркулантног матичног графа било ког реда $n \geq 4t+6$ таквог да важи да $n \equiv_4 2$. Главни резултат везан за споменути конструкциони шаблон описан је у наредној теореми.

Теорема 3.3. *За свако $t \in \mathbb{N}$ и произвољно $n \geq 4t+6$ такво да је $n \equiv_4 2$, граф облика*

$$\mathrm{Circ}\left(n, \{1,2,\ldots,t-1\} \cup \left\{\frac{n+2}{4}, \frac{n+6}{4}\right\} \cup \left\{\frac{n}{2}-(t-1),\ldots,\frac{n}{2}-2,\frac{n}{2}-1\right\}\right)$$

чини $4t$-регуларан циркулантан матичан граф реда n.

Стратегија која ће бити коришћена за доказивање теореме 3.3 биће веома слична претходно употребљеном принципу при доказивању теореме 3.2. Пре свега, уочимо да је генераторски скуп

$$\{1,2,\ldots,t-1\} \cup \left\{\frac{n+2}{4}, \frac{n+6}{4}\right\} \cup \left\{\frac{n}{2}-(t-1),\ldots,\frac{n}{2}-2,\frac{n}{2}-1\right\} \tag{3.18}$$

сигурно добро дефинисан, пошто важи $t-1 < \frac{n+2}{4}$ и $\frac{n+6}{4} < \frac{n}{2}-(t-1)$ за свако $t \in \mathbb{N}$ и било које $n \geq 4t+6$ које задовољава $n \equiv_4 2$. Узевши у обир да $2 \nmid \frac{n}{2}$, јасно је да бројеви j и $\frac{n}{2}-j$ морају бити различите парности за свако $j = \overline{0, t-1}$, те није тешко закључити да генераторски скуп (3.18) има једнак број парних и непарних елемената. Коришћењем леме 3.1, долазимо до тога да је за доказивање теореме 3.3 довољно показати да једнакост

$$\sum_{j=1}^{t-1}\left(\zeta^{j}+\zeta^{-j}\right)+\zeta^{\frac{n+6}{4}}+\zeta^{\frac{n+2}{4}}+\zeta^{-\frac{n+2}{4}}+\zeta^{-\frac{n+6}{4}}+\sum_{j=1}^{t-1}\left(\zeta^{\frac{n}{2}-j}+\zeta^{j-\frac{n}{2}}\right)=0 \tag{3.19}$$

није задовољена ни за један n-ти корен јединице $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$ различит од 1 и -1.

Даље, за било који природан број $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$ нека су $Q_t^{(2)}(x), R_t^{(2)}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ полиноми са целобројним коефицијентима дефинисани на наредни начин:

$$\begin{aligned} Q_t^{(2)}(x) &= 2x^{4t-1}+x^{2t+4}-2x^{2t+1}+2x^{2t-1}-x^{2t-4}-2x,\\ R_t^{(2)}(x) &= 2x^{4t-1}-x^{2t+4}-2x^{2t+1}+2x^{2t-1}+x^{2t-4}-2x, \end{aligned}$$

Ови полиноми су очигледно добро дефинисани за свако $t \geq 2$. Осим тога, они морају имати тачно шест ненула чланова, узевши у обзир да добијамо неједнакости

$$1 < 2t-4 < 2t-1 < 2t+1 < 2t+4 < 4t-1$$

за произвољно $t \geq 3$, при чему је

$$4t-1=7, \qquad 2t+4=8, \qquad 2t+1=5, \qquad 2t-1=3, \qquad 2t-4=0, \qquad 1=1,$$

када важи $t = 2$. Слично као у одељку 3.3, нека се за свако $t \geq 2$ скуп $L_t^{(2)}$ састоји од степена свих ненула чланова полинома $Q_t^{(2)}(x)$ и $R_t^{(2)}(x)$:

$$L_t^{(2)} = \{1, 2t-4, 2t-1, 2t+1, 2t+4, 4t-1\}.$$

У наставку наводимо кратку лему која демонстрира важно својство скупа $L_t^{(2)}$ у вези са постојањем елемента који има јединствен остатак по неком модулу.

Лема 3.14. *За произвољно $t \geq 2$ и било који број $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 7$, $\beta \neq 8$, скуп $L_t^{(2)}$ садржи елемент чији је остатак по модулу β јединствен унутар датог скупа.*

Доказ. Директном провером је веома лако уочити да међу бројевима $2t-4, 2t-1, 2t+1, 2t+4$ свака два нужно морају да имају међусобно различит остатак при дељењу са β. Одавде одмах следи да бар два од њих морају да имају остатак по модулу β који је различит од остатака које дају и 1 и $4t-1$. □

Сада смо у стању да искористимо лему 3.14 како бисмо започели анализу дељивости полинома $Q_t^{(2)}(x)$ и $R_t^{(2)}(x)$ од стране циклотомичних полинома. Испоставља се да $Q_t^{(2)}(x)$ и $R_t^{(2)}(x)$ могу бити дељиви само веома специфичним циклотомичним полиномима, као што говоре наредне две леме.

Лема 3.15. *За било које $t \geq 2$, ни $Q_t^{(2)}(x)$ ни $R_t^{(2)}(x)$ не могу бити дељиви циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ код ког важи $3^3 \mid b$ или $5^3 \mid b$ или $p^2 \mid b$ за неки прост број $p \geq 7$.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да за неке бројеве $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$ и $b \in \mathbb{N}$ важи да циклотомични полином $\Phi_b(x)$ дели $Q_t^{(2)}(x)$ или $R_t^{(2)}(x)$, а да је притом $3^3 \mid b$ или $5^3 \mid b$ или $p^2 \mid b$ за неки прост број $p \geq 7$. Ако је $3^3 \mid b$, односно $5^3 \mid b$, онда лема 2.6 тврди да степени свих ненула чланова полинома $\Phi_b(x)$ морају бити дељиви са девет, односно 25. Такође, ако важи $p^2 \mid b$ за неки прост број $p \geq 7$, онда из леме 2.6 закључујемо да су степени свих ненула чланова $\Phi_b(x)$ сигурно дељиви са p. На основу свега изложеног, видимо да полином $\Phi_b(x)$ мора бити такав да су степени свих његових ненула чланова дељиви неким бројем $\beta \in \mathbb{N}$ који задовољава $\beta \geq 7$, $\beta \neq 8$. Без обзира на то да ли важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(2)}(x)$ или $\Phi_b(x) \mid R_t^{(2)}(x)$, примена лема 3.5 и 3.14 нам гарантује да обавезно мора бити $\Phi_b(x) \mid c\,x^a$ за неко $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $a \in \mathbb{N}_0$. Међутим, ово је немогуће да се деси, те долазимо до контрадикције. □

Лема 3.16. *За било које $t \geq 2$, ако су $Q_t^{(2)}(x)$ или $R_t^{(2)}(x)$ дељиви циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ код ког је $2^2 \mid b$, онда мора да важи $b = 4$ или $b = 8$.*

Доказ. Претпоставимо да важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(2)}(x)$ или $\Phi_b(x) \mid R_t^{(2)}(x)$ за неко $b \in \mathbb{N}$ такво да је $4 \mid b$. Применом леме 2.6, јасно је да степени свих ненула чланова полинома $\Phi_b(x)$ морају бити парни. Пошто је очигледно да су бројеви $1, 2t-1, 2t+1, 4t-1$ непарни, при чему су $2t-4$ и $2t+4$ парни, лема 3.5 нам каже да би $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(2)}(x)$ имплицирало

$$\Phi_b(x) \mid x^{2t+4} - x^{2t-4},$$

док би из $\Phi_b(x) \mid R_t^{(2)}(x)$ следило

$$\Phi_b(x) \mid -x^{2t+4} + x^{2t-4}.$$

У сваком случају, долазимо до тога да мора бити

$$\begin{aligned} & \Phi_b(x) \mid x^{2t+4} - x^{2t-4} \\ \implies \quad & \Phi_b(x) \mid x^{2t-4}\,(x^8 - 1) \\ \implies \quad & \Phi_b(x) \mid x^8 - 1, \end{aligned}$$

те обавезно важи $b \mid 8$. Међутим, ово је једино могуће ако је $b = 4$ или $b = 8$. □

Коришћењем лема 3.15 и 3.16 можемо приметити да, осим $\Phi_4(x)$ и $\Phi_8(x)$, једини циклотомични полиноми $\Phi_b(x)$ који потенцијално могу да деле било $Q_t^{(2)}(x)$ било $R_t^{(2)}(x)$ су они код којих број b није дељив квадратом ниједног простог броја, осим евентуално тројке или петице, при чему тада сигурно не важи ни $3^3 \mid b$ ни $5^3 \mid b$. Следећи корак у доказивању теореме 3.3 биће показивање чињенице да полиноми $Q_t^{(2)}(x)$ и $R_t^{(2)}(x)$ могу бити дељиви неким циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ једино ако важи $b \in \{1, 2, 4, 8\}$. Пре него што образложимо доказ овог тврђења, навешћемо две помоћне леме на сличан начин као што је то урађено у одељку 3.3.

Лема 3.17. *За свако $t \geq 2$ и било који прост број $p \geq 7$, ни $Q_t^{(2)}(x)$ ни $R_t^{(2)}(x)$ не могу бити дељиви циклотомичним полиномом $\Phi_p(x)$ или циклотомичним полиномом $\Phi_{2p}(x)$.*

Доказ. Лема 2.5 нам гарантује да је $\deg \Phi_p(x) = \deg \Phi_{2p}(x) = p - 1$. Доказивање дате леме се надаље може поделити на два случаја и привести крају на аналоган начин као што је то урађено у доказу леме 3.11.

Случај $\Phi_p(x)$. Претпоставимо да за неки фиксиран број $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$ важи да $\Phi_p(x)$ дели $Q_t^{(2)}(x)$ или $R_t^{(2)}(x)$. Дефинишимо полиноме $U(x), V(x) \in \mathbb{Z}[x]$ на следећи начин:

$$\begin{aligned} U(x) &= 2x^{(4t-1) \bmod p} + x^{(2t+4) \bmod p} - 2x^{(2t+1) \bmod p} + 2x^{(2t-1) \bmod p} - x^{(2t-4) \bmod p} - 2x, \\ V(x) &= 2x^{(4t-1) \bmod p} - x^{(2t+4) \bmod p} - 2x^{(2t+1) \bmod p} + 2x^{(2t-1) \bmod p} + x^{(2t-4) \bmod p} - 2x. \end{aligned}$$

Како знамо да је $\Phi_p(x) \mid Q_t^{(2)}(x) \iff \Phi_p(x) \mid U(x)$ и $\Phi_p(x) \mid R_t^{(2)}(x) \iff \Phi_p(x) \mid V(x)$, одмах видимо да циклотомични полином $\Phi_p(x)$ обавезно дели $U(x)$ или $V(x)$. Пошто је сигурно $\deg U(x) \leq p - 1$ и $\deg V(x) \leq p - 1$, директно следи да мора бити тачно бар једно од наредна два тврђења:

- $U(x) \equiv 0$ или $V(x) \equiv 0$;
- $U(x) = c\,\Phi_p(x)$ или $V(x) = c\,\Phi_p(x)$ за неко $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Применом леме 3.14 долазимо до тога да мора да постоји ненула члан и полинома $Q_t^{(2)}(x)$ и полинома $R_t^{(2)}(x)$ чији степен има јединствен остатак по модулу p, те ниједан од полинома $U(x)$ и $V(x)$ не сме бити једнак нула полиному. Са друге стране, кад би за неко $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ важило $U(x) = c\,\Phi_p(x)$ или $V(x) = c\,\Phi_p(x)$, онда би одавде следило да бар један од та два полинома има исти број ненула чланова као $\Phi_p(x)$. Међутим, ово не може да се деси, јер и $U(x)$ и $V(x)$ могу имати највише шест ненула чланова, док $\Phi_p(x)$ има тачно $p \geq 7$.

Случај $\Phi_{2p}(x)$. У сличном духу, претпоставимо да за неки фиксиран број $t \geq 2$ важи да $\Phi_{2p}(x)$ дели $Q_t^{(2)}(x)$ или $R_t^{(2)}(x)$ и дефинишимо полиноме $U(x), V(x) \in \mathbb{Z}[x]$ на наведени начин:

$$\begin{aligned} U(x) = 2(-1)^{\lfloor \frac{4t-1}{p} \rfloor} x^{(4t-1) \bmod p} &+ (-1)^{\lfloor \frac{2t+4}{p} \rfloor} x^{(2t+4) \bmod p} - 2(-1)^{\lfloor \frac{2t+1}{p} \rfloor} x^{(2t+1) \bmod p} \\ &+ 2(-1)^{\lfloor \frac{2t-1}{p} \rfloor} x^{(2t-1) \bmod p} - (-1)^{\lfloor \frac{2t-4}{p} \rfloor} x^{(2t-4) \bmod p} - 2x, \\ V(x) = 2(-1)^{\lfloor \frac{4t-1}{p} \rfloor} x^{(4t-1) \bmod p} &- (-1)^{\lfloor \frac{2t+4}{p} \rfloor} x^{(2t+4) \bmod p} - 2(-1)^{\lfloor \frac{2t+1}{p} \rfloor} x^{(2t+1) \bmod p} \\ &+ 2(-1)^{\lfloor \frac{2t-1}{p} \rfloor} x^{(2t-1) \bmod p} + (-1)^{\lfloor \frac{2t-4}{p} \rfloor} x^{(2t-4) \bmod p} - 2x. \end{aligned}$$

Сада је лако увидети да обавезно мора бити $\Phi_{2p}(x) \mid Q_t^{(2)}(x) \iff \Phi_{2p}(x) \mid U(x)$, као и $\Phi_{2p}(x) \mid R_t^{(2)}(x) \iff \Phi_{2p}(x) \mid V(x)$. Због $\deg U(x) \leq p - 1$ и $\deg V(x) \leq p - 1$, у стању смо да закључимо да је обавезно тачно бар једно од наредна два тврђења:

- $U(x) \equiv 0$ или $V(x) \equiv 0$;
- $U(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$ или $V(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$ за неко $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Употребом леме 3.14 видимо да оба полинома $Q_t^{(2)}(x)$ и $R_t^{(2)}(x)$ садрже ненула члан чији је степен по модулу p јединствен, те не сме бити ни $U(x) \equiv 0$ ни $V(x) \equiv 0$. Осим тога, кад би за неко $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ важило $U(x) = c\,\Phi_p(x)$ или $V(x) = c\,\Phi_p(x)$, онда би бар један од полинома $U(x)$ и $V(x)$ морао да има исти број ненула чланова као $\Phi_{2p}(x)$. Очигледно је да ови полиноми могу имати највише шест ненула чланова, док $\Phi_{2p}(x)$ има $p \geq 7$, те долазимо до контрадикције. □

Лема 3.18. *За било који број $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$ и произвољно $b \in \mathbb{N}$ које припада скупу*

$$\{3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 25, 30, 45, 50, 75, 90, 150, 225, 450\},$$

циклотомични полином $\Phi_b(x)$ не дели ни $Q_t^{(2)}(x)$ ни $R_t^{(2)}(x)$.

Доказ. Нека је дат фиксиран број $b \in \mathbb{N}$ који припада скупу наведеном у леми. За свако $t \in \mathbb{N}_0$ дефинишимо полиноме $U_t(x)$ и $V_t(x)$ на наредни начин:

$$\begin{aligned} U_t(x) &= 2x^{(4t-1) \bmod b} + x^{(2t+4) \bmod b} - 2x^{(2t+1) \bmod b} + 2x^{(2t-1) \bmod b} - x^{(2t-4) \bmod b} - 2x, \\ V_t(x) &= 2x^{(4t-1) \bmod b} - x^{(2t+4) \bmod b} - 2x^{(2t+1) \bmod b} + 2x^{(2t-1) \bmod b} + x^{(2t-4) \bmod b} - 2x. \end{aligned}$$

Пошто за свако $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$ очигледно важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(2)}(x) \iff \Phi_b(x) \mid U_t(x)$, као и $\Phi_b(x) \mid R_t^{(2)}(x) \iff \Phi_b(x) \mid V_t(x)$, могуће је искористити сличну логику закључивања као при доказивању леме 3.12. Дакле, за доказивање дате леме је довољно установити да важи $\Phi_b(x) \nmid U_t(x)$ и $\Phi_b(x) \nmid V_t(x)$ за свако $b \in \mathbb{N}$ из скупа наведеног у леми и за свако $t = \overline{0, b-1}$. Оваква провера се поново тривијално може одрадити математичким софтвером који пружа подршку за симболичка израчунавања. Пример програмског кода у језику Wolfram Mathematica који довршава доказ леме налази се у прилогу А.4. □

Сада смо у могућности да искористимо леме 3.17 и 3.18 како бисмо доказали централну лему датог одељка која се тиче дељивости $Q_t^{(2)}(x)$ и $R_t^{(2)}(x)$ полинома циклотомичним полиномима. Узевши у обзир да оба ова полинома имају само шест ненула чланова, постаје комотно да се вишеструко употребљава теорема 2.2 при обављању доказа и то на истоветан начин као што је урађено при доказивању леме 3.13. У наставку наводимо споменути резултат.

Лема 3.19. *За било које $t \geq 2$, ни $Q_t^{(2)}(x)$ ни $R_t^{(2)}(x)$ не могу бити дељиви циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ код ког је $b \notin \{1, 2, 4, 8\}$.*

Доказ. Претпоставимо супротно, односно да важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(2)}(x)$ или $\Phi_b(x) \mid R_t^{(2)}(x)$ за неко $t \geq 2$ и $b \notin \{1, 2, 4, 8\}$. Коришћењем лема 3.15 и 3.16, долазимо до тога да сигурно важи $3^3 \nmid b, 5^3 \nmid b$, као и $p^2 \nmid b$ за произвољан прост број $p \notin \{3, 5\}$. Надаље ћемо доказивање леме поделити на два случаја у зависности од тога да ли природан број b има тројку или петицу као прост фактор.

Случај $3 \nmid b$ и $5 \nmid b$. Пошто је $b \notin \{1, 2\}$, одмах добијамо да број b мора да има бар један прост фактор не мањи од седам. Ланчаним примењивањем теореме 2.2 долазимо до тога да све просте факторе броја b не мање од седам можемо да скратимо, све док не остане само један, а да притом одговарајућа дељивост и даље важи. Другим речима, сигурно је тачно да $\Phi_{b'} \mid Q_t^{(2)}(x)$ или $\Phi_{b'} \mid R_t^{(2)}(x)$ за неки број $b' \in \mathbb{N}$ који испуњава наредне услове:

- $2^2 \nmid b', 3 \nmid b', 5 \nmid b'$;
- b' поседује тачно један прост фактор $p \geq 7$;
- $p^2 \nmid b'$.

Међутим, одавде добијамо да важи $b' = p$ или $b' = 2p$ за неки прост број $p \geq 7$, што нас директно доводи до контрадикције ако употребимо лему 3.17.

Случај $3 \mid b$ *или* $5 \mid b$. У овом случају смо у могућности да ланчано употребимо теорему 2.2 како бисмо скратили све просте факторе броја b веће од пет. На овај начин долазимо до тога да обавезно важи $\Phi_{b'} \mid Q_t^{(2)}(x)$ или $\Phi_{b'} \mid R_t^{(2)}(x)$ за неко $b' \in \mathbb{N}$ које задовољава услове:

- b' има бар један прост фактор из скупа $\{3, 5\}$;
- сви прости фактори броја b' припадају скупу $\{2, 3, 5\}$;
- $2^2 \nmid b', 3^3 \nmid b', 5^3 \nmid b'$.

Директном рачуницом могуће је установити да мора бити

$$b' \in \{3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 25, 30, 45, 50, 75, 90, 150, 225, 450\},$$

те нас из овог разлога лема 3.18 директно доводи до контрадикције. □

Узевши у обзир све резултате добијене у претходно изложеним лемама, најзад смо у стању да довршимо доказ теореме 3.3. До краја одељка ће бити комплетиран доказ ове теореме.

Доказ теореме 3.3. Случај $t = 1$ је тривијалан за решавање, пошто се једнакост (3.19) директно своди на

$$\zeta^{\frac{n+6}{4}} + \zeta^{\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+6}{4}} = 0, \tag{3.20}$$

што је за сваки n-ти корен јединице $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$ различит од 1 и -1 одмах еквивалентно са

$$\begin{aligned}
& & \zeta^{\frac{n+6}{4}} + \zeta^{\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+6}{4}} &= 0\\
&\iff & \zeta^{\frac{n+6}{4}} \left(\zeta^{\frac{n+6}{4}} + \zeta^{\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+6}{4}}\right) &= 0\\
&\iff & \zeta^{\frac{n}{2}+3} + \zeta^{\frac{n}{2}+2} + \zeta + 1 &= 0\\
&\iff & (\zeta + 1)\left(\zeta^{\frac{n}{2}+2} + 1\right) &= 0\\
&\iff & \zeta^{\frac{n}{2}+2} + 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Узевши у обзир да је $\zeta^{\frac{n}{2}} \in \{1, -1\}$, ако претпоставимо да је једнакост (3.20) задовољена за неки n-ти корен јединице $\zeta \notin \{1, -1\}$, онда директно следи да мора бити $\zeta^2 \in \{1, -1\}$, тј. $\zeta \in \{i, -i\}$. Међутим, како је $n \equiv_4 2$, јасно је да ни i ни $-i$ не чине n-ти корен јединице, те долазимо до контрадикције. Дакле, једнакост (3.20) сигурно не важи ни за једно $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$, $\zeta \notin \{1, -1\}$, као што је и било потребно показати.

Надаље можемо да претпоставимо да је $t \geq 2$. У овом случају се једнакост (3.19) одмах своди на

$$\left(\zeta^{\frac{n+6}{4}} + \zeta^{\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+6}{4}}\right) + \sum_{j=1}^{t-1} \left(\zeta^j + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}}\right) = 0. \tag{3.21}$$

Како бисмо завршили доказ теореме, довољно је показати да једнакост (3.21) не важи ни за један n-ти корен јединице $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$ различит од 1 и -1. На сличан начин као што је то урађено у доказу теореме 3.2, решавање проблема ћемо поделити на два случаја у зависности од тога да ли $\zeta^{\frac{n}{2}}$ износи 1 или -1.

Случај $\zeta^{\frac{n}{2}} = -1$. У овом случају, просто је уочити да је $\zeta^{\frac{n}{2}-j} = -\zeta^{-j}$ и $\zeta^{j-\frac{n}{2}} = -\zeta^{j}$, што нас директно доводи до тога да важи

$$\zeta^j + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}} = 0$$

за свако $j = \overline{1, t-1}$. Дакле, једнакост (3.21) се може комотно упростити и добити следећа еквивалентна једнакост:

$$\zeta^{\frac{n+6}{4}} + \zeta^{\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+6}{4}} = 0.$$

Међутим, добијени израз је идентичан једнакости (3.20) којом смо се бавили при решавању случаја $t = 1$, те се апсолутно исти доказ може искористити у циљу показивања да једнакост (3.21) заиста не важи ни за један n-ти корен јединице $\zeta \notin \{1, -1\}$ који испуњава услов $\zeta^{\frac{n}{2}} = -1$.

Случај $\zeta^{\frac{n}{2}} = 1$. Лако је увидети да је $\zeta^{\frac{n}{2}-j} = \zeta^{-j}$, као и $\zeta^{j-\frac{n}{2}} = \zeta^{j}$. Уочено запажање брзо имплицира

$$\zeta^j + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}} = 2\left(\zeta^j + \zeta^{-j}\right)$$

за било које $j = \overline{1, t-1}$. Из овог разлога се за свако $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^{\frac{n}{2}} = 1$, $\zeta \notin \{1, -1\}$ добија да је једнакост (3.21) нужно еквивалентна са

$$\begin{aligned}
& \left(\zeta^{\frac{n+6}{4}} + \zeta^{\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+6}{4}}\right) + \sum_{j=1}^{t-1}\left(\zeta^j + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}}\right) = 0 \\
\iff \quad & \left(\zeta^{\frac{n+6}{4}} + \zeta^{\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+6}{4}}\right) + 2\sum_{j=1}^{t-1}\left(\zeta^j + \zeta^{-j}\right) = 0 \\
\iff \quad & \left(\zeta^{\frac{n+6}{4}} + \zeta^{\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+6}{4}}\right) - 2 + 2\sum_{j=1-t}^{t-1}\zeta^j = 0 \\
\iff \quad & \zeta^{t-1}\left(\left(\zeta^{\frac{n+6}{4}} + \zeta^{\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+2}{4}} + \zeta^{-\frac{n+6}{4}}\right) - 2 + 2\sum_{j=1-t}^{t-1}\zeta^j\right) = 0 \\
\iff \quad & \left(\zeta^{t+\frac{n+2}{4}} + \zeta^{t+\frac{n-2}{4}} + \zeta^{t-\frac{n+6}{4}} + \zeta^{t-\frac{n+10}{4}}\right) - 2\zeta^{t-1} + 2\sum_{j=0}^{2t-2}\zeta^j = 0 \\
\iff \quad & (\zeta - 1)\left(\zeta^{t+\frac{n+2}{4}} + \zeta^{t+\frac{n-2}{4}} + \zeta^{t-\frac{n+6}{4}} + \zeta^{t-\frac{n+10}{4}} - 2\zeta^{t-1} + 2\sum_{j=0}^{2t-2}\zeta^j\right) = 0 \\
\iff \quad & \zeta^{t+\frac{n+6}{4}} - \zeta^{t+\frac{n-2}{4}} + \zeta^{t-\frac{n+2}{4}} - \zeta^{t-\frac{n+10}{4}} - 2\zeta^t + 2\zeta^{t-1} + 2\zeta^{2t-1} - 2 = 0 \\
\iff \quad & 2\zeta^{2t-1} + \zeta^{t+\frac{n+6}{4}} - \zeta^{t+\frac{n-2}{4}} - 2\zeta^t + 2\zeta^{t-1} + \zeta^{t-\frac{n+2}{4}} - \zeta^{t-\frac{n+10}{4}} - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Ако за $\omega \in \mathbb{C}$ узмемо један од два квадратна корена од ζ, тј. комплексан број који задовољава $\omega^2 = \zeta$, онда је лако установити да услов (3.21) постаје еквивалентан са

$$2\omega^{4t-2} + \omega^{2t+3+\frac{n}{2}} - \omega^{2t-1+\frac{n}{2}} - 2\omega^{2t} + 2\omega^{2t-2} + \omega^{2t-1-\frac{n}{2}} - \omega^{2t-5-\frac{n}{2}} - 2 = 0. \tag{3.22}$$

Узевши у обзир да се услов $\zeta^{\frac{n}{2}} = 1$ преводи на $\omega^n = 1$, постаје јасно да је за доказивање теореме довољно демонстрирати да једнакост (3.22) не важи ни за један n-ти корен јединице $\omega \in \mathbb{C}$, ω^n такав да $\omega \notin \{1, -1, i, -i\}$. Заправо, како i и $-i$ уопште не чине n-ти корен јединице због $n \equiv_4 2$, довољно је доказати да једнакост (3.22) није задовољена ни за један n-ти корен јединице ω различит од 1 и -1. Надаље делимо решавање проблема на још два подслучаја у зависности од тога да ли је $\omega^{\frac{n}{2}}$ једнако 1 или -1.

Подслучај $\omega^{\frac{n}{2}} = 1$. Овде је врло једноставно закључити да једнакост (3.22) постаје еквивалентна са

$$\begin{aligned}
& 2\omega^{4t-2} + \omega^{2t+3} - \omega^{2t-1} - 2\omega^{2t} + 2\omega^{2t-2} + \omega^{2t-1} - \omega^{2t-5} - 2 = 0 \\
\iff \quad & 2\omega^{4t-2} + \omega^{2t+3} - 2\omega^{2t} + 2\omega^{2t-2} - \omega^{2t-5} - 2 = 0 \\
\iff \quad & 2\omega^{4t-1} + \omega^{2t+4} - 2\omega^{2t+1} + 2\omega^{2t-1} - \omega^{2t-4} - 2\omega = 0.
\end{aligned}$$

Ако претпоставимо да једнакост (3.22) јесте тачна за неки n-ти корен јединице $\omega \notin \{1, -1\}$, јасно је да дато ω мора да чини нулу полинома $Q_t^{(2)}(x)$. Међутим, ω би онда истовремено представљао b-ти примитивни корен јединице за неко $b \notin \{1, 2\}$ такво да $b \mid n$. Због $n \equiv_4 2$, имали бисмо $b \notin \{1, 2, 4, 8\}$, те би полином $Q_t^{(2)}(x)$ нужно био дељив циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ код ког је испуњен услов $b \notin \{1, 2, 4, 8\}$. На основу леме 3.19, ово је немогуће, те долазимо до контрадикције.

Подслучај $\omega^{\frac{n}{2}} = -1$. У овом подслучају је једнакост (3.22) обавезно еквивалентна са

$$\begin{aligned}
& 2\omega^{4t-2} - \omega^{2t+3} + \omega^{2t-1} - 2\omega^{2t} + 2\omega^{2t-2} - \omega^{2t-1} + \omega^{2t-5} - 2 = 0 \\
\iff \quad & 2\omega^{4t-2} - \omega^{2t+3} - 2\omega^{2t} + 2\omega^{2t-2} + \omega^{2t-5} - 2 = 0 \\
\iff \quad & 2\omega^{4t-1} - \omega^{2t+4} - 2\omega^{2t+1} + 2\omega^{2t-1} + \omega^{2t-4} - 2\omega = 0.
\end{aligned}$$

Ако претпоставимо да је споменута једнакост задовољена за одређени n-ти корен јединице $\omega \notin \{1, -1\}$, одмах следи да дато ω представља нулу полинома $R_t^{(2)}(x)$. На сличан начин као при решавању претходног подслучаја, добијамо да ω мора бити b-ти примитивни корен јединице за неко $b \notin \{1, 2, 4, 8\}$, те је полином $R_t^{(2)}(x)$ нужно дељив одговарајућим циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ код ког је $b \notin \{1, 2, 4, 8\}$. Лема 3.19 нас поново доводи до контрадикције, чиме је доказ теореме готов. □

3.5 Конструкција за случај $2 \mid t$, $t \geq 4$ и $n = 4t + 8$

На основу теорема 3.2 и 3.3, видимо да уколико је број t непаран, тада обавезно постоји $4t$-регуларан матичан граф било ког реда из скупа $\{4t+4, 4t+6, 4t+8, 4t+10, \ldots\}$. Такође, за било које парно $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 4$ загарантовано постоји $4t$-регуларан циркулантан матичан граф било ког реда из скупа $\{4t+6, 4t+10, 4t+14, 4t+18, \ldots\}$. Дакле, како бисмо комплетирали доказ теореме 3.1, неопходно је конструисати $4t$-регуларан циркулантан матичан граф реда $n \in \mathbb{N}$ за свако парно $t \geq 4$ и произвољно $n \in \{4t+8, 4t+12, 4t+16, 4t+20, \ldots\}$. У оквиру датог одељка ће бити изложене две простије конструкције које заједно доказују постојање оваквог графа реда $4t+8$. Једна конструкција ће одговарати случају када важи $4 \mid t$, а друга ће да даје графове код којих је задовољено $t \equiv_4 2$. У наставку одељка наводимо обе споменуте конструкције у виду две леме.

Лема 3.20. *За било које* $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 4$ *такво да важи* $4 \mid t$, *граф облика*

$$\operatorname{Circ}(4t+8, \{1, 2, 3, \ldots, 2t+3\} \setminus \{t+1, t+3, t+4\})$$

мора бити $4t$*-регуларан циркулантан матичан граф реда* $4t+8$.

Доказ. Пре свега, вреди напоменути да је дати генераторски скуп сигурно добро дефинисан, узевши у обзир да важи $1 \le t+1$ и $t+4 \le 2t+3$ за свако $t \ge 4$. Осим тога, једноставно је уочити да он садржи једнак број парних и непарних елемената. Из овог разлога, како бисмо доказали лему, довољно је установити да важи трећи услов из леме 3.1. Другим речима, ако означимо $n = 4t+8$, треба показати да једнакост

$$\sum_{j=1}^{2t+3} \left(\zeta^j + \zeta^{-j}\right) - \left(\zeta^{t+1} + \zeta^{-t-1}\right) - \left(\zeta^{t+3} + \zeta^{-t-3}\right) - \left(\zeta^{t+4} + \zeta^{-t-4}\right) = 0 \tag{3.23}$$

не наступа ни за један n-ти корен јединице $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$ различит од 1 и -1. Пошто за свако $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$, $\zeta \ne 1$ сигурно важи

$$\begin{aligned}
& & \sum_{j=0}^{n-1} \zeta^j &= 0\\
&\implies & \zeta^{-2t-3}\sum_{j=0}^{4t+7} \zeta^j &= 0\\
&\implies & \sum_{j=-2t-3}^{2t+4} \zeta^j &= 0\\
&\implies & \zeta^{2t+4} + 1 + \sum_{j=1}^{2t+3} \left(\zeta^j + \zeta^{-j}\right) &= 0\\
&\implies & \sum_{j=1}^{2t+3} \left(\zeta^j + \zeta^{-j}\right) &= -1 - \zeta^{2t+4},
\end{aligned}$$

јасно је да једнакост (3.23) мора бити еквивалентна са

$$\begin{aligned}
& & \sum_{j=1}^{2t+3} \left(\zeta^j + \zeta^{-j}\right) - \left(\zeta^{t+1} + \zeta^{-t-1}\right) - \left(\zeta^{t+3} + \zeta^{-t-3}\right) - \left(\zeta^{t+4} + \zeta^{-t-4}\right) &= 0\\
&\iff & -1 - \zeta^{2t+4} - \zeta^{t+1} - \zeta^{-t-1} - \zeta^{t+3} - \zeta^{-t-3} - \zeta^{t+4} - \zeta^{-t-4} &= 0\\
&\iff & -\zeta^{t+4}(-1 - \zeta^{2t+4} - \zeta^{t+1} - \zeta^{-t-1} - \zeta^{t+3} - \zeta^{-t-3} - \zeta^{t+4} - \zeta^{-t-4}) &= 0\\
&\iff & \zeta^{3t+8} + \zeta^{2t+8} + \zeta^{2t+7} + \zeta^{2t+5} + \zeta^{t+4} + \zeta^3 + \zeta + 1 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Доказ леме ћемо довршити тако што ћемо решавање проблема да поделимо на два случаја у зависности од тога да ли је $\zeta^{\frac{n}{2}}$ једнако 1 или -1.

Случај $\zeta^{\frac{n}{2}} = -1$. У овом случају важи $\zeta^{2t+4} = -1$, те је $\zeta^{3t+8} = -\zeta^{t+4}$, што значи да једнакост (3.24) мора бити даље еквивалентна са

$$\begin{aligned}
& & \zeta^{3t+8} + \zeta^{2t+8} + \zeta^{2t+7} + \zeta^{2t+5} + \zeta^{t+4} + \zeta^3 + \zeta + 1 &= 0\\
&\iff & \zeta^{2t+8} + \zeta^{2t+7} + \zeta^{2t+5} + \zeta^3 + \zeta + 1 &= 0\\
&\iff & -\zeta^4 - \zeta^3 - \zeta + \zeta^3 + \zeta + 1 &= 0\\
&\iff & 1 - \zeta^4 &= 0\\
&\iff & \zeta^4 &= 1.
\end{aligned}$$

Међутим, једнакост $\zeta^4 = 1$ сигурно није тачна ни за један n-ти корен јединице $\zeta \notin \{1, -1\}$ који испуњава $\zeta^{\frac{n}{2}} = -1$, узевши у обзир да важи $i^{\frac{n}{2}} = (-i)^{\frac{n}{2}} = 1$ зато што $4 \mid 2t + 4$.

Случај $\zeta^{\frac{n}{2}} = 1$. У датом случају одмах можемо да приметимо да је $\zeta^{3t+8} = \zeta^{t+4}$, што нам директно помаже да установимо да једнакост (3.24) мора бити еквивалентна са

$$\begin{aligned}
& \zeta^{3t+8} + \zeta^{2t+8} + \zeta^{2t+7} + \zeta^{2t+5} + \zeta^{t+4} + \zeta^3 + \zeta + 1 = 0 \\
\iff \quad & \zeta^{2t+8} + \zeta^{2t+7} + \zeta^{2t+5} + 2\zeta^{t+4} + \zeta^3 + \zeta + 1 = 0 \\
\iff \quad & \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta + 2\zeta^{t+4} + \zeta^3 + \zeta + 1 = 0 \\
\iff \quad & 2\zeta^{t+4} + \zeta^4 + 2\zeta^3 + 2\zeta + 1 = 0. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Надаље делимо решавање проблема на још два подслучаја у зависности од тога да ли је $\zeta^{\frac{n}{4}}$ једнако 1 или -1.

Подслучај $\zeta^{\frac{n}{4}} = -1$. Овде је јасно да важи $\zeta^{t+4} = -\zeta^2$, што имплицира да се једнакост (3.25) директно своди на

$$\zeta^4 + 2\zeta^3 - 2\zeta^2 + 2\zeta + 1 = 0.$$

Међутим, полином $Z_2(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ не садржи ниједан корен јединице међу својим нулама. Ову чињеницу је могуће лако утврдити путем одговарајућег математичког софтвера као што је то показано у прилогу А.2. Из споменутог тврђења даље следи да једнакост (3.25) сигурно није тачна ни за један n-ти корен јединице ζ.

Подслучај $\zeta^{\frac{n}{4}} = 1$. У овом подслучају добијамо $\zeta^{t+4} = \zeta^2$, те се једнакост (3.25) своди на

$$\begin{aligned}
& 2\zeta^{t+4} + \zeta^4 + 2\zeta^3 + 2\zeta + 1 = 0 \\
\iff \quad & \zeta^4 + 2\zeta^3 + 2\zeta^2 + 2\zeta + 1 = 0 \\
\iff \quad & (\zeta^2 + 1)(\zeta + 1)^2 = 0 \\
\iff \quad & \zeta^2 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Пошто је $t + 2 \equiv_4 2$, видимо да мора бити $i^{\frac{n}{4}} = (-i)^{\frac{n}{4}} = -1$. Из овог разлога, очигледно је да једнакост $\zeta^2 + 1 = 0$ сигурно не може да буде задовољена ни за један n-ти корен јединице $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$, $\zeta \notin \{1, -1\}$ за који је испуњен услов $\zeta^{\frac{n}{4}} = 1$, као што је и било потребно доказати. □

Лема 3.21. *За било које* $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 6$ *такво да је* $t \equiv_4 2$*, граф облика*

$$\mathrm{Circ}(4t + 8, \{1, 2, 3 \ldots, 2t + 3\} \setminus \{t - 2, t + 1, t + 3\})$$

мора бити $4t$*-регуларан циркулантан матичан граф реда* $4t + 8$.

Доказ. Како је $t \geq 6$, очигледно важи $1 \leq t - 2$ и $t + 3 \leq 2t + 3$, те је дати генераторски скуп увек добро дефинисан. Лако је увидети да он поседује исти број парних и непарних елемената, што нам омогућава да докажемо дату лему тако што једноставно покажемо да важи трећи услов наведен у леми 3.1. Другим речима, ако ставимо $n = 4t + 8$, неопходно је демонстрирати да једнакост

$$\sum_{j=1}^{2t+3} \left(\zeta^j + \zeta^{-j}\right) - \left(\zeta^{t-2} + \zeta^{-t+2}\right) - \left(\zeta^{t+1} + \zeta^{-t-1}\right) - \left(\zeta^{t+3} + \zeta^{-t-3}\right) = 0$$

не важи ни за један n-ти корен јединице ζ различит од 1 и -1. Сада смо у стању да употребимо једнакост $\sum_{j=0}^{2t+3}\left(\zeta^j+\zeta^{-j}\right) = -1-\zeta^{2t+4}$ изведену приликом доказивања леме 3.20 како бисмо добили наредни низ еквиваленција:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{2t+3}\left(\zeta^j+\zeta^{-j}\right)-\left(\zeta^{t-2}+\zeta^{-t+2}\right)-\left(\zeta^{t+1}+\zeta^{-t-1}\right)-\left(\zeta^{t+3}+\zeta^{-t-3}\right)=0\\
\iff\quad & -1-\zeta^{2t+4}-\zeta^{t-2}-\zeta^{-t+2}-\zeta^{t+1}-\zeta^{-t-1}-\zeta^{t+3}-\zeta^{-t-3}=0\\
\iff\quad & -\zeta^{t+3}(-1-\zeta^{2t+4}-\zeta^{t-2}-\zeta^{-t+2}-\zeta^{t+1}-\zeta^{-t-1}-\zeta^{t+3}-\zeta^{-t-3})=0\\
\iff\quad & \zeta^{3t+7}+\zeta^{2t+6}+\zeta^{2t+4}+\zeta^{2t+1}+\zeta^{t+3}+\zeta^5+\zeta^2+1=0.
\end{aligned}\tag{3.26}$$

Доказ ћемо завршити дељењем проблема на два случаја у зависности од тога да ли је $\zeta^{\frac{n}{2}}$ једнако 1 или -1.

Случај $\zeta^{\frac{n}{2}}=-1$. Из $\zeta^{2t+4}=-1$ одмах следи $\zeta^{3t+7}=-\zeta^{t+3}$, те једнакост (3.26) постаје еквивалентна са

$$\begin{aligned}
&\zeta^{3t+7}+\zeta^{2t+6}+\zeta^{2t+4}+\zeta^{2t+1}+\zeta^{t+3}+\zeta^5+\zeta^2+1=0\\
\iff\quad & \zeta^{2t+6}+\zeta^{2t+4}+\zeta^{2t+1}+\zeta^5+\zeta^2+1=0\\
\iff\quad & -\zeta^2-1-\zeta^{-3}+\zeta^5+\zeta^2+1=0\\
\iff\quad & \zeta^5-\zeta^{-3}=0\\
\iff\quad & \zeta^8=1.
\end{aligned}$$

Међутим, $\frac{n}{2}=2t+4$, при чему је $t\equiv_4 2$, што значи да важи $8\mid\frac{n}{2}$. Из овог разлога, сви осми корени јединице дају 1 када се дигну на степен $\frac{n}{2}$, те једнакост $\zeta^8=1$ никако не може да буде задовољена за неки n-ти корен јединице $\zeta\notin\{1,-1\}$ такав да је $\zeta^{\frac{n}{2}}=-1$.

Случај $\zeta^{\frac{n}{2}}=1$. У овом случају је јасно да важи $\zeta^{3t+7}=\zeta^{t+3}$, што нам омогућава да увидимо да је једнакост (3.26) еквивалентна са

$$\begin{aligned}
&\zeta^{3t+7}+\zeta^{2t+6}+\zeta^{2t+4}+\zeta^{2t+1}+\zeta^{t+3}+\zeta^5+\zeta^2+1=0\\
\iff\quad & \zeta^{2t+6}+\zeta^{2t+4}+\zeta^{2t+1}+2\zeta^{t+3}+\zeta^5+\zeta^2+1=0\\
\iff\quad & \zeta^2+1+\zeta^{-3}+2\zeta^{t+3}+\zeta^5+\zeta^2+1=0\\
\iff\quad & \zeta^3\left(2\zeta^{t+3}+\zeta^5+2\zeta^2+2+\zeta^{-3}\right)=0\\
\iff\quad & 2\zeta^{t+6}+\zeta^8+2\zeta^5+2\zeta^3+1=0.
\end{aligned}\tag{3.27}$$

Сада делимо решавање проблема надаље на још два подслучаја у зависности од тога коју вредност има $\zeta^{\frac{n}{4}}$.

Подслучај $\zeta^{\frac{n}{4}}=-1$. У овом подслучају знамо да је $\zeta^{t+6}=-\zeta^4$, те једнакост (3.27) брзо постаје еквивалентна са

$$\begin{aligned}
&2\zeta^{t+6}+\zeta^8+2\zeta^5+2\zeta^3+1=0\\
\iff\quad & \zeta^8+2\zeta^5-2\zeta^4+2\zeta^3+1=0\\
\iff\quad & (\zeta^2+1)(\zeta^6-\zeta^4+2\zeta^3-\zeta^2+1)=0.
\end{aligned}$$

Узевши у обзир да је $\frac{n}{4} = t + 2$, видимо да $4 \mid \frac{n}{4}$, те је $i^{\frac{n}{4}} = (-i)^{\frac{n}{4}} = 1$. Ово значи да је једнакост (3.27) сигурно даље еквивалентна са

$$\zeta^6 - \zeta^4 + 2\zeta^3 - \zeta^2 + 1 = 0.$$

Међутим, полином $Z_3(x) = x^6 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 1$ међу својим нулама не поседује ниједан корен јединице, као што се може комотно установити путем Wolfram Mathematica кода који је изложен у прилогу А.2. На основу ове чињенице знамо да једнакост (3.27) обавезно не наступа ни за један n-ти корен јединице ζ.

Подслучај $\zeta^{\frac{n}{4}} = 1$. Овде добијамо да важи $\zeta^{t+6} = \zeta^4$, што нам омогућава да једнакост (3.27) сведемо на

$$\begin{aligned}
& & 2\zeta^{t+6} + \zeta^8 + 2\zeta^5 + 2\zeta^3 + 1 &= 0\\
&\iff & \zeta^8 + 2\zeta^5 + 2\zeta^4 + 2\zeta^3 + 1 &= 0\\
&\iff & (\zeta+1)^2(\zeta^6 - 2\zeta^5 + 3\zeta^4 - 2\zeta^3 + 3\zeta^2 - 2\zeta + 1) &= 0\\
&\iff & \zeta^6 - 2\zeta^5 + 3\zeta^4 - 2\zeta^3 + 3\zeta^2 - 2\zeta + 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Полином $Z_4(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ не поседује ниједан корен јединице међу својим нулама, као што је демонстрирано у прилогу А.2 уз помоћ одговарајућег математичког софтвера који пружа подршку за симболичка израчунавања. Одавде следи да једнакост (3.27) сигурно није тачна ни за један n-ти корен јединице ζ. □

3.6 Конструкција за случај $2 \mid t$, $t \geq 4$ и $8 \mid n$, $n \geq 4t + 16$

Следећи корак у доказивању главне теореме 3.1 биће разрешење случаја када важи $2 \mid t$ и $8 \mid n$. Прецизније, показаћемо да за свако $t \in \mathbb{N}$, $2 \mid t$, $t \geq 4$ и $n \in \mathbb{N}$, $8 \mid n$, $n \geq 4t + 16$ обавезно постоји $4t$-регуларан циркулантан матичан граф реда n. Споменуто тврђење се може установити преко одговарајуће конструкције графа и представља директну последицу наредне теореме.

Теорема 3.4. *За било које парно* $t \geq 4$ *и произвољно* $n \geq 4t + 16$ *такво да важи* $8 \mid n$*, граф облика* $\mathrm{Circ}(n, S'_{t,n})$*, где је*

$$\begin{aligned}
S'_{t,n} = \{1, 2, \ldots, t-3\} \cup \{t-1, t\} \cup \left\{\frac{n}{4}, \frac{n}{4} + 2\right\}\\
\cup \left\{\frac{n}{2} - t, \frac{n}{2} - (t-1)\right\} \cup \left\{\frac{n}{2} - (t-3), \ldots, \frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 1\right\},
\end{aligned}$$

мора да буде $4t$*-регуларан циркулантан матичан граф реда* n*.*

За почетак, вреди напоменути да је скуп $S'_{t,n}$ обавезно добро дефинисан, пошто важи $t < \frac{n}{4}$ и $\frac{n}{4} + 2 < \frac{n}{2} - t$ за свако парно $t \geq 4$ и било које $n \geq 4t + 16$ за које је испуњено $8 \mid n$. Осим тога, директном провером није тешко увидети да овај скуп мора да садржи једнак број парних и непарних елемената. Из овог разлога, коришћењем леме 3.1 закључујемо да је за доказивање теореме 3.4 довољно демонстрирати да једнакост

$$\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq t-2}}^{t} \left(\zeta^j + \zeta^{-j}\right) + \zeta^{\frac{n}{4}+2} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-2} + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq t-2}}^{t} \left(\zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}}\right) = 0 \tag{3.28}$$

не наступа ни за један n-ти корен јединице $\zeta \notin \{1, -1\}$.

Комплетан доказ ће бити одрађен у остатку датог одељка и то на начин који је веома сличан стратегији искоришћеној у одељцима 3.3 и 3.4. Пре свега, за свако парно $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 6$, дефинисаћемо полиноме $Q_t^{(3)}(x), R_t^{(3)}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ на следећи начин:

$$\begin{aligned} Q_t^{(3)}(x) &= 2x^{2t+1} - 2x^{2t-1} + 2x^{2t-2} + x^{t+3} - x^{t+2} + x^{t-1} - x^{t-2} - 2x^3 + 2x^2 - 2, \\ R_t^{(3)}(x) &= 2x^{2t+1} - 2x^{2t-1} + 2x^{2t-2} - x^{t+3} + x^{t+2} - 4x^{t+1} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + 4x^t - x^{t-1} + x^{t-2} - 2x^3 + 2x^2 - 2. \end{aligned}$$

Узевши у обзир да је $3 < t - 2$ и $t + 3 < 2t - 2$ за свако парно $t \geq 6$, очигледно је да полином $Q_t^{(3)}(x)$ сигурно има десет ненула чланова, док полином $R_t^{(3)}(x)$ увек има дванаест. Означимо скупове степена њихових ненула чланова са $L_t^{(3)}$ и $M_t^{(3)}$, респективно, тј. нека за свако парно $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 6$ важи

$$\begin{aligned} L_t^{(3)} &= \{0, 2, 3, t-2, t-1, t+2, t+3, 2t-2, 2t-1, 2t+1\}, \\ M_t^{(3)} &= \{0, 2, 3, t-2, t-1, t, t+1, t+2, t+3, 2t-2, 2t-1, 2t+1\}. \end{aligned}$$

Доказ започињемо наредном лемом у којој долазимо до својства које се тиче дељивости елемената скупова $L_t^{(3)}$ и $M_t^{(3)}$.

Лема 3.22. *За било које парно $t \geq 6$ и свако $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 10$, скуп $L_t^{(3)}$ мора да садржи елемент чији је остатак по модулу β јединствен у оквиру датог скупа. Осим тога, за свако парно $t \geq 6$ и произвољно $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 7$ које задовољава $\beta \nmid t$, скуп $M_t^{(3)}$ обавезно има елемент чији је остатак по модулу β јединствен у оквиру тог скупа.*

Доказ. Јасно је да за свако $\beta \geq 7$ елементи $t-2, t-1, t, t+1, t+2, t+3$ морају имати међусобно различите остатке по модулу β. Када би елемент $t-1$ имао остатак различит од остатака које дају сви преостали бројеви, тј. вредности $0, 2, 3, 2t-2, 2t-1, 2t+1$, онда би он обавезно чинио елемент и скупа $L_t^{(3)}$ и скупа $M_t^{(3)}$ чији је остатак по модулу β јединствен унутар оба ова скупа, те би тврђење дато у леми надаље директно следило. Претпоставимо сада супротно, односно да вредност $t-1$ има исти остатак при дељењу са β као бар један од бројева из скупа $\{0, 2, 3, 2t-2, 2t-1, 2t+1\}$. Ради концизности, решавање проблема ћемо одмах да поделимо на шест одговарајућих случајева како бисмо сваки од њих могли да разрешимо појединачно.

Случај $t - 1 \equiv_\beta 0$. У овом случају добијамо да важи $t \equiv_\beta 1$. Из табеле 3.1 је сада јасно да елемент $t-2$ мора да има јединствен остатак по модулу β у оквиру оба скупа $L_t^{(3)}$ и $M_t^{(3)}$.

Случај $t - 1 \equiv_\beta 2$. Овде закључујемо да мора бити $t \equiv_\beta 3$, те нам табела 3.1 поново говори да елемент $t-2$ сигурно има јединствен остатак по модулу β унутар и $L_t^{(3)}$ и $M_t^{(3)}$.

Случај $t - 1 \equiv_\beta 3$. Сада директно добијамо да је задовољено $t \equiv_\beta 4$. По табели 3.1, видимо да елемент t обавезно има јединствен остатак по модулу β у оквиру скупа $M_t^{(3)}$, кад год важи $\beta \geq 7$. Са друге стране, ако је $\beta \geq 10$, онда елемент 0 сигурно поседује јединствен остатак по модулу β унутар скупа $L_t^{(3)}$.

Случај $t - 1 \equiv_\beta 2t - 2$. У овој ситуацији имамо да је $t \equiv_\beta 1$, што значи да се дати случај може решити на апсолутно исти начин као претходни случај када наступа $t - 1 \equiv_\beta 0$.

Табела 3.1: Остаци елемената скупова $L_t^{(3)}$ and $M_t^{(3)}$ по модулу β, за разне вредности $t \bmod \beta$.

	$t \equiv_\beta -2$	$t \equiv_\beta 0$	$t \equiv_\beta 1$	$t \equiv_\beta 3$	$t \equiv_\beta 4$
$0 \equiv_\beta$	0	0	0	0	0
$2 \equiv_\beta$	2	2	2	2	2
$3 \equiv_\beta$	3	3	3	3	3
$t-2 \equiv_\beta$	-4	-2	-1	1	2
$t-1 \equiv_\beta$	-3	-1	0	2	3
$t \equiv_\beta$	-2	0	1	3	4
$t+1 \equiv_\beta$	-1	1	2	4	5
$t+2 \equiv_\beta$	0	2	3	5	6
$t+3 \equiv_\beta$	1	3	4	6	7
$2t-2 \equiv_\beta$	-6	-2	0	4	6
$2t-1 \equiv_\beta$	-5	-1	1	5	7
$2t+1 \equiv_\beta$	-3	1	3	7	9

Случај $t - 1 \equiv_\beta 2t - 1$. Овде одмах долазимо до $t \equiv_\beta 0$. Применом табеле 3.1, можемо уочити да елемент 0 обавезно има јединствен остатак по модулу β у оквиру скупа $L_t^{(3)}$. Осим тога, за скуп $M_t^{(3)}$ је лако приметити да се његови елементи могу груписати у шест парова по еквиваленцији у односу на остатке које дају по модулу β. Дакле, скуп $M_t^{(3)}$ не садржи ниједан елемент који има јединствен остатак по споменутом модулу, што није против тврђења изложеног у леми.

Случај $t - 1 \equiv_\beta 2t + 1$. У овом случају добијамо да је $t \equiv_\beta -2$. У табели 3.1 је једноставно уочити да кад год је $\beta \geq 10$, елемент $t-2$ мора да има јединствен остатак по модулу β унутар скупа $L_t^{(3)}$. Слично, ако је $\beta \geq 7$, тада елемент $t + 1$ обавезно поседује јединствен остатак по модулу β у оквиру скупа $M_t^{(3)}$. □

Директним коришћењем леме 3.22 сада смо у стању да докажемо следећу лему која се тиче дељивости $Q_t^{(3)}(x)$ и $R_t^{(3)}$ полинома одређеним типовима полинома од интереса.

Лема 3.23. *Нека је дат произвољан полином $U(x) \in \mathbb{Q}[x]$ који има бар два ненула члана и чији сви ненула чланови имају степен дељив са $\beta \in \mathbb{N}$. Ако важи $\beta \geq 10$, онда је за свако парно $t \geq 6$ обавезно испуњен услов $U(x) \nmid Q_t^{(3)}(x)$. Осим тога, ако важи $\beta \geq 7$, онда је за свако парно $t \geq 6$ сигурно тачно да $U(x) \nmid R_t^{(3)}(x)$.*

Доказ. Лему ћемо доказати свођењем на апсурд и то одвојено за $Q_t^{(3)}(x)$ и $R_t^{(3)}(x)$ полиноме. Пре свега, претпоставимо да важи $U(x) \mid Q_t^{(3)}(x)$, при чему је $\beta \geq 10$ и $2 \mid t$, $t \geq 6$. Директним коришћењем лема 3.5 и 3.22, добијамо да мора бити $U(x) \mid c\,x^a$ за неко $c \in \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{N}_0$. Међутим, пошто $U(x)$ има бар два ненула члана, ово није могуће да се деси, те долазимо до контрадикције, чиме је доказан део леме који се тиче $Q_t^{(3)}(x)$ полинома.

Сада, претпоставимо да је тачно $U(x) \mid R_t^{(3)}(x)$ за неко $\beta \geq 7$ и $t \in \mathbb{N}$ такво да важи $2 \mid t$ и $t \geq 6$. Ако је задовољен услов $\beta \nmid t$, онда леме 3.5 и 3.22 поново говоре да сигурно наступа $U(x) \mid c\,x^a$ за неко $c \in \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{N}_0$, што је немогуће. Са друге стране, ако је $\beta \mid t$, онда лема 3.5 и табела 3.1 диктирају да обавезно важи

$$U(x) \mid 4x^t - 2,$$
$$U(x) \mid x^{t+2} + 2x^2,$$

одакле одмах следи

$$\begin{aligned} & U(x) \mid x^2 (4x^t - 2) + (x^{t+2} + 2x^2) \\ \Longrightarrow \quad & U(x) \mid 5x^{t+2}, \end{aligned}$$

што нас поново доводи до контрадикције. □

Наредни корак при доказивању теореме 3.4 биће прелиминарно испитивање дељивости $Q_t^{(3)}(x)$ и $R_t^{(3)}$ полинома циклотомичним полиномима. Пошто сви циклотомични полиноми имају бар два ненула члана, применом леме 3.23 можемо брзо доћи до одређених услова које нужно испуњавају сви циклотомични полиноми који деле $Q_t^{(3)}(x)$ или $R_t^{(3)}$, као што показује лема дата у наставку.

Лема 3.24. *Ако важи дељивост $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(3)}(x)$ за неко парно $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 6$ и одређено $b \in \mathbb{N}$, онда вредност b мора да задовољава наредне услове:*

- $2^2 \nmid b$, $3^4 \nmid b$, $5^3 \nmid b$, $7^3 \nmid b$;
- $p^2 \nmid b$ *за сваки прост број* $p \geq 11$.

Такође, ако наступа дељивост $\Phi_b(x) \mid R_t^{(3)}(x)$ за неко парно $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 6$ и одређено $b \in \mathbb{N}$, онда дата вредност b сигурно задовољава следеће услове:

- $2^2 \nmid b$, $3^3 \nmid b$, $5^3 \nmid b$;
- $p^2 \nmid b$ *за сваки прост број* $p \geq 7$.

Доказ. Ради добијања концизнијег доказа, решавање проблема ћемо у старту да поделимо на два случаја у зависности од тога да ли се бавимо $Q_t^{(3)}(x)$ или $R_t^{(3)}$ полиномом.

Случај $Q_t^{(3)}(x)$. Претпоставимо супротно, тј. да важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(3)}(x)$ за неко парно $t \geq 6$ и $b \in \mathbb{N}$ које не поштује услове наведене у леми. Ако важи $3^4 \mid b$, односно $5^3 \mid b$, односно $7^3 \mid b$, онда лема 2.6 говори да сви степени ненула чланова полинома $\Phi_b(x)$ морају бити дељиви са 27, односно 25, односно 49. Слично, ако је испуњено $p^2 \mid b$ за неки прост број $p \geq 11$, онда лема 2.6 тврди да су сви степени ненула чланова датог полинома сигурно дељиви са $p \geq 11$. У сваком од наведених случајева, добијамо да полином $\Phi_b(x)$ поседује својство да има бар два ненула члана и да су степени свих његових ненула чланова дељиви неким бројем $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 10$. Директном применом леме 3.23 видимо да дељивост $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(3)}(x)$ не сме да важи, те долазимо до контрадикције. Дакле, како бисмо разрешили део леме везан за полином $Q_t^{(3)}(x)$, потребно је још установити да $2^2 \mid b$ не сме бити тачно.

Претпоставимо да важи $2^2 \mid b$. Сада нам лема 2.6 говори да су степени свих ненула чланова полинома $\Phi_b(x)$ нужно парни. Имајући у виду да су вредности $0, 2, t-2, t+2, 2t-2$ парне, док су $3, t-1, t+3, 2t-1, 2t+1$ непарне, лема 3.5 диктира да мора бити

$$\begin{aligned} &\Phi_b(x) \mid 2x^{2t-2} - x^{t+2} - x^{t-2} + 2x^2 - 2, \\ &\Phi_b(x) \mid 2x^{2t+1} - 2x^{2t-1} + x^{t+3} + x^{t-1} - 2x^3. \end{aligned}$$

Ако уведемо полиноме $A(x), B(x), C(x), D(x) \in \mathbb{Z}[x]$ на следећи начин:

$$\begin{aligned} A(x) &= 2x^{2t-2} - x^{t+2} - x^{t-2} + 2x^2 - 2, \\ B(x) &= 2x^{2t+1} - 2x^{2t-1} + x^{t+3} + x^{t-1} - 2x^3, \\ C(x) &= x^{t+7} - x^{t+5} + x^{t+3} - x^{t+1} + \frac{1}{2}x^9 + 2x^7 - 3x^5 + 4x^3 - \frac{3}{2}x, \\ D(x) &= -x^{t+4} - x^t + \frac{1}{2}x^8 - x^4 + 2x^2 - \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

онда је обичном рачуницом могуће доћи до тога да обавезно важи

$$\begin{aligned} & \Phi_b(x) \mid A(x)\,C(x) + B(x)\,D(x) \\ \Longrightarrow \quad & \Phi_b(x) \mid 3x^9 - 8x^7 + 10x^5 - 8x^3 + 3x \\ \Longrightarrow \quad & \Phi_b(x) \mid x(x-1)^2(x+1)^2(3x^4 - 2x^2 + 3) \\ \Longrightarrow \quad & \Phi_b(x) \mid 3x^4 - 2x^2 + 3. \end{aligned}$$

Међутим, полином $Z_5(x) = 3x^4 - 2x^2 + 3$ не садржи ниједан корен јединице међу својим нулама. Споменуту чињеницу је могуће лако проверити применом одговарајућег математичког софтвера као што је показано у прилогу A.2. Из наведеног тврђења одмах долазимо до контрадикције.

Случај $R_t^{(3)}(x)$. Претпоставимо сада да је $\Phi_b(x) \mid R_t^{(3)}(x)$ за неко парно $t \geq 6$ и $b \in \mathbb{N}$ које не задовољава услове дате у леми. На сличан начин као што је резоновано у претходном случају, лема 2.6 нам омогућава да закључимо да кад би било $3^3 \mid b$, односно $5^3 \mid b$, односно $p^2 \mid b$ за неки прост број $p \geq 7$, онда би степени свих ненула чланова полинома $\Phi_b(x)$ били дељиви са девет, односно 25, односно $p \geq 7$. У свакој од споменутих ситуација би полином $\Phi_b(x)$ сигурно имао бар два ненула члана и сви његови ненула чланови би имали степене дељиве неким бројем $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 7$, те би нас лема 3.23 довела до контрадикције. Неопходно је још демонстрирати да обавезно не може да важи $2^2 \mid b$.

Ако претпоставимо да јесте тачно $2^2 \mid b$, онда лема 2.6 имплицира да степени свих ненула чланова полинома $\Phi_b(x)$ морају бити парни. Осим тога, пошто знамо да су бројеви $0, 2, t-2, t, t+2, 2t-2$ парни, а $3, t-1, t+1, t+3, 2t-1, 2t+1$ непарни, на основу леме 3.5 можемо да закључимо да обавезно важи

$$\begin{aligned} & \Phi(b) \mid 2x^{2t-2} + x^{t+2} + 4x^t + x^{t-2} + 2x^2 - 2, \\ & \Phi(b) \mid 2x^{2t+1} - 2x^{2t-1} - x^{t+3} - 4x^{t+1} - x^{t-1} - 2x^3. \end{aligned}$$

Сада, уколико уведемо ознаке

$$\begin{aligned} A(x) &= 2x^{2t-2} + x^{t+2} + 4x^t + x^{t-2} + 2x^2 - 2, \\ B(x) &= 2x^{2t+1} - 2x^{2t-1} - x^{t+3} - 4x^{t+1} - x^{t-1} - 2x^3, \\ C(x) &= -x^{t+7} - 3x^{t+5} + 3x^{t+3} + x^{t+1} + \frac{1}{2}x^9 + 6x^7 + 5x^5 + 8x^3 - \frac{3}{2}x, \\ D(x) &= x^{t+4} + 4x^{t+2} + x^t + \frac{1}{2}x^8 + 4x^6 + 7x^4 + 6x^2 - \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

обављањем неопходне рачунице постаје јасно да је сигурно тачно

$$\begin{aligned} & \Phi_b(x) \mid A(x)\,C(x) + B(x)\,D(x) \\ \Longrightarrow \quad & \Phi_b(x) \mid 3x^9 - 16x^7 - 6x^5 - 16x^3 + 3x \\ \Longrightarrow \quad & \Phi_b(x) \mid x(x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1)(3x^4 + 2x^2 + 3) \\ \Longrightarrow \quad & \Phi_b(x) \mid (x^2 - 2x - 1)(x^2 + 2x - 1)(3x^4 + 2x^2 + 3). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Коришћењем адекватног математичког софтвера, могуће је показати да ниједан од полинома $Z_6(x) = x^2 - 2x - 1$, $Z_7(x) = x^2 + 2x - 1$, $Z_8(x) = 3x^4 + 2x^2 + 3$ не поседује нулу која чини корен јединице. У прилогу A.2 је изложен пример одговарајућег програмског кода на језику Wolfram Mathematica. Дакле, дељивост (3.29) не сме да важи, те поново добијамо контрадикцију. □

Лема 3.24 сугерише да $Q_t^{(3)}(x)$ и $R_t^{(3)}$ могу бити дељиви само веома специфичним циклотомичним полиномима. Заправо, могуће је показати да за произвољно парно $t \geq 6$, ни $Q_t^{(3)}(x)$ ни $R_t^{(3)}(x)$ не могу бити дељиви циклотомичним полиномима изван скупа $\{\Phi_1(x), \Phi_2(x)\}$. Следећи корак у доказивању теореме 3.4 биће демонстрирање управо ове чињенице. Како бисмо споменуто тврђење могли да докажемо на концизнији начин, биће нам неопходне наредне две помоћне леме.

Лема 3.25. *За било које парно $t \geq 6$ и произвољан прост број $p \geq 11$, полином $Q_t^{(3)}(x)$ не може бити дељив ни циклотомичним полиномом $\Phi_p(x)$ ни циклотомичним полиномом $\Phi_{2p}(x)$. Слично, за било које парно $t \geq 6$ и произвољан прост број $p \geq 13$, полином $R_t^{(3)}(x)$ не може бити дељив ни са $\Phi_p(x)$ ни са $\Phi_{2p}(x)$.*

Доказ. На основу леме 2.5 је очигледно да важи $\deg \Phi_p(x) = \deg \Phi_{2p}(x) = p-1$. Доказивање дате леме ћемо надаље разделити на два случаја у зависности од тога да ли се бавимо $\Phi_p(x)$ или $\Phi_{2p}(x)$ полиномом.

Случај $\Phi_p(x)$. Претпоставимо супротно, односно да су дати паран број $t \geq 6$ и прост број $p \in \mathbb{N}$ такви да је тачно бар једно од наредна два тврђења:

- $\Phi_p(x) \mid Q_t^{(3)}(x)$ и $p \geq 11$;
- $\Phi_p(x) \mid R_t^{(3)}(x)$ и $p \geq 13$.

Даље, нека су полиноми $U(x), V(x) \in \mathbb{Z}[x]$ дефинисани на следећи начин:

$$\begin{aligned} U(x) = 2x^{(2t+1) \bmod p} &- 2x^{(2t-1) \bmod p} + 2x^{(2t-2) \bmod p} + x^{(t+3) \bmod p} \\ &- x^{(t+2) \bmod p} + x^{(t-1) \bmod p} - x^{(t-2) \bmod p} - 2x^3 + 2x^2 - 2, \\ V(x) = 2x^{(2t+1) \bmod p} &- 2x^{(2t-1) \bmod p} + 2x^{(2t-2) \bmod p} - x^{(t+3) \bmod p} + x^{(t+2) \bmod p} \\ &- 4x^{(t+1) \bmod p} + 4x^{t \bmod p} - x^{(t-1) \bmod p} + x^{(t-2) \bmod p} - 2x^3 + 2x^2 - 2. \end{aligned}$$

Врло је лако увидети да сигурно важе еквиваленције $\Phi_p(x) \mid Q_t^{(3)}(x) \iff \Phi_p(x) \mid U(x)$ и $\Phi_p(x) \mid R_t^{(3)}(x) \iff \Phi_p(x) \mid V(x)$. Како знамо да је $\deg U(x) \leq p-1$ и $\deg V(x) \leq p-1$, одмах долазимо до тога да је обавезно задовољено бар једно од следећа четири тврђења:

- $U(x) \equiv 0$ и $p \geq 11$;
- $V(x) \equiv 0$ и $p \geq 13$;
- $U(x) = c\,\Phi_p(x)$ за неко $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $p \geq 11$;
- $V(x) = c\,\Phi_p(x)$ за неко $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $p \geq 13$.

Пошто обавезно важи $p \geq 11$, лема 3.22 нам говори да полином $Q_t^{(3)}(x)$ сигурно поседује ненула члан чији степен има јединствен остатак по модулу p, те $U(x) \equiv 0$ не сме да важи. Уколико претпоставимо да $p \nmid t$, онда помоћу леме 3.22 можемо да направимо исти закључак за $R_t^{(3)}(x)$, што имплицира да $V(x) \equiv 0$ не може бити тачно. Ако ипак важи $p \mid t$, онда директно добијамо да је

$$\begin{aligned} & V(x) = 2x - 2x^{p-1} + 2x^{p-2} - x^3 + x^2 - 4x + 4 - x^{p-1} + x^{p-2} - 2x^3 + 2x^2 - 2 \\ \implies \quad & V(x) = -3x^{p-1} + 3x^{p-2} - 3x^3 + 3x^2 - 2x + 2, \end{aligned}$$

одакле поново јасно следи $V(x) \not\equiv 0$. Дакле, сигурно није тачно ни $U(x) \equiv 0 \land p \geq 11$ ни $V(x) \equiv 0 \land p \geq 13$. Са друге стране, ако би важило $U(x) = c\,\Phi_p(x)$, односно $V(x) = c\,\Phi_p(x)$, за неко $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, онда би $U(x)$, односно $V(x)$, морао да има исти број ненула чланова као $\Phi_p(x)$. Узевши у обзир да $U(x)$ има највише десет ненула чланова, док $V(x)$ има највише дванаест, при чему $\Phi_p(x)$ има тачно p, јасно је да ни $U(x) = c\,\Phi_p(x)$ не може да важи за неко $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $p \geq 11$, ни $V(x) = c\,\Phi_p(x)$ за неко $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $p \geq 13$.

Случај $\Phi_{2p}(x)$. Поново, претпоставимо супротно, тј. нека су дати паран број $t \geq 6$ и прост број $p \in \mathbb{N}$ такви да је испуњен бар један од следећа два услова:

- $\Phi_{2p}(x) \mid Q_t^{(3)}(x)$ и $p \geq 11$;
- $\Phi_{2p}(x) \mid R_t^{(3)}(x)$ и $p \geq 13$.

Дефинишимо сада полиноме $U(x), V(x) \in \mathbb{Z}[x]$ на наведени начин:

$$\begin{aligned} U(x) = 2(-1)^{\lfloor \frac{2t+1}{p} \rfloor} x^{(2t+1) \bmod p} &- 2(-1)^{\lfloor \frac{2t-1}{p} \rfloor} x^{(2t-1) \bmod p} + 2(-1)^{\lfloor \frac{2t-2}{p} \rfloor} x^{(2t-2) \bmod p} \\ &+ (-1)^{\lfloor \frac{t+3}{p} \rfloor} x^{(t+3) \bmod p} - (-1)^{\lfloor \frac{t+2}{p} \rfloor} x^{(t+2) \bmod p} + (-1)^{\lfloor \frac{t-1}{p} \rfloor} x^{(t-1) \bmod p} \\ &- (-1)^{\lfloor \frac{t-2}{p} \rfloor} x^{(t-2) \bmod p} - 2x^3 + 2x^2 - 2, \\ V(x) = 2(-1)^{\lfloor \frac{2t+1}{p} \rfloor} x^{(2t+1) \bmod p} &- 2(-1)^{\lfloor \frac{2t-1}{p} \rfloor} x^{(2t-1) \bmod p} + 2(-1)^{\lfloor \frac{2t-2}{p} \rfloor} x^{(2t-2) \bmod p} \\ &- (-1)^{\lfloor \frac{t+3}{p} \rfloor} x^{(t+3) \bmod p} + (-1)^{\lfloor \frac{t+2}{p} \rfloor} x^{(t+2) \bmod p} - 4(-1)^{\lfloor \frac{t+1}{p} \rfloor} x^{(t+1) \bmod p} \\ &+ 4(-1)^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} x^{t \bmod p} - (-1)^{\lfloor \frac{t-1}{p} \rfloor} x^{(t-1) \bmod p} + (-1)^{\lfloor \frac{t-2}{p} \rfloor} x^{(t-2) \bmod p} - 2x^3 + 2x^2 - 2. \end{aligned}$$

Пошто сваки $2p$-ти примитивни корен јединице даје -1 када се дигне на степен p, једноставно је уочити да важи $\Phi_{2p}(x) \mid Q_t^{(3)}(x) \iff \Phi_{2p}(x) \mid U(x)$ и $\Phi_{2p}(x) \mid R_t^{(3)}(x) \iff \Phi_{2p}(x) \mid V(x)$. Узевши у обзир да је $\deg U(x) \leq p-1$ и $\deg V(x) \leq p-1$, слично као у претходном случају добијамо да мора да важи бар једно од наредна четири тврђења:

- $U(x) \equiv 0$ и $p \geq 11$;
- $V(x) \equiv 0$ и $p \geq 13$;
- $U(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$ за неко $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $p \geq 11$;
- $V(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$ за неко $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $p \geq 13$.

Због нужног услова $p \geq 11$, из леме 3.22 се директно добија да полином $Q_t^{(3)}(x)$ обавезно има ненула члан чији степен има јединствен остатак по модулу p, што значи да $U(x) \equiv 0$ не може да важи. Слично, ако имамо гаранцију да је $p \nmid t$, тада нас лема 3.22 на аналоган начин доводи до $V(x) \not\equiv 0$. У случају да $p \mid t$ важи, може се директно проверити да је

$$V(x) = \pm 2x \pm 2x^{p-1} \pm 2x^{p-2} \pm x^3 \pm x^2 \pm 4x \pm 4 \pm x^{p-1} \pm x^{p-2} \pm 2x^3 \pm 2x^2 \pm 2,$$

те опет следи $V(x) \not\equiv 0$. Узевши све у обзир, знамо да обавезно ни $U(x) \equiv 0 \land p \geq 11$ ни $V(x) \equiv 0 \land p \geq 13$ није тачно. Даље, ако би важило $U(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$, односно $V(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$, за неко $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, тада би $U(x)$, односно $V(x)$, морао да има исти број ненула чланова као $\Phi_{2p}(x)$. Јасно је да $U(x)$ има највише десет ненула чланова, док $V(x)$ има највише дванаест, при чему $\Phi_{2p}(x)$ има тачно p, те одмах добијамо да сигурно не важи ни $U(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$ за неко $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $p \geq 11$, ни $V(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$ за неко $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $p \geq 13$, као што је и било потребно показати. $\square$

Лема 3.26. *За произвољно парно* $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 6$, *полином* $Q_t^{(3)}(x)$ *не може бити дељив циклотомичним полиномом* $\Phi_b(x)$ *код ког важе следећи услови:*

- $b \geq 3$;
- b *не поседује ниједан прост фактор ван скупа* $\{2, 3, 5, 7\}$;
- b *не садржи све просте факторе из скупа* $\{3, 5, 7\}$;
- $2^2 \nmid b$, $3^4 \nmid b$, $5^3 \nmid b$, $7^3 \nmid b$.

Такође, за било које парно $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 6$, *полином* $R_t^{(3)}(x)$ *не може бити дељив циклотомичним полиномом* $\Phi_b(x)$ *код ког су задовољени услови:*

- $b \geq 3$;
- b *не поседује ниједан прост фактор ван скупа* $\{2, 3, 5, 7, 11\}$;
- b *не садржи оба проста фактора из скупа* $\{7, 11\}$ *или из скупа* $\{5, 11\}$;
- $2^2 \nmid b$, $3^3 \nmid b$, $5^3 \nmid b$, $7^2 \nmid b$, $11^2 \nmid b$.

Доказ. За свако $b \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{N}_0$, нека $U_{b,t}(x)$ и $V_{b,t}(x)$ буду полиноми

$$\begin{aligned} U_{b,t}(x) = 2x^{(2t+1) \bmod b} &- 2x^{(2t-1) \bmod b} + 2x^{(2t-2) \bmod p} + x^{(t+3) \bmod b} \\ &- x^{(t+2) \bmod b} + x^{(t-1) \bmod b} - x^{(t-2) \bmod b} - 2x^3 + 2x^2 - 2, \\ V_{b,t}(x) = 2x^{(2t+1) \bmod b} &- 2x^{(2t-1) \bmod b} + 2x^{(2t-2) \bmod p} - x^{(t+3) \bmod b} + x^{(t+2) \bmod b} \\ &- 4x^{(t+1) \bmod b} + 4x^{t \bmod b} - x^{(t-1) \bmod b} + x^{(t-2) \bmod b} - 2x^3 + 2x^2 - 2. \end{aligned}$$

За било које парно $t \geq 6$ и произвољно $b \in \mathbb{N}$, тривијално је установити да важе еквиваленције $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(3)}(x) \iff \Phi_b(x) \mid U_{b,t}(x)$ и $\Phi_b(x) \mid R_t^{(3)}(x) \iff \Phi_b(x) \mid V_{b,t}(x)$. Узевши у обзир да коначно много природних бројева $b \in \mathbb{N}$ задовољава услове наведене у леми који се тичу полинома $Q_t^{(3)}(x)$, као и дате услове у вези са полиномом $R_t^{(3)}(x)$, јасно је да се може применити иста стратегија доказивања која је искоришћена у лемама 3.12 и 3.18. Дакле, за доказивање леме је довољно показати да за свако неопходно $b \in \mathbb{N}$ и било које $t = \overline{0, b-1}$ важи $\Phi_b(x) \nmid U_{b,t}(x)$, односно $\Phi_b(x) \nmid V_{b,t}(x)$. Поменута провера се може комотно обавити уз помоћ рачунара коришћењем одговарајућег математичког софтвера. Примера ради, доказ леме се може комплетирати преко програмског кода који се налази у прилогу А.5 и који у спрези употребљава језике Python и Wolfram Mathematica. □

У наставку излажемо доказ претходно споменуте чињенице да полиноми $Q_t^{(3)}(x)$ и $R_t^{(3)}(x)$ не могу бити дељиви ниједним циклотомичним полиномом ван скупа $\{\Phi_1(x), \Phi_2(x)\}$. Унутар самог доказа ће у великој мери бити коришћена теорема 2.2, у сличном духу као што је то урађено у одељцима 3.3 и 3.4. Тражени резултати ће бити концизно обухваћени у оквиру наредне две леме.

Лема 3.27. *За било које парно* $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 6$, *полином* $Q_t^{(3)}(x)$ *не може бити дељив ниједним циклотомичним полиномом* $\Phi_b(x)$ *код ког важи* $b \geq 3$.

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да је испуњено $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(3)}(x)$ за неко парно $t \geq 6$ и одређено $b \geq 3$. Коришћењем леме 3.24, видимо да мора бити $2^2 \nmid b$, $3^4 \nmid b$, $5^3 \nmid b$, $7^3 \nmid b$, као и $p^2 \nmid b$ за сваки прост број $p \geq 11$. Решавање проблема надаље делимо на два случаја у зависности од тога да ли број b садржи прост фактор из скупа $\{3, 5, 7\}$.

Случај $3 \nmid b \wedge 5 \nmid b \wedge 7 \nmid b$. У овом случају је јасно да број b обавезно има бар један прост фактор већи од седам, пошто је $b \notin \{1, 2\}$ и $2^2 \nmid b$. Узастопном применом теореме 2.2, можемо да скратимо све просте факторе датог броја веће од седам, све док не остане тачно један, а да притом одговарајућа дељивост и даље важи. Другим речима, долазимо до тога да сигурно мора бити $\Phi_{b'}(x) \mid Q_t^{(3)}(x)$ за неко $b' \in \mathbb{N}$ код ког важе услови:

- $2^2 \nmid b', 3 \nmid b', 5 \nmid b', 7 \nmid b'$;
- b' поседује тачно један прост фактор $p \geq 11$;
- $p^2 \nmid b'$.

На основу датих услова, једноставно је уочити да мора бити $b' = p$ или $b' = 2p$ за неки прост број $p \geq 11$, те директном употребом леме 3.25 одмах добијамо контрадикцију.

Случај $3 \mid b \vee 5 \mid b \vee 7 \mid b$. Сада можемо ланчано да користимо теорему 2.2 тако да скратимо све просте факторе броја b веће од седам. Осим тога, узевши у обзир да је

$$(3 - 2) + (5 - 2) + (7 - 2) > (10 - 2),$$

уколико се деси да новодобијени број истовремено садржи сва три проста фактора из скупа $\{3, 5, 7\}$, теорема 2.2 нам говори да сигурно можемо да скратимо неки од њих. На овај начин добијамо да обавезно важи $\Phi_{b'}(x) \mid Q_t^{(3)}(x)$ за неки број $b' \in \mathbb{N}$ који испуњава услове:

- b' има бар један прост фактор из скупа $\{3, 5, 7\}$;
- сви прости фактори броја b' припадају скупу $\{2, 3, 5, 7\}$;
- b' не садржи сва три проста фактора из скупа $\{3, 5, 7\}$;
- $2^2 \nmid b, 3^4 \nmid b, 5^3 \nmid b, 7^3 \nmid b$.

Међутим, лема 3.26 нас онда брзо доводи до контрадикције. □

Лема 3.28. *За било које парно $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 6$, полином $R_t^{(3)}(x)$ не може бити дељив ниједним циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ код ког важи $b \geq 3$.*

Доказ. Претпоставимо супротно, односно да важи $\Phi_b(x) \mid R_t^{(3)}(x)$ за одређено парно $t \geq 6$ и неко $b \geq 3$. На основу леме 3.24, директно закључујемо да обавезно важи $2^2 \nmid b, 3^3 \nmid b, 5^3 \nmid b$, као и $p^2 \nmid b$ за било који прост број $p \geq 7$. Слично као при доказивању леме 3.27, решавање проблема ћемо поделити на два случаја у зависности од тога да ли b поседује прост фактор из скупа $\{3, 5, 7, 11\}$.

Случај $3 \nmid b \wedge 5 \nmid b \wedge 7 \nmid b \wedge 11 \nmid b$. Пошто $2^2 \nmid b$ и $b \notin \{1, 2\}$, очигледно је да број b мора да има бар један прост фактор већи од једанаест. Ланчаном применом теореме 2.2 можемо да скратимо све просте факторе броја b веће од једанаест све док не остане само један, те није тешко утврдити да сигурно важи $\Phi_{b'}(x) \mid R_t^{(3)}(x)$ за неки број $b' \in \mathbb{N}$ који задовољава наредне услове:

- $2^2 \nmid b', 3 \nmid b', 5 \nmid b', 7 \nmid b', 11 \nmid b'$;
- b' поседује тачно један прост фактор $p \geq 13$;
- $p^2 \nmid b'$.

Другим речима, обавезно је $b' = p$ или $b' = 2p$ за неки прост број $p \geq 13$, одакле следи да $\Phi_{b'}(x) \mid R_t^{(3)}(x)$ није могуће на основу леме 3.25.

Случај $3 \mid b \lor 5 \mid b \lor 7 \mid b \lor 11 \mid b$. У овом случају нам теорема 2.2 омогућава да скратимо све просте факторе природног броја b веће од једанаест, а да одговарајућа дељивост и даље важи. Како знамо да је

$$(7-2)+(11-2) > 12-2,$$
$$(5-2)+(11-2) > 12-2,$$

имамо гаранцију да можемо одрадити додатно краћење преосталих простих фактора тако да коначно добијени број није дељив истовремено са седам и једанаест, или са пет и једанаест. Узевши све у обзир, долазимо до тога да обавезно важи $\Phi_{b'}(x) \mid R_t^{(3)}(x)$ за неко $b' \in \mathbb{N}$ које испуњава услове:

- b' има бар један прост фактор из скупа $\{3, 5, 7, 11\}$;
- сви прости фактори броја b' припадају скупу $\{2, 3, 5, 7, 11\}$;
- b' не садржи оба проста фактора из скупа $\{7, 11\}$ или из скупа $\{5, 11\}$;
- $2^2 \nmid b, 3^3 \nmid b, 5^3 \nmid b, 7^2 \nmid b, 11^2 \nmid b$.

Међутим, надаље одмах долазимо до контрадикције директном применом леме 3.26. □

У остатку датог одељка ћемо комплетирати доказ теореме 3.4 коришћењем претходно доказаних лема 3.27 и 3.28.

Доказ теореме 3.4. Једнакост (3.28) је очигледно еквивалентна са

$$\left(\zeta^{\frac{n}{4}+2} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-2}\right) + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq t-2}}^{t} \left(\zeta^j + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}}\right) = 0. \tag{3.30}$$

Дакле, за доказивање теореме је довољно показати да једнакост (3.30) не важи ни за један n-ти корен јединице $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$ различит од 1 и -1. Обављање доказа ће надаље бити раздељено на два случаја у зависности од тога да ли $\zeta^{\frac{n}{2}}$ износи 1 или -1.

Случај $\zeta^{\frac{n}{2}} = -1$. Тривијално је уочити да важи $\zeta^{\frac{n}{2}-j} = -\zeta^{-j}$ и $\zeta^{j-\frac{n}{2}} = -\zeta^j$, што нам брзо даје да мора бити

$$\zeta^j + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}} = 0$$

за свако $j = \overline{1, t}$. Из овог разлога, једнакост (3.30) се своди на

$$\zeta^{\frac{n}{4}+2} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-2} = 0,$$

што је надаље за сваки n-ти корен јединице $\zeta \notin \{1,-1\}$ обавезно еквивалентно са

$$\begin{aligned} & \zeta^{\frac{n}{4}+2} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-2} = 0 \\ \iff \quad & \zeta^{\frac{n}{4}+2}\left(\zeta^{\frac{n}{4}+2} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-2}\right) = 0 \\ \iff \quad & \zeta^{\frac{n}{2}+4} + \zeta^{\frac{n}{2}+2} + \zeta^2 + 1 = 0 \\ \iff \quad & -\zeta^4 - \zeta^2 + \zeta^2 + 1 = 0 \\ \iff \quad & \zeta^4 = 1. \end{aligned}$$

Дакле, ако претпоставимо да једнакост (3.30) наступа за неко $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$, $\zeta \notin \{1,-1\}$ које испуњава услов $\zeta^{\frac{n}{2}} = -1$, онда мора бити $\zeta \in \{i,-i\}$. Међутим, како важи $4 \mid \frac{n}{2}$, јасно је да имамо $i^{\frac{n}{2}} = (-i)^{\frac{n}{2}} = 1$, те долазимо до контрадикције.

Случај $\zeta^{\frac{n}{2}} = 1$. Овде брзо долазимо до тога да је $\zeta^{\frac{n}{2}-j} = \zeta^{-j}$ и $\zeta^{j-\frac{n}{2}} = \zeta^j$, што одмах имплицира да важи

$$\zeta^j + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}} = 2\left(\zeta^j + \zeta^{-j}\right)$$

за свако $j = \overline{1,t}$. Из овог разлога, једнакост (3.30) за свако $\zeta \neq 0$ мора надаље бити еквивалентна са

$$\begin{aligned} & \left(\zeta^{\frac{n}{4}+2} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-2}\right) + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq t-2}}^{t} \left(\zeta^j + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}}\right) = 0 \\ \iff \quad & \left(\zeta^{\frac{n}{4}+2} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-2}\right) + 2\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq t-2}}^{t} \left(\zeta^j + \zeta^{-j}\right) = 0 \\ \iff \quad & \left(\zeta^{\frac{n}{4}+2} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-2}\right) - 2 - 2\zeta^{t-2} - 2\zeta^{-t+2} + 2\sum_{j=-t}^{t} \zeta^j = 0 \\ \iff \quad & \zeta^t\left(\zeta^{\frac{n}{4}+2} + \zeta^{\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}} + \zeta^{-\frac{n}{4}-2} - 2 - 2\zeta^{t-2} - 2\zeta^{-t+2} + 2\sum_{j=-t}^{t} \zeta^j\right) = 0 \\ \iff \quad & \zeta^{t+\frac{n}{4}+2} + \zeta^{t+\frac{n}{4}} + \zeta^{t-\frac{n}{4}} + \zeta^{t-\frac{n}{4}-2} - 2\zeta^t - 2\zeta^{2t-2} - 2\zeta^2 + 2\sum_{j=0}^{2t} \zeta^j = 0. \end{aligned}$$

Узевши у обзир да је

$$\begin{aligned} (\zeta-1)&\left(\zeta^{t+\frac{n}{4}+2} + \zeta^{t+\frac{n}{4}} + \zeta^{t-\frac{n}{4}} + \zeta^{t-\frac{n}{4}-2} - 2\zeta^t - 2\zeta^{2t-2} - 2\zeta^2 + 2\sum_{j=0}^{2t} \zeta^j\right) = \\ &= \zeta^{t+\frac{n}{4}+3} - \zeta^{t+\frac{n}{4}+2} + \zeta^{t+\frac{n}{4}+1} - \zeta^{t+\frac{n}{4}} + \zeta^{t-\frac{n}{4}+1} - \zeta^{t-\frac{n}{4}} + \zeta^{t-\frac{n}{4}-1} - \zeta^{t-\frac{n}{4}-2} \\ &\quad - 2\zeta^{t+1} + 2\zeta^t - 2\zeta^{2t-1} + 2\zeta^{2t-2} - 2\zeta^3 + 2\zeta^2 + 2\zeta^{2t+1} - 2 \\ &= \zeta^{t+\frac{n}{4}+3} - \zeta^{t+\frac{n}{4}+2} + 2\zeta^{t+\frac{n}{4}+1} - 2\zeta^{t+\frac{n}{4}} + \zeta^{t+\frac{n}{4}-1} - \zeta^{t+\frac{n}{4}-2} \\ &\quad + 2\zeta^{2t+1} - 2\zeta^{2t-1} + 2\zeta^{2t-2} - 2\zeta^{t+1} + 2\zeta^t - 2\zeta^3 + 2\zeta^2 - 2, \end{aligned}$$

долазимо до тога да је за сваки n-ти корен јединице ζ различит од 1 и -1 једнакост (3.30) сигурно еквивалентна са

$$\begin{aligned} &\zeta^{t+\frac{n}{4}+3} - \zeta^{t+\frac{n}{4}+2} + 2\zeta^{t+\frac{n}{4}+1} - 2\zeta^{t+\frac{n}{4}} + \zeta^{t+\frac{n}{4}-1} - \zeta^{t+\frac{n}{4}-2} \\ &\quad + 2\zeta^{2t+1} - 2\zeta^{2t-1} + 2\zeta^{2t-2} - 2\zeta^{t+1} + 2\zeta^t - 2\zeta^3 + 2\zeta^2 - 2 = 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Надаље делимо решавање проблема на два одвојена подслучаја у зависности од тога да ли је $\zeta^{\frac{n}{4}}$ једнако 1 или -1.

Подслучај $\zeta^{\frac{n}{4}} = 1$. У овом подслучају је једноставно увидети да једнакост (3.31) постаје еквивалента са

$$\begin{aligned}\zeta^{t+3} - \zeta^{t+2} + 2\zeta^{t+1} - 2\zeta^{t} + \zeta^{t-1} - \zeta^{t-2}&\\ + 2\zeta^{2t+1} - 2\zeta^{2t-1} + 2\zeta^{2t-2} - 2\zeta^{t+1} + 2\zeta^{t} - 2\zeta^{3} + 2\zeta^{2} - 2 &= 0,\end{aligned}$$

односно

$$2\zeta^{2t+1} - 2\zeta^{2t-1} + 2\zeta^{2t-2} + \zeta^{t+3} - \zeta^{t+2} + \zeta^{t-1} - \zeta^{t-2} - 2\zeta^{3} + 2\zeta^{2} - 2 = 0. \tag{3.32}$$

Претпоставимо да једнакост (3.32) јесте задовољена за неки n-ти корен јединице ζ различит од 1 и -1 такав да важи $\zeta^{\frac{n}{4}} = 1$. Ако је $t = 4$, онда из једнакости (3.32) добијамо да мора бити

$$\begin{aligned} & 2\zeta^9 - \zeta^7 + \zeta^6 - \zeta^3 + \zeta^2 - 2 = 0\\ \iff\quad & (\zeta-1)(\zeta+1)^2\,(2\zeta^6 - 2\zeta^5 + 3\zeta^4 - 2\zeta^3 + 3\zeta^2 - 2\zeta + 2) = 0\\ \iff\quad & 2\zeta^6 - 2\zeta^5 + 3\zeta^4 - 2\zeta^3 + 3\zeta^2 - 2\zeta + 2 = 0.\end{aligned}$$

Међутим, полином $Z_9(x) = 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ не садржи ниједан корен јединице међу својим нулама, као што је демонстрирано путем одговарајућег математичког софтвера у прилогу А.2. Дакле, у овом случају добијамо контрадикцију. Са друге стране, ако је $t \geq 6$, онда директно следи да мора бити $Q_t^{(3)}(\zeta) = 0$ за дато $\zeta \in \mathbb{C}$, те обавезно важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(3)}(x)$ за неко $b \geq 3$. На основу леме 3.27 поново долазимо до контрадикције.

Подслучај $\zeta^{\frac{n}{4}} = -1$. Овде је јасно да се једнакост (3.31) своди на

$$\begin{aligned}-\zeta^{t+3} + \zeta^{t+2} - 2\zeta^{t+1} + 2\zeta^{t} - \zeta^{t-1} + \zeta^{t-2}&\\ + 2\zeta^{2t+1} - 2\zeta^{2t-1} + 2\zeta^{2t-2} - 2\zeta^{t+1} + 2\zeta^{t} - 2\zeta^{3} + 2\zeta^{2} - 2 &= 0,\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}2\zeta^{2t+1} - 2\zeta^{2t-1} + 2\zeta^{2t-2} - \zeta^{t+3} + \zeta^{t+2}&\\ - 4\zeta^{t+1} + 4\zeta^{t} - \zeta^{t-1} + \zeta^{t-2} - 2\zeta^{3} + 2\zeta^{2} - 2 &= 0.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Сада претпоставимо да једнакост (3.33) наступа за неки n-ти корен јединице ζ различит од 1 и -1 код ког је $\zeta^{\frac{n}{4}} = -1$. Уколико је $t = 4$, онда једнакост (3.33) брзо даје

$$\begin{aligned} & 2\zeta^9 - 3\zeta^7 + 3\zeta^6 - 4\zeta^5 + 4\zeta^4 - 3\zeta^3 + 3\zeta^2 - 2 = 0\\ \iff\quad & (\zeta-1)(2\zeta^8 + 2\zeta^7 - \zeta^6 + 2\zeta^5 - 2\zeta^4 + 2\zeta^3 - \zeta^2 + 2\zeta + 2) = 0\\ \iff\quad & 2\zeta^8 + 2\zeta^7 - \zeta^6 + 2\zeta^5 - 2\zeta^4 + 2\zeta^3 - \zeta^2 + 2\zeta + 2 = 0.\end{aligned}$$

Међутим, полином $Z_{10}(x) = 2x^8 + 2x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2$ међу својим нулама не поседује ниједан корен јединице. Споменуту чињеницу је могуће показати коришћењем математичког софтвера који пружа подршку за симболичка израчунавања као што је то урађено, на пример, у прилогу А.2. Из овог разлога, сигурно долазимо до контрадикције у случају да је $t = 4$. Са друге стране, ако је $t \geq 6$, тада добијамо да важи $R_t^{(3)}(\zeta) = 0$ за дато $\zeta \in \mathbb{C}$, па обавезно наступа $\Phi_b(x) \mid R_t^{(3)}(x)$ за неко $b \geq 3$. Лема 3.28 диктира да ово није могуће, чиме је доказ готов. $\square$

3.7 Конструкција за случај $2 \mid t,\ t \geq 4$ и $n \equiv_8 4,\ n \geq 4t + 12$

У последњем одељку овог поглавља излажемо преосталу конструкцију која довршава доказ теореме 3.1. Дати конструкциони шаблон ће на експлицитан начин показати нужно постојање $4t$-регуларног циркулантног матичног графа реда n за било које парно $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 4$ и $n \in \mathbb{N}$ које задовољава услове $n \equiv_8 4$ и $n \geq 4t + 12$. Споменути резултат очигледно чини директну последицу следеће теореме.

Теорема 3.5. *За свако парно $t \geq 4$ и било које $n \geq 4t+12$ такво да важи $n \equiv_8 4$, граф облика $\mathrm{Circ}(n, S''_{t,n})$, где је*

$$S''_{t,n} = \{1, 2, \dots, t-1\} \cup \left\{\frac{n}{4} - 1, \frac{n}{4} + 3\right\} \cup \left\{\frac{n}{2} - (t-1), \dots, \frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 1\right\},$$

мора да буде $4t$-регуларан циркулантан матичан граф реда n.

Једноставно је установити да је скуп $S''_{t,n}$ увек добро дефинисан, пошто важи $t-1 < \frac{n}{4}-1$ и $\frac{n}{4}+3 < \frac{n}{2}-(t-1)$ за било које парно $t \geq 4$ и произвољно $n \geq 4t+12$ које задовољава услов $n \equiv_8 4$. Осим тога, директном провером је врло лако уочити да овај скуп мора да има једнак број парних и непарних елемената. Узевши у обзир лему 3.1 заједно са претходно споменутим чињеницама, долазимо до тога да је за доказивање теореме 3.5 довољно установити да једнакост

$$\sum_{j=1}^{t-1} \left(\zeta^j + \zeta^{-j}\right) + \zeta^{\frac{n}{4}+3} + \zeta^{\frac{n}{4}-1} + \zeta^{-\frac{n}{4}+1} + \zeta^{-\frac{n}{4}-3} + \sum_{j=1}^{t-1} \left(\zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}}\right) = 0 \tag{3.34}$$

не важи ни за један n-ти корен јединице $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$ различит од 1 и -1.

Уведимо пре свега неколико помоћних појмова. За свако парно $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 4$ нека су $Q_t^{(4)}(x)$ и $R_t^{(4)}(x)$ наредна два полинома:

$$\begin{aligned} Q_t^{(4)}(x) &= 2x^{2t-1} + x^{t+3} - x^{t+2} + x^{t+1} - 3x^t + 3x^{t-1} - x^{t-2} + x^{t-3} - x^{t-4} - 2, \\ R_t^{(4)}(x) &= 2x^{2t-1} - x^{t+3} + x^{t+2} - x^{t+1} - x^t + x^{t-1} + x^{t-2} - x^{t-3} + x^{t-4} - 2. \end{aligned}$$

Јасно је да важи $2t-1 > t+3$ и $t-4 > 0$ за произвољно $t \geq 6$, док је $2t-1 = t+3$ и $t-4 = 0$ за $t = 4$. Из овог разлога, полиноми $Q_t^{(4)}(x)$ и $R_t^{(4)}(x)$ нужно имају тачно десет ненула чланова за било које парно $t \geq 6$, односноно осам ненула чланова у случају да је $t = 4$. Означимо скуп степена њихових ненула чланова са $L_t^{(4)}$, односно нека је

$$L_t^{(4)} = \{0, t-4, t-3, t-2, t-1, t, t+1, t+2, t+3, 2t-1\}$$

за свако парно $t \geq 4$. Аналогно стратегији доказивања искоришћеној у одељку 3.6, започнимо доказ лемом која говори о дељивости елемената скупа $L_t^{(4)}$.

Лема 3.29. *За свако парно $t \geq 4$ и произвољно $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 6$, скуп $L_t^{(4)}$ обавезно садржи елемент чији је остатак по модулу β јединствен унутар датог скупа.*

Доказ. Због $\beta \geq 6$, очигледно је да међу шест узастопних бројева $t-3, t-2, t-1, t, t+1, t+2$ никоја два не могу да дају исти остатак при дељењу са β. Без обзира на то да ли је $t = 4$ или $t \geq 6$, није тешко уочити да међу овим бројевима, бар два сигурно имају остатак по модулу β који је различит од остатака које дају сви бројеви из скупа $\{0, t-4, t+3, 2t-1\}$. $\square$

Применом леме 3.29 није тешко доћи до наредне леме која је аналогна претходно доказаној леми 3.24 и тиче се дељивости $Q_t^{(4)}(x)$ и $R_t^{(4)}(x)$ полинома циклотомичним полиномима.

Лема 3.30. *За произвољно парно $t \geq 4$, ако важи да су полином $Q_t^{(4)}(x)$ или полином $R_t^{(4)}(x)$ дељиви са $\Phi_b(x)$ за неко $b \in \mathbb{N}$, онда вредност b обавезно испуњава наредне услове:*

- *ако $2^2 \mid b$, онда $b \in \{4, 8\}$;*
- *$3^3 \nmid b$, $5^3 \nmid b$;*
- *$p^2 \nmid b$ за сваки прост број $p \geq 7$.*

Доказ. Претпоставимо да важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(4)}(x)$ или $\Phi_b(x) \mid R_t^{(4)}(x)$ за неко парно $t \geq 4$ и одређено $b \in \mathbb{N}$ које не испуњава ни други ни трећи услов наведен у леми. Ако је задовољено $3^3 \mid b$, односно $5^3 \mid b$, односно $p^2 \mid b$ за неки прост број $p \geq 7$, онда лема 2.6 говори да степени свих ненула чланова полинома $\Phi_b(x)$ морају бити дељиви са девет, односно 25, односно $p \geq 7$. У сваком случају, видимо да су степени свих ненула чланова $\Phi_b(x)$ сигурно дељиви неким бројем $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 6$. Заједничком применом лема 3.5 и 3.29, директно долазимо до тога да сигурно важи $\Phi_b(x) \mid c\, x^a$ за неко $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ и $a \in \mathbb{N}_0$. Међутим, наведена дељивост не може бити тачна, те закључујемо да број b ипак обавезно поштује и други и трећи услов исказан у леми.

Како бисмо комплетирали доказ леме, неопходно је демонстрирати да је сигурно тачно и прво наведено тврђење. Претпоставимо да важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(4)}(x)$ или $\Phi_b(x) \mid R_t^{(4)}(x)$ за неко парно $t \geq 4$ и $b \in \mathbb{N}$ које задовољава $2^2 \mid b$. У овом случају је употребом леме 2.6 могуће увидети да су степени свих ненула чланова полинома $\Phi_b(x)$ парни. Ради концизности, остатак доказа ћемо да поделимо на два случаја у зависности од тога да ли се бавимо полиномом $Q_t^{(4)}(x)$ или $R_t^{(4)}(x)$.

Случај $Q_t^{(4)}(x)$. Узевши у обзир да су бројеви $t+2, t, t-2, t-4, 0$ парни, а $2t-1, t+3, t+1, t-1, t-3$ непарни, уколико важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(4)}(x)$, тада директно следи

$$\begin{aligned}
&\Phi_b(x) \mid 2x^{2t-1} + x^{t+3} + x^{t+1} + 3x^{t-1} + x^{t-3},\\
&\Phi_b(x) \mid -x^{t+2} - 3x^t - x^{t-2} - x^{t-4} - 2.
\end{aligned}$$

Ако уведемо ознаке

$$\begin{aligned}
A(x) &= 2x^{2t-1} + x^{t+3} + x^{t+1} + 3x^{t-1} + x^{t-3},\\
B(x) &= -x^{t+2} - 3x^t - x^{t-2} - x^{t-4} - 2,
\end{aligned}$$

онда одмах добијамо

$$\begin{aligned}
&\Phi_b(x) \mid (x^6 + 3x^4 + x^2 + 1)\, A(x) + 2x^{t+3}\, B(x)\\
\implies\quad &\Phi_b(x) \mid x^{t+9} + 4x^{t+7} + 7x^{t+5} + 8x^{t+3} + 7x^{t+1} + 4x^{t-1} + x^{t-3}\\
\implies\quad &\Phi_b(x) \mid x^{t-3}\,(x^2+1)^4(x^4+1)\\
\implies\quad &\Phi_b(x) \mid (x^2+1)^4(x^4+1).
\end{aligned}$$

Одавде одмах видимо да било који b-ти примитивни корен јединице мора бити нула бар једног од полинома $x^2+1, x^4+1 \in \mathbb{Q}[x]$. Дакле, очигледно важи $b \in \{4, 8\}$.

Случај $R_t^{(4)}(x)$. У овом случају, аналогно можемо доћи до закључка да следи

$$\begin{aligned}
&\Phi_b(x) \mid 2x^{2t-1} - x^{t+3} - x^{t+1} + x^{t-1} - x^{t-3},\\
&\Phi_b(x) \mid x^{t+2} - x^t + x^{t-2} + x^{t-4} - 2.
\end{aligned}$$

Уколико означимо

$$\begin{aligned}
A(x) &= 2x^{2t-1} - x^{t+3} - x^{t+1} + x^{t-1} - x^{t-3},\\
B(x) &= x^{t+2} - x^t + x^{t-2} + x^{t-4} - 2,
\end{aligned}$$

директном рачуницом долазимо до тога да је

$$\begin{aligned}
&\Phi_b(x) \mid (-x^6 + x^4 - x^2 - 1)\, A(x) + 2x^{t+3}\, B(x)\\
\implies\quad &\Phi_b(x) \mid x^{t+9} - x^{t+5} - x^{t+1} + x^{t-3}\\
\implies\quad &\Phi_b(x) \mid x^{t-3}\,(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2(x^4+1)\\
\implies\quad &\Phi_b(x) \mid (x^2+1)^2(x^4+1).
\end{aligned}$$

Поново можемо да увидимо да сваки b-ти примитивни корен јединице обавезно чини нулу бар једног од полинома $x^2 + 1, x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, те је сигурно тачно $b = 4$ или $b = 8$. □

Лема 3.30 нам говори да, осим $\Phi_4(x)$ и $\Phi_8(x)$, једини циклотомични полиноми $\Phi_b(x)$ који потенцијално могу да деле $Q_t^{(4)}(x)$ или $R_t^{(4)}(x)$ су они код којих број b нема два иста проста фактора, осим евентуално тројку или петицу, при чему тада обавезно не важи ни $3^3 \nmid b$ и $5^3 \nmid b$. Наредни корак у доказивању теореме 3.5 биће демонстрирање чињенице да полиноми $Q_t^{(4)}(x)$ и $R_t^{(4)}(x)$ могу бити дељиви циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ само ако важи $b \in \{1, 2, 4, 8\}$. Како бисмо доказ наведеног тврђења образложили на што концизнији начин, изложићемо прво следеће две помоћне леме.

Лема 3.31. *За било које парно* $t \geq 4$ *и сваки прост број* $p \geq 11$*, ни* $Q_t^{(4)}(x)$ *ни* $R_t^{(4)}(x)$ *не могу бити дељиви циклотомичним полиномом* $\Phi_p(x)$ *или циклотомичним полиномом* $\Phi_{2p}(x)$.

Доказ. Пре свега, вреди уочити да нам лема 2.5 даје $\deg \Phi_p(x) = \deg \Phi_{2p}(x) = p - 1$. Надаље ћемо решавање проблема да разделимо на два случаја у зависности од тога да ли се бавимо полиномом $\Phi_p(x)$ или $\Phi_{2p}(x)$.

Случај $\Phi_p(x)$. Претпоставимо супротно, тј. да су дати паран број $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 4$ и неки прост број $p \geq 11$ такви да важи $\Phi_p(x) \mid Q_t^{(4)}(x)$ или $\Phi_p(x) \mid R_t^{(4)}(x)$. Даље, нека су полиноми $U(x), V(x) \in \mathbb{Z}[x]$ дефинисани на следећи начин:

$$\begin{aligned}
U(x) = 2x^{(2t-1) \bmod p} &+ x^{(t+3) \bmod p} - x^{(t+2) \bmod p} + x^{(t+1) \bmod p} - 3x^{t \bmod p}\\
&+ 3x^{(t-1) \bmod p} - x^{(t-2) \bmod p} + x^{(t-3) \bmod p} - x^{(t-4) \bmod p} - 2,\\
V(x) = 2x^{(2t-1) \bmod p} &- x^{(t+3) \bmod p} + x^{(t+2) \bmod p} - x^{(t+1) \bmod p} - x^{t \bmod p}\\
&+ x^{(t-1) \bmod p} + x^{(t-2) \bmod p} - x^{(t-3) \bmod p} + x^{(t-4) \bmod p} - 2.
\end{aligned}$$

Како је $\Phi_p(x) \mid Q_t^{(4)}(x) \iff \Phi_p(x) \mid U(x)$ и $\Phi_p(x) \mid R_t^{(4)}(x) \iff \Phi_p(x) \mid V(x)$, директно следи да циклотомични полином $\Phi_p(x)$ мора да дели $U(x)$ или $V(x)$. Узевши у обзир да је $\deg U(x) \leq p - 1$ и $\deg V(x) \leq p - 1$, долазимо до тога да мора бити тачно бар једно од следећа два тврђења:

- $U(x) \equiv 0$ или $V(x) \equiv 0$;
- $U(x) = c\,\Phi_p(x)$ или $V(x) = c\,\Phi_p(x)$ за неко $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

На основу леме 3.29, видимо да оба полинома $Q_t^{(4)}(x)$ и $R_t^{(4)}(x)$ обавезно поседују ненула члан чији степен даје јединствен остатак по модулу p. Из овог разлога, немогуће је да се деси $U(x) \equiv 0$ или $V(x) \equiv 0$. Осим тога, када би за неко $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ важило $U(x) = c\,\Phi_p(x)$ или $V(x) = c\,\Phi_p(x)$, тада би бар један од дата два полинома имао исти број ненула чланова као $\Phi_p(x)$. Међутим, у овом случају бисмо поново дошли до контрадикције, пошто и $U(x)$ и $V(x)$ могу да имају највише десет ненула чланова, док $\Phi_p(x)$ има тачно $p \ge 11$.

Случај $\Phi_{2p}(x)$. Претпоставимо да важи $\Phi_{2p}(x) \mid Q_t^{(4)}(x)$ или $\Phi_{2p}(x) \mid R_t^{(4)}(x)$ за неки паран број $t \in \mathbb{N}$, $t \ge 4$ и прост број $p \ge 11$. Осим тога, нека $U(x)$ и $V(x)$ буду наредни полиноми:

$$\begin{aligned}
U(x) = {} & 2(-1)^{\lfloor \frac{2t-1}{p} \rfloor} x^{(2t-1) \bmod p} + (-1)^{\lfloor \frac{t+3}{p} \rfloor} x^{(t+3) \bmod p} - (-1)^{\lfloor \frac{t+2}{p} \rfloor} x^{(t+2) \bmod p} \\
& + (-1)^{\lfloor \frac{t+1}{p} \rfloor} x^{(t+1) \bmod p} - 3(-1)^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} x^{t \bmod p} + 3(-1)^{\lfloor \frac{t-1}{p} \rfloor} x^{(t-1) \bmod p} \\
& - (-1)^{\lfloor \frac{t-2}{p} \rfloor} x^{(t-2) \bmod p} + (-1)^{\lfloor \frac{t-3}{p} \rfloor} x^{(t-3) \bmod p} - (-1)^{\lfloor \frac{t-4}{p} \rfloor} x^{(t-4) \bmod p} - 2, \\
V(x) = {} & 2(-1)^{\lfloor \frac{2t-1}{p} \rfloor} x^{(2t-1) \bmod p} - (-1)^{\lfloor \frac{t+3}{p} \rfloor} x^{(t+3) \bmod p} + (-1)^{\lfloor \frac{t+2}{p} \rfloor} x^{(t+2) \bmod p} \\
& - (-1)^{\lfloor \frac{t+1}{p} \rfloor} x^{(t+1) \bmod p} - (-1)^{\lfloor \frac{t}{p} \rfloor} x^{t \bmod p} + (-1)^{\lfloor \frac{t-1}{p} \rfloor} x^{(t-1) \bmod p} \\
& + (-1)^{\lfloor \frac{t-2}{p} \rfloor} x^{(t-2) \bmod p} - (-1)^{\lfloor \frac{t-3}{p} \rfloor} x^{(t-3) \bmod p} + (-1)^{\lfloor \frac{t-4}{p} \rfloor} x^{(t-4) \bmod p} - 2.
\end{aligned}$$

Није тешко установити да сигурно важе еквиваленције $\Phi_{2p}(x) \mid Q_t^{(4)}(x) \iff \Phi_{2p}(x) \mid U(x)$, као и $\Phi_{2p}(x) \mid R_t^{(4)}(x) \iff \Phi_{2p}(x) \mid V(x)$. Одавде се види да полином $\Phi_{2p}(x)$ обавезно дели бар један од полинома $U(x)$ и $V(x)$. Даље, узевши у обзир да је $\deg U(x) \le p-1$ заједно уз $\deg V(x) \le p-1$, лако је запазити да мора бити тачно бар једно од дата два тврђења:

- $U(x) \equiv 0$ или $V(x) \equiv 0$;
- $U(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$ или $V(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$ за неко $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Лема 3.29 нам говори да оба полинома $Q_t^{(4)}(x)$ и $R_t^{(4)}(x)$ нужно садрже ненула члан чији степен даје јединствен остатак по модулу p, те није могуће да буде $U(x) \equiv 0$ или $V(x) \equiv 0$. Са друге стране, ако би за неко $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ важило $U(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$ или $V(x) = c\,\Phi_{2p}(x)$, онда би бар један од ова два полинома морао да има исти број ненула чланова као $\Phi_{2p}(x)$, што је поново немогуће, јер $U(x)$ и $V(x)$ могу да имају највише десет ненула чланова, док $\Phi_p(x)$ има тачно $p \ge 11$. □

Лема 3.32. *За свако парно* $t \in \mathbb{N}$, $t \ge 4$, *ни* $Q_t^{(4)}(x)$ *ни* $R_t^{(4)}(x)$ *не могу бити дељиви циклотомичним полиномом* $\Phi_b(x)$ *код ког вредност* $b \in \mathbb{N}$ *задовољава следеће услове:*

- $b \ge 3$;
- b *не поседује ниједан прост фактор ван скупа* $\{2, 3, 5, 7\}$;
- b *не садржи све просте факторе из скупа* $\{3, 5, 7\}$;
- $2^2 \nmid b$, $3^3 \nmid b$, $5^3 \nmid b$, $7^2 \nmid b$.

Доказ. Нека је дат фиксиран природан број $b \in \mathbb{N}$ који поштује услове наведене у леми. За произвољно $t \in \mathbb{N}_0$, нека су полиноми $U_t(x), V_t(x) \in \mathbb{Z}[x]$ дефинисани на наредни начин:

$$\begin{aligned} U_t(x) = 2x^{(2t-1) \bmod b} &+ x^{(t+3) \bmod b} - x^{(t+2) \bmod b} + x^{(t+1) \bmod b} - 3x^{t \bmod b} \\ &+ 3x^{(t-1) \bmod b} - x^{(t-2) \bmod b} + x^{(t-3) \bmod b} - x^{(t-4) \bmod b} - 2, \\ V_t(x) = 2x^{(2t-1) \bmod b} &- x^{(t+3) \bmod b} + x^{(t+2) \bmod b} - x^{(t+1) \bmod b} - x^{t \bmod b} \\ &+ x^{(t-1) \bmod b} + x^{(t-2) \bmod b} - x^{(t-3) \bmod b} + x^{(t-4) \bmod b} - 2. \end{aligned}$$

За било које парно $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 4$ је јасно да важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(4)}(x) \iff \Phi_b(x) \mid U_t(x)$ и $\Phi_b(x) \mid R_t^{(4)}(x) \iff \Phi_b(x) \mid V_t(x)$. Осим тога, очигледно је да свега коначно много вредности $b \in \mathbb{N}$ испуњава све услове дате у леми. Из овог разлога, за доказивање леме је могуће применити исту технику која је претходно употребљена у доказима лема 3.12, 3.18 и 3.26. Другим речима, довољно је демонстрирати да важи $\Phi_b(x) \nmid U_t(x)$ и $\Phi_b(x) \nmid V_t(x)$ за свако $b \in \mathbb{N}$ које поштује услове наведене у леми и за произвољно $t = \overline{0, b-1}$. Споменута провера се на једноставан начин може обавити путем одговарајућег математичког софтвера, те се доказ леме може довршити уз помоћ програмског кода на језику Wolfram Mathematica који је изложен у прилогу А.6. $\square$

У наставку наводимо главну лему која се тиче дељивости $Q_t^{(4)}(x)$ и $R_t^{(4)}(x)$ полинома циклотомичним полиномима. Као и приликом доказивања лема 3.13, 3.19, 3.27 и 3.28, процедура демонстрирања траженог тврђења ће у огромној мери зависити од теореме 2.2.

Лема 3.33. *За било које парно $t \geq 4$, ни $Q_t^{(4)}(x)$ ни $R_t^{(4)}(x)$ не могу бити дељиви циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ код ког је $b \notin \{1, 2, 4, 8\}$.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да важи $\Phi_b(x) \mid Q_t^{(4)}(x)$ или $\Phi_b(x) \mid R_t^{(4)}(x)$ за неко парно $t \geq 4$ и одређено $b \notin \{1, 2, 4, 8\}$. Применом леме 3.30, очигледно је да мора бити $2^2 \nmid b$, $3^3 \nmid b$, $5^3 \nmid b$, као и $p^2 \nmid b$ за сваки прост број $p \geq 7$. Надаље ћемо доказивање леме разбити на два случаја у зависности од тога да ли број b поседује прост фактор из скупа $\{3, 5, 7\}$.

Случај $3 \nmid b \land 5 \nmid b \land 7 \nmid b$. Узевши у обзир да $b \notin \{1, 2\}$, јасно је да овај број мора да има бар један прост фактор већи од седам. Ланчаном применом теореме 2.2, у стању смо да скраћујемо све просте факторе броја b веће од седам све док не остане само један, а да притом одговарајућа дељивост и даље важи. На овај начин долазимо до тога да сигурно наступа $\Phi_{b'}(x) \mid Q_t^{(4)}(x)$ или $\Phi_{b'} \mid R_t^{(4)}(x)$ за одговарајући природан број $b' \in \mathbb{N}$ који испуњава наредне услове:

- $2^2 \nmid b'$, $3 \nmid b'$, $5 \nmid b'$, $7 \nmid b'$;
- b' поседује тачно један прост фактор $p \geq 11$;
- $p^2 \nmid b'$.

Пошто мора бити $b' = p$ или $b' = 2p$ за неки прост број $p \geq 11$, сада је могуће доћи до контрадикције директним коришћењем леме 3.31.

Случај $3 \mid b \lor 5 \mid b \lor 7 \mid b$. У овом случају, теорема 2.2 се може вишеструко употребљавати тако да се скрате сви прости фактори броја b који су већи од седам. Осим тога, како је

$$(3-2) + (5-2) + (7-2) > 10 - 2,$$

уколико се деси да новодобијени број садржи сва три проста фактора из скупа $\{3, 5, 7\}$, тада сигурно можемо да скратимо неки од њих. Узевши све у обзир, долазимо до тога да обавезно важи $\Phi_{b'}(x) \mid Q_t^{(4)}(x)$ или $\Phi_{b'}(x) \mid Q_t^{(4)}(x)$ за број $b' \in \mathbb{N}$ такав да су испуњени сви наведени услови:

- b' има бар један прост фактор из скупа $\{3, 5, 7\}$;
- сви прости фактори броја b' припадају скупу $\{2, 3, 5, 7\}$;
- b' не садржи сва три проста фактора из скупа $\{3, 5, 7\}$;
- $2^2 \nmid b', 3^3 \nmid b', 5^3 \nmid b', 7^2 \nmid b'$.

Међутим, лема 3.32 нас надаље одмах води до контрадикције, чиме је доказ дате леме комплетиран. □

У остатку датог одељка ћемо довршити доказ теореме 3.5 на веома сличан начин као што је у претходним одељцима то урађено за теореме 3.2, 3.3 и 3.4.

Доказ теореме 3.5. Једнакост (3.34) се одмах своди на

$$\left(\zeta^{\frac{n}{4}+3} + \zeta^{\frac{n}{4}-1} + \zeta^{-\frac{n}{4}+1} + \zeta^{-\frac{n}{4}-3}\right) + \sum_{j=1}^{t-1} \left(\zeta^{j} + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}}\right) = 0. \tag{3.35}$$

Дакле, за доказивање теореме је довољно установити да једнакост (3.35) не наступа ни за једно $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$, $\zeta \notin \{1, -1\}$. Демонстрирање ове чињенице ће бити подељено на два случаја у зависности од тога да ли је $\zeta^{\frac{n}{2}}$ једнако 1 или -1.

Случај $\zeta^{\frac{n}{2}} = -1$. Очигледно је да важи $\zeta^{\frac{n}{2}-j} = -\zeta^{-j}$ и $\zeta^{j-\frac{n}{2}} = -\zeta^{j}$, одакле добијамо да износи

$$\zeta^{j} + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}} = 0$$

за свако $j = \overline{1, t-1}$. Дакле, у овом се случају једнакост (3.35) своди на

$$\zeta^{\frac{n}{4}+3} + \zeta^{\frac{n}{4}-1} + \zeta^{-\frac{n}{4}+1} + \zeta^{-\frac{n}{4}-3} = 0,$$

што за сваки n-ти корен јединице ζ различит од 1 и -1 убрзо постаје еквивалентно са

$$\begin{aligned}
& & \zeta^{\frac{n}{4}+3} + \zeta^{\frac{n}{4}-1} + \zeta^{-\frac{n}{4}+1} + \zeta^{-\frac{n}{4}-3} &= 0 \\
&\iff & \zeta^{\frac{n}{4}+3}\left(\zeta^{\frac{n}{4}+3} + \zeta^{\frac{n}{4}-1} + \zeta^{-\frac{n}{4}+1} + \zeta^{-\frac{n}{4}-3}\right) &= 0 \\
&\iff & \zeta^{\frac{n}{2}+6} + \zeta^{\frac{n}{2}+2} + \zeta^{4} + 1 &= 0 \\
&\iff & -\zeta^{6} - \zeta^{2} + \zeta^{4} + 1 &= 0 \\
&\iff & -(\zeta-1)(\zeta+1)(\zeta^{4}+1) &= 0 \\
&\iff & \zeta^{4} &= -1.
\end{aligned}$$

Одавде видимо да уколико једнакост (3.35) наступа за неки n-ти корен јединице $\zeta \notin \{1, -1\}$, онда он мора да чини осми примитивни корен јединице. Међутим, због $8 \nmid n$ је јасно да ниједан осми примитивни корен јединице не може истовремено бити n-ти корен јединице, те једнакост (3.35) сигурно не сме да важи ни за једно $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$, $\zeta \notin \{1, -1\}$.

Случај $\zeta^{\frac{n}{2}} = 1$. У овом случају је јасно да наступа $\zeta^{\frac{n}{2}-j} = \zeta^{-j}$ and $\zeta^{j-\frac{n}{2}} = \zeta^{j}$, што нас директно доводи до тога да је

$$\zeta^j + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}} = 2\left(\zeta^j + \zeta^{-j}\right)$$

за свако $j = \overline{1, t-1}$. Узевши ово у обзир, обичном рачуницом је за сваки n-ти корен јединице $\zeta \notin \{1, -1\}$ могуће установити следећи низ еквиваленција

$$\begin{aligned}
& \left(\zeta^{\frac{n}{4}+3} + \zeta^{\frac{n}{4}-1} + \zeta^{-\frac{n}{4}+1} + \zeta^{-\frac{n}{4}-3}\right) + \sum_{j=1}^{t-1}\left(\zeta^j + \zeta^{-j} + \zeta^{\frac{n}{2}-j} + \zeta^{j-\frac{n}{2}}\right) = 0 \\
\iff \quad & \left(\zeta^{\frac{n}{4}+3} + \zeta^{\frac{n}{4}-1} + \zeta^{-\frac{n}{4}+1} + \zeta^{-\frac{n}{4}-3}\right) + 2\sum_{j=1}^{t-1}\left(\zeta^j + \zeta^{-j}\right) = 0 \\
\iff \quad & \left(\zeta^{\frac{n}{4}+3} + \zeta^{\frac{n}{4}-1} + \zeta^{-\frac{n}{4}+1} + \zeta^{-\frac{n}{4}-3}\right) - 2 + 2\sum_{j=-t+1}^{t-1}\zeta^j = 0 \\
\iff \quad & \zeta^{t-1}\left(\zeta^{\frac{n}{4}+3} + \zeta^{\frac{n}{4}-1} + \zeta^{-\frac{n}{4}+1} + \zeta^{-\frac{n}{4}-3} - 2 + 2\sum_{j=-t+1}^{t-1}\zeta^j\right) = 0 \\
\iff \quad & \zeta^{t+\frac{n}{4}+2} + \zeta^{t+\frac{n}{4}-2} + \zeta^{t-\frac{n}{4}} + \zeta^{t-\frac{n}{4}-4} - 2\zeta^{t-1} + 2\sum_{j=0}^{2t-2}\zeta^j = 0 \\
\iff \quad & (\zeta - 1)\left(\zeta^{t+\frac{n}{4}+2} + \zeta^{t+\frac{n}{4}-2} + \zeta^{t-\frac{n}{4}} + \zeta^{t-\frac{n}{4}-4} - 2\zeta^{t-1} + 2\sum_{j=0}^{2t-2}\zeta^j\right) = 0,
\end{aligned}$$

што коначно доводи до тога да се једнакост (3.35) своди на

$$\begin{aligned}
& \zeta^{t+\frac{n}{4}+3} - \zeta^{t+\frac{n}{4}+2} + \zeta^{t+\frac{n}{4}-1} - \zeta^{t+\frac{n}{4}-2} + \zeta^{t-\frac{n}{4}+1} - \zeta^{t-\frac{n}{4}} \\
& \quad + \zeta^{t-\frac{n}{4}-3} - \zeta^{t-\frac{n}{4}-4} + 2\zeta^{2t-1} - 2\zeta^t + 2\zeta^{t-1} - 2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Надаље решавање проблема разбијамо на још два подслучаја у зависности од тога колико износи вредност $\zeta^{\frac{n}{4}}$.

Подслучај $\zeta^{\frac{n}{4}} = 1$. У овом подслучају је очигледно да је једнакост (3.36) еквивалентна са

$$\zeta^{t+3} - \zeta^{t+2} + \zeta^{t-1} - \zeta^{t-2} + \zeta^{t+1} - \zeta^t + \zeta^{t-3} - \zeta^{t-4} + 2\zeta^{2t-1} - 2\zeta^t + 2\zeta^{t-1} - 2 = 0.$$

Дакле, кад би једнакост (3.36) била задовољена за неко $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta^n = 1$, $\zeta \notin \{1, -1\}$, онда би дато ζ чинило нулу полинома $Q_t^{(4)}(x)$. Пошто је $n \equiv_8 4$, јасно је да ζ не сме бити осми примитивни корен јединице, а због $4 \nmid \frac{n}{2}$ и $\zeta^{\frac{n}{2}} = 1$, није тешко установити да ζ не може бити ни четврти примитивни корен јединице. Узевши све у обзир, долазимо до закључка да обавезно важи $\Phi_b \mid Q_t^{(4)}(x)$ за неко $b \notin \{1, 2, 4, 8\}$, што је немогуће на основу леме 3.33.

Подслучај $\zeta^{\frac{n}{4}} = -1$. У овом подслучају је лако установити да се једнакост (3.36) одмах своди на

$$-\zeta^{t+3} + \zeta^{t+2} - \zeta^{t-1} + \zeta^{t-2} - \zeta^{t+1} + \zeta^t - \zeta^{t-3} + \zeta^{t-4} + 2\zeta^{2t-1} - 2\zeta^t + 2\zeta^{t-1} - 2 = 0.$$

Одавде видимо да уколико би једнакост (3.36) била тачна за неки n-ти корен јединице различит од 1 и -1, онда би он чинио нулу полинома $R_t^{(4)}(x)$. Међутим, сада можемо да употребимо идентично образложење као у претходном подслучају како бисмо показали да не сме да важи $\zeta^8 = 1$. Из овог разлога, добијамо да је нужно испуњено $\Phi_b(x) \mid R_t^{(4)}(x)$ за неко $b \notin \{1, 2, 4, 8\}$, те директним коришћењем леме 3.33 долазимо до контрадикције. □

Поглавље 4

Спектрална својства балансираних стабала

Математички проблем израчунавања карактеристичног полинома стабла је веома стар у оквиру области спектралне теорије графова. Из овог разлога, постоје разне познате методе које служе за одређивање карактеристичног полинома стабла од интереса (видети, на пример, [12, одељак 5.1]). Међу њима, одређена група формула функционише по принципу обављања рекурзивне рачунице над произвољним коренским стаблом које одговара задатом стаблу. Од оваквих метода вреди споменути резултате базиране на полиномном рачуну које су изложили Tinhofer и Schreck [87, теорема 1], као и Мохар [62, лема 2].

Техника за рекурзивно израчунавање карактеристичног полинома коренског стабла која налази велику примену при испитивању спектралних својстава стабала са правилном структуром јесте принцип придружених рационалних функција који су увели Jacobs и Trevisan [46]. Идеја иза ове методе постаје значајно корисна поготово приликом сагледавања разних типова балансираних стабала (видети, на пример, [44, 72]). Међу оваквим стаблима, за Бете стабла и за дендримере се показало да имају разнолику практичну примену (видети, на пример, [64, 92]), те су зато многи теоретичари графова бацили фокус на проучавање њихових спектралних својстава. Између осталог, Rojo и Robbiano су анализирали скупове свих сопствених вредности и Лапласових сопствених вредности произвољног Бете стабла [71], док су Robbiano и Trevisan разматрали проблем одређивања карактеристичног полинома и Лапласовог карактеристичног полинома код оваквих стабала [70]. Са друге стране, Стевановић се бавио проучавањем дендримера и успео је да апроксимира њихову енергију [84].

Дато поглавље докторске дисертације бавиће се балансираним стаблима, уз посебан фокус на Бете стабла и дендримере. У оквиру поглавља биће обављена спектрална анализа оваквих графова директном применом резултата које су добили Дамњановић и др. [30], као и Дамњановић [28]. Пре свега, биће изложен концизан математички доказ једног неопходног резултата који је базиран на принципу придружених рационалних функција и који чини проширење технике коју су увели Jacobs и Trevisan [46]. Споменуто тврђење омогућава комотан начин за одређивање карактеристичног полинома разних матрица придружених стаблу које имају практичну примену, као што је демонстрирано у наредној теореми.

Теорема 4.1 (Принцип придружених рационалних функција)**.** *Нека је задато произвољно коренско стабло $T = (V_T, E_T, \psi_T, r_T)$ чија је матрица суседства $\boldsymbol{A}_T \in \mathbb{R}^{V_T \times V_T}$ и нека матрица $\boldsymbol{B}_0 \in \mathbb{R}^{V_T \times V_T}$ представља било коју дијагоналну матрицу. Уколико сваком чвору $u \in V_T$ рекурзивно придружимо рационалну функцију $\mathcal{F}_u(x) \in \mathbb{R}(x)$ преко формуле*

$$\mathcal{F}_u(x) = x - (\boldsymbol{B}_0)_{u,u} - \sum_{v \in c_T(u)} \frac{1}{\mathcal{F}_v(x)}, \tag{4.1}$$

тада за матрице

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{A}_T,$$
$$\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_0 - \boldsymbol{A}_T,$$

важи једнакост

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{B}_1}(x) = \mathcal{P}_{\boldsymbol{B}_2}(x) = \prod_{u \in V_T} \mathcal{F}_u(x).$$

Након излагања доказа теореме 4.1, споменуто тврђење ће бити вишеструко коришћено при вршењу спектралне анализе разних балансираних стабала. Дакле, биће исказан детаљан прорачун који доводи до (Лапласовог) карактеристичног полинома, као и скупа (Лапласових) сопствених вредности, који одговарају произвољном балансираном стаблу. На основу датих резултата ћемо надаље бити у могућности да добијене формуле директно применимо над Бете стаблима и дендримерима у циљу испитивања спектралних својстава њихових матрица суседства. Најзад, бацићемо фокус на изучавање енергије Бете стабала и дендримера.

Вреди напоменути да су за свако $d, k \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, сва Бете стабла облика $\mathcal{B}_{d,k}$ очигледно међусобно изоморфна, исто као што су и сви дендримери облика $\mathcal{B}_{d,k}$ међусобно изоморфни. Пошто изоморфни графови обавезно имају исти карактеристични полином, спектар, као и енергију, јасно је да при обављању неопходне спектралне анализе можемо да користимо нотацију $\mathcal{B}_{d,k}$, односно $\mathcal{B}_{d,k}$, ради означавања било ког Бете стабла, односно дендримера, одговарајућег типа. Другим речима, под ознаком $\mathcal{E}_{\mathcal{B}_{d,k}}$ можемо да подразумевамо енергију било ког Бете стабла облика $\mathcal{B}_{d,k}$, те се аналогно могу обележавати и остала споменута спектрална својства која одговарају произвољном коренском стаблу типа $\mathcal{B}_{d,k}$ или $\mathcal{D}_{d,k}$ за неко $d, k \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$.

Приликом обављања неопходне рачунице везане за одређивање енергије неког Бете стабла или дендримера, понављаће се одговарајући чланови које вреди концизно обухватити у виду реалних низова $\left(y_j^{(1)}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ и $\left(y_j^{(2)}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ задатих у наставку:

$$y_j^{(1)} = \begin{cases} 2\csc\left(\dfrac{\pi}{2j+4}\right) - 2\cot\left(\dfrac{\pi}{2j+2}\right), & 2 \nmid j, \\ 2\cot\left(\dfrac{\pi}{2j+4}\right) - 2\csc\left(\dfrac{\pi}{2j+2}\right), & 2 \mid j \end{cases} \qquad (\forall j \in \mathbb{N}),$$

$$y_j^{(2)} = \begin{cases} 2\csc\left(\dfrac{\pi}{2j+4}\right) - 2\csc\left(\dfrac{\pi}{2j}\right), & 2 \nmid j, \\ 2\cot\left(\dfrac{\pi}{2j+4}\right) - 2\cot\left(\dfrac{\pi}{2j}\right), & 2 \mid j \end{cases} \qquad (\forall j \in \mathbb{N}).$$

За Бете стабла се испоставља да није тешко пронаћи концизан експлицитан израз који одређује њихову енергију, као што показује наредна теорема.

Теорема 4.2 (Енергија Бете стабала)**.** *За произвољно дато Бете стабло типа $\mathcal{B}_{d,k}$, где је $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ и $k \in \mathbb{N}$, важи једнакост*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{B}_{d,k}} = \sum_{j=1}^{k-1} y_j^{(1)} (d-1)^{k-\frac{1}{2}-j}. \tag{4.2}$$

Осим тога, за било које $k \in \mathbb{N}$ је испуњено

$$\mathcal{E}_{\mathcal{B}_{2,k}} = \begin{cases} 2\left(\cot\left(\dfrac{\pi}{2k+2}\right) - 1\right), & 2 \nmid k, \\ 2\left(\csc\left(\dfrac{\pi}{2k+2}\right) - 1\right), & 2 \mid k. \end{cases} \tag{4.3}$$

Са друге стране, код дендримера је доста теже добити формулу која у општем случају диктира колико износи њихова енергија. Споменута чињеница је директна последица тога да дендримери имају мање правилну структуру. Међутим, иако није једноставно пронаћи тачан израз који одређује енергију дендримера, могуће је одрадити релативно прецизну апроксимацију ове вредности на начин који је демонстриран у следећој теореми.

Теорема 4.3 (Апроксимација енергије дендримера)**.** *За било које $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ и $k \in \mathbb{N}$, енергија дендримера облика $\mathcal{D}_{d,k}$ може да се апроксимира на следећи начин:*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}} < \sum_{j=1}^{k-1} y_j^{(2)} (d-1)^{k-\frac{1}{2}-j} + 2(d-1)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.4}$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}} > \sum_{j=1}^{k-1} y_j^{(2)} (d-1)^{k-\frac{1}{2}-j} - 2.4(d-1)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5}$$

Такође, за било које $k \in \mathbb{N}$, енергија дендримера $\mathcal{D}_{2,k}$ се да израчунати преко израза

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{2,k}} = 2\left(\cot\left(\frac{\pi}{4k}\right) - 1\right). \tag{4.6}$$

Остатак датог поглавља ће се примарно бавити излагањем доказа свих претходно споменутих математичких резултата. Пре свега, почетна теорема 4.1 ће бити доказана у оквиру одељка 4.1. Након тога ће дата теорема бити вишеструко примењивана унутар одељка 4.2 при одређивању неопходних основних спектралних својстава балансираних стабала, укључујући спектрална својства матрице суседства Бете стабала и дендримера који чине њихов специјалан случај. Одељак 4.3 ће као циљ имати доказивање теореме 4.2, односно рачунање енергије Бете стабала, док ће се одељак 4.4 бавити извођењем апроксимације енергије дендримера која је дата у теореми 4.3. У оквиру споменутог одељка биће изложени и одређени резултати који се тичу асимптотског понашања енергије дендримера.

4.1 Принцип придружених рационалних функција

Дати одељак ће се бавити излагањем комплетног математичког доказа теореме 4.1. Пре свега, вреди напоменути да на основу израза (4.1) није тешко установити да је свака придружена рационална функција $\mathcal{F}_u(x)$ обавезно степена један, тј. мора бити записива у облику

$$\mathcal{F}_u(x) = \frac{\mathcal{F}_u^{(1)}(x)}{\mathcal{F}_u^{(2)}(x)},$$

где $\mathcal{F}_u^{(1)}(x), \mathcal{F}_u^{(2)}(x) \in \mathbb{R}[x]$ чине реалне полиноме код којих важи услов

$$\deg \mathcal{F}_u^{(1)}(x) - \deg \mathcal{F}_u^{(2)}(x) = 1.$$

Из овог разлога, за сваки чвор $u \in V_T$ произвољног коренског стабла $T = (V_T, E_T, \psi_T, r_T)$ сигурно је задовољено $\mathcal{F}_u(x) \not\equiv 0$. На овај начин долазимо до тога да је сама формула (4.1) обавезно добро дефинисана, узевши у обзир да приликом додељивања рационалне функције неком чвору, увек постоји инверз било које претходно придружене рационалне функције која одговара неком његовом детету.

Уведимо сада неколико помоћних појмова. Најпре, нека за разматрано коренско стабло $T = (V_T, E_T, \psi_T, r_T)$ ознака $V_T^{(j)}$ обележава скуп свих његових чворова који се налазе на нивоу j, за свако $j = \overline{1, l_T}$. Даље, за задату матрицу $\boldsymbol{B}_0 \in \mathbb{R}^{V_T \times V_T}$ и произвољно $j = \overline{1, l_T}$, нека $\boldsymbol{C}_j$ означава дијагоналну $\left(V_T^{(j)} \times V_T^{(j)}\right)$-подматрицу матрице $\boldsymbol{B}_0$. Најзад, нека за свако $j = \overline{2, l_T}$ нотација $\boldsymbol{D}_j$ обележава $\left(V_T^{(j)} \times V_T^{(j-1)}\right)$-подматрицу матрице суседства $\boldsymbol{A}_T$ задатог коренског стабла. Уколико за свако $j = \overline{1, l_T}$ додатно уведемо дијагоналну матрицу $\boldsymbol{R}_j \in \mathbb{R}(x)^{V_T^{(j)} \times V_T^{(j)}}$ путем једноставне формуле

$$\left(\boldsymbol{R}_j\right)_{u,v} = \begin{cases} \mathcal{F}_u(x), & u = v, \\ 0, & u \neq v \end{cases} \qquad \left(\forall u, v \in V_T^{(j)}\right),$$

тада је јасно да свака од $\boldsymbol{R}_j$ матрица мора бити инвертибилна, пошто знамо да је задовољено

$$\mathcal{F}_u(x) \not\equiv 0 \qquad (\forall u \in V_T).$$

Осим тога, ако матрице $\boldsymbol{C}_j$ и $\boldsymbol{D}_j$ замислимо као матрице над пољем $\mathbb{R}(x)$ тако што све њихове елементе интерпретирамо као одговарајуће константне рационалне функције, онда се испоставља да између матрица $\boldsymbol{C}_j$, $\boldsymbol{D}_j$ и $\boldsymbol{R}_j$ постоји релативно једноставна веза. Споменуто тврђење је образложено у виду наредне помоћне леме.

Лема 4.1. *За свако $j = \overline{1, l_T - 1}$ задовољена је једнакост*

$$\boldsymbol{R}_j = x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_j - \boldsymbol{D}_{j+1}^\intercal \boldsymbol{R}_{j+1}^{-1} \boldsymbol{D}_{j+1}.$$

Доказ. Најпре, јасно је да је матрица $\boldsymbol{R}_{j+1}^{-1} \in \mathbb{R}(x)^{V_T^{(j+1)} \times V_T^{(j+1)}}$ дијагонална и да важи

$$\left(\boldsymbol{R}_{j+1}^{-1}\right)_{u,u} = \frac{1}{\mathcal{F}_u(x)} \qquad \left(\forall u \in V_T^{(j+1)}\right).$$

Ако уведемо ознаку $\boldsymbol{Z}_j = \boldsymbol{D}_{j+1}^\intercal \boldsymbol{R}_{j+1}^{-1} \boldsymbol{D}_{j+1}$, онда добијамо да је за свако $u, v \in V_T^{(j)}$ испуњено

$$\left(\boldsymbol{Z}_j\right)_{u,v} = \sum_{\alpha \in V_T^{(j+1)}} \sum_{\beta \in V_T^{(j+1)}} \left(\boldsymbol{D}_{j+1}^\intercal\right)_{u,\alpha} \left(\boldsymbol{R}_{j+1}^{-1}\right)_{\alpha,\beta} \left(\boldsymbol{D}_{j+1}\right)_{\beta,v}. \tag{4.7}$$

Како је матрица $\boldsymbol{R}_{j+1}^{-1}$ дијагонална, директно закључујемо да сви чланови двоструке суме из формуле (4.7) код којих важи $\alpha \neq \beta$ морају бити једнаки нула функцији. Из овог разлога, споменути израз је могуће концизније записати у виду

$$\left(\boldsymbol{Z}_j\right)_{u,v} = \sum_{\alpha \in V_T^{(j+1)}} \left(\boldsymbol{D}_{j+1}^\intercal\right)_{u,\alpha} \left(\boldsymbol{R}_{j+1}^{-1}\right)_{\alpha,\alpha} \left(\boldsymbol{D}_{j+1}\right)_{\alpha,v} = \sum_{\alpha \in V_T^{(j+1)}} \left(\boldsymbol{D}_{j+1}\right)_{\alpha,u} \left(\boldsymbol{D}_{j+1}\right)_{\alpha,v} \left(\boldsymbol{R}_{j+1}^{-1}\right)_{\alpha,\alpha}. \tag{4.8}$$

Даље, није тешко установити да се елементи матрице $\boldsymbol{D}_{j+1}$ могу записати преко израза

$$\left(\boldsymbol{D}_{j+1}\right)_{u,v} = \begin{cases} 1, & v = \mathrm{p}_T(u), \\ 0, & v \neq \mathrm{p}_T(u) \end{cases} \qquad \left(\forall u \in V_T^{(j+1)}, v \in V_T^{(j)}\right),$$

што значи да сваки ред ове матрице обавезно садржи тачно један ненула елемент. Због тога, за свако $u, v \in V_T^{(j)}$ код којих имамо $u \neq v$, сигурно мора бити $\left(\boldsymbol{D}_{j+1}\right)_{\alpha,u} \left(\boldsymbol{D}_{j+1}\right)_{\alpha,v} = 0$, те израз (4.8) диктира да тада важи $\left(\boldsymbol{Z}_j\right)_{u,v} \equiv 0$. Дакле, матрица $\boldsymbol{Z}_j$ мора бити дијагонална, при чему за свако $u \in V_T^{(j)}$ добијамо

$$\left(\boldsymbol{Z}_j\right)_{u,u} = \sum_{\alpha \in V_T^{(j+1)}} \left(\boldsymbol{D}_{j+1}\right)^2_{\alpha,u} \left(\boldsymbol{R}^{-1}_{j+1}\right)_{\alpha,\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathrm{c}_T(u)} \left(\boldsymbol{R}^{-1}_{j+1}\right)_{\alpha,\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathrm{c}_T(u)} \frac{1}{\mathcal{F}_\alpha(x)}.$$

Надаље је врло лако уочити да је матрица $x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_j - \boldsymbol{Z}_j$ такође дијагонална, као и да за свако $u \in V_T^{(j)}$ сигурно важи једнакост

$$\left(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_j - \boldsymbol{Z}_j\right)_{u,u} = x - (\boldsymbol{B}_0)_{u,u} - \sum_{\alpha \in \mathrm{c}_T(u)} \frac{1}{\mathcal{F}_\alpha(x)} = \mathcal{F}_u(x).$$

Међутим, одавде одмах следи $x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_j - \boldsymbol{Z}_j = \boldsymbol{R}_j$, чиме је доказ леме готов. □

Сада смо у стању да искористимо лему 4.1 како бисмо комплетирали доказ теореме 4.1. У остатку поглавља налази се тражени доказ.

Доказ теореме 4.1. Довољно је показати да важи једнакост $\mathcal{P}_{\boldsymbol{B}_1}(x) = \prod_{u \in V_T} \mathcal{F}_u(x)$, узевши у обзир да се демонстрирање једнакости $\mathcal{P}_{\boldsymbol{B}_2}(x) = \prod_{u \in V_T} \mathcal{F}_u(x)$ може обавити на апсолутно аналоган начин. Уочимо да се матрица $\boldsymbol{B}_1 \in \mathbb{R}^{V_T \times V_T}$ може представити преко блок записа

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{array}{c} \\ V_T^{(l_T)} \\ V_T^{(l_T-1)} \\ V_T^{(l_T-2)} \\ \vdots \\ V_T^{(2)} \\ V_T^{(1)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} V_T^{(l_T)} & V_T^{(l_T-1)} & V_T^{(l_T-2)} & \cdots & V_T^{(2)} & V_T^{(1)} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{l_T} & \boldsymbol{D}_{l_T} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D}^\intercal_{l_T} & \boldsymbol{C}_{l_T-1} & \boldsymbol{D}_{l_T-1} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}^\intercal_{l_T-1} & \boldsymbol{C}_{l_T-2} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{D}^\intercal_2 & \boldsymbol{C}_1 \end{bmatrix} \end{array},$$

одакле одмах добијамо да важи

$$\det(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_1) = \begin{array}{c} \\ V_T^{(l_T)} \\ V_T^{(l_T-1)} \\ V_T^{(l_T-2)} \\ \vdots \\ V_T^{(2)} \\ V_T^{(1)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} V_T^{(l_T)} & V_T^{(l_T-1)} & V_T^{(l_T-2)} & \cdots & V_T^{(2)} & V_T^{(1)} \end{array} \\ \begin{vmatrix} x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_{l_T} & -\boldsymbol{D}_{l_T} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{D}^\intercal_{l_T} & x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_{l_T-1} & -\boldsymbol{D}_{l_T-1} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{D}^\intercal_{l_T-1} & x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_{l_T-2} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_2 & -\boldsymbol{D}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & -\boldsymbol{D}^\intercal_2 & x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_1 \end{vmatrix} \end{array}.$$

Пошто су сви чворови на нивоу l_T нужно листови, јасно је да је за сваки чвор $u \in V_T^{(l_T)}$ испуњено

$$\mathcal{F}_u(x) = x - (\boldsymbol{B}_0)_{u,u} = x - (\boldsymbol{C}_{l_T})_{u,u},$$

што нам гарантује да мора бити $x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_{l_T} = \boldsymbol{R}_{l_T}$, односно

$$\det(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_1) = \begin{array}{c|cccccc|} & V_T^{(l_T)} & V_T^{(l_T-1)} & V_T^{(l_T-2)} & \cdots & V_T^{(2)} & V_T^{(1)} \\ \hline V_T^{(l_T)} & \boldsymbol{R}_{l_T} & -\boldsymbol{D}_{l_T} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ V_T^{(l_T-1)} & -\boldsymbol{D}_{l_T}^\intercal & x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_{l_T-1} & -\boldsymbol{D}_{l_T-1} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ V_T^{(l_T-2)} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{D}_{l_T-1}^\intercal & x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_{l_T-2} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_T^{(2)} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_2 & -\boldsymbol{D}_2 \\ V_T^{(1)} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & -\boldsymbol{D}_2^\intercal & x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_1 \end{array} . \tag{4.9}$$

Сада смо у могућности да применимо Гаусову елиминацију над блок детерминантом датом у изразу (4.9). Ако први ред помножимо слева матрицом $\boldsymbol{D}_{l_T}^\intercal \boldsymbol{R}_{l_T}^{-1}$ и онда добијени резултат додамо на други ред, тада применом леме 4.1 долазимо до једнакости

$$\det(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_1) = \begin{array}{c|cccccc|} & V_T^{(l_T)} & V_T^{(l_T-1)} & V_T^{(l_T-2)} & \cdots & V_T^{(2)} & V_T^{(1)} \\ \hline V_T^{(l_T)} & \boldsymbol{R}_{l_T} & -\boldsymbol{D}_{l_T} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ V_T^{(l_T-1)} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{R}_{l_T-1} & -\boldsymbol{D}_{l_T-1} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ V_T^{(l_T-2)} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{D}_{l_T-1}^\intercal & x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_{l_T-2} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_T^{(2)} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_2 & -\boldsymbol{D}_2 \\ V_T^{(1)} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & -\boldsymbol{D}_2^\intercal & x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_1 \end{array} . \tag{4.10}$$

Уколико након тога посматрамо детерминанту изложену у изразу (4.10), те други ред измножимо слева матрицом $\boldsymbol{D}_{l_T-1}^\intercal \boldsymbol{R}_{l_T-1}^{-1}$ и додамо резултат на трећи ред, поново можемо да употребимо лему 4.1 како бисмо уочили да важи

$$\det(x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_1) = \begin{array}{c|cccccc|} & V_T^{(l_T)} & V_T^{(l_T-1)} & V_T^{(l_T-2)} & \cdots & V_T^{(2)} & V_T^{(1)} \\ \hline V_T^{(l_T)} & \boldsymbol{R}_{l_T} & -\boldsymbol{D}_{l_T} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ V_T^{(l_T-1)} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{R}_{l_T-1} & -\boldsymbol{D}_{l_T-1} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ V_T^{(l_T-2)} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{R}_{l_T-2} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_T^{(2)} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_2 & -\boldsymbol{D}_2 \\ V_T^{(1)} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & -\boldsymbol{D}_2^\intercal & x\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_1 \end{array} .$$

Није тешко установити да је споменуту процедуру могуће примењивати до краја, све док не дођемо до тога да је детерминанта од интереса записана у горње троугаоном блок запису, тј. док не добијемо формулу

$$\det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_1) = \begin{array}{c} \\ V_T^{(l_T)} \\ V_T^{(l_T-1)} \\ V_T^{(l_T-2)} \\ \vdots \\ V_T^{(2)} \\ V_T^{(1)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} V_T^{(l_T)} & V_T^{(l_T-1)} & V_T^{(l_T-2)} & \cdots & V_T^{(2)} & V_T^{(1)} \end{array} \\ \begin{vmatrix} \boldsymbol{R}_{l_T} & -\boldsymbol{D}_{l_T} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{R}_{l_T-1} & -\boldsymbol{D}_{l_T-1} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{R}_{l_T-2} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{R}_2 & -\boldsymbol{D}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{R}_1 \end{vmatrix} \end{array}.$$

Одавде постаје јасно да мора бити

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{B}_1}(x) = \det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_1) = \prod_{j=1}^{l_T} \det\left(\boldsymbol{R}_j\right) = \prod_{j=1}^{l_T} \prod_{u \in V_T^{(j)}} \mathcal{F}_u(x) = \prod_{u \in V_T} \mathcal{F}_u(x),$$

као што је и било потребно показати. □

4.2 Основна спектрална својства балансираних стабала

На основу теореме 4.1, јасно је да ако чворовима коренског стабла $T = (V_T, E_T, \psi_T, r_T)$ доделимо рационалне функције $\mathcal{F}_u(x) \in \mathbb{R}(x)$ индуковане дијагоналном матрицом $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{O}$, онда важи $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}_T$, те је $\mathcal{P}_{\boldsymbol{A}_T}(x) = \prod_{u \in V_T} \mathcal{F}_u(x)$. Осим тога, уколико за матрицу $\boldsymbol{B}_0 \in \mathbb{R}^{V_T \times V_T}$ узмемо дијагоналну матрицу која садржи одговарајуће степене чворова, тј. ако је

$$(\boldsymbol{B}_0)_{u,u} = \deg_T(u) \qquad (\forall u \in V_T),$$

тада сличном логиком директно следи $\mathcal{P}_{\boldsymbol{L}_T}(x) = \prod_{u \in V_T} \mathcal{F}_u(x)$. Дакле, принцип придружених рационалних функција исказан теоремом 4.1 омогућава прорачун било карактеристичног полинома било Лапласовог карактеристичног полинома произвољног коренског стабла. У оквиру датог одељка, надаље ћемо разматрати исључиво коренска стабла која су балансирана и сагледаваћемо њихова одређена спектрална својства.

Пре свега, уочимо да је структуру произвољног балансираног стабла T могуће врло комотно описати помоћу коначног низа $(c_1, c_2, \ldots, c_{l_T})$ код ког за свако $j = \overline{1, l_T}$ вредност c_j диктира колико укупно деце поседује произвољан чвор са нивоа j. Овакав низ ћемо због тога концизно називати карактеристичном торком датог балансираног стабла. Даље, уведимо да за свако $j = \overline{1, l_T}$ нотација $n_T^{(j)}$ обележава укупан број чворова на нивоу j датог балансираног стабла T. Осим тога, нека је $n_T^{(0)} = 0$. Узевши у обзир све новоуведене концепте, постаје једноставно да применимо теорему 4.1 на претходно изложени начин како бисмо дошли до одговарајућег механизма за одређивање (Лапласовог) карактеристичног полинома произвољног балансираног стабла. Заправо, могуће је да изведемо врло концизну формулу базирану на полиномном рачуну која не садржи рационалне функције уопште. Споменути резултат је исказан преко следеће две теореме.

Теорема 4.4. *Нека је дато произвољно балансирано стабло T и нека $(c_1, c_2, \dots, c_{l_T})$ чини његову карактеристичну торку. Ако са $W_0(x), W_1(x), W_2(x), \dots, W_{l_T}(x) \in \mathbb{R}[x]$ означимо низ полинома дефинисан преко наредне рекурентне релације:*

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_1(x) &= x, \\ W_j(x) &= x\, W_{j-1}(x) - c_{l_T+1-j}\, W_{j-2}(x) \qquad \left(\forall j = \overline{2, l_T}\right), \end{aligned}$$

онда важи

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{A}_T}(x) = \prod_{j=1}^{l_T} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j+1)} - n_T^{(l_T-j)}}. \tag{4.11}$$

Теорема 4.5. *Нека је задато одређено нетривијално балансирано стабло T чија карактеристична торка износи $(c_1, c_2, \dots, c_{l_T})$. Уколико са $W_0(x), W_1(x), W_2(x), \dots, W_{l_T}(x) \in \mathbb{R}[x]$ обележимо низ полинома који је дефинисан помоћу следеће рекурентне релације:*

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_1(x) &= x - 1, \\ W_j(x) &= (x - c_{l_T+1-j} - 1)\, W_{j-1}(x) - c_{l_T+1-j}\, W_{j-2}(x) \qquad \left(\forall j = \overline{2, l_T - 1}\right), \\ W_{l_T}(x) &= (x - c_1)\, W_{l_T-1}(x) - c_1\, W_{l_T-2}(x), \end{aligned}$$

тада добијамо да мора бити

$$\mathcal{P}_{\boldsymbol{L}_T}(x) = \prod_{j=1}^{l_T} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j+1)} - n_T^{(l_T-j)}}. \tag{4.12}$$

У циљу излагања доказа теорема 4.4 и 4.5 на што концизнији начин, показаћемо прво тачност наредне две кратке леме.

Лема 4.2. *Нека је дато балансирано стабло $T = (V_T, E_T, \psi_T, r_T)$ чија је карактеристична торка $(c_1, c_2, \dots, c_{l_T})$. Придружимо сваком чвору $u \in V_T$ овог стабла рационалну функцију $\mathcal{F}_u(x) \in \mathbb{R}(x)$ на начин описан у теореми 4.1 за дијагоналну матрицу $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{O}$. Уколико са $W_0(x), W_1(x), \dots, W_{l_T}(x) \in \mathbb{R}[x]$ уведемо низ полинома на начин описан у теореми 4.4, онда за свако $j = \overline{0, l_T - 1}$ важи*

$$\mathcal{F}_u(x) = \frac{W_{j+1}(x)}{W_j(x)} \qquad \left(\forall u \in V_T^{(l_T-j)}\right).$$

Доказ. Извешћемо доказ дате леме преко математичке индукције. Пре свега, изложено тврђење је сигурно тачно за вредност $j = 0$, узевши у обзир да су сви чворови са нивоа l_T очигледно листови, те мора бити $\mathcal{F}_u(x) = x$ за сваки чвор $u \in V_T^{(l_T)}$, при чему такође важи

$$\frac{W_1(x)}{W_0(x)} = \frac{x}{1} = x.$$

Претпоставимо сада да је задато тврђење тачно за одређено $j = \alpha$, где је $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $\alpha < l_T - 1$, и докажимо да тада мора бити валидно и за $j = \alpha + 1$. Из саме дефиниције придружених рационалних функција директно следи

$$\mathcal{F}_u(x) = x - \sum_{v \in c_T(u)} \frac{1}{\mathcal{F}_v(x)} \qquad \left(\forall u \in V_T^{(l_T-(\alpha+1))}\right).$$

Пошто свако дете чвора са нивоа $l_T - (\alpha + 1)$ мора да припада нивоу $l_T - \alpha$, на основу индуктивне претпоставке видимо да за било који чвор $u \in V_T^{(l_T-(\alpha+1))}$ надаље обавезно важи

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_u(x) &= x - \sum_{v \in \mathrm{c}_T(u)} \frac{W_\alpha(x)}{W_{\alpha+1}(x)} = x - c_{l_T-(\alpha+1)} \cdot \frac{W_\alpha(x)}{W_{\alpha+1}(x)} \\ &= \frac{x\, W_{\alpha+1}(x) - c_{l_T-(\alpha+1)}\, W_\alpha(x)}{W_{\alpha+1}(x)} = \frac{W_{\alpha+2}(x)}{W_{\alpha+1}(x)},\end{aligned}$$

што је и управо било неопходно показати. □

Лема 4.3. *Нека је задато било које нетривијално балансирано стабло* $T = (V_T, E_T, \psi_T, r_T)$ *чија је карактеристична торка* $(c_1, c_2, \ldots, c_{l_T})$. *Придружимо сваком његовом чвору* $u \in V_T$ *рационалну функцију* $\mathcal{F}_u(x) \in \mathbb{R}(x)$ *у складу са теоремом 4.1, при чему за дијагоналну матрицу* $\boldsymbol{B}_0 \in \mathbb{R}^{V_T \times V_T}$ *узимамо ону која испуњава*

$$(\boldsymbol{B}_0)_{u,u} = \deg_T(u) \qquad (\forall u \in V_T).$$

Ако са $W_0(x), W_1(x), \ldots, W_{l_T}(x) \in \mathbb{R}[x]$ *уведемо низ полинома на начин описан у теореми 4.5, онда за било које* $j = \overline{0, l_T - 1}$ *добијамо*

$$\mathcal{F}_u(x) = \frac{W_{j+1}(x)}{W_j(x)} \qquad \left(\forall u \in V_T^{(l_T-j)}\right).$$

Доказ. Слично као при доказивању леме 4.2, искористићемо принцип математичке индукције. Пошто дато стабло није тривијално, чворови са нивоа l_T сигурно не чине корен стабла, те обавезно имају родитеља, одакле директно следи

$$\mathcal{F}_u(x) = x - 1 \qquad \left(\forall u \in V_T^{(l_T)}\right).$$

Како је

$$\frac{W_1(x)}{W_0(x)} = \frac{x-1}{1} = x - 1,$$

видимо да задато тврђење мора бити тачно за вредност $j = 0$. Претпоставимо сада да је изложено тврђење тачно за неко $j = \alpha$, где је $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $\alpha < l_T - 1$, и докажемо да онда мора да важи и за $j = \alpha + 1$. Сличном логиком као при извођењу доказа леме 4.2, на основу дефиниције придружених рационалних функција и индуктивне претпоставке закључујемо да за сваки чвор $u \in V_T^{(l_T-(\alpha+1))}$ обавезно имамо

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_u(x) &= x - \deg_T(u) - \sum_{v \in \mathrm{c}_T(u)} \frac{1}{\mathcal{F}_v(x)} = x - \deg_T(u) - \sum_{v \in \mathrm{c}_T(u)} \frac{W_\alpha(x)}{W_{\alpha+1}(x)} \\ &= x - \deg_T(u) - c_{l_T-(\alpha+1)} \cdot \frac{W_\alpha(x)}{W_{\alpha+1}(x)} \\ &= \frac{\big(x - \deg_T(u)\big)\, W_{\alpha+1}(x) - c_{l_T-(\alpha+1)}\, W_\alpha(x)}{W_{\alpha+1}(x)}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ако је $\alpha < l_T - 2$, онда ниво $l_T - (\alpha + 1)$ није први, што значи да чворови са овог нивоа нужно имају родитеља. Дакле, важи $\deg_T(u) = c_{l_T-(\alpha+1)} + 1$ за сваки чвор $u \in V_T^{(l_T-(\alpha+1))}$, те једнакост (4.13) одмах даје

$$\mathcal{F}_u(x) = \frac{\big(x - c_{l_T-(\alpha+1)} - 1\big)\, W_{\alpha+1}(x) - c_{l_T-(\alpha+1)}\, W_\alpha(x)}{W_{\alpha+1}(x)} = \frac{W_{\alpha+2}(x)}{W_{\alpha+1}(x)}$$

за свако $u \in V_T^{(l_T-(\alpha+1))}$, као што је и било потребно показати. Са друге стране, уколико је $\alpha = l_T - 2$, онда ниво $l_T - (\alpha+1) = 1$ садржи само корен стабла, код ког наступа једнакост $\deg_T(r_T) = c_1 = c_{l_T-(\alpha+1)}$. Из овог разлога, формула (4.13) нужно имплицира

$$\mathcal{F}_{r_T}(x) = \frac{(x-c_1)\, W_{l_T-1}(x) - c_1\, W_{l_T-2}(x)}{W_{l_T-1}(x)} = \frac{W_{l_T}(x)}{W_{l_T-1}(x)},$$

чиме је доказ готов. □

Сада смо у стању да директно употребимо леме 4.2 и 4.3 како бисмо комплетирали доказе теорема 4.4 и 4.5, респективно. Узевши у обзир да се ове две теореме могу доказати на апсолутно аналоган начин, изложићемо само потпун доказ теореме 4.4.

Доказ теореме 4.4. За било које балансирано стабло $T = (V_T, E_T, \psi_T, r_T)$, истовременим коришћењем теореме 4.1 уз $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{O}$ и леме 4.2, добијамо да обавезно важи

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{A_T}(x) &= \prod_{u\in V_T} \mathcal{F}_u(x) = \prod_{j=0}^{l_T-1}\left(\prod_{u\in V_T^{(l_T-j)}} \mathcal{F}_u(x)\right) = \prod_{j=0}^{l_T-1}\left(\frac{W_{j+1}(x)}{W_j(x)}\right)^{n_T^{(l_T-j)}}\\
&= \frac{\prod_{j=0}^{l_T-1} W_{j+1}(x)^{n_T^{(l_T-j)}}}{\prod_{j=0}^{l_T-1} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j)}}} = \frac{\prod_{j=1}^{l_T} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j+1)}}}{\prod_{j=0}^{l_T-1} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j)}}} = \frac{\prod_{j=1}^{l_T} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j+1)}}}{\prod_{j=1}^{l_T-1} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j)}}} \cdot \frac{1}{W_0(x)^{n_T^{(l_T)}}}\\
&= \frac{\prod_{j=1}^{l_T} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j+1)}}}{\prod_{j=1}^{l_T-1} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j)}}} = \frac{\prod_{j=1}^{l_T} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j+1)}}}{\prod_{j=1}^{l_T} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j)}}} \cdot W_{l_T}(x)^{n_T^{(0)}} = \frac{\prod_{j=1}^{l_T} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j+1)}}}{\prod_{j=1}^{l_T} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j)}}}\\
&= \prod_{j=1}^{l_T} W_j(x)^{n_T^{(l_T-j+1)} - n_T^{(l_T-j)}},
\end{aligned}$$

што завршава доказ. □

Доказ теореме 4.5. За произвољно балансирано стабло $T = (V_T, E_T, \psi_T, r_T)$, заједничка употреба теореме 4.1 уз одговарајуће $\boldsymbol{B}_0 \in \mathbb{R}^{V_T\times V_T}$ и леме 4.3 диктира да мора бити

$$\mathcal{P}_{L_T}(x) = \prod_{u\in V_T} \mathcal{F}_u(x) = \prod_{j=0}^{l_T-1}\left(\prod_{u\in V_T^{(l_T-j)}} \mathcal{F}_u(x)\right) = \prod_{j=0}^{l_T-1}\left(\frac{W_{j+1}(x)}{W_j(x)}\right)^{n_T^{(l_T-j)}}.$$

Тачност дате теореме се може једноставно демонстрирати тако што се остатак неопходне рачунице обави на идентичан начин као што је то урађено при доказивању теореме 4.4. □

Осим што исказују концизан начин за израчунавање (Лапласовог) карактеристичног полинома било ког балансираног стабла, теореме 4.4 и 4.5 пружају могућност за брзо очитавање његовог скупа (Лапласових) сопствених вредности. Наиме, узевши у обзир једнакости (4.11) и (4.12), видимо да одређени број чини нулу полинома $\mathcal{P}_{A_T}(x)$, односно $\mathcal{P}_{L_T}(x)$, ако и само ако он представља нулу одговарајућег полинома $W_j(x)$ за неко $j \in \mathbb{N}$, $j \leq l_T$ код ког је испуњен услов $n_T^{(l_T-j+1)} > n_T^{(l_T-j)}$. Овај услов је очигледно обавезно задовољен уколико је $j = l_T$, док се за преостале вредности $j < l_T$ своди на то да чворови из нивоа $l_T - j$ имају бар по двоје деце. Узевши све у обзир, можемо да формулишемо наредне две директне последице теорема 4.4 и 4.5 које се тичу одређивања скупа (Лапласових) сопствених вредности балансираног стабла.

Последица 4.1. *За било које балансирано стабло $T = (V_T, E_T, \psi_T, r_T)$ чија је карактеристична торка $(c_1, c_2, \ldots, c_{l_T})$, важи*

$$\sigma^*_{A_T} = \bigcup_{j \in \Phi} \left\{ x \in \mathbb{R} \colon W_j(x) = 0 \right\},$$

где је

$$\Phi = \{l_T\} \cup \{j \in \{1, 2, \ldots, l_T - 1\} \colon c_{l_T - j} \geq 2\},$$

при чему је низ полинома $W_0(x), W_1(x), \ldots, W_{l_T}(x)$ дефинисан као у теореми 4.4.

Последица 4.2. *За произвољно нетривијално балансирано стабло $T = (V_T, E_T, \psi_T, r_T)$ уз карактеристичну торку $(c_1, c_2, \ldots, c_{l_T})$, мора бити*

$$\sigma^*_{L_T} = \bigcup_{j \in \Phi} \left\{ x \in \mathbb{R} \colon W_j(x) = 0 \right\},$$

где је

$$\Phi = \{l_T\} \cup \{j \in \{1, 2, \ldots, l_T - 1\} \colon c_{l_T - j} \geq 2\},$$

при чему је низ полинома $W_0(x), W_1(x), \ldots, W_{l_T}(x)$ дефинисан као у теореми 4.5.

Дати одељак завршавамо навођењем још две последице теореме 4.4 које говоре о спектралним својствима матрице суседства Бете стабала и дендримера. Главно запажање које можемо да направимо код оваквих стабала јесте да чланови одговарајућег низа $W_j(x)$ полинома из једнакости (4.11) представљају Диксонове полиноме друге врсте или Геронимусове полиноме. Из овог разлога постаје могуће да споменуту формулу запишемо на концизнији начин и да дођемо до тражених резултата на начин образложен у следеће две последице.

Последица 4.3. *За произвољно Бете стабло облика $\mathcal{B}_{d,k}$, где је $d, k \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, обавезно важи*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_{d,k}}(x) = E_k(x; d-1) \prod_{j=1}^{k-1} E_j(x; d-1)^{(d-2)(d-1)^{k-j-1}}. \tag{4.14}$$

Такође, за било које Бете стабло типа $\mathcal{B}_{d,k}$, где је $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ и $k \in \mathbb{N}$, сигурно је

$$\sigma^*_{\mathcal{B}_{d,k}} = \left\{ 2\sqrt{d-1} \cos\left(\frac{h}{j+1}\pi\right) \colon h, j \in \{1, 2, \ldots, k\} \land h \leq j \right\}. \tag{4.15}$$

Најзад, за свако $k \in \mathbb{N}$ је задовољена једнакост

$$\sigma^*_{\mathcal{B}_{2,k}} = \left\{ 2\cos\left(\frac{h}{k+1}\pi\right) \colon h \in \{1, 2, \ldots, k\} \right\}. \tag{4.16}$$

Доказ. За било које $d, k \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, јасно је да свако Бете стабло типа $\mathcal{B}_{d,k}$ заправо представља балансирано стабло чија је карактеристична торка

$$(c_1, c_2, \ldots, c_k) = (\underbrace{d-1, d-1, \ldots, d-1}_{k-1 \text{ пута}}, 0).$$

Ово нам омогућава да искористимо теорему 4.4 како бисмо закључили да важи

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_{d,k}}(x) = \prod_{j=1}^{k} W_j(x)^{n^{(k-j+1)}_{\mathcal{B}_{d,k}} - n^{(k-j)}_{\mathcal{B}_{d,k}}},$$

где је низ полинома $W_0(x), W_1(x), \ldots, W_k(x) \in \mathbb{R}[x]$ дефинисан преко рекурентне релације

$$\begin{aligned} &W_0(x) = 1, \\ &W_1(x) = x, \\ &W_j(x) = x\, W_{j-1}(x) - (d-1)\, W_{j-2}(x) \qquad \left(\forall\, j = \overline{2, k}\right). \end{aligned}$$

Међутим, сагледавањем дефиниције 2.42 постаје очигледно да важи $W_j(x) = E_j(x; d-1)$ за свако $j = \overline{0, k}$. Осим тога, тривијално је запазити да је $n^{(1)}_{\mathcal{B}_{d,k}} - n^{(0)}_{\mathcal{B}_{d,k}} = 1$, при чему за било које $j = \overline{1, k-1}$ добијамо

$$n^{(k-j+1)}_{\mathcal{B}_{d,k}} - n^{(k-j)}_{\mathcal{B}_{d,k}} = \prod_{j=1}^{k-j} c_j - \prod_{j=1}^{k-j-1} c_j = (d-1)^{k-j} - (d-1)^{k-j-1} = (d-2)(d-1)^{k-j-1}.$$

Узевши све у обзир, јасно је да израз (4.14) мора бити тачан.

Уколико је задовољено $d \geq 3$, онда се из формуле (4.14) одмах види да се скуп сопствених вредности Бете стабла облика $\mathcal{B}_{d,k}$ нужно састоји од нула Диксонових полинома друге врсте $E_1(x; d-1), E_2(x; d-1), \ldots, E_k(x; d-1)$. Применом леме 2.8 директно добијамо да је једнакост (4.15) сигурно испуњена. Са друге стране, ако је $d = 2$, онда се израз (4.14) брзо своди на

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_{2,k}}(x) = E_k(x; 1),$$

те нас лема 2.8 доводи до тога да се спектар Бете стабла типа $\mathcal{B}_{2,k}$ обавезно састоји од простих сопствених вредности

$$2\cos\left(\frac{1}{k+1}\pi\right), 2\cos\left(\frac{2}{k+1}\pi\right), \ldots, 2\cos\left(\frac{k}{k+1}\pi\right),$$

што завршава доказ дате последице. □

Последица 4.4. *За било који дендример типа $\mathcal{D}_{d,k}$, где је $d, k \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, важи једнакост*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{D}_{d,k}}(x) = G_k(x; d)\, E_{k-1}(x; d-1)^{d-1} \prod_{j=1}^{k-2} E_j(x; d-1)^{d(d-2)(d-1)^{k-j-2}}. \tag{4.17}$$

Осим тога, за произвољан дендример облика $\mathcal{D}_{d,k}$, где је $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ и $k \in \mathbb{N}$, добијамо

$$\begin{aligned} \sigma^*_{\mathcal{D}_{d,k}} = &\left\{ 2\sqrt{d-1}\cos\left(\frac{h}{j+1}\pi\right) : h, j \in \{1, 2, \ldots, k-1\} \wedge h \leq j \right\} \\ &\cup \{x \in \mathbb{R} \colon G_k(x; d) = 0\}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

док је за свако $k \in \mathbb{N}$ *обавезно испуњено*

$$\sigma^*_{\mathcal{D}_{2,k}} = \left\{ 2\cos\left(\frac{h}{2k}\pi\right) : h \in \{1, 2, \dots, 2k-1\} \right\}. \tag{4.19}$$

Доказ. Пре свега, уколико важи $k = 1$, онда је тривијално уверити се у то да су сва тврђења наведена у последици нужно тачна. Због тога, можемо надаље слободно да претпоставимо да је $k \geq 2$. Даље, за било које $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ је очигледно да произвољан дендример типа $\mathcal{D}_{d,k}$ чини балансирано стабло уз карактеристичну торку

$$(c_1, c_2, \dots, c_k) = (d, \underbrace{d-1, d-1, \dots, d-1}_{k-2 \text{ пута}}, 0).$$

Из овог разлога, теорема 4.4 нам говори да мора бити

$$\mathcal{P}_{\mathcal{D}_{d,k}}(x) = \prod_{j=1}^{k} W_j(x)^{n^{(k-j+1)}_{\mathcal{D}_{d,k}} - n^{(k-j)}_{\mathcal{D}_{d,k}}}, \tag{4.20}$$

где је низ полинома $W_0(x), W_1(x), \dots, W_k(x) \in \mathbb{R}[x]$ дефинисан преко рекурентне релације

$$\begin{aligned}
W_0(x) &= 1,\\
W_1(x) &= x,\\
W_j(x) &= x\, W_{j-1}(x) - (d-1)\, W_{j-2}(x) \qquad \left(\forall j = \overline{2, k-1}\right),\\
W_k(x) &= x\, W_{k-1}(x) - d\, W_{k-2}(x).
\end{aligned}$$

Сада је тривијално уочити да важи $W_j(x) = E_j(x; d-1)$ за свако $j = \overline{0, k-1}$. Пошто је надаље

$$\begin{aligned}
W_k(x) &= x\, E_{k-1}(x; d-1) - d\, E_{k-2}(x; d-1)\\
&= (x\, E_{k-1}(x; d-1) - (d-1)\, E_{k-2}(x; d-1)) - E_{k-2}(x; d-1)\\
&= E_k(x; d-1) - E_{k-2}(x; d-1),
\end{aligned}$$

лема 2.7 диктира да је сигурно $W_k(x) = G_k(x; d)$. Узевши у обзир споменуте једнакости, израз (4.20) нам одмах даје

$$\mathcal{P}_{\mathcal{D}_{d,k}}(x) = G_k(x; d)^{n^{(1)}_{\mathcal{D}_{d,k}} - n^{(0)}_{\mathcal{D}_{d,k}}} \prod_{j=1}^{k-1} E_j(x; d-1)^{n^{(k-j+1)}_{\mathcal{D}_{d,k}} - n^{(k-j)}_{\mathcal{D}_{d,k}}}.$$

Осим тога, знамо да је $n^{(1)}_{\mathcal{D}_{d,k}} - n^{(0)}_{\mathcal{D}_{d,k}} = 1$, као и $n^{(2)}_{\mathcal{D}_{d,k}} - n^{(1)}_{\mathcal{D}_{d,k}} = d-1$, при чему за свако $j = \overline{1, k-2}$ важи

$$n^{(k-j+1)}_{\mathcal{D}_{d,k}} - n^{(k-j)}_{\mathcal{D}_{d,k}} = \prod_{j=1}^{k-j} c_j - \prod_{j=1}^{k-j-1} c_j = d(d-1)^{k-j-1} - d(d-1)^{k-j-2} = d(d-2)(d-1)^{k-j-2}.$$

Дакле, обавезно је задовољена једнакост исказана формулом (4.17).

Под претпоставком да је $d \geq 3$, израз (4.17) нам говори да се скуп сопствених вредности дендримера типа $\mathcal{D}_{d,k}$ састоји тачно од нула полинома

$$E_1(x; d-1), E_2(x; d-1), \dots, E_{k-1}(x; d-1), G_k(x; d).$$

Међутим, одавде на основу леме 2.8 директно следи једнакост (4.18). Са друге стране, ако је $d = 2$, онда није тешко утврдити да је дендример облика $\mathcal{D}_{2,k}$ заправо изоморфан са Бете стаблом типа $\mathcal{B}_{2,2k-1}$. Из овог разлога, тривијално је доћи до формуле (4.19) применом претходно доказане једнакости (4.16) из последице 4.3. ◻

4.3 Енергија Бете стабала

У датом краћем одељку ћемо применом резултата исказаних у последици 4.3 да дођемо до математичког доказа теореме 4.2. Пре него што кренемо да се бавимо самим одређивањем енергије Бете стабала, биће од користи да уведемо концепт енергије полинома на сличан начин како се енергија употребљава код графова. Наиме, за произвољан реалан полином $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) \not\equiv 0$ који може да се факторише на линеарне реалне факторе, нека његова енергија $\mathcal{E}_{P(x)}$ представља збир апсолутних вредности свих његових нула, при чему се свака нула обрачунава онолико пута колико јој износи вишеструкост. На основу последице 4.3 видимо да се налажење енергије произвољног Бете стабла своди на рачунање енергије Диксонових полинома друге врсте. Међутим, за сваки овакав полином није тешко одредити колико тачно износи његова енергија, као што је демонстрирано у следећој леми.

Лема 4.4. *За било које $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ и $j \in \mathbb{N}_0$, енергија Диксоновог полинома друге врсте $E_j(x;a)$ може да се добије преко израза*

$$\mathcal{E}_{E_j(x;a)} = \begin{cases} 2\sqrt{a}\left(\csc\left(\dfrac{\pi}{2j+2}\right) - 1\right), & 2 \mid j, \\ 2\sqrt{a}\left(\cot\left(\dfrac{\pi}{2j+2}\right) - 1\right), & 2 \nmid j. \end{cases} \tag{4.21}$$

Доказ. Применом леме 2.8, јасно је да за свако $a > 0$ и $j \in \mathbb{N}_0$, Диксонов полином друге врсте $E_j(x;a)$ обавезно садржи j простих нула

$$2\sqrt{a}\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right), 2\sqrt{a}\cos\left(\frac{2}{j+1}\pi\right), \ldots, 2\sqrt{a}\cos\left(\frac{j}{j+1}\pi\right),$$

те је

$$\mathcal{E}_{E_j(x;a)} = \sum_{h=1}^{j} \left| 2\sqrt{a}\cos\left(\frac{h}{j+1}\pi\right)\right| = 2\sqrt{a}\sum_{h=1}^{j}\left|\cos\left(\frac{h}{j+1}\pi\right)\right|. \tag{4.22}$$

Пошто је $\cos\left(\frac{h}{j+1}\pi\right) > 0$ за свако $h \in \mathbb{N}$, $1 \le h < \frac{j+1}{2}$, као и $\cos\left(\frac{h}{j+1}\pi\right) = -\cos\left(\frac{j+1-h}{j+1}\pi\right)$ за произвољно $h \in \mathbb{N}$, $\frac{j+1}{2} < h \le j$, једнакост (4.22) брзо имплицира

$$\mathcal{E}_{E_j(x;a)} = 4\sqrt{a}\sum_{h=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \cos\left(\frac{h}{j+1}\pi\right).$$

Ако означимо $\zeta = e^{\frac{\pi}{j+1}i}$, онда можемо комотно да искористимо једнакост $\cos\left(\frac{h}{j+1}\pi\right) = \frac{\zeta^h + \zeta^{-h}}{2}$ како бисмо дошли до

$$\mathcal{E}_{E_j(x;a)} = 4\sqrt{a}\sum_{h=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \frac{\zeta^h + \zeta^{-h}}{2} = 2\sqrt{a}\sum_{h=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}\left(\zeta^h + \zeta^{-h}\right) = 2\sqrt{a}\left(\left(\sum_{h=-\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \zeta^h\right) - 1\right).$$

Како је $\zeta \neq 1$, можемо надаље да искористимо стандардну формулу за сумирање чланова геометријске прогресије тако да добијемо

$$\mathcal{E}_{E_j(x;a)} = 2\sqrt{a}\left(\frac{\sum_{h=0}^{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\zeta^h}{\zeta^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}} - 1\right) = 2\sqrt{a}\left(\frac{\zeta^{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}-1}{\zeta^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}(\zeta-1)} - 1\right)$$
$$= 2\sqrt{a}\left(\frac{\zeta^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}-\zeta^{-\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}}{\zeta-1} - 1\right) = 2\sqrt{a}\left(\frac{\left(\zeta^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}-\zeta^{-\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\right)\left(\frac{1}{\zeta}-1\right)}{(\zeta-1)\left(\frac{1}{\zeta}-1\right)} - 1\right).$$

Узевши у обзир да је

$$\left(\zeta^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}-\zeta^{-\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\right)\left(\frac{1}{\zeta}-1\right) = \zeta^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}+\zeta^{-\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}-\zeta^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}-\zeta^{-\lfloor\frac{j}{2}\rfloor-1} = 2\cos\left(\frac{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}{j+1}\pi\right) - 2\cos\left(\frac{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}{j+1}\pi\right),$$

као и

$$(\zeta-1)\left(\frac{1}{\zeta}-1\right) = 2-\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) = 2-2\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right),$$

закључујемо да мора бити

$$\mathcal{E}_{E_j(x;a)} = 2\sqrt{a}\left(\frac{2\cos\left(\frac{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}{j+1}\pi\right)-2\cos\left(\frac{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}{j+1}\pi\right)}{2-2\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right)} - 1\right)$$
$$= 2\sqrt{a}\left(\frac{\cos\left(\frac{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}{j+1}\pi\right)-\cos\left(\frac{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}{j+1}\pi\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right)} - 1\right). \tag{4.23}$$

Ако је број j паран, онда важи $\lfloor\frac{j}{2}\rfloor = \frac{j}{2}$, као и $\cos\left(\frac{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}{j+1}\pi\right) = -\cos\left(\frac{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}{j+1}\pi\right)$, те формула (4.23) одмах даје

$$\mathcal{E}_{E_j(x;a)} = 2\sqrt{a}\left(\frac{2\cos\left(\frac{j}{j+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right)} - 1\right) = 2\sqrt{a}\left(\frac{2\sin\left(\frac{1}{j+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} - 1\right) = 2\sqrt{a}\left(\csc\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) - 1\right).$$

Са друге стране, уколико је вредност j непарна, тада је $\lfloor\frac{j}{2}\rfloor = \frac{j-1}{2}$ заједно уз $\frac{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}{j+1}\pi = \frac{\pi}{2}$, што значи да се израз (4.23) може даље трансформисати на следећи начин:

$$\mathcal{E}_{E_j(x;a)} = 2\sqrt{a}\left(\frac{\cos\left(\frac{j-1}{j+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right)} - 1\right) = 2\sqrt{a}\left(\frac{\sin\left(\frac{2}{j+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} - 1\right) = 2\sqrt{a}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{j+1}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} - 1\right)$$
$$= 2\sqrt{a}\left(\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} - 1\right) = 2\sqrt{a}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) - 1\right).$$

У сваком случају, обавезно наступа једнакост (4.21) коју је и било потребно показати. □

Остатак одељка ћемо да посветимо решавању проблема одређивања енергије Бете стабала тако што ћемо да довршимо доказ теореме 4.2 директном применом леме 4.4.

Доказ теореме 4.2. Најпре, уколико употребимо последицу 4.3, јасно је да за свако $k \in \mathbb{N}$ важи $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_{2,k}}(x) = E_k(x;1)$, те је $\mathcal{E}_{\mathcal{B}_{2,k}} = \mathcal{E}_{E_k(x;1)}$. Из овог разлога, формула (4.3) директно следи када се лема 4.4 примени за вредност $a = 1$. Дакле, неопходно је још демонстрирати тачност једнакости (4.2) за произвољно $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ и $k \in \mathbb{N}$.

За $d \geq 3$, коришћењем формуле (4.14) из последице 4.3, добијамо да нужно важи

$$\mathcal{E}_{\mathcal{B}_{d,k}} = \mathcal{E}_{E_k(x;d-1)} + \sum_{j=1}^{k-1} (d-2)(d-1)^{k-j-1}\, \mathcal{E}_{E_j(x;d-1)}.$$

Међутим, директном рачуницом долазимо до једнакости

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k-1} (d-2)(d-1)^{k-j-1}\, \mathcal{E}_{E_j(x;d-1)} &= \sum_{j=1}^{k-1} \left((d-1)^{k-j} - (d-1)^{k-j-1}\right) \mathcal{E}_{E_j(x;d-1)} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} (d-1)^{k-j}\, \mathcal{E}_{E_j(x;d-1)} - \sum_{j=1}^{k-1} (d-1)^{k-j-1}\, \mathcal{E}_{E_j(x;d-1)} \\
&= \sum_{j=0}^{k-2} (d-1)^{k-j-1}\, \mathcal{E}_{E_{j+1}(x;d-1)} - \sum_{j=1}^{k-1} (d-1)^{k-j-1}\, \mathcal{E}_{E_j(x;d-1)}.
\end{aligned}$$

Узевши у обзир да је

$$\mathcal{E}_{E_k(x;d-1)} + \sum_{j=0}^{k-2} (d-1)^{k-j-1}\, \mathcal{E}_{E_{j+1}(x;d-1)} = \sum_{j=0}^{k-1} (d-1)^{k-j-1}\, \mathcal{E}_{E_{j+1}(x;d-1)},$$

закључујемо да надаље мора бити

$$\mathcal{E}_{\mathcal{B}_{d,k}} = \sum_{j=0}^{k-1} (d-1)^{k-j-1}\, \mathcal{E}_{E_{j+1}(x;d-1)} - \sum_{j=1}^{k-1} (d-1)^{k-j-1}\, \mathcal{E}_{E_j(x;d-1)}.$$

Такође, како је $E_1(x;d-1) = x$, јасно је да важи $\mathcal{E}_{E_1(x;d-1)} = 0$, што нам директно даје

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathcal{B}_{d,k}} &= \sum_{j=1}^{k-1} (d-1)^{k-j-1}\, \mathcal{E}_{E_{j+1}(x;d-1)} - \sum_{j=1}^{k-1} (d-1)^{k-j-1}\, \mathcal{E}_{E_j(x;d-1)} \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} (d-1)^{k-j-1} \left(\mathcal{E}_{E_{j+1}(x;d-1)} - \mathcal{E}_{E_j(x;d-1)}\right). \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

На основу израза (4.24), постаје очигледно да је за доказивање формуле (4.2) довољно установити да једнакост

$$\mathcal{E}_{E_{j+1}(x;d-1)} - \mathcal{E}_{E_j(x;d-1)} = y_j^{(1)} \sqrt{d-1}$$

наступа за свако $j = \overline{1, k-1}$. Међутим, ово је врло једноставно да се обави уз помоћ леме 4.4. Наиме, уколико је $2 \mid j$, онда добијамо

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{E_{j+1}(x;d-1)} - \mathcal{E}_{E_j(x;d-1)} &= 2\sqrt{d-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2j+4}\right) - 1\right) - 2\sqrt{d-1}\left(\csc\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) - 1\right) \\
&= 2\sqrt{d-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2j+4}\right) - \csc\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)\right) = y_j^{(1)} \sqrt{d-1}.
\end{aligned}$$

Са друге стране, ако $2 \nmid j$, тада следи

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{E_{j+1}(x;\,d-1)} - \mathcal{E}_{E_j(x;\,d-1)} &= 2\sqrt{d-1}\left(\csc\left(\frac{\pi}{2j+4}\right) - 1\right) - 2\sqrt{d-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) - 1\right) \\ &= 2\sqrt{d-1}\left(\csc\left(\frac{\pi}{2j+4}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)\right) = y_j^{(1)}\sqrt{d-1},\end{aligned}$$

чиме је доказ готов. □

4.4 Апроксимација енергије дендримера

Унутар задњег одељка датог поглавља биће речи о одређеним математичким резултатима везаним за енергију дендримера. Најпре ћемо помоћу последице 4.4 да докажемо теорему 4.3, а затим ћемо применом ове теореме да обавимо анализу асимптотског понашања енергије дендримера. Узевши у обзир формулу (4.17) дату у последици 4.4, видимо да се проблем одређивања енергије дендримера своди на налажење енергије Диксонових полинома друге врсте, као и Геронимусових полинома. Дакле, осим претходно доказане леме 4.4, биће нам неопходан и одговарајући резултат који се тиче енергије Геронимусових полинома. Пошто је за ове полиноме доста теже пронаћи тачну вредност њихових нула, уместо егзактног одређивања њихове енергије, излажемо њену довољно прецизну апроксимацију у виду следеће леме.

Лема 4.5. *За произвољно $a \in \mathbb{R}$, $a > 2$ и $j \in \mathbb{N}$, вредност $\mathcal{E}_{G_j(x;a)}$ се може апроксимирати преко израза*

$$2\sqrt{a-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) - 2.2\right) < \mathcal{E}_{G_j(x;a)} < 2\sqrt{a-1}\,\cot\left(\frac{\pi}{2j+2}\right),$$

ако $2 \nmid j$, односно помоћу неједнакости

$$2\sqrt{a-1}\left(\csc\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) - 2.2\right) < \mathcal{E}_{G_j(x;a)} < 2\sqrt{a-1}\,\csc\left(\frac{\pi}{2j+2}\right),$$

уколико $2 \mid j$.

Доказ. Нека је за одређено $a \in \mathbb{R}$, $a > 2$ и $j \in \mathbb{N}$ дат Геронимусов полином $G_j(x;a)$. На основу леме 2.9, знамо да се он може факторисати на линеарне реалне факторе и да поседује j простих нула $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_j$ за које важи

$$2\sqrt{a-1}\,\cos\left(\frac{h+\frac{1}{2}}{j+1}\pi\right) < \beta_h < 2\sqrt{a-1}\,\cos\left(\frac{h-\frac{1}{2}}{j+1}\pi\right) \qquad (\forall h \in \overline{1,j}).$$

Тривијално је доћи до закључка да је полином $G_j(x;a)$ паран уколико је $2 \mid j$, односно непаран ако важи $2 \nmid j$. У сваком случају, лако је увидети да мора бити $\beta_h > 0$ и $\beta_{j-h} = -\beta_h$ за свако $h = \overline{1, \lfloor \frac{j}{2} \rfloor}$. Осим тога, ако је број j непаран, онда је сигурно $\beta_{\frac{j+1}{2}} = 0$. Узевши све у обзир, долазимо до тога да је обавезно

$$\mathcal{E}_{G_j(x;a)} = 2\sum_{h=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \beta_h,$$

те следи

$$4\sqrt{a-1}\sum_{h=1}^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\cos\left(\frac{h+\frac{1}{2}}{j+1}\pi\right) < \mathcal{E}_{G_j(x;a)} < 4\sqrt{a-1}\sum_{h=1}^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\cos\left(\frac{h-\frac{1}{2}}{j+1}\pi\right).$$

Уведимо сада помоћну вредност $\zeta = e^{\frac{\pi}{2j+2}i}$. Имајући у виду да је

$$\cos\left(\frac{h-\frac{1}{2}}{j+1}\pi\right) = \frac{\zeta^{2h-1}+\zeta^{-(2h-1)}}{2}, \qquad \cos\left(\frac{h+\frac{1}{2}}{j+1}\pi\right) = \frac{\zeta^{2h+1}+\zeta^{-(2h+1)}}{2},$$

надаље лако добијамо неједнакост

$$2\sqrt{a-1}\sum_{h=1}^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\left(\zeta^{2h+1}+\zeta^{-(2h+1)}\right) < \mathcal{E}_{G_j(x;a)} < 2\sqrt{a-1}\sum_{h=1}^{\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\left(\zeta^{2h-1}+\zeta^{-(2h-1)}\right).$$

Како је $\zeta \neq 1$, постаје једноставно да се употреби стандардна формула за сумирање чланова геометријске прогресије, чиме закључујемо да мора бити

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{G_j(x;a)} &< 2\sqrt{a-1}\,\zeta^{1-2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\left(1+\zeta^2+\zeta^4+\cdots+\zeta^{4\lfloor\frac{j}{2}\rfloor-2}\right) = 2\sqrt{a-1}\,\zeta^{1-2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\,\frac{1-\zeta^{4\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}}{1-\zeta^2}\\
&= 2\sqrt{a-1}\,\frac{\zeta^{1-2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}-\zeta^{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}}{1-\zeta^2} = 2\sqrt{a-1}\,\frac{\left(\zeta^{1-2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}-\zeta^{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}\right)(1-\zeta^{-2})}{(1-\zeta^2)(1-\zeta^{-2})}\\
&= 2\sqrt{a-1}\,\frac{\left(\zeta^{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor-1}+\zeta^{1-2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\right)-\left(\zeta^{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}+\zeta^{-2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor-1}\right)}{2-(\zeta^2+\zeta^{-2})}\\
&= 2\sqrt{a-1}\,\frac{2\cos\left(\frac{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor-1}{2j+2}\pi\right)-2\cos\left(\frac{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}{2j+2}\pi\right)}{2-2\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right)}\\
&= 2\sqrt{a-1}\,\frac{\cos\left(\frac{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor-1}{2j+2}\pi\right)-\cos\left(\frac{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}{2j+2}\pi\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right)},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

као и

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{G_j(x;a)} &> 2\sqrt{a-1}\left(\zeta^{-1-2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\left(1+\zeta^2+\zeta^4+\cdots+\zeta^{4\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+2}\right)-\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)\right)\\
&= 2\sqrt{a-1}\left(\zeta^{-1-2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}\,\frac{1-\zeta^{4\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+4}}{1-\zeta^2}-\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)\right)\\
&= 2\sqrt{a-1}\left(\frac{\zeta^{-1-2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}-\zeta^{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+3}}{1-\zeta^2}-\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)\right)\\
&= 2\sqrt{a-1}\left(\frac{(\zeta^{-1-2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor}-\zeta^{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+3})(1-\zeta^{-2})}{(1-\zeta^2)(1-\zeta^{-2})}-\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)\right)\\
&= 2\sqrt{a-1}\left(\frac{\left(\zeta^{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}+\zeta^{-2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor-1}\right)-\left(\zeta^{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+3}+\zeta^{-2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor-3}\right)}{2-(\zeta^2+\zeta^{-2})}-\left(\zeta+\zeta^{-1}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{a-1}\left(\frac{2\cos\left(\frac{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}{2j+2}\pi\right)-2\cos\left(\frac{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+3}{2j+2}\pi\right)}{2-2\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right)}-2\cos\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)\right)$$

$$= 2\sqrt{a-1}\left(\frac{\cos\left(\frac{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+1}{2j+2}\pi\right)-\cos\left(\frac{2\lfloor\frac{j}{2}\rfloor+3}{2j+2}\pi\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right)}-2\cos\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)\right). \tag{4.26}$$

Ради концизности, надаље ћемо доказивање леме да поделимо на два случаја у зависности од парности броја j.

Случај $2 \nmid j$. У овом случају добијамо да је $\lfloor\frac{j}{2}\rfloor = \frac{j-1}{2}$, те из неједнакости (4.25) одмах следи

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{G_j(x;a)} &< 2\sqrt{a-1}\,\frac{\cos\left(\frac{j-2}{2j+2}\pi\right)-\cos\left(\frac{j}{2j+2}\pi\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right)}\\
&= 2\sqrt{a-1}\,\frac{\cos\left(\frac{j-2}{j+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{j}{j+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right)}\\
&= 2\sqrt{a-1}\,\frac{\sin\left(\frac{3}{j+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{1}{j+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} = 2\sqrt{a-1}\,\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2j+2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)}\\
&= 2\sqrt{a-1}\,\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{2j+2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} < 2\sqrt{a-1}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} = 2\sqrt{a-1}\,\cot\left(\frac{\pi}{2j+2}\right),
\end{aligned}$$

као што је и требало показати. Такође, неједнакост (4.26) нам говори да нужно важи

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{G_j(x;a)} &> 2\sqrt{a-1}\left(\frac{\cos\left(\frac{j}{2j+2}\pi\right)-\cos\left(\frac{j+2}{2j+2}\pi\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right)}-2\cos\left(\frac{1}{2j+2}\pi\right)\right)\\
&= 2\sqrt{a-1}\left(\frac{2\cos\left(\frac{j}{2j+2}\pi\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)}-2\cos\left(\frac{1}{2j+2}\pi\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{a-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} - 2\cos\left(\frac{1}{2j+2}\pi\right)\right)$$
$$> 2\sqrt{a-1}\left(\csc\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) - 2.2\right) > 2\sqrt{a-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) - 2.2\right),$$

чиме је у потпуности разрешен случај када је вредност j непарна.

Случај $2 \mid j$. Овде мора бити $\lfloor \frac{j}{2} \rfloor = \frac{j}{2}$, што значи да неједнакост (4.25) директно имплицира

$$\mathcal{E}_{G_j(x;a)} < 2\sqrt{a-1}\,\frac{\cos\left(\frac{j-1}{2j+2}\pi\right) - \cos\left(\frac{j+1}{2j+2}\pi\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right)} = 2\sqrt{a-1}\,\frac{\cos\left(\frac{j-1}{2j+2}\pi\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)}$$
$$= 2\sqrt{a-1}\,\frac{\sin\left(\frac{2}{2j+2}\pi\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} = 2\sqrt{a-1}\,\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)}$$
$$= 2\sqrt{a-1}\,\cot\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) < 2\sqrt{a-1}\,\csc\left(\frac{\pi}{2j+2}\right),$$

као што је и било потребно демонстрирати. Осим тога, из неједнакости (4.26) добијамо

$$\mathcal{E}_{G_j(x;a)} > 2\sqrt{a-1}\left(\frac{\cos\left(\frac{j+1}{2j+2}\pi\right) - \cos\left(\frac{j+3}{2j+2}\pi\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{j+1}\pi\right)} - 2\cos\left(\frac{1}{2j+2}\pi\right)\right)$$
$$= 2\sqrt{a-1}\left(\frac{-\cos\left(\frac{j+3}{2j+2}\pi\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} - 2\cos\left(\frac{1}{2j+2}\pi\right)\right)$$
$$= 2\sqrt{a-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{2}{2j+2}\pi\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} - 2\cos\left(\frac{1}{2j+2}\pi\right)\right)$$
$$= 2\sqrt{a-1}\left(\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} - 2\cos\left(\frac{1}{2j+2}\pi\right)\right)$$
$$= 2\sqrt{a-1}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} - 2\cos\left(\frac{1}{2j+2}\pi\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sqrt{a-1}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} - \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2j+2}\right)} - 2\cos\left(\frac{1}{2j+2}\pi\right) \right)\\
&= 2\sqrt{a-1}\left(\csc\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) - \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4j+4}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4j+4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4j+4}\right)} - 2\cos\left(\frac{1}{2j+2}\pi\right) \right)\\
&= 2\sqrt{a-1}\left(\csc\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4j+4}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) \right).
\end{aligned}
$$

Дакле, како бисмо комплетирали доказ леме, довољно је установити да је обавезно испуњен услов

$$\tan\left(\frac{\pi}{4j+4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) \le 2.2$$

за свако парно $j \in \mathbb{N}$, $j \ge 2$. Међутим, ово је врло лако урадити. Наиме, за $j = 2$ одмах видимо да важи

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(2 - \sqrt{3}\right) + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 < 2.2,$$

при чему за произвољно парно $j \ge 4$ имамо да је

$$\tan\left(\frac{\pi}{4j+4}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) < \tan\left(\frac{\pi}{4j+4}\right) + 2 \le \tan\left(\frac{\pi}{20}\right) + 2 < 2.2,$$

што доводи до траженог тврђења. □

Заједничком применом лема 4.4 и 4.5, надаље није тешко комплетирати доказ теореме 4.3 на начин образложен у наставку.

Доказ теореме 4.3. Пре свега, очигледно је да за произвољно $k \in \mathbb{N}$ дендример типа $\mathcal{D}_{2,k}$ мора бити изоморфан са Бете стаблом облика $\mathcal{B}_{2,2k-1}$, те важи $\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{2,k}} = \mathcal{E}_{\mathcal{B}_{2,2k-1}}$. Из овог разлога, једнакост (4.6) одмах следи применом формуле (4.3) из теореме 4.2. Осим тога, тривијално је увидети да су неједнакости (4.4) и (4.5) задовољене кад год је $k = 1$, пошто је тада сигурно $\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,1}} = 0$ за свако $d \in \mathbb{N}$, $d \ge 3$. У остатку доказа теореме ћемо претпоставити да је задат дендример облика $\mathcal{D}_{d,k}$ за неко $d \in \mathbb{N}$, $d \ge 3$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, и доказаћемо да неједнакости (4.4) и (4.5) и у овом случају морају бити тачне.

Израз (4.17) из последице 4.4 нам говори да се енергија датог дендримера може израчунати преко формуле

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}} &= \mathcal{E}_{G_k(x;d)} + (d-1)\,\mathcal{E}_{\mathcal{E}_{k-1}(x;d-1)} + \sum_{j=1}^{k-2} d(d-2)(d-1)^{k-j-2}\,\mathcal{E}_{E_j(x;d-1)}\\
&= \mathcal{E}_{G_k(x;d)} + (d-1)\,\mathcal{E}_{\mathcal{E}_{k-1}(x;d-1)} + \sum_{j=1}^{k-2} \left((d-1)^2 - 1\right)(d-1)^{k-j-2}\,\mathcal{E}_{E_j(x;d-1)}\\
&= \mathcal{E}_{G_k(x;d)} + (d-1)\,\mathcal{E}_{\mathcal{E}_{k-1}(x;d-1)} + \sum_{j=1}^{k-2}(d-1)^{k-j}\,\mathcal{E}_{E_j(x;d-1)} - \sum_{j=1}^{k-2}(d-1)^{k-j-2}\,\mathcal{E}_{E_j(x;d-1)}
\end{aligned}
$$

$$= \mathcal{E}_{G_k(x;\,d)} + (d-1)\,\mathcal{E}_{\mathcal{E}_{k-1}(x;\,d-1)} + \sum_{j=0}^{k-3}(d-1)^{k-j-1}\,\mathcal{E}_{E_{j+1}(x;\,d-1)} - \sum_{j=2}^{k-1}(d-1)^{k-j-1}\,\mathcal{E}_{E_{j-1}(x;\,d-1)}$$

$$= \mathcal{E}_{G_k(x;\,d)} + \sum_{j=0}^{k-2}(d-1)^{k-j-1}\,\mathcal{E}_{E_{j+1}(x;\,d-1)} - \sum_{j=2}^{k-1}(d-1)^{k-j-1}\,\mathcal{E}_{E_{j-1}(x;\,d-1)}.$$

Пошто је $\mathcal{E}_{E_1(x;\,d-1)} = 0$ због $E_1(x; d-1) = x$, као и $\mathcal{E}_{E_0(x;\,d-1)} = 0$ због $E_0(x; d-1) = 1$, видимо да надаље сигурно важи

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}} = \mathcal{E}_{G_k(x;\,d)} + \sum_{j=1}^{k-2}(d-1)^{k-j-1}\,\mathcal{E}_{E_{j+1}(x;\,d-1)} - \sum_{j=1}^{k-1}(d-1)^{k-j-1}\,\mathcal{E}_{E_{j-1}(x;\,d-1)}$$

$$= \left(\mathcal{E}_{G_k(x;\,d)} - \mathcal{E}_{E_{k-2}(x;\,d-1)}\right) + \sum_{j=1}^{k-2}(d-1)^{k-j-1}\,\mathcal{E}_{E_{j+1}(x;\,d-1)} - \sum_{j=1}^{k-2}(d-1)^{k-j-1}\,\mathcal{E}_{E_{j-1}(x;\,d-1)}$$

$$= \left(\mathcal{E}_{G_k(x;\,d)} - \mathcal{E}_{E_{k-2}(x;\,d-1)}\right) + \sum_{j=1}^{k-2}(d-1)^{k-j-1}\left(\mathcal{E}_{E_{j+1}(x;\,d-1)} - \mathcal{E}_{E_{j-1}(x;\,d-1)}\right).$$

На основу леме 4.4, јасно је да за свако $j = \overline{1, k-2}$ добијамо

$$\mathcal{E}_{E_{j+1}(x;\,d-1)} - \mathcal{E}_{E_{j-1}(x;\,d-1)} = \begin{cases} 2\sqrt{d-1}\left(\csc\left(\dfrac{\pi}{2j+4}\right)-1\right) - 2\sqrt{d-1}\left(\csc\left(\dfrac{\pi}{2j}\right)-1\right), & 2 \nmid j \\ 2\sqrt{d-1}\left(\cot\left(\dfrac{\pi}{2j+4}\right)-1\right) - 2\sqrt{d-1}\left(\cot\left(\dfrac{\pi}{2j}\right)-1\right), & 2 \mid j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (d-1)^{\frac{1}{2}}\left(2\csc\left(\dfrac{\pi}{2j+4}\right) - 2\csc\left(\dfrac{\pi}{2j}\right)\right), & 2 \nmid j \\ (d-1)^{\frac{1}{2}}\left(2\cot\left(\dfrac{\pi}{2j+4}\right) - 2\cot\left(\dfrac{\pi}{2j}\right)\right), & 2 \mid j \end{cases}$$

$$= y_j^{(2)}(d-1)^{\frac{1}{2}},$$

што нас доводи до

$$\mathcal{E}_{E_{j+1}(x;\,d-1)} = \left(\mathcal{E}_{G_k(x;\,d)} - \mathcal{E}_{E_{k-2}(x;\,d-1)}\right) + \sum_{j=1}^{k-2} y_j^{(2)}(d-1)^{k-\frac{1}{2}-j}.$$

Дакле, како бисмо доказали неједнакости (4.4) и (4.5), неопходно је показати да обавезно наступа

$$y_{k-1}^{(2)}\sqrt{d-1} - 2.4\sqrt{d-1} < \mathcal{E}_{G_k(x;\,d)} - \mathcal{E}_{E_{k-2}(x;\,d-1)} < y_{k-1}^{(2)}\sqrt{d-1} + 2\sqrt{d-1}.$$

Решавање проблема ћемо надаље да поделимо на два случаја у зависности од парности коју има број k.

Случај $2 \mid k$. У овом случају, на основу лема 4.4 и 4.5 закључујемо да обавезно важи

$$\mathcal{E}_{G_k(x;\,d)} - \mathcal{E}_{E_{k-2}(x;\,d-1)} < 2\sqrt{d-1}\ \csc\left(\frac{\pi}{2k+2}\right) - 2\sqrt{d-1}\left(\csc\left(\frac{\pi}{2k-2}\right)-1\right)$$

$$= 2\sqrt{d-1}\left(\csc\left(\frac{\pi}{2k+2}\right) - \csc\left(\frac{\pi}{2k-2}\right)\right) + 2\sqrt{d-1}$$

$$= y_{k-1}^{(2)}\sqrt{d-1} + 2\sqrt{d-1},$$

заједно уз

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{G_k(x;\,d)} - \mathcal{E}_{E_{k-2}(x;\,d-1)} &> 2\sqrt{d-1}\left(\csc\left(\frac{\pi}{2k+2}\right) - 2.2\right) - 2\sqrt{d-1}\left(\csc\left(\frac{\pi}{2k-2}\right) - 1\right)\\
&= 2\sqrt{d-1}\left(\csc\left(\frac{\pi}{2k+2}\right) - \csc\left(\frac{\pi}{2k-2}\right)\right) - 2.4\sqrt{d-1}\\
&= y^{(2)}_{k-1}\sqrt{d-1} - 2.4\sqrt{d-1},
\end{aligned}$$

као што је и било потребно установити.

Случај $2 \nmid k$. Слично као у претходном случају, леме 4.4 и 4.5 диктирају да су нужно тачне неједнакости

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{G_k(x;\,d)} - \mathcal{E}_{E_{k-2}(x;\,d-1)} &< 2\sqrt{d-1}\,\cot\left(\frac{\pi}{2k+2}\right) - 2\sqrt{d-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2k-2}\right) - 1\right)\\
&= 2\sqrt{d-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2k+2}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{2k-2}\right)\right) + 2\sqrt{d-1}\\
&= y^{(2)}_{k-1}\sqrt{d-1} + 2\sqrt{d-1}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{G_k(x;\,d)} - \mathcal{E}_{E_{k-2}(x;\,d-1)} &> 2\sqrt{d-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2k+2}\right) - 2.2\right) - 2\sqrt{d-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2k-2}\right) - 1\right)\\
&= 2\sqrt{d-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2k+2}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{2k-2}\right)\right) - 2.4\sqrt{d-1}\\
&= y^{(2)}_{k-1}\sqrt{d-1} - 2.4\sqrt{d-1},
\end{aligned}$$

чиме је доказ готов. □

Одељак ћемо завршити навођењем неколико последица теореме 4.3. Најпре ћемо демонстрирати начин како је могуће искористити апроксимације дате у неједнакостима (4.4) и (4.5) у циљу добијања мање прецизних, али концизнијих, нових апроксимација. Пре навођења одговарајућег резултата, биће нам од користи следећа помоћна лема.

Лема 4.6. *Нека су реални низови* $\left(y^{(3)}_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ *и* $\left(y^{(3)}_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ *дефинисани преко израза*

$$\begin{aligned}
y^{(3)}_j &= 2\csc\left(\frac{\pi}{2j+4}\right) - 2\csc\left(\frac{\pi}{2j}\right) \qquad (\forall j \in \mathbb{N}),\\
y^{(4)}_j &= 2\cot\left(\frac{\pi}{2j+4}\right) - 2\cot\left(\frac{\pi}{2j}\right) \qquad (\forall j \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Оба ова низа су позитивна и конвергирају ка $\frac{8}{\pi}$*, при чему је низ* $\left(y^{(3)}_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ *растући, док је* $\left(y^{(4)}_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ *опадајући.*

Доказ. Прво ћемо доказати конвергенцију оба низа. Јасно је да важи

$$y^{(3)}_j = 2\csc\left(\frac{\pi}{2j+4}\right) - 2\csc\left(\frac{\pi}{2j}\right) = 2\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2j}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2j+4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2j}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2j+4}\right)}$$

$$= 2\,\frac{2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2j}-\frac{\pi}{2j+4}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2j}+\frac{\pi}{2j+4}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2j}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2j+4}\right)} = 4\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2j(j+2)}\right)\cos\left(\frac{(j+1)\pi}{2j(j+2)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2j}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2j+4}\right)}$$

$$= \frac{8}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2j}}{\sin\left(\frac{\pi}{2j}\right)}\cdot\frac{\frac{\pi}{2j+4}}{\sin\left(\frac{\pi}{2j+4}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2j(j+2)}\right)}{\frac{\pi}{2j(j+2)}}\cdot\cos\left(\frac{(j+1)\pi}{2j(j+2)}\right),$$

одакле применом познате граничне вредности $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ постаје очигледно да је задовољено $\lim\limits_{j\to+\infty} y_j^{(3)} = \frac{8}{\pi}$. На сличан начин можемо доћи до

$$y_j^{(4)} = 2\cot\left(\frac{\pi}{2j+4}\right) - 2\cot\left(\frac{\pi}{2j}\right) = 2\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2j}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2j+4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2j+4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2j}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2j}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2j+4}\right)}$$

$$= 2\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2j}-\frac{\pi}{2j+4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2j}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2j+4}\right)} = 2\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{j(j+2)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2j}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2j+4}\right)}$$

$$= \frac{8}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2j}}{\sin\left(\frac{\pi}{2j}\right)}\cdot\frac{\frac{\pi}{2j+4}}{\sin\left(\frac{\pi}{2j+4}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{j(j+2)}\right)}{\frac{\pi}{j(j+2)}},$$

што директно имплицира $\lim\limits_{j\to+\infty} y_j^{(4)} = \frac{8}{\pi}$. Узевши у обзир да су оба задата низа очигледно позитивна, преостало је још да се покаже да је низ $\left(y_j^{(3)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ растући, а низ $\left(y_j^{(4)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ опадајући. Решавање остатка проблема ћемо ради концизности да поделимо на два случаја у зависности од тога којим се датим низом бавимо.

Случај $\left(y_j^{(3)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$. Нека је дата функција $f(x) = \csc\left(\frac{\pi}{x}\right)$ на домену $[2,+\infty)$. Најпре вреди напоменути да ова функција очигледно свуда има и први и други извод. Узевши у обзир да је

$$\begin{aligned} y_{j+1}^{(3)} - y_j^{(3)} &= 2\csc\left(\frac{\pi}{2j+6}\right) - 2\csc\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) - 2\csc\left(\frac{\pi}{2j+4}\right) + 2\csc\left(\frac{\pi}{2j}\right) \\ &= 2(f(2j+6) - f(2j+4)) - 2(f(2j+2) - f(2j)) \end{aligned}$$

за свако $j \in \mathbb{N}$, директна примена Лагранжове теореме нас доводи до тога да обавезно важи

$$y_{j+1}^{(3)} - y_j^{(3)} = 2((2j+6)-(2j+4))\,f'(\xi_1) - 2((2j+2)-2j)\,f'(\xi_2) = 4f'(\xi_1) - 4f'(\xi_2)$$

за неко $\xi_1 \in (2j+4, 2j+6)$ и $\xi_2 \in (2j, 2j+2)$. Пошто је $\xi_1 > \xi_2 > 2$, постаје очигледно да је за доказивање траженог тврђења довољно установити да је функција f'' позитивна на $(2,+\infty)$.

За функцију f је лако пронаћи први извод

$$f'(x) = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \cdot \frac{\pi}{x^2} = \frac{\pi}{x^2}\csc\left(\frac{\pi}{x}\right)\cot\left(\frac{\pi}{x}\right),$$

одакле одмах следи и други извод

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{\pi}{x^2}\right)'\csc\left(\frac{\pi}{x}\right)\cot\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{\pi}{x^2}\csc'\left(\frac{\pi}{x}\right)\cot\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{\pi}{x^2}\csc\left(\frac{\pi}{x}\right)\cot'\left(\frac{\pi}{x}\right)\\
&= -\frac{2\pi}{x^3}\csc\left(\frac{\pi}{x}\right)\cot\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{\pi}{x^2}\left(\frac{\pi}{x^2}\csc\left(\frac{\pi}{x}\right)\cot\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)\cot\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{\pi}{x^2}\csc\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(\frac{\pi}{x^2}\csc^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)\\
&= -\frac{2\pi}{x^3}\csc\left(\frac{\pi}{x}\right)\cot\left(\frac{\pi}{x}\right) + \frac{\pi^2}{x^4}\left(\csc\left(\frac{\pi}{x}\right)\cot^2\left(\frac{\pi}{x}\right) + \csc^3\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)\\
&= \frac{\pi}{x^4}\csc\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(-2x\cot\left(\frac{\pi}{x}\right) + \pi\cot^2\left(\frac{\pi}{x}\right) + \pi\csc^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\right).
\end{aligned}$$

Надаље је једноставно увидети да за свако $x \in (2, +\infty)$ важи

$$\begin{aligned}
f''(x) > 0 \quad &\iff \quad -2x\cot\left(\frac{\pi}{x}\right) + \pi\cot^2\left(\frac{\pi}{x}\right) + \pi\csc^2\left(\frac{\pi}{x}\right) > 0\\
&\iff \quad \cot^2\left(\frac{\pi}{x}\right) + \csc^2\left(\frac{\pi}{x}\right) > \frac{2x}{\pi}\cot\left(\frac{\pi}{x}\right)\\
&\iff \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right) + 1 > \frac{2x}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\\
&\iff \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right) + 1 > \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}}.
\end{aligned}$$

Дакле, како бисмо компетирали доказ, довољно је показати да је обавезно испуњен услов

$$\cos^2\theta + 1 > \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\theta} \tag{4.27}$$

за свако $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Међутим, како је

$$\begin{aligned}
&\cos^2\theta + 1 > \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\theta}\\
\iff &\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 > \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\theta} - 2\cos\theta\\
\iff &\qquad (\cos\theta - 1)^2 > 2\cos\theta\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta} - 1\right),
\end{aligned}$$

видимо да неједнакост (4.27) заиста мора бити тачна. Наиме, сигурно је $(\cos\theta - 1)^2 > 0$ за свако $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, при чему је $\frac{\sin\theta}{\theta} - 1 < 0$ због познате неједнакости $0 < \sin\theta < \theta$ која важи за произвољно $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Случај $\left(y_j^{(4)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$. Дефинишимо функцију $f(x) = \cot\left(\frac{\pi}{x}\right)$ на $[2, +\infty)$, која очигледно свуда има и први и други извод. Пошто важи

$$\begin{aligned}
y_{j+1}^{(4)} - y_j^{(4)} &= 2\cot\left(\frac{\pi}{2j+6}\right) - 2\cot\left(\frac{\pi}{2j+2}\right) - 2\cot\left(\frac{\pi}{2j+4}\right) + 2\cot\left(\frac{\pi}{2j}\right)\\
&= 2(f(2j+6) - f(2j+4)) - 2(f(2j+2) - f(2j))
\end{aligned}$$

за произвољно $j \in \mathbb{N}$, слично као у претходном случају Лагранжова теорема диктира да мора бити

$$y_{j+1}^{(4)} - y_j^{(4)} = 2((2j+6)-(2j+4))\, f'(\xi_1) - 2((2j+2)-2j)\, f'(\xi_2) = 4f'(\xi_1) - 4f'(\xi_2)$$

за неко $\xi_1 \in (2j+4, 2j+6)$ и $\xi_2 \in (2j, 2j+2)$. Како је $\xi_1 > \xi_2 > 2$, није тешко увидети да је за комплетирање доказа леме довољно показати да је функција f'' негативна на $(2, +\infty)$. Код ове функције је једноставно израчунати први извод

$$f'(x) = -\csc^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right) = \frac{\pi}{x^2}\csc^2\left(\frac{\pi}{x}\right),$$

као и други извод

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\pi}{x^2}\right)'\csc^2\left(\frac{\pi}{x}\right) + 2\,\frac{\pi}{x^2}\csc\left(\frac{\pi}{x}\right)\csc'\left(\frac{\pi}{x}\right)\\ &= -\frac{2\pi}{x^3}\csc^2\left(\frac{\pi}{x}\right) + 2\,\frac{\pi}{x^2}\csc\left(\frac{\pi}{x}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{x^2}\csc\left(\frac{\pi}{x}\right)\cot\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)\\ &= \frac{2\pi}{x^4}\csc^2\left(\frac{\pi}{x}\right)\left(-x + \pi\cot\left(\frac{\pi}{x}\right)\right), \end{aligned}$$

те брзо можемо закључити да за свако $x \in (2, +\infty)$ важи еквиваленција

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 \quad &\iff \quad -x + \pi\cot\left(\frac{\pi}{x}\right) < 0\\ &\iff \quad \frac{\pi}{x}\cot\left(\frac{\pi}{x}\right) < 1\\ &\iff \quad \frac{\pi}{x} < \tan\left(\frac{\pi}{x}\right). \end{aligned}$$

Међутим, тражено тврђење сада очигледно следи из познате чињенице да $0 < \tan\theta < \theta$ наступа за било које $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, чиме је доказ готов. □

Применом леме 4.6 могуће је директно закључити да низ $\left(y_j^{(2)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ сигурно конвергира ка $\frac{8}{\pi}$, при чему је његов подниз $\left(y_{2j-1}^{(2)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ растући и тежи ка вредности $\frac{8}{\pi}$ одоздо, док му је подниз $\left(y_{2j}^{(2)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ опадајући и тежи ка $\frac{8}{\pi}$ одозго. У наставку излажемо претходно споменуто тврђење базирано на теореми 4.3 које се такође тиче апроксимације енергије дендримера.

Последица 4.5. *За било који дендример типа $\mathcal{D}_{d,k}$, где је $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, важе неједнакости*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}} < (d-1)^{k-\frac{3}{2}}\left(2 + \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{d-1}\right), \tag{4.28}$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}} > (d-1)^{k-\frac{3}{2}}\left(2 + \frac{2\sqrt{2}}{d-1}\right). \tag{4.29}$$

Доказ. Ради формирања концизнијег доказа, разделићемо решавање проблема на три случаја у зависности од тога да ли важи $k = 3$ или $k = 4$ или $k \geq 5$.

Случај $k = 3$. Имајући у виду једнакост (4.17) из последице 4.4, једноставно је доћи до тога да за произвољно $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ важи

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathcal{D}_{d,3}}(x) &= G_3(x;d)\, E_2(x;d-1)^{d-1}\, E_1(x;d-1)^{d(d-2)} \\ &= \left(x^3 - (2d-1)x\right)\left(x^2 - (d-1)\right)^{d-1} x^{d(d-2)},\end{aligned}$$

те је $\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,3}} = 2\sqrt{2d-1} + 2(d-1)\sqrt{d-1}$, одакле одмах добијамо

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,3}}}{(d-1)^{\frac{3}{2}}} = 2 + 2(d-1)^{-\frac{3}{2}}\sqrt{2d-1} = 2 + \frac{2}{d-1}\sqrt{\frac{2d-1}{d-1}} = 2 + \frac{2}{d-1}\sqrt{2 + \frac{1}{d-1}}.$$

Неједнакост (4.28) следи из чињенице да је

$$2\sqrt{2 + \frac{1}{d-1}} \leq 2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{10} < \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5},$$

при чему формула (4.29) чини директну последицу тривијалне неједнакости $\sqrt{2 + \frac{1}{d-1}} > \sqrt{2}$.

Случај $k = 4$. Коришћењем теореме 4.3, за свако $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ директно долазимо до апроксимације

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,4}} &< \sum_{j=1}^{3} y_j^{(2)}(d-1)^{\frac{7}{2}-j} + 2(d-1)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,4}} &> \sum_{j=1}^{3} y_j^{(2)}(d-1)^{\frac{7}{2}-j} - 2.4(d-1)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned}y_1^{(2)} &= 2\csc\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2\csc\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, \\ y_2^{(2)} &= 2\cot\left(\frac{\pi}{8}\right) - 2\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}, \\ y_3^{(2)} &= 2\csc\left(\frac{\pi}{10}\right) - 2\csc\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{5} - 2.\end{aligned}$$

Надаље је лако израчунати да мора бити

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,4}}}{(d-1)^{\frac{5}{2}}} &< 2 + \frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{2\sqrt{5} - 2 + 2}{(d-1)^2}, \\ \frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,4}}}{(d-1)^{\frac{5}{2}}} &> 2 + \frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{2\sqrt{5} - 2 - 2.4}{(d-1)^2}.\end{aligned}$$

Пошто је $2\sqrt{5} > 4.4 = 2 + 2.4$, формула (4.29) мора бити задовољена. Осим тога, једноставно је закључити да важи

$$\frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{2\sqrt{5} - 2 + 2}{(d-1)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{1}{d-1}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{d-1} \leq \frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{d-1} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{d-1},$$

те неједнакост (4.28) сигурно такође наступа, узевши у обзир да је

$$2\sqrt{2} + \sqrt{5} < \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

Случај $k \geq 5$. У последњем случају, директна употреба теореме 4.3 нам гарантује да је испуњено

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} < \sum_{j=1}^{k-1} y_j^{(2)}(d-1)^{1-j} + 2(d-1)^{2-k}, \tag{4.30}$$

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} > \sum_{j=1}^{k-1} y_j^{(2)}(d-1)^{1-j} - 2.4(d-1)^{2-k}. \tag{4.31}$$

Слично као при решавању случаја $k = 4$, помоћу неједнакости (4.31) је једноставно уочити да је

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} &> \sum_{j=1}^{3} y_j^{(2)}(d-1)^{1-j} - 2.4(d-1)^{2-k} = 2 + \frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{2\sqrt{5}-2}{(d-1)^2} - 2.4(d-1)^{2-k}\\ &> 2 + \frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{2\sqrt{5}-2}{(d-1)^2} - 2.4(d-1)^{-2} = 2 + \frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{2\sqrt{5}-4.4}{(d-1)^2},\end{aligned}$$

одакле одмах следи израз (4.29), пошто је $2\sqrt{5} > 4.4$. Са друге стране, имајући у виду да је низ $\left(y_j^{(2)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ конвергентан, из формуле (4.30) можемо установити да важи

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} &< \sum_{j=1}^{+\infty} y_j^{(2)}(d-1)^{1-j} + 2(d-1)^{2-k} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} y_j^{(2)}(d-1)^{1-j} + 2(d-1)^{-3}\\ &= 2 + \frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{2\sqrt{5}-2}{(d-1)^2} + \frac{2}{(d-1)^3} + \sum_{j=4}^{+\infty} y_j^{(2)}(d-1)^{1-j}.\end{aligned}$$

Као директна последица леме 4.6, сигурно је $\sup\limits_{j\geq 4} y_j^{(2)} = y_4^{(2)}$, што нам омогућава да надаље добијемо

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} &< 2 + \frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{2\sqrt{5}-2}{(d-1)^2} + \frac{2}{(d-1)^3} + \sum_{j=4}^{+\infty} y_4^{(2)}(d-1)^{1-j}\\ &= 2 + \frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{2\sqrt{5}-2}{(d-1)^2} + \frac{2}{(k-1)^3} + \frac{y_4^{(2)}}{(d-1)^3}\sum_{j=0}^{+\infty}(d-1)^{-j}\\ &= 2 + \frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{2\sqrt{5}-2}{(d-1)^2} + \frac{2}{(d-1)^3} + \frac{y_4^{(2)}}{(d-1)^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{d-1}}\\ &= 2 + \frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{2\sqrt{5}-2}{(d-1)^2} + \frac{2}{(d-1)^3} + \frac{y_4^{(2)}}{(d-2)(d-1)^2}.\end{aligned}$$

Тривијално је проверити да важи

$$y_4^{(2)} = 2\cot\left(\frac{\pi}{12}\right) - 2\cot\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(2+\sqrt{3}\right) - 2\left(\sqrt{2}+1\right) = 2 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

и да наступају неједнакости

$$\frac{1}{(d-1)^2} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{d-1}, \qquad \frac{1}{(d-1)^3} \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{d-1}, \qquad \frac{1}{(d-2)(d-1)^2} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{d-1},$$

те одавде одмах следи

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} &< 2 + \frac{2\sqrt{2}}{d-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{d-1} + \frac{\frac{1}{2}}{d-1} + \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{d-1}\\ &= 2 + \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}-1+\frac{1}{2}+1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{d-1}\\ &= 2 + \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{d-1},\end{aligned}$$

чиме је демонстрирана и неједнакост (4.28). □

Остатак поглавља бавиће се анализом асимптотског понашања енергије дендримера. При обављању споменуте анализе, енергију дендримера $\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}$ ћемо да посматрамо као реалну функцију уз две променљиве $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, односно као функцију типа $\{3, 4, 5, \ldots\} \times \{2, 3, 4, \ldots\} \to \mathbb{R}$. У наставку наводимо још две последице теореме 4.3, чиме завршавамо дато поглавље.

Последица 4.6. *За произвољну вредност $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, важи*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}} \sim 2(d-1)^{k-\frac{3}{2}} \tag{4.32}$$

када $d \to +\infty$. Осим тога, за било коју вредност $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$, мора бити

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}} \sim \nu_d (d-1)^{k-\frac{3}{2}} \tag{4.33}$$

када $k \to +\infty$, где ν_d чини збир конвергентног реда

$$\nu_d = \sum_{j=1}^{+\infty} y_j^{(2)} (d-1)^{1-j}.$$

Доказ. Доказивање дате последице ћемо да разбијемо на два случаја у зависности од тога да ли се бавимо неједнакошћу (4.32) или (4.33).

Случај $d \to +\infty$. Уколико је $k = 2$, онда једнакост (4.17) из последице 4.4 директно даје $\mathcal{P}_{\mathcal{D}_{d,2}}(x) = x^{d-1}(x^2 - d)$, те мора бити $\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,2}} = 2\sqrt{d}$. Неједнакост (4.32) тада директно следи из тривијалне чињенице да је

$$\lim_{d \to +\infty} \frac{2\sqrt{d}}{(d-1)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{d \to +\infty} 2\sqrt{1 + \frac{1}{d-1}} = 2.$$

Са друге стране, ако је $k \geq 3$, онда на основу теореме 4.3 добијамо да важи

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} < \sum_{j=1}^{k-1} y_j^{(2)} (d-1)^{1-j} + 2(d-1)^{2-k},$$

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} > \sum_{j=1}^{k-1} y_j^{(2)} (d-1)^{1-j} - 2.4(d-1)^{2-k},$$

за свако $d \geq 3$. Из овог разлога, следи

$$\limsup_{d\to+\infty} \frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} \leq \limsup_{d\to+\infty} \left(\sum_{j=1}^{k-1} y_j^{(2)}(d-1)^{1-j} + 2(d-1)^{2-k} \right) = y_1^{(2)} = 2$$

заједно уз

$$\liminf_{d\to+\infty} \frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} \geq \liminf_{d\to+\infty} \left(\sum_{j=1}^{k-1} y_j^{(2)}(d-1)^{1-j} - 2.4(d-1)^{2-k} \right) = y_1^{(2)} = 2,$$

те је сигурно $\lim\limits_{d\to+\infty} \dfrac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} = 2$, као што је и било потребно установити.

Случај $k \to +\infty$. Нека је $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ фиксирана вредност. На основу резултата добијених у леми 4.6, није тешко утврдити да је позитиван ред

$$\sum_{j=1}^{+\infty} y_j^{(2)}(d-1)^{1-j}$$

нужно конвергентан, што оправдава увођење вредности ν_d у поставци леме. Применом теореме 4.3, на сличан начин као у претходном случају можемо доћи до тога да је

$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} \leq \limsup_{k\to+\infty} \left(\sum_{j=1}^{k-1} y_j^{(2)}(d-1)^{1-j} + 2(d-1)^{2-k} \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} y_j^{(2)}(d-1)^{1-j} = \nu_d,$$

као и

$$\liminf_{k\to+\infty} \frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} \geq \liminf_{k\to+\infty} \left(\sum_{j=1}^{k-1} y_j^{(2)}(d-1)^{1-j} - 2.4(d-1)^{2-k} \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} y_j^{(2)}(d-1)^{1-j} = \nu_d.$$

Дакле, мора бити $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} = \nu_d$, одакле директно следи израз (4.33). □

Последица 4.7. *Уколико* $\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}$ *посматрамо као функцију уз промењиве* d *и* k *над доменом* $\{3, 4, 5, \dots\} \times \{2, 3, 4, \dots\}$, *онда важи*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}} = \Theta\left((d-1)^{k-\frac{3}{2}}\right)$$

када $(d, k) \to \infty$.

Доказ. Као што је установљено при доказивању последице 4.6, за свако $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ добијамо $\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,2}} = 2\sqrt{d}$. Међутим, тада следи

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,2}}}{(d-1)^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{1 + \frac{1}{d-1}} \leq 2\sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{6},$$
$$\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,2}}}{(d-1)^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{1 + \frac{1}{d-1}} > 2,$$

те обавезно важи

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} \in \left(2,\ \sqrt{6}\right]$$

за $k = 2$ и произвољно $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$. Осим тога, за било које $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ и $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ можемо да употребимо последицу 4.5 како бисмо дошли до

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} < 2 + \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{d-1} \leq 2 + \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2} = \frac{\frac{9}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2},$$

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} > 2 + \frac{2\sqrt{2}}{d-1} > 2.$$

Како је $\frac{\frac{9}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2} > \sqrt{6}$, узевши све у обзир, можемо да закључимо да је за свако $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$ и $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ сигурно испуњено

$$\frac{\mathcal{E}_{\mathcal{D}_{d,k}}}{(d-1)^{k-\frac{3}{2}}} \in \left(2, \frac{\frac{9}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2}\right),$$

одакле непосредно следи тврђење исказано у леми. □

Поглавље 5

Енергија мартини графова

У оквиру већег броја научних радова, многи теоретичари графова су исказали интересовање према истраживању везе између енергије графа и највећег могућег броја грана у његовом спаривању. Почетне резултате дали су Tian и Wong, показавши да је за произвољан прост непразан граф G без циклуса дужине три обавезно задовољена неједнакост

$$\mathcal{E}_G \leq 2\mu_G \sqrt{2\Delta_G^{(e)} + 1}, \tag{5.1}$$

ако $2 \mid \Delta_G^{(e)}$, односно

$$\mathcal{E}_G \leq \mu_G \left(\sqrt{2\Delta_G^{(e)} + 2 + 2\sqrt{2\Delta_G^{(e)} + 2}} + \sqrt{2\Delta_G^{(e)} + 2 - 2\sqrt{2\Delta_G^{(e)} + 2}} \right), \tag{5.2}$$

уколико $2 \nmid \Delta_G^{(e)}$, где $\Delta_G^{(e)}$ означава највећи могући број суседних грана који има нека грана графа G [86, теорема 1.1]. Убрзо су у каснијем раду Pan и др. уопштили овај резултат тако што су установили да неједнакости (5.1) и (5.2) сигурно важе чак и када задати граф G поседује циклус дужине три [66, теорема 1]. Након тога, Akbari и др. су унапредили исказана тврђења за одређену класу графова тако што су доказали да сваки повезан прост ненула граф G нужно испуњава неједнакост

$$\mathcal{E}_G \leq 2\mu_G \sqrt{\Delta_G} \tag{5.3}$$

под условом да је $\Delta_G \geq 6$ [2, теорема 18]. Заједно уз наведени резултат, у истом раду је изложена и следећа хипотеза.

Хипотеза 5.1 (Akbari и др. [2, хипотеза 23])**.** *За сваки повезан прост ненула граф G који задовољава $\Delta_G \in \{2, 3, 4, 5\}$, израз (5.3) обавезно важи.*

Стевановић и др. су успели хипотезу 5.1 да оборе применом рачунара [85]. Наиме, коришћењем технике исцрпне претраге, пронађен је пример повезаног простог графа реда једанаест код ког је највећи степен чвора једнак четири, а који притом не задовољава неједнакост (5.3). Осим тога, пронађен је већи број контрапримера у виду повезаних простих графова реда из скупа $\{6, 7, \ldots, 19\}$ код којих највећи степен чвора износи три, а израз (5.3) није тачан. У оквиру истог рада, обављено је експериментисање путем механизма учења поткрепљивањем[8] које је базирано на раду који је објавио Wagner [90], као и на одговарајућем изложеном програмском коду на језику Python [91]. Анализом резултата датог експеримента, конструисана је фамилија мартини графова за чије је чланове, након вршења додатне експерименталне провере, имало смисла веровати да потенцијално не поштују неједнакост (5.3).

[8] На енглеском језику, оригинални назив датог појма је reinforcement learning.

У оквиру овог поглавља докторске дисертације, биће изложен комплетан математички доказ који демонстрира да међу мартини графовима заиста има бесконачно много њих по изоморфизму различитих код којих није тачна формула (5.3). Пошто је очигледно да су сви мартини графови повезани, прости и ненула, као и да им је највећи степен чвора увек једнак три, на овај начин бисмо дошли до тога да сигурно постоји бесконачно много контрапримера за хипотезу 5.1. У циљу добијања траженог резултата, примарни фокус поглавља биће доказивање неколико тврђења која директно доводе до наредне последице.

Последица 5.1. *Постоји природан број $k_1 \in \mathbb{N}$ такав да је за произвољно $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_1$ тачна неједнакост*

$$\mathcal{E}_{\mathrm{MP_k}} > 2\sqrt{3}\,\mu_{\mathrm{MP_k}}. \tag{5.4}$$

Такође, постоји природан број $k_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 \geq 2$ такав да за свако $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_2$ важи неједнакост

$$\mathcal{E}_{\mathrm{MC_k}} > 2\sqrt{3}\,\mu_{\mathrm{MC_k}}. \tag{5.5}$$

При излагању доказа неопходних математичких резултата, од суштинског значаја ће нам бити реална функција $\mathcal{F} \colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} \to \mathbb{R}$ дефинисана преко израза

$$\mathcal{F}(x) = x^2 - 3 - \frac{2}{(x+1)(x-2)}.$$

Одељак 5.1 ће се бавити проучавањем неких основних аналитичких својстава ове функције и њиховом директном употребом при одређивању спектра произвољног мартини графа. Након тога, унутар одељка 5.2 ћемо применом претходно добијених резултата да изведемо формулу за енергију мартини графова и затим ћемо да анализирамо њено асимптотско понашање. Последица 5.1 следиће директно из тврђења исказаних у овом одељку.

5.1 Спектар мартини графова

Главни циљ овог одељка биће проналажење адекватног израза који у потпуности одређује спектар сваког мартини графа. Започнимо наредном помоћном лемом која говори о многим аналитичким својствима функције $\mathcal{F}$ која ће нам бити од значајне користи.

Лема 5.1. *За било који задат реалан број $y \in [-2, 2]$, једначина $\mathcal{F}(x) = y$ по променљивој $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ има тачно четири различита решења $\alpha(y) < \beta(y) < \gamma(y) < \delta(y)$ таква да важи*

$$\alpha(y) \in (-\infty, -1), \qquad \beta(y) \in (-1, 0], \qquad \gamma(y) \in (0, 2), \qquad \delta(y) \in (2, +\infty).$$

Притом, $\alpha \colon [-2, 2] \to (-\infty, -1)$ и $\beta \colon [-2, 2] \to (-1, 0]$ можемо да интерпретирамо као опадајуће непрекидне реалне функције, док $\gamma \colon [-2, 2] \to (0, 2)$ и $\delta \colon [-2, 2] \to (2, +\infty)$ можемо да сагледамо као растуће непрекидне реалне функције.

Доказ. Пошто је функција $\mathcal{F}$ рационална, јасно је да мора бити диференцијабилна на целом домену. Узевши у обзир да је

$$\mathcal{F}(x) = x^2 - 3 + \frac{2}{3(x+1)} - \frac{2}{3(x-2)},$$

надаље директно следи

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(x) &= 2x - \frac{2}{3(x+1)^2} + \frac{2}{3(x-2)^2} = 2x + \frac{2(x+1)^2 - 2(x-2)^2}{3(x+1)^2(x-2)^2} \\ &= 2x + \frac{2x^2 + 4x + 2 - 2x^2 + 8x - 8}{3(x+1)^2(x-2)^2} = 2x + \frac{12x - 6}{3(x+1)^2(x-2)^2} \\ &= 2x + \frac{4x-2}{(x+1)^2(x-2)^2}.\end{aligned}$$

Сада је тривијално увидети да важи $\mathcal{F}'(x) > 0$ за свако $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 2$, као и $\mathcal{F}'(x) < 0$ за било које $x < 0$, $x \neq -1$. Из овог разлога, можемо закључити да је функција $\mathcal{F}$ обавезно непрекидна и опадајућа на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0]$, а непрекидна и растућа на интервалу $(2, +\infty)$.

Како је

$$\lim_{x\to-\infty} \mathcal{F}(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-1^-} \mathcal{F}(x) = -\infty,$$

видимо да за свако $y \in [-2, 2]$, једначина $\mathcal{F}(x) = y$ мора да има јединствено решење $\alpha(y)$ на $(-\infty, -1)$. Није тешко запазити да на $\alpha\colon [-2, 2] \to (-\infty, -1)$ можемо да гледамо као на одговарајућу рестрикцију инверзне функције од $\mathcal{F}|_{(-\infty,-1)}\colon (-\infty, -1) \to \mathbb{R}$, те је ова функција сигурно непрекидна и опадајућа. На сличан начин имамо да је

$$\lim_{x\to2^+} \mathcal{F}(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \mathcal{F}(x) = +\infty,$$

одакле следи да за било које $y \in [-2, 2]$, једначина $\mathcal{F}(x) = y$ такође мора да има јединствено решење $\delta(y)$ на $(2, +\infty)$. У овом случају, $\delta\colon [-2, 2] \to (2, +\infty)$ можемо да интерпретирамо као одговарајућу рестрикцију инверзне функције од $\mathcal{F}|_{(2,+\infty)}\colon (2, +\infty) \to \mathbb{R}$, што значи да је дата реална функција нужно непрекидна и растућа. Осим тога, узевши у обзир да је функција $\mathcal{F}$ непрекидна и опадајућа на $(-1, 0]$, заједно уз

$$\lim_{x\to-1^+} \mathcal{F}(x) = +\infty, \qquad \mathcal{F}(0) = -2,$$

надаље добијамо да за свако $y \in [-2, 2]$, једначина $\mathcal{F}(x) = y$ има јединствено решење $\beta(y)$ на $(-1, 0]$. Из чињенице да $\beta\colon [-2, 2] \to (-1, 0]$ може да се посматра као одговарајућа рестрикција инверзне функције од $\mathcal{F}|_{(-1,0]}\colon (-1, 0] \to [-2, +\infty)$, закључујемо да ова функција мора бити непрекидна и опадајућа.

Дакле, како бисмо комплетирали доказ леме, неопходно је установити да за произвољно $y \in [-2, 2]$, једначина $\mathcal{F}(x) = y$ има јединствено решење $\gamma(y)$ на $(0, 2)$, те затим показати да одговарајућа реална функција γ поседује исказана својства. Пошто је функција $\mathcal{F}'$ диференцијабилна на $(-1, 2)$, тривијално је добити

$$\mathcal{F}''(x) = 2 + \frac{4}{3(x+1)^3} - \frac{4}{3(x-2)^3}$$

за свако $x \in (-1, 2)$. Очигледно је да важи $\mathcal{F}''(x) > 0$ за било које $x \in (-1, 2)$, одакле брзо закључујемо да је функција $\mathcal{F}'$ сигурно непрекидна и растућа на овом интервалу. Имајући у виду

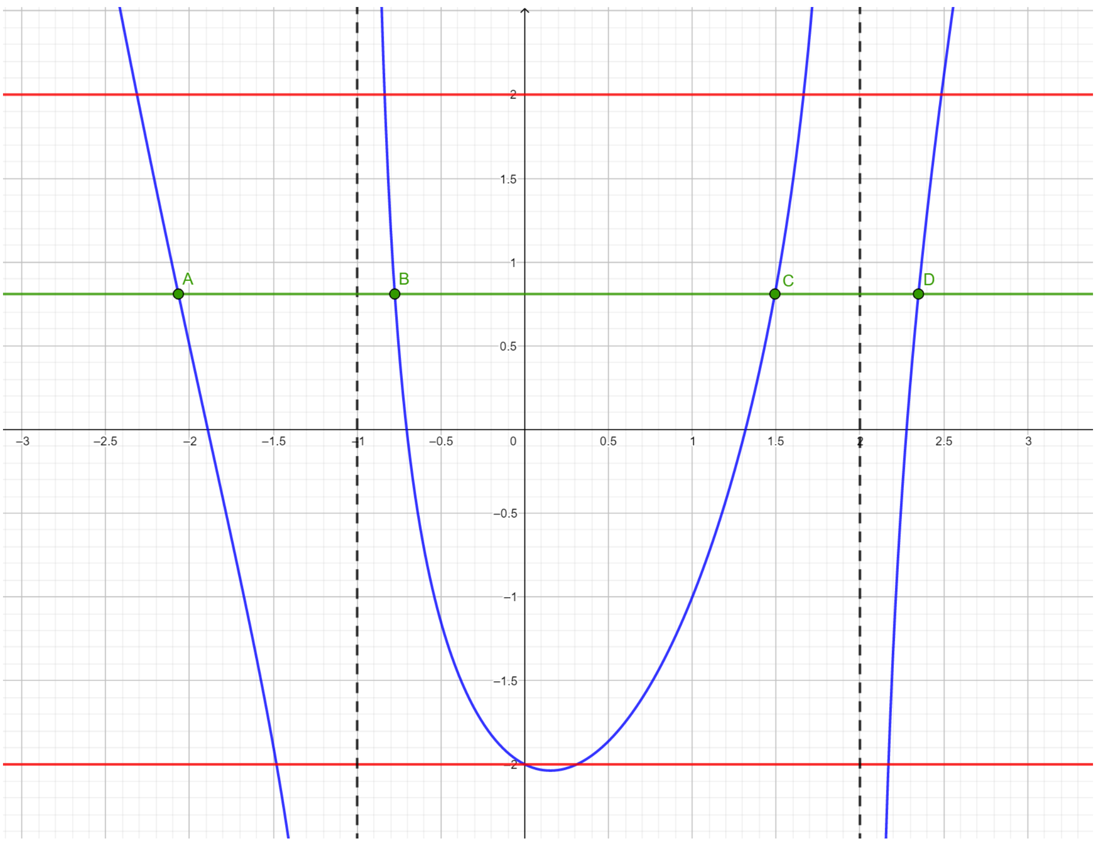
$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(0) &= 2 \cdot 0 - \frac{2}{3 \cdot 1^2} + \frac{2}{3 \cdot (-2)^2} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}, \\ \mathcal{F}'\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{2}{3\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = 1 - \frac{2}{\frac{27}{4}} + \frac{2}{\frac{27}{4}} = 1,\end{aligned}$$

директно видимо да обавезно постоји реалан број $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ такав да је $\mathcal{F}'(\xi) = 0$. Одавде одмах следи да је испуњено $\mathcal{F}'(x) < 0$ за $x \in (-1, \xi)$, а $\mathcal{F}'(x) > 0$ за $x \in (\xi, 2)$, те функција $\mathcal{F}$ мора бити опадајућа на $(-1, \xi]$, па растућа на $[\xi, 2)$.

За произвољно $x \in (0, \xi]$, јасно је да важи $\mathcal{F}(x) < \mathcal{F}(0) = -2$, што значи да за било које задато $y \in [-2, 2]$, једначина $\mathcal{F}(x) = y$ нема ниједно решење на $(0, \xi]$. Даље, за функцију $\mathcal{F}$ знамо да је непрекидна и растућа на $[\xi, 2)$, те помоћу израза

$$\mathcal{F}(\xi) < -2, \qquad \lim_{x \to 2^-} \mathcal{F}(x) = +\infty,$$

долазимо до тога да за свако $y \in [-2, 2]$, једначина $\mathcal{F}(x) = y$ обавезно има јединствено решење $\gamma(y)$ на $(\xi, 2)$. Дакле, ова једначина нужно има јединствено решење и на интервалу $(0, 2)$. Ако приметимо да $\gamma \colon [-2, 2] \to (0, 2)$ може да се сагледа као одговарајућа рестрикција инверзне функције од $\mathcal{F}|_{(\xi,2)} \colon (\xi, 2) \to (\mathcal{F}(\xi), +\infty)$, добијамо да је дата функција обавезно непрекидна и растућа. □



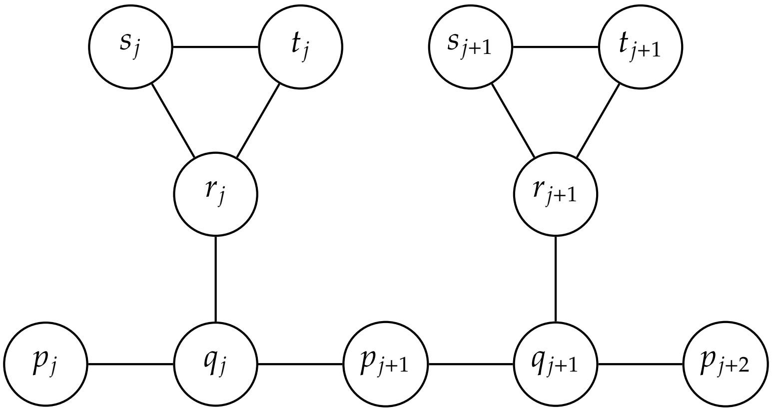
Слика 5.1: Визуелна репрезентација графика функције $\mathcal{F}$.

На слици 5.1 налази се визуелна репрезентација графика функције $\mathcal{F}$ на којој се виде сва њена аналитичка својства о којима је било речи у леми 5.1. У остатку поглавља, за произвољно $y \in [-2, 2]$ биће коришћене ознаке $\alpha(y), \beta(y), \gamma(y), \delta(y)$ тако да се односе на одговарајуће решење једначине $\mathcal{F}(x) = y$ по $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ на начин описан у датој леми. Имајући у виду новоуведену нотацију, у могућности смо да искажемо резултате који одређују спектар било ког мартини графа у виду наредне две теореме.

Теорема 5.1 (Спектар мартини пута). *За произвољно* $k \in \mathbb{N}$, *спектар било ког мартини пута типа* MP_k *износи*

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{MP}_k} = \Bigg[&\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k \text{ пута}}, 0,\\ &\alpha\left(2\cos\left(\frac{1}{k+1}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{1}{k+1}\pi\right)\right), \gamma\left(2\cos\left(\frac{1}{k+1}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{1}{k+1}\pi\right)\right),\\ &\alpha\left(2\cos\left(\frac{2}{k+1}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{2}{k+1}\pi\right)\right), \gamma\left(2\cos\left(\frac{2}{k+1}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{2}{k+1}\pi\right)\right),\\ &\ldots,\\ &\alpha\left(2\cos\left(\frac{k}{k+1}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{k}{k+1}\pi\right)\right), \gamma\left(2\cos\left(\frac{k}{k+1}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{k}{k+1}\pi\right)\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Доказ. Нека је задат граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ који чини мартини пут MP_k за неко $k \in \mathbb{N}$. Пре свега, очигледно је да овај граф мора бити реда $5k+1$. Осим тога, без губљења општости можемо да претпоставимо да су његови чворови означени са p_j, $j = \overline{0,k}$ и q_j, r_j, s_j, t_j, $j = \overline{0, k-1}$, као што је приказано на слици 5.2. Напоменимо да су у овом случају чворови p_0 и p_k сигурно степена један.



Слика 5.2: Ознаке чворова код задатог графа G.

Посматрајмо једначину

$$\boldsymbol{A}_G\, \boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u} \tag{5.6}$$

по вектору $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$, где је $\lambda \in \mathbb{R}$ одређени реални параметар. Није тешко установити да је дату једначину могуће еквивалентно сагледати као следећи линеарни систем од $5k+1$ једначина са $5k+1$ непознатих:

$$\boldsymbol{u}_{r_j} + \boldsymbol{u}_{s_j} = \lambda \boldsymbol{u}_{t_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.7}$$

$$\boldsymbol{u}_{r_j} + \boldsymbol{u}_{t_j} = \lambda \boldsymbol{u}_{s_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.8}$$

$$\boldsymbol{u}_{q_j} + \boldsymbol{u}_{s_j} + \boldsymbol{u}_{t_j} = \lambda \boldsymbol{u}_{r_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.9}$$

$$\boldsymbol{u}_{p_j} + \boldsymbol{u}_{r_j} + \boldsymbol{u}_{p_{j+1}} = \lambda \boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \boldsymbol{u}_{q_j} = \lambda \boldsymbol{u}_{p_j} \qquad \left(\forall j = \overline{1, k-1}\right), \tag{5.11}$$

$$\boldsymbol{u}_{q_0} = \lambda \boldsymbol{u}_{p_0}, \tag{5.12}$$

$$\boldsymbol{u}_{q_{k-1}} = \lambda \boldsymbol{u}_{p_k}. \tag{5.13}$$

Како бисмо у потпуности одредили спектар графа G, решићемо једначину (5.6), односно добијени линеарни систем једначина, за сваку неопходну вредност реалног параметра $\lambda \in \mathbb{R}$. Ради концизности, решавање система ће бити разбијено на неколико случајева у зависности од вредности коју има параметар λ.

Случај $\lambda = -1$. Претпоставимо да је дат вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ који чини решење једначине (5.6). Из једнакости (5.7) и (5.8) добијамо да је

$$\boldsymbol{u}_{r_j} + \boldsymbol{u}_{s_j} + \boldsymbol{u}_{t_j} = 0$$

за свако $j = \overline{0, k-1}$. Израз (5.9) нам затим даје

$$\boldsymbol{u}_{q_j} + \boldsymbol{u}_{r_j} + \boldsymbol{u}_{s_j} + \boldsymbol{u}_{t_j} = 0,$$

одакле одмах следи да важи $\boldsymbol{u}_{q_j} = 0$ за било које $j = \overline{0, k-1}$. На основу формула (5.11), (5.12) и (5.13), надаље видимо да је такође и $\boldsymbol{u}_{p_j} = 0$ за произвољно $j = \overline{0, k}$. Најзад, израз (5.10) диктира да је сигурно испуњено $\boldsymbol{u}_{r_j} = 0$ за било које $j = \overline{0, k-1}$, те коначно закључујемо да свако решење $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ једначине (5.6) нужно задовољава услове

$$\boldsymbol{u}_{s_j} + \boldsymbol{u}_{t_j} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.14}$$

$$\boldsymbol{u}_{r_j} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.15}$$

$$\boldsymbol{u}_{q_j} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.16}$$

$$\boldsymbol{u}_{p_j} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k}\right). \tag{5.17}$$

Једноставно је уверити се у то да важи и обратно, тј. да сваки вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ који поштује услове (5.14), (5.15), (5.16) и (5.17) такође представља решење једначине (5.6). Одавде је тривијално запазити да број -1 мора да чини сопствену вредност графа G чија вишеструкост износи k.

Случај $\lambda = 2$. Нека је задат вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ који представља решење једначине (5.6). Одузимањем једнакости (5.7) и (5.8) једне од друге, добијамо

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u}_{s_j} - \boldsymbol{u}_{t_j} = \lambda\left(\boldsymbol{u}_{t_j} - \boldsymbol{u}_{s_j}\right) \\ \implies \quad & (-1-\lambda)\left(\boldsymbol{u}_{t_j} - \boldsymbol{u}_{s_j}\right) = 0 \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{t_j} - \boldsymbol{u}_{s_j} = 0, \end{aligned}$$

што одмах имплицира да важи $\boldsymbol{u}_{s_j} = \boldsymbol{u}_{t_j}$ за свако $j = \overline{0, k-1}$. Након тога, из формула (5.7) и (5.8) можемо брзо да приметимо да је $\boldsymbol{u}_{r_j} = \boldsymbol{u}_{s_j} = \boldsymbol{u}_{t_j}$ за било које $j = \overline{0, k-1}$. Даље, употребом једнакости (5.9) долазимо до

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u}_{q_j} + \boldsymbol{u}_{s_j} + \boldsymbol{u}_{t_j} = 2\boldsymbol{u}_{r_j} \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_j} + 2\boldsymbol{u}_{r_j} = 2\boldsymbol{u}_{r_j} \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_j} = 0, \end{aligned}$$

што значи да је обавезно испуњено $\boldsymbol{u}_{q_j} = 0$ за свако $j = \overline{0, k-1}$. Изрази (5.11), (5.12) и (5.13) нам затим гарантују да је $\boldsymbol{u}_{p_j} = 0$ за свако $j = \overline{0, k}$. Међутим, формула (5.10) надаље даје $\boldsymbol{u}_{r_j} = 0$, што нас непосредно доводи до тога да мора бити $\boldsymbol{u}_{r_j} = \boldsymbol{u}_{s_j} = \boldsymbol{u}_{t_j} = 0$ за било које $j = \overline{0, k-1}$. Дакле, сигурно важи $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, те број два не може да представља сопствену вредност задатог графа.

Случај $\lambda = 0$. Уколико је дато неко решење $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ једначине (5.6), онда изрази (5.7) и (5.8) одмах дају $\boldsymbol{u}_{s_j} = -\boldsymbol{u}_{r_j}$ и $\boldsymbol{u}_{t_j} = -\boldsymbol{u}_{r_j}$ за свако $j = \overline{0, k-1}$, респективно. Надаље, коришћењем једнакости (5.9) добијамо

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u}_{q_j} + \boldsymbol{u}_{s_j} + \boldsymbol{u}_{t_j} = 0 \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_j} - \boldsymbol{u}_{r_j} - \boldsymbol{u}_{r_j} = 0 \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_j} = 2\boldsymbol{u}_{r_j}, \end{aligned}$$

што значи да мора бити $\boldsymbol{u}_{q_j} = 2\boldsymbol{u}_{r_j}$ за било које $j = \overline{0, k-1}$. Са друге стране, формуле (5.12) и (5.13) нас доводе до $\boldsymbol{u}_{q_0} = 0$ и $\boldsymbol{u}_{q_k} = 0$, што заједно уз једнакост (5.11) имплицира да важи $\boldsymbol{u}_{q_j} = 0$ за свако $j = \overline{0, k-1}$. Одавде непосредно следи $\boldsymbol{u}_{r_j} = 0$, као и $\boldsymbol{u}_{s_j} = 0$ и $\boldsymbol{u}_{t_j} = 0$. Узевши у обзир израз (5.10), добијамо да су обавезно испуњени услови

$$\boldsymbol{u}_{p_j} + \boldsymbol{u}_{p_{j+1}} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.18}$$

$$\boldsymbol{u}_{t_j} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.19}$$

$$\boldsymbol{u}_{s_j} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.20}$$

$$\boldsymbol{u}_{r_j} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.21}$$

$$\boldsymbol{u}_{q_j} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right). \tag{5.22}$$

Тривијално је проверити да свако $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ које задовољава услове (5.18), (5.19), (5.20), (5.21) и (5.22) заиста чини решење једначине (5.6). Пошто се услов (5.18) директно своди на то да је $\boldsymbol{u}_{p_j} = (-1)^j \, \boldsymbol{u}_{p_0}$ за свако $j = \overline{0, k}$, лако је доћи до закључка да број нула чини просту сопствену вредност графа G.

Случај $\lambda \notin \{-1, 2, 0\}$. Ако одузмемо једнакост (5.8) од једнакости (5.7), видимо да важи

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u}_{s_j} - \boldsymbol{u}_{t_j} = \lambda \left(\boldsymbol{u}_{t_j} - \boldsymbol{u}_{s_j}\right) \\ \implies \quad & (-1-\lambda)\left(\boldsymbol{u}_{t_j} - \boldsymbol{u}_{s_j}\right) = 0 \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{t_j} - \boldsymbol{u}_{s_j} = 0 \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{t_j} = \boldsymbol{u}_{s_j}. \end{aligned}$$

Надаље, формула (5.7) даје $\boldsymbol{u}_{r_j} = (\lambda - 1)\, \boldsymbol{u}_{t_j}$, док нас израз (5.9) доводи до

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u}_{q_j} + \boldsymbol{u}_{s_j} + \boldsymbol{u}_{t_j} = \lambda \boldsymbol{u}_{r_j} \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_j} + 2\boldsymbol{u}_{t_j} = \lambda(\lambda-1)\, \boldsymbol{u}_{t_j} \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_j} = (\lambda^2 - \lambda - 2)\, \boldsymbol{u}_{t_j} \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_j} = (\lambda+1)(\lambda-2)\, \boldsymbol{u}_{t_j}. \end{aligned}$$

Одавде закључујемо да је $\boldsymbol{u}_{t_j} = \boldsymbol{u}_{s_j} = \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda-2)}\, \boldsymbol{u}_{q_j}$ и $\boldsymbol{u}_{r_j} = \frac{\lambda-1}{(\lambda+1)(\lambda-2)}\, \boldsymbol{u}_{q_j}$ за било које $j = \overline{0, k-1}$. Ако уведемо помоћне ознаке $\boldsymbol{u}_{q_{-1}} = 0$ и $\boldsymbol{u}_{q_k} = 0$, онда из једнакости (5.11), (5.12) и (5.13) такође добијамо

$$\boldsymbol{u}_{p_j} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0,k}\right).$$

Сада смо у стању да помоћу израза (5.10) установимо да важи

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{u}_{p_j} + \boldsymbol{u}_{r_j} + \boldsymbol{u}_{p_{j+1}} = \lambda \boldsymbol{u}_{q_j} \\
\implies \quad & \frac{\boldsymbol{u}_{q_{j-1}}}{\lambda} + \frac{\boldsymbol{u}_{q_j}}{\lambda} + \frac{(\lambda-1)\,\boldsymbol{u}_{q_j}}{(\lambda+1)(\lambda-2)} + \frac{\boldsymbol{u}_{q_j}}{\lambda} + \frac{\boldsymbol{u}_{q_{j+1}}}{\lambda} = \lambda \boldsymbol{u}_{q_j} \\
\implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \boldsymbol{u}_{q_j} + \frac{\lambda(\lambda-1)\,\boldsymbol{u}_{q_j}}{(\lambda+1)(\lambda-2)} + \boldsymbol{u}_{q_j} + \boldsymbol{u}_{q_{j+1}} = \lambda^2\, \boldsymbol{u}_{q_j} \\
\implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \boldsymbol{u}_{q_{j+1}} = \left(\lambda^2 - 2 - \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)(\lambda-2)}\right)\boldsymbol{u}_{q_j} \\
\implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \boldsymbol{u}_{q_{j+1}} = \left(\lambda^2 - 3 - \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\right)\boldsymbol{u}_{q_j} \\
\implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \boldsymbol{u}_{q_{j+1}} = \mathcal{F}(\lambda)\,\boldsymbol{u}_{q_j}
\end{aligned}$$

за произвољно $j = \overline{0, k-1}$. Дакле, свако решење $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ једначине (5.6) сигурно задовољава услове

$$\boldsymbol{u}_{t_j} = \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda-2)}\,\boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0,k-1}\right), \tag{5.23}$$

$$\boldsymbol{u}_{s_j} = \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda-2)}\,\boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0,k-1}\right), \tag{5.24}$$

$$\boldsymbol{u}_{r_j} = \frac{\lambda-1}{(\lambda+1)(\lambda-2)}\,\boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0,k-1}\right), \tag{5.25}$$

$$\boldsymbol{u}_{p_j} = \frac{1}{\lambda}\,\boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \frac{1}{\lambda}\,\boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0,k}\right), \tag{5.26}$$

$$\boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \boldsymbol{u}_{q_{j+1}} = \mathcal{F}(\lambda)\,\boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0,k-1}\right), \tag{5.27}$$

где је $\boldsymbol{u}_{q_{-1}} = \boldsymbol{u}_{q_k} = 0$, као што смо раније напоменули. Директном рачуницом није тешко показати да важи и обратно, односно да сваки вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ који испуњава услове (5.23), (5.24), (5.25), (5.26) и (5.27) мора бити решење задате једначине (5.6).

Ако уведемо ознаку $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}\}$ и вектор $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^Q$ као $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}|_Q$, онда се једнакост (5.27) може еквивалентно записати као $\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{v} = \mathcal{F}(\lambda)\,\boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{Q\times Q}$ чини матрицу

$$\boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \\ q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{k-2} \\ q_{k-1} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_{k-2} & q_{k-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

За овакву матрицу $\boldsymbol{B}$ је познато да садржи k простих сопствених вредности

$$2\cos\left(\frac{1}{k+1}\pi\right), 2\cos\left(\frac{2}{k+1}\pi\right), \dots, 2\cos\left(\frac{k}{k+1}\pi\right).$$

У споменуто тврђење можемо лако да се уверимо, примера ради, ако $\boldsymbol{B}$ сагледамо као матрицу суседства графа типа $\mathcal{B}_{2,k}$ и затим искористимо једнакост (4.16) из последице 4.3. Из овог разлога, видимо да уколико реални параметар $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 0\}$ има вредност такву да важи $\mathcal{F}(\lambda) = 2\cos\left(\frac{j}{k+1}\pi\right)$ за неко $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, онда могу да се изаберу вредности $\boldsymbol{u}_{q_0}, \boldsymbol{u}_{q_1}, \dots, \boldsymbol{u}_{q_{k-1}}$ тако да важи формула (5.27), а да нису притом све једнаке нули. За овакав број λ, применом израза (5.23), (5.24), (5.25) и (5.26) је надаље могуће конструисати вектор $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ који чини решење једначине (5.6) и самим тим представља сопствени вектор матрице $\boldsymbol{A}_G$ који одговара сопственој вредности λ.

Дакле, било које $\lambda \notin \{-1, 2, 0\}$ код ког је $\mathcal{F}(\lambda) = 2\cos\left(\frac{j}{k+1}\pi\right)$ за неко $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, мора да чини сопствену вредност графа G. Међутим, укупно има $4k$ различитих вредности које задовољавају овај услов:

$$\begin{aligned}\Lambda = \Bigg\{ &\alpha\left(2\cos\left(\frac{1}{k+1}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{1}{k+1}\pi\right)\right), \gamma\left(2\cos\left(\frac{1}{k+1}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{1}{k+1}\pi\right)\right),\\ &\alpha\left(2\cos\left(\frac{2}{k+1}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{2}{k+1}\pi\right)\right), \gamma\left(2\cos\left(\frac{2}{k+1}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{2}{k+1}\pi\right)\right),\\ &\dots,\\ &\alpha\left(2\cos\left(\frac{k}{k+1}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{k}{k+1}\pi\right)\right), \gamma\left(2\cos\left(\frac{k}{k+1}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{k}{k+1}\pi\right)\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

Заиста, сваки број из скупа Λ по дефиницији не сме бити једнак -1 или 2, а једноставно је установити да не може бити једнак ни нули, пошто је $\mathcal{F}(0) = -2$, а притом важи $2\cos\left(\frac{j}{k+1}\pi\right) > -2$ за свако $j = \overline{1, k}$. Добијамо да сви елементи скупа Λ нужно чине сопствену вредност задатог графа G. Осим тога, имајући у виду да већ знамо да број -1 представља његову сопствену вредност уз вишеструкост k и да му је нула проста сопствена вредност, тривијално је закључити да су сви елементи скупа Λ обавезно просте сопствене вредности. Одавде директно следи тврђење исказано у теореми. □

Теорема 5.2 (Спектар мартини циклуса)**.** *За свако $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, спектар било ког мартини циклуса облика* MC_k *износи*

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{MC}_k} = \Bigg[&\underbrace{-1, \dots, -1}_{k \text{ пута}},\\ &\alpha\left(2\cos\left(\frac{0}{k}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{0}{k}\pi\right)\right), \gamma\left(2\cos\left(\frac{0}{k}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{0}{k}\pi\right)\right),\\ &\alpha\left(2\cos\left(\frac{2}{k}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{2}{k}\pi\right)\right), \gamma\left(2\cos\left(\frac{2}{k}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{2}{k}\pi\right)\right),\\ &\dots,\\ &\alpha\left(2\cos\left(\frac{2(k-1)}{k}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{2(k-1)}{k}\pi\right)\right),\\ &\gamma\left(2\cos\left(\frac{2(k-1)}{k}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{2(k-1)}{k}\pi\right)\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Доказ. Доказ ће бити спроведен на веома сличан начин као што је то урађено код теореме 5.1. Најпре, нека је дат граф $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ који представља мартини циклус MC_k за неко $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Јасно је да овакав граф мора бити реда $5k$. Без губљења општости можемо да претпоставимо да су чворови графа G обележени са p_j, q_j, r_j, s_j, t_j, $j = \overline{0, k-1}$ на начин приказан на слици 5.2. Заправо, методологија именовања чворова биће идентична као при доказивању теореме 5.1, уз једину разлику да чвор p_k не постоји и да је чвор q_{k-1} суседан са p_0 уместо са p_k. Ради концизности, претпоставићемо такође да се током излагања целокупног доказа аритметика везана за индексе датих чворова врши по модулу k.

За одређени реални параметар $\lambda \in \mathbb{R}$, нека је задата једначина

$$\boldsymbol{A}_G \, \boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u} \tag{5.28}$$

по вектору $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$. Слично као при доказивању теореме 5.1, једноставно је увидети да се ова једначина еквивалентно може посматрати као наредни линеарни систем од $5k$ једначина са $5k$ непознатих:

$$\boldsymbol{u}_{r_j} + \boldsymbol{u}_{s_j} = \lambda \boldsymbol{u}_{t_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.29}$$

$$\boldsymbol{u}_{r_j} + \boldsymbol{u}_{t_j} = \lambda \boldsymbol{u}_{s_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.30}$$

$$\boldsymbol{u}_{q_j} + \boldsymbol{u}_{s_j} + \boldsymbol{u}_{t_j} = \lambda \boldsymbol{u}_{r_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.31}$$

$$\boldsymbol{u}_{p_j} + \boldsymbol{u}_{r_j} + \boldsymbol{u}_{p_{j+1}} = \lambda \boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.32}$$

$$\boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \boldsymbol{u}_{q_j} = \lambda \boldsymbol{u}_{p_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right). \tag{5.33}$$

У циљу одређивања спектра задатог графа G, решићемо једначину (5.28) за сваку неопходну вредност реалног параметра $\lambda \in \mathbb{R}$. Обавимо сада поделу решавања проблема на случајеве у зависности од вредности λ на исти начин као што је то било урађено при излагању доказа теореме 5.1.

Случај $\lambda = -1$. Дати случај је могуће разрешити на начин који је апсолутно аналоган стратегији искоришћеној у случају $\lambda = -1$ из доказа теореме 5.1, те је једноставно закључити да -1 представља сопствену вредност задатог графа G чија је вишеструкост једнака k.

Случај $\lambda = 2$. Овај случај се такође може аналогно решити као одговарајући случај из доказа теореме 5.1. Дакле, број два не чини сопствену вредност графа G.

Случај $\lambda = 0$. Једнакости (5.29) и (5.30) директно дају $\boldsymbol{u}_{s_j} = \boldsymbol{u}_{t_j} = -\boldsymbol{u}_{r_j}$ за свако $j = \overline{0, k-1}$. Применом формуле (5.31) надаље добијамо

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u}_{q_j} + \boldsymbol{u}_{s_j} + \boldsymbol{u}_{t_j} = 0 \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_j} - 2\boldsymbol{u}_{r_j} = 0 \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_j} = 2\boldsymbol{u}_{r_j}, \end{aligned}$$

што значи да важи $\boldsymbol{u}_{q_j} = 2\boldsymbol{u}_{r_j}$ за било које $j = \overline{0, k-1}$. Такође, израз (5.33) одмах доводи до $\boldsymbol{u}_{q_j} = (-1)^j \, \boldsymbol{u}_{q_0}$ за произвољно $j = \overline{0, k-1}$. Остатак резоновања биће раздељен на два подслучаја у зависности од парности броја k.

Подслучај $2 \nmid k$. На основу једнакости (5.33) видимо да важи

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u}_{q_{k-1}} + \boldsymbol{u}_{q_0} = 0 \\ \implies & \left((-1)^{k-1} + 1\right) \boldsymbol{u}_{q_0} = 0 \\ \implies & 2\boldsymbol{u}_{q_0} = 0 \\ \implies & \boldsymbol{u}_{q_0} = 0, \end{aligned}$$

одакле следи да све вредности $\boldsymbol{u}_{q_j}$ морају бити једнаке нули. Дакле, сигурно је испуњено $\boldsymbol{u}_{q_j} = \boldsymbol{u}_{r_j} = \boldsymbol{u}_{s_j} = \boldsymbol{u}_{t_j} = 0$ за свако $j = \overline{0, k-1}$. Формула (5.32) се сада своди на

$$\boldsymbol{u}_{p_j} + \boldsymbol{u}_{p_{j+1}} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right),$$

те обавезно важи $\boldsymbol{u}_{p_j} = (-1)^j \boldsymbol{u}_{p_0}$ за било које $j = \overline{0, k-1}$. Међутим, одавде непосредно долазимо до

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u}_{p_{k-1}} + \boldsymbol{u}_{p_0} = 0 \\ \implies & \left((-1)^{k-1} + 1\right) \boldsymbol{u}_{p_0} = 0 \\ \implies & 2\boldsymbol{u}_{p_0} = 0 \\ \implies & \boldsymbol{u}_{p_0} = 0, \end{aligned}$$

што имплицира да је $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ јединствено решење једначине (5.28). Дакле, број нула не представља сопствену вредност графа G уколико $2 \nmid k$.

Подслучај $2 \mid k$. Из $\boldsymbol{u}_{q_j} = (-1)^j \boldsymbol{u}_{q_0}$ и $\boldsymbol{u}_{q_j} = 2\boldsymbol{u}_{r_j}$, јасно је да важи $\boldsymbol{u}_{r_j} = (-1)^j \boldsymbol{u}_{r_0}$ за свако $j = \overline{0, k-1}$. Сумирањем израза (5.32) за вредности $j = 0, 2, 4, \dots, k-2$, добијамо

$$\sum_{j=0}^{k-1} \boldsymbol{u}_{p_j} + \sum_{j=0}^{\frac{k-2}{2}} \boldsymbol{u}_{r_{2j}} = 0 \quad \implies \quad \sum_{j=0}^{k-1} \boldsymbol{u}_{p_j} + \frac{k}{2} \boldsymbol{u}_{r_0} = 0 \quad \implies \quad \sum_{j=0}^{k-1} \boldsymbol{u}_{p_j} = -\frac{k}{2} \boldsymbol{u}_{r_0}.$$

У сличном духу, сумирањем истог овог израза за вредности $j = 1, 3, 5, \dots, k-1$, долазимо до

$$\sum_{j=0}^{k-1} \boldsymbol{u}_{p_j} + \sum_{j=0}^{\frac{k-2}{2}} \boldsymbol{u}_{r_{2j+1}} = 0 \quad \implies \quad \sum_{j=0}^{k-1} \boldsymbol{u}_{p_j} - \frac{k}{2} \boldsymbol{u}_{r_0} = 0 \quad \implies \quad \sum_{j=0}^{k-1} \boldsymbol{u}_{p_j} = \frac{k}{2} \boldsymbol{u}_{r_0}.$$

Сада постаје очигледно да важи $\boldsymbol{u}_{r_0} = 0$, одакле директно следи да је обавезно задовољено $\boldsymbol{u}_{q_j} = \boldsymbol{u}_{r_j} = \boldsymbol{u}_{s_j} = \boldsymbol{u}_{t_j} = 0$ за произвољно $j = \overline{0, k-1}$. Из овог разлога, формула (5.32) се одмах своди на

$$\boldsymbol{u}_{p_j} + \boldsymbol{u}_{p_{j+1}} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right),$$

те мора бити $\boldsymbol{u}_{p_j} = (-1)^j \boldsymbol{u}_{p_0}$ за било које $j = \overline{0, k-1}$. Дакле, добијамо да свако решење $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ једначине (5.28) нужно задовољава услове

$$\boldsymbol{u}_{t_j} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.34}$$

$$\boldsymbol{u}_{s_j} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.35}$$

$$\boldsymbol{u}_{r_j} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.36}$$

$$\boldsymbol{u}_{q_j} = 0 \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.37}$$

$$\boldsymbol{u}_{p_j} = (-1)^j \boldsymbol{u}_{p_0} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right). \tag{5.38}$$

Једноставном рачуницом могуће је проверити да сигурно важи и обратно, односно да сваки вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ који испуњава услове (5.34), (5.35), (5.36), (5.37) и (5.38) чини решење једначине (5.28). Узевши у обзир да је вредност k парна, одавде непосредно следи да скуп решења једначине (5.28) мора да образује једнодимензионалан векторски простор, те број нула представља просту сопствену вредност задатог графа G.

Случај $\lambda \notin \{-1, 2, 0\}$. Одузимајући израз (5.30) од израза (5.29), видимо да важи

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u}_{s_j} - \boldsymbol{u}_{t_j} = \lambda \left(\boldsymbol{u}_{t_j} - \boldsymbol{u}_{s_j}\right) \\ \implies \quad & (-1-\lambda)\left(\boldsymbol{u}_{t_j} - \boldsymbol{u}_{s_j}\right) = 0 \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{t_j} - \boldsymbol{u}_{s_j} = 0 \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{t_j} = \boldsymbol{u}_{s_j}. \end{aligned}$$

Надаље нам формула (5.29) даје $\boldsymbol{u}_{r_j} = (\lambda - 1)\, \boldsymbol{u}_{t_j}$, те помоћу једнакости (5.31) директно долазимо до

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u}_{q_j} + \boldsymbol{u}_{s_j} + \boldsymbol{u}_{t_j} = \lambda \boldsymbol{u}_{r_j} \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_j} + \boldsymbol{u}_{2t_j} = \lambda(\lambda - 1)\, \boldsymbol{u}_{t_j} \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_j} = (\lambda^2 - \lambda - 2)\, \boldsymbol{u}_{t_j} \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_j} = (\lambda + 1)(\lambda - 2)\, \boldsymbol{u}_{t_j}. \end{aligned}$$

Из овог разлога, мора бити $\boldsymbol{u}_{t_j} = \boldsymbol{u}_{s_j} = \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda-2)}\, \boldsymbol{u}_{q_j}$ и $\boldsymbol{u}_{r_j} = \frac{\lambda-1}{(\lambda+1)(\lambda-2)}\, \boldsymbol{u}_{q_j}$ за свако $j = \overline{0, k-1}$. Са друге стране, формула (5.33) имплицира

$$\boldsymbol{u}_{p_j} = \frac{1}{\lambda}\, \boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \frac{1}{\lambda}\, \boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right),$$

што нам омогућава да помоћу израза (5.32) израчунамо

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u}_{p_j} + \boldsymbol{u}_{r_j} + \boldsymbol{u}_{p_{j+1}} = \lambda \boldsymbol{u}_{q_j} \\ \implies \quad & \frac{\boldsymbol{u}_{q_{j-1}}}{\lambda} + \frac{\boldsymbol{u}_{q_j}}{\lambda} + \frac{(\lambda - 1)\, \boldsymbol{u}_{q_j}}{(\lambda+1)(\lambda-2)} + \frac{\boldsymbol{u}_{q_j}}{\lambda} + \frac{\boldsymbol{u}_{q_{j+1}}}{\lambda} = \lambda \boldsymbol{u}_{q_j} \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \boldsymbol{u}_{q_j} + \frac{\lambda(\lambda-1)\, \boldsymbol{u}_{q_j}}{(\lambda+1)(\lambda-2)} + \boldsymbol{u}_{q_j} + \boldsymbol{u}_{q_{j+1}} = \lambda^2\, \boldsymbol{u}_{q_j} \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \boldsymbol{u}_{q_{j+1}} = \left(\lambda^2 - 2 - \frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)(\lambda-2)}\right) \boldsymbol{u}_{q_j} \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \boldsymbol{u}_{q_{j+1}} = \left(\lambda^2 - 3 - \frac{2}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\right) \boldsymbol{u}_{q_j} \\ \implies \quad & \boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \boldsymbol{u}_{q_{j+1}} = \mathcal{F}(\lambda)\, \boldsymbol{u}_{q_j}. \end{aligned}$$

Дакле, свако решење $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ једначине (5.28) обавезно испуњава услове

$$\boldsymbol{u}_{t_j} = \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda-2)}\,\boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.39}$$

$$\boldsymbol{u}_{s_j} = \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda-2)}\,\boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.40}$$

$$\boldsymbol{u}_{r_j} = \frac{\lambda-1}{(\lambda+1)(\lambda-2)}\,\boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.41}$$

$$\boldsymbol{u}_{p_j} = \frac{1}{\lambda}\,\boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \frac{1}{\lambda}\,\boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right), \tag{5.42}$$

$$\boldsymbol{u}_{q_{j-1}} + \boldsymbol{u}_{q_{j+1}} = \mathcal{F}(\lambda)\,\boldsymbol{u}_{q_j} \qquad \left(\forall j = \overline{0, k-1}\right). \tag{5.43}$$

Директном рачуницом је врло лако утврдити да важи и обратно, тј. да произвољан вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{V_G}$ који поштује услове (5.39), (5.40), (5.41), (5.42) и (5.43) сигурно представља решење једначине (5.28).

Слично као при доказивању теореме 5.1, нека је $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}\}$ и нека је вектор $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^Q$ дефинисан као $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}|_Q$. Уочимо да је једнакост (5.43) могуће еквивалентно записати као $\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{v} = \mathcal{F}(\lambda)\,\boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{Q \times Q}$ чини матрицу

$$\boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \\ q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{k-2} \\ q_{k-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_{k-2} & q_{k-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Над датом матрицом $\boldsymbol{B}$ је једноставно искористити лему 2.4 како бисмо утврдили да њен спектар износи

$$\left[2\cos\left(\frac{0}{k}\pi\right), 2\cos\left(\frac{2}{k}\pi\right), 2\cos\left(\frac{4}{k}\pi\right), \ldots, 2\cos\left(\frac{2(k-1)}{k}\pi\right)\right].$$

Даље, ако узмемо реалан параметар $\lambda \notin \{-1, 2, 0\}$ такав да $\mathcal{F}(\lambda)$ чини сопствену вредност матрице $\boldsymbol{B}$ уз вишеструкост $g \in \mathbb{N}$, онда постоји g линеарно независних сопствених вектора $\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(g)}$ матрице $\boldsymbol{B}$ који одговарају сопственој вредности $\mathcal{F}(\lambda)$. Међутим, применом израза (5.39), (5.40), (5.41) и (5.42) тада је могуће конструисати g одговарајућих сопствених вектора $\boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(g)}$ матрице $\boldsymbol{A}_G$ који одговарају сопственој вредности λ, за које није тешко установити да такође морају бити линеарно независни. Из овог разлога, таква вредност λ нужно представља сопствену вредност графа G чија је вишеструкост бар g. Ради добијања концизнијег доказа, остатак решења ћемо поделити на два подслучаја у зависности од парности броја k.

Подслучај $2 \nmid k$. Нека је дат мултискуп

$$\begin{aligned}\Lambda = \Bigg[& \alpha\left(2\cos\left(\frac{0}{k}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{0}{k}\pi\right)\right), \gamma\left(2\cos\left(\frac{0}{k}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{0}{k}\pi\right)\right),\\ & \alpha\left(2\cos\left(\frac{2}{k}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{2}{k}\pi\right)\right), \gamma\left(2\cos\left(\frac{2}{k}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{2}{k}\pi\right)\right),\\ & \ldots,\\ & \alpha\left(2\cos\left(\frac{2(k-1)}{k}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{2(k-1)}{k}\pi\right)\right),\\ & \gamma\left(2\cos\left(\frac{2(k-1)}{k}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{2(k-1)}{k}\pi\right)\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Очигледно је да су сви елементи мултискупа Λ сигурно различити од -1 и 2. Осим тога, имајући у виду да је број k непаран, није тешко утврдити да ниједан елемент мултискупа Λ не сме бити једнак ни нули, пошто је $\mathcal{F}(0) = -2$, а притом $\frac{2j}{k}\pi = \pi$ не наступа ни за једно $j = \overline{0, k-1}$. Узевши у обзир претходно изложену дискусију, долазимо до тога да σ_G обавезно представља надмултискуп од Λ, који има $4k$ елемената. Међутим, како већ знамо да број -1 чини сопствену вредност графа G уз вишеструкост k, директно добијамо да сигурно важи

$$\sigma_G = \Lambda \cup \Big[\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k \text{ пута}}\Big],$$

као што је и било потребно доказати.

Подслучај $2 \mid k$. У овом подслучају, нека су задати мултискупови

$$\begin{aligned}\Lambda_1 = \Bigg[& \alpha\left(2\cos\left(\frac{0}{k}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{0}{k}\pi\right)\right), \gamma\left(2\cos\left(\frac{0}{k}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{0}{k}\pi\right)\right),\\ & \alpha\left(2\cos\left(\frac{2}{k}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{2}{k}\pi\right)\right), \gamma\left(2\cos\left(\frac{2}{k}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{2}{k}\pi\right)\right),\\ & \ldots,\\ & \alpha\left(2\cos\left(\frac{2(k-1)}{k}\pi\right)\right), \beta\left(2\cos\left(\frac{2(k-1)}{k}\pi\right)\right),\\ & \gamma\left(2\cos\left(\frac{2(k-1)}{k}\pi\right)\right), \delta\left(2\cos\left(\frac{2(k-1)}{k}\pi\right)\right)\Bigg]\end{aligned}$$

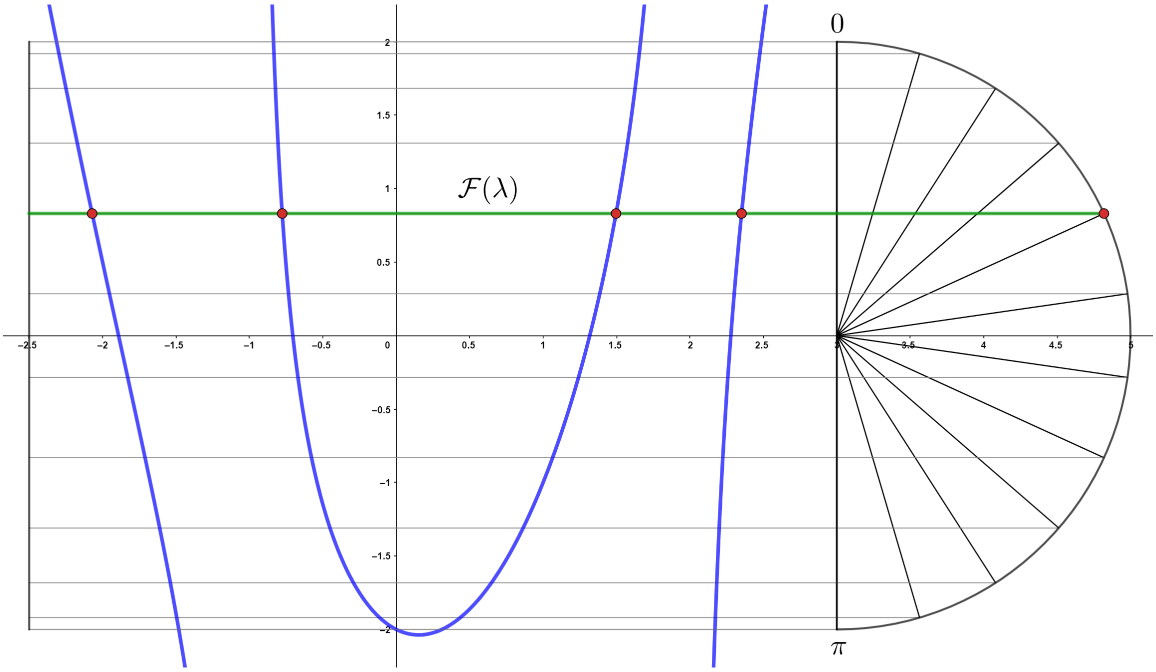
и

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 \setminus \left[\beta\left(2\cos\left(\frac{k}{k}\pi\right)\right)\right].$$

По самој дефиницији функција α, β, γ, δ, јасно је да су сви елементи мултискупова Λ_1 и Λ_2 различити од -1 и 2. Такође, није тешко увидети да једини елемент мултискупа Λ_1 који износи нула је управо $\beta\left(2\cos\left(\frac{k}{k}\pi\right)\right) = 0$, што значи да мултискуп Λ_2 садржи тачно $4k-1$ елемената, при чему ниједан од њих не припада скупу $\{-1, 2, 0\}$. Имајући у виду претходно обављену дискусију, закључујемо да σ_G мора да чини надмултискуп од Λ_2. Пошто већ знамо да број -1 представља сопствену вредност задатог графа G уз вишеструкост k, као и да му је нула проста сопствена вредност, долазимо до тога да обавезно важи

$$\sigma_G = \Lambda_2 \cup \Big[\underbrace{-1,\ldots,-1}_{k \text{ пута}},0\Big] = \Lambda_1 \cup \Big[\underbrace{-1,\ldots,-1}_{k \text{ пута}}\Big],$$

одакле одмах следи тражено тврђење. □



Слика 5.3: Поступак добијања елемената спектра мартини графа.

Имајући у виду теореме 5.1 и 5.2, поступак добијања елемената спектра неког мартини графа се може комотно визуелно представити помоћу слике 5.3.

5.2 Асимптотско понашање енергије мартини графова

Дати одељак ће се бавити испитивањем асимптотског понашања енергије мартини графова у циљу демонстрирања тачности последице 5.1. Пре свега, вреди напоменути да највећи број грана у спаривању мартини ћелије износи два, као што је могуће запазити на основу одговарајуће визуелне репрезентације која се налази на слици 2.1a. Одавде је једноставно закључити да нужно важи

$$\mu_{\mathrm{MP}_k} = 2k \qquad (\forall k \in \mathbb{N}),$$
$$\mu_{\mathrm{MC}_k} = 2k \qquad (\forall k \in \mathbb{N},\, k \geq 2),$$

те се неједнакости (5.4) и (5.5) заправо своде на $\mathcal{E}_{\mathrm{MP}_k} > 4k\sqrt{3}$ и $\mathcal{E}_{\mathrm{MC}_k} > 4k\sqrt{3}$, респективно. Из овог разлога, последицу 5.1 је могуће веома комотно установити доказивањем следеће теореме.

Теорема 5.3. *Важи*

$$\mathcal{E}_{\mathrm{MP}_k} \sim Lk, \qquad \mathcal{E}_{\mathrm{MC}_k} \sim Lk,$$

када $k \to +\infty$, *где је*

$$\begin{aligned} L = 2 - 2\alpha(-2) &+ \frac{1}{\pi}\int_{\alpha(2)}^{\alpha(-2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{\beta(2)}^{\beta(-2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{\gamma(-2)}^{\gamma(2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{\delta(-2)}^{\delta(2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Уз помоћ одговарајућег математичког софтвера, врло је лако показати да важи $L > 4\sqrt{3}$ за вредност $L \in \mathbb{R}$ изложену у теореми 5.3. Пример програмског кода на језику Wolfram Mathematica којим је могуће демонстрирати споменуто запажање налази се у прилогу А.7. Пошто је $L > 4\sqrt{3}$, јасно је да последица 5.1 заиста директно следи из теореме 5.3. Због тога ће примарни фокус остатка датог поглавља бити управо доказивање теореме 5.3. Започнимо уз наредне две леме које се тичу испитивања асимптотског понашања мартини путева, односно мартини циклуса, респективно.

Лема 5.2. *Важи једнакост*

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{MP}_k}}{k} = 1 &- \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \beta(2\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \gamma(2\cos x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \delta(2\cos x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Доказ. Као директна последица леме 5.1, јасно је да сложене функције

$$x \mapsto \alpha(2\cos x),\ x \mapsto \beta(2\cos x),\ x \mapsto \gamma(2\cos x),\ x \mapsto \delta(2\cos x)$$

морају бити дефинисане на $\mathbb{R}$, непрекидне на целом свом домену и самим тим Риман-интеграбилне на било ком ограниченом затвореном интервалу. Имајући у виду да је за свако $y \in [-2, 2]$ испуњено $\alpha(y) < \beta(y) \le 0$, као и $\delta(y) > \gamma(y) > 0$, на основу теореме 5.1 добијамо да важи

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathrm{MP}_k} = k &- \sum_{j=1}^{k} \alpha\left(2\cos\left(\frac{j}{k+1}\pi\right)\right) - \sum_{j=1}^{k} \beta\left(2\cos\left(\frac{j}{k+1}\pi\right)\right) \\ &+ \sum_{j=1}^{k} \gamma\left(2\cos\left(\frac{j}{k+1}\pi\right)\right) + \sum_{j=1}^{k} \delta\left(2\cos\left(\frac{j}{k+1}\pi\right)\right), \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{MP}_k}}{k} = 1 &- \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \alpha\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right) - \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \beta\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right) \\ &+ \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \gamma\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right) + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} \gamma\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right), \end{aligned} \tag{5.46}$$

за било које $k \in \mathbb{N}$. Даље, приметимо да је

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right) &= \frac{1}{k}\left(-\alpha\left(2\cos 0\right)+\sum_{j=0}^{k}\alpha\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right)\right)\\ &= -\frac{\alpha(2)}{k}+\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k}\alpha\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right)\\ &= -\frac{\alpha(2)}{k}+\frac{k+1}{k\pi}\sum_{j=0}^{k}\alpha\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right)\cdot\frac{\pi}{k+1},\end{aligned}$$

где $\sum_{j=0}^{k}\alpha\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right)\cdot\frac{\pi}{k+1}$ чини Риманову суму функције $x \mapsto \alpha(2\cos x)$ над затвореним интервалом $[0,\pi]$. Дијаметар поделе ове Риманове суме очигледно износи $\frac{\pi}{k+1}$, те није тешко установити да мора бити

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{j=0}^{k}\alpha\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right)\cdot\frac{\pi}{k+1} = \int_0^{\pi}\alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x,$$

одакле директно следи

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

На потпуно аналоган начин, могуће је утврдити да такође важи

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\beta\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\beta(2\cos x)\,\mathrm{d}x,\\ \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\gamma\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\gamma(2\cos x)\,\mathrm{d}x,\\ \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\delta\left(2\cos\left(\frac{j\pi}{k+1}\right)\right) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\delta(2\cos x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

што нас применом формуле (5.46) одмах доводи до тражене једнакости (5.45). □

Лема 5.3. *Важи једнакост*

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{MC}_k}}{k} = 1 &- \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\beta(2\cos x)\,\mathrm{d}x\\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\gamma(2\cos x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\delta(2\cos x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{5.47}$$

Доказ. Коришћењем истоветног резоновања као при доказивању леме 5.2, могуће је употребити теорему 5.2 како бисмо одредили енергију произвољног мартини циклуса на следећи начин:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathrm{MC}_k} = k &- \sum_{j=0}^{k-1} \alpha\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) - \sum_{j=0}^{k-1} \beta\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} \gamma\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) + \sum_{j=0}^{k-1} \delta\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right).\end{aligned}$$

Из овог разлога, за свако $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ обавезно имамо

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{MC}_k}}{k} = 1 &- \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \alpha\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) - \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \beta\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) \\ &+ \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \gamma\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) + \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \delta\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right).\end{aligned} \tag{5.48}$$

Уочимо да важи једнакост

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \alpha\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{k-1} \alpha\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) \cdot \frac{2\pi}{k},$$

где $\sum_{j=0}^{k-1} \alpha\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) \cdot \frac{2\pi}{k}$ представља Риманову суму функције $x \mapsto \alpha(2\cos x)$ над затвореним интервалом $[0, 2\pi]$. Пошто је дијаметар поделе дате Риманове суме једнак $\frac{2\pi}{k}$, тривијално је доћи до

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) \cdot \frac{2\pi}{k} = \int_0^{2\pi} \alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x,$$

као и

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \alpha\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

Аналогно је могуће установити да такође важи

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \beta\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \beta(2\cos x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \gamma\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma(2\cos x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \delta\left(2\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(2\cos x)\,\mathrm{d}x,$$

одакле применом израза (5.48) директно добијамо

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{MC}_k}}{k} &= 1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\beta(2\cos x)\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma(2\cos x)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\delta(2\cos x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{5.49}$$

Надаље, вреди запазити да коришћењем смене $x = 2\pi - z$ једноставно долазимо до тога да мора бити

$$\int_\pi^{2\pi}\alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x=\int_\pi^{0}\alpha(2\cos(2\pi-z))\ (-1)\ \mathrm{d}z=\int_0^{\pi}\alpha(2\cos z)\,\mathrm{d}z,$$

те нужно следи

$$\int_0^{2\pi}\alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x+\int_\pi^{2\pi}\alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

На сличан начин је врло лако показати да такође важе и једнакости

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\beta(2\cos x)\,\mathrm{d}x&=2\int_0^{\pi}\beta(2\cos x)\,\mathrm{d}x,\\ \int_0^{2\pi}\gamma(2\cos x)\,\mathrm{d}x&=2\int_0^{\pi}\gamma(2\cos x)\,\mathrm{d}x,\\ \int_0^{2\pi}\delta(2\cos x)\,\mathrm{d}x&=2\int_0^{\pi}\delta(2\cos x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

што значи да израз (5.47) директно следи из једнакости (5.49). □

При довршавању доказа теореме 5.3, биће нам потребне још две једноставне помоћне леме. Прва од споменутих лема тиче се аналитичких својстава функције $\mathcal{F}$ и изложена је у наставку.

Лема 5.4. *За свако $y \in [-2, 2]$, мора да важи*

$$\alpha(y)+\beta(y)+\gamma(y)+\delta(y)=1.$$

Доказ. Нека је дата одређена фиксирана вредност $y \in [-2, 2]$. Узевши у обзир да за произвољно $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ важи низ еквиваленција

$$\begin{aligned}&& x^2-3-\frac{2}{x^2-x-2}&=y\\ &\iff& (x^2-3)(x^2-x-2)-2&=y(x^2-x-2)\\ &\iff& x^4-x^3-2x^2-3x^2+3x+6-2&=yx^2-yx-2y\\ &\iff& x^4-x^3-(y+5)x^2+(y+3)x+(2y+4)&=0,\end{aligned}$$

није тешко закључити да четири различита решења $\alpha(y), \beta(y), \gamma(y), \delta(y)$ једначине $\mathcal{F}(x) = y$ по промењљивој $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ заправо представљају нуле реалног полинома

$$x^4-x^3-(y+5)x^2+(y+3)x+(2y+4).$$

Из овог разлога, тражена једнакост директно следи применом Вијетових веза. □

Друга помоћна лема представља познати резултат из елементарне математичке анализе и њен доказ се може пронаћи, примера ради, у [50].

Лема 5.5. *Нека су дати реални бројеви* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *такви да је* $a < b$ *и* $c < d$*, и нека је задата непрекидна бијекција* $\varphi\colon [a, b] \to [c, d]$ *која је или растућа уз* $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$ *или опадајућа уз* $\varphi(a) = d$, $\varphi(b) = c$*. Ако са* $\varphi^{-1}\colon [c, d] \to [a, b]$ *обележимо њену одговарајућу инверзну функцију, тада сигурно важи*

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \varphi^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = b\,\varphi(b) - a\,\varphi(a).$$

У остатку поглавља ћемо довршити доказ теореме 5.3 непосредном применом претходно добијених лема.

Доказ теореме 5.3. На основу лема 5.2 и 5.3, очигледно је да мора бити

$$\mathcal{E}_{\mathrm{MP}_k} \sim L\,k, \qquad \mathcal{E}_{\mathrm{MC}_k} \sim L\,k,$$

када $k \to +\infty$, и где $L \in \mathbb{R}$ представља реалан број задат преко израза

$$\begin{aligned} L = 1 &- \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \beta(2\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \gamma(2\cos x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \delta(2\cos x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Дакле, како бисмо комплетирали доказ теореме, довољно је да установимо да овај број L испуњава једнакост (5.44).

Запазимо да функција $x \mapsto \alpha(2\cos x)$ може да се сагледа као непрекидна растућа бијекција од $[0, \pi]$ на $[\alpha(2), \alpha(-2)]$ чија одговарајућа инверзна функција износи $x \mapsto \arccos\left(\dfrac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)$. Из овог разлога, у стању смо комотно да искористимо лему 5.5, чиме долазимо до

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x + \int_{\alpha(2)}^{\alpha(-2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x = \alpha(-2)\cdot\pi - \alpha(2)\cdot 0 \\ \implies \quad &\int_0^\pi \alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x + \int_{\alpha(2)}^{\alpha(-2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x = \pi\,\alpha(-2), \end{aligned}$$

што надаље даје

$$\int_0^\pi \alpha(2\cos x)\,\mathrm{d}x = \pi\,\alpha(-2) - \int_{\alpha(2)}^{\alpha(-2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

На комплетно аналоган начин могуће је закључити да нужно важи

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \beta(2\cos x)\,\mathrm{d}x &= \pi\,\beta(-2) - \int_{\beta(2)}^{\beta(-2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x, \\ \int_0^\pi \gamma(2\cos x)\,\mathrm{d}x &= \pi\,\gamma(-2) - \int_{\gamma(2)}^{\gamma(-2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x, \\ \int_0^\pi \delta(2\cos x)\,\mathrm{d}x &= \pi\,\delta(-2) - \int_{\delta(2)}^{\delta(-2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Узевши све у обзир, израз (5.50) говори да обавезно имамо

$$\begin{aligned} L = {} & 1 - \alpha(-2) - \beta(-2) + \gamma(-2) + \delta(-2) \\ & + \frac{1}{\pi}\int_{\alpha(2)}^{\alpha(-2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{\beta(2)}^{\beta(-2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x \\ & - \frac{1}{\pi}\int_{\gamma(2)}^{\gamma(-2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{\delta(2)}^{\delta(-2)} \arccos\left(\frac{\mathcal{F}(x)}{2}\right)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Коришћењем леме 5.4 и имајући у виду да је $\beta(-2) = 0$, није тешко закључити да мора бити

$$\begin{aligned} & \alpha(-2) + \beta(-2) + \gamma(-2) + \delta(-2) = 1 \\ \implies \quad & -\alpha(-2) - \beta(-2) + \gamma(-2) + \delta(-2) = 1 - 2\alpha(-2) - 2\beta(-2) \\ \implies \quad & -\alpha(-2) - \beta(-2) + \gamma(-2) + \delta(-2) = 1 - 2\alpha(-2), \end{aligned}$$

што нам помаже да из формуле (5.51) директно дођемо до тражене једнакости (5.44), чиме је доказ теореме готов. □

Поглавље 6

Закључак

У оквиру докторске дисертације, сагледана су и решена три математичка проблема. Пре свега, унутар поглавља 3 су разматрани циркулантни матични графови и у потпуности су одређени сви парови (n, d), $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}_0$ за које постоји d-регуларан циркулантан матичан граф реда n. На овај начин су разрешене две хипотезе које су претходно поставили Башић и др. [7, хипотезе 3.2 и 3.3] и добијен је одговор на питање колико све може да износи ред d-регуларног циркулантног матичног графа, за било које $d \in \mathbb{N}_0$. Међутим, приликом решавања споменутог проблема, ни у једном тренутку није разматрана могућност потпуне или парцијалне карактеризације оваквих графова. Из овог разлога је природно да се као следећи корак у анализи циркулантних матичних графова наметне научно питање извођења адекватних потребних или довољних услова који говоре о томе да ли је задати граф датог типа. Решавање овог проблема за случај $d < 8$ се показује једноставним (видети, на пример, [26, последица 7]), док случај $d \geq 8$ чини драстично комплекснији математички проблем.

Још један могући правац даљег научног истраживања у вези са матичним графовима јесте решавање аналогног егзистенцијалног проблема над матичним графовима који нису нужно циркулантни. Наиме, у алгебарској теорији графова су веома познати чвор-транзитивни[9] и Кејлијеви[10] графови (видети, на пример, [38, 51, 58, 59]) за које се зна да чине подтип регуларних графова. Узевши у обзир да сваки циркулантан граф мора бити истовремено и чвор-транзитиван и Кејлијев, јасно је да свака употребљена конструкција која демонстрира постојање d-регуларног циркулантног матичног графа реда n аутоматски показује и постојање d-регуларног чвор-транзитивног, односно Кејлијевог, матичног графа реда n. Пошто је већ познато да d-регуларан чвор-транзитиван матичан граф реда n мора да задовољава или $4 \mid d$, $2 \mid n$, $n \geq d + 4$ или $d \equiv_4 2$, $4 \mid n$, $n \geq d + 6$ (видети, на пример, [34, теорема 10]), надаље има смисла довршити истраживање егзистенцијалног проблема типа ред–степен над споменутим типовима графова. Заправо, овакво питање везано за чвор-транзитивне матичне графове је већ постављено (видети [34, питање 9]), док ћемо отворени научни проблем који се тиче Кејлијевих матичних графова изложити у наставку.

Проблем 6.1 (Егзистенцијални проблем Кејлијевих матичних графова)**.** *Одредити све парове* (n, d), $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}_0$ *за које постоји d-регуларан Кејлијев матичан граф реда n.*

Унутар поглавља 4 докторске дисертације, разматрана су спектрална својства балансираних стабала. Главни допринос поглавља јесте добијање експлицитне формуле која диктира колико износи енергија било ког Бете стабла, као и одговарајуће апроксимације енергије дендримера. При извођењу споменутих резултата, масивно је коришћена правилна структура

[9] На енглеском језику, чвор-транзитиван граф се стандардно назива *vertex-transitive graph*.
[10] На енглеском језику, Кејлијев граф се стандардно назива *Cayley graph*.

коју поседују Бете стабла и дендримери. Вреди напоменути да је оваква структура управо и довела до тога да проблем израчунавања енергије може концизно да се сведе на руковање са Диксоновим полиномима друге врсте и Геронимусовим полиномима. Из овог разлога, има смисла очекивати да проблем одређивања енергије балансираних стабала са мање правилном структуром представља осетно већи изазов. У вези са тим, даљи потенцијалан правац истраживања би могао бити проналажење адекватног апроксимативног решења које за произвољно балансирано стабло диктира колико износи горња или доња граница за његову енергију.

Најзад, поглавље 5 се бавило коришћењем мартини графова ради обарања хипотезе коју су претходно поставили Akbar и др. [2, хипотеза 23]. У оквиру поглавља је изведен математички доказ који говори да међу мартини графовима постоји бесконачно много њих по изоморфизму различитих који чине контрапример за споменуту хипотезу. Имајући у виду експерименталне резултате које су добили Стевановић и др. [85], јасно је да ова хипотеза садржи бар један контрапример за случај $\Delta_G = 4$, при чему није познато да ли уопште постоји контрапример за случај $\Delta_G = 5$. Из овог разлога, има смисла поставити наредна два отворена математичка проблема уз које завршавамо докторску дисертацију.

Проблем 6.2. *Испитати да ли постоји коначно или бесконачно много по изоморфизму различитих повезаних простих ненула графова G код којих важи $\Delta_G = 4$, као и*

$$\mathcal{E}_G > 4\mu_G.$$

Проблем 6.3. *Испитати да ли неједнакост*

$$\mathcal{E}_G \leq 2\mu_G\sqrt{5}$$

обавезно наступа за било који повезан прост ненула граф G који задовољава услов $\Delta_G = 5$.

Литература

[1] F. Agosta, S. Sala, P. Valsasina, A. Meani, E. Canu, G. Magnani, S. F. Cappa, E. Scola, P. Quatto, M.A. Horsfield, A. Falini, G. Comi, M. Filippi, *Brain network connectivity assessed using graph theory in frontotemporal dementia*, Neurology **81(2)** (2013), 134–143.

[2] S. Akbari, A. Alazemi, M. Anđelić, *Upper Bounds on the Energy of Graphs in Terms of Matching Number*, Appl. Anal. Discrete Math. **15** (2021), 444–459.

[3] A.T. Balaban, *Applications of Graph Theory in Chemistry*, J. Chem. Inf. Comput. Sci. **25** (1985), 334–343.

[4] A. Banerjee, *The spectrum of the graph Laplacian as a tool for analyzing structure and evolution of networks*, Doctoral Dissertation, Leipzig University, 2008.

[5] A. Banerjee, J. Jost, *Graph spectra as a systematic tool in computational biology*, Discret. Appl. Math. **157(10)** (2009), 2425–2431.

[6] R.B. Bapat, *Graphs and Matrices*, Springer London, 2014.

[7] N. Bašić, M. Knor, R. Škrekovski, *On* 12*-regular nut graphs*, Art Discret. Appl. Math. **5(2)** (2021), #P2.01.

[8] N. Biggs, E. Lloyd, R. Wilson, *Graph Theory, 1736–1936*, Oxford University Press, New York, 1986.

[9] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Elsevier, New York, 1976.

[10] L. Branković, D. Cvetković, *The eigenspace of the eigenvalue* -2 *in generalized line graphs and a problem in security of statistical data bases*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. **14** (2003), 37–48.

[11] S. Brin, L. Page, *The Anatomy of Large-Scale Hypertextual Web Search Engine*, Proc. 7^{th} International WWW Conference, 1998.

[12] A.E. Brouwer, W.H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Springer New York, NY, 2012.

[13] R.A. Brualdi, D. Cvetković, *A Combinatorial Approach to Matrix Theory and Its Application*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 2008.

[14] P. Chaudhary, V. Kumar, *A Review on Applications of Graph Theory in Computer Science*, J. Adv. Sci. Technol. **17(1)** (2020), 82–87.

[15] J. Chen, L. Trajković., *Analysis of Internet topology data*, Proc. IEEE Internat. Symp. Circuits and Systems, ISCAS 2004, Vancouver, B.C., May 2004, 629–632.

[16] L. von Collatz, U. Sinogowitz, *Spektren endlicher Grafen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **21** (1957), 63–77.

[17] K. Coolsaet, P.W. Fowler, J. Goedgebeur, *Generation and properties of nut graphs*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. **80** (2018), 423–444.

[18] D. Cvetković, *Applications of Graph Spectra: An Introduction to the Literature*, Zbornik radova **13(21)** (2009), 7–32.

[19] D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs – Theory and Application*, Deutscher Verlag der Wissenschaften – Academic Press, Berlin – New York, 1980.

[20] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić, *Eigenspaces of graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[21] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić, *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[22] D. Cvetković, S. Simić, *The second largest eigenvalue of a graph (a survey)*, Filomat **9(3)** (1995), Int. Conf. Algebra Logic Discret. Math. Niš, Apr 14–16, 1995, 449–472.

[23] D. Cvetković, S. Simić, *Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, I*, Publ. de l'Institut Math. **85(99)** (2009), 19–33.

[24] D. Cvetković, S. Simić, *Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, II*, Linear Algebra Appl. **432(9)** (2010), 2257–2272.

[25] D. Cvetković, S. Simić, *Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian, III*, Appl. Anal. Discret. Math. **4** (2010), 156–166.

[26] I. Damnjanović, *On the nullities of quartic circulant graphs and their extremal null spaces*, arXiv: 2212.12959, 2022.

[27] I. Damnjanović, *Complete resolution of the circulant nut graph order–degree existence problem*, Ars Math. Contemp. (2023), DOI: 10.26493/1855-3974.3009.6df.

[28] I. Damnjanović, *Computing the characteristic polynomials of rooted trees and the energies of Bethe trees*, Appl. Math. Comput. Sci. **7(1)** (2023), 1–16.

[29] I. Damnjanović, *Two families of circulant nut graphs*, Filomat **37(24)** (2023), 8331–8360.

[30] I. Damnjanović, S. Filipovski, D. Stevanović, *Spectral properties of balanced trees and dendrimers*, Linear Algebra Appl. **657** (2023), 163–196.

[31] I. Damnjanović, D. Stevanović, *On circulant nut graphs*, Linear Algebra Appl. **633** (2022), 127–151.

[32] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer Berlin, Heidelberg, 2017.

[33] M. Filaseta, A. Schinzel, *On testing the divisibility of lacunary polynomials by cyclotomic polynomials*, Math. Comput. **73(246)** (2003), 957–965.

[34] P.W. Fowler, J.B. Gauci, J. Goedgebeur, T. Pisanski, I. Sciriha, *Existence of regular nut graphs for degree at most* 11, Discuss. Math. Graph Theory **40** (2020), 533–557.

[35] P.W. Fowler, B.T. Pickup, T.Z. Todorova, M. Borg, I. Sciriha, *Omni-conducting and omni--insulating molecules*, J. Chem. Phys. **140** (2014), 054115.

[36] P.W. Fowler, T. Pisanski, N. Bašić, *Charting the space of chemical nut graphs*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. **86(3)** (2021), 519–538.

[37] J.B. Gauci, T. Pisanski, I. Sciriha, *Existence of regular nut graphs and the Fowler construction*, Appl. Anal. Discrete Math. (2021), DOI: 10.2298/AADM190517028G.

[38] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer New York, NY, 2001.

[39] M. Grandjean, *A social network analysis of Twitter: Mapping the digital humanities community*, Cogent Arts Humanit. **3** (2016), 1171458.

[40] R.M. Gray, *Toeplitz and circulant matrices: A review*, Found. Trends Commun. Inf. Theory **2(3)** (2006), 155–239.

[41] I. Gutman, *The energy of a graph*, Ber. Math.-Statist. Sekt. Forsch. Graz **103** (1978), 1–22.

[42] I. Gutman, H. Ramane, *Research on graph energies in 2019*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. **84** (2020), 277–292.

[43] O.J. Heilmann, E.H. Lieb, *Theory of monomer-dimer systems*, Comm. Math. Phys. **25** (1972), 190–232.

[44] A. Heydari, B. Taeri, *On the characteristic polynomial of a special class of graphs and spectra of balanced trees*, Linear Algebra Appl. **429** (2008), 1744–1757.

[45] E. Hückel, *Quantentheoretische Beiträge zum Benzolproblem*, Z. Phys. **70** (1931), 204–286.

[46] D. P. Jacobs, V. Trevisan, *Constructing the characteristic polynomial of tree's adjacency matrix*, Congr. Numer. **134** (1998), 139–145.

[47] G.J.O. Jameson, *The cyclotomic polynomials*, URL: https://www.maths.lancs.ac.uk/~jameson/cyp.pdf.

[48] P.W. Kasteleyn, *Graph theory and crystal physics*, in: *Graph theory and theoretical physics*, New York: Academic Press, 1967, 43–110.

[49] S.T. Kelly, M.A. Black, *graphsim: An R package for simulating gene expression data from graph structures of biological pathways*, J. Open Source Softw. **5(51)** (2020), 2161.

[50] E. Key, *Disks, Shells, and Integrals of Inverse Functions*, Coll. Math. J. **25(2)** (1994), 136–138.

[51] E. Konstantinova, *Some problems on Cayley graphs*, Linear Algebra Appl. **429(11–12)** (2008), 2754–2769.

[52] A. Kumar, G.U. Kulkarni, *Evaluating conducting network based transparent electrodes from geometrical considerations*, J. Appl. Phys. **119** (2016), 015102.

[53] X. Li, Y. Shi, I. Gutman, *Graph Energy*, Springer New York, NY, 2012.

[54] R. Lidl, G.L. Mullen, G. Turnwald, *Dickson polynomials*, Longman Scientific & Technical, Harlow, copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

[55] N. Linial, A. Magen, A. Naor, *Girth and Euclidean Distortion*, GAFA Geom. Funct. Anal. **12** (2002), 380–394.

[56] A. Majeed, I. Rauf, *Graph Theory: A Comprehensive Survey about Graph Theory Applications in Computer Science and Social Networks*, Inventions **5(1)** (2020), 10.

[57] A.R. Mashaghi, A. Ramezanpour, V. Karimipour, *Investigation of a protein complex network*, Eur. Phys. J. B **41** (2004), 113–121.

[58] B. McKay, C. Praeger, *Vertex-transitive graphs which are not Cayley graphs, I*, J. Aust. Math. Soc. **56(1)** (1994), 53–63.

[59] B. McKay, C. Praeger, *Vertex-transitive graphs that are not Cayley graphs. II*, J. Graph Theory **22(4)** (1996), 321–334.

[60] P. van Mieghem, *Performance Analysis of Communications Networks and Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[61] Z. Mihalić, D. Veljan, D. Amić, S. Nikolić, D. Plavšić, N. Trinajstić, *The distance matrix in chemistry*, J. Math. Chem. **11** (1992), 223–258.

[62] B. Mohar, *Computing the Characteristic Polynomial of a Tree*, J. Math. Chem. **3** (1989), 403–406.

[63] E.W. Montroll, *Lattice statistics*, in: *Applied combinatorial mathematics*, Wiley, New York – London – Sydney, 1964, 96–143.

[64] M.J. Nadjafi-Arani, H. Khodashenas, A.R. Ashrafi, *A New Method for Computing Wiener Index of Dendrimer Nanostars*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. **69** (2013), 159–164.

[65] M.E.J. Newman, *Networks: An Introduction*, Oxford University Press, New York, 2010.

[66] Y. Pan, J. Chen, J. Li, *Upper bounds of graph energy in terms of matching number*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. **83** (2020), 541–554.

[67] J.K. Percus, *Combinational Methods*, Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1969.

[68] C.C. Pinter, *A Book of Abstract Algebra*, Dover Publications, Inc., New York, 2010.

[69] F. Riaz, K.M. Ali, *Applications of Graph Theory in Computer Science*, Third International Conference on Computational Intelligence, Communication Systems and Networks, Bali, Indonesia (2011), 142–145.

[70] M. Robbiano, V. Trevisan, *Applications of recurrence relations for the characteristic polynomials of Bethe trees*, Comput. Math. with Appl. **59** (2010), 3039–3044.

[71] O. Rojo, M. Robbiano, *An explicit formula for eigenvalues of Bethe trees and upper bounds on the largest eigenvalue of any tree*, Linear Algebra Appl. **427** (2007), 138–150.

[72] O. Rojo, R. Soto, *The spectra of the adjacency matrix and Laplacian matrix for some balanced trees*, Linear Algebra Appl. **403** (2005), 97–117.

[73] I. Sciriha, *On the coefficient of λ in the characteristic polynomial of singular graphs*, Util. Math. **52** (1997), 97–111.

[74] I. Sciriha, *On singular line graphs of trees*, Congr. Numerantium **135** (1998), 73–91.

[75] I. Sciriha, *On the construction of graphs of nullity one*, Discrete Math. **181(1–3)** (1998), 193–211.

[76] I. Sciriha, *The two classes of singular line graphs of trees*, Rend. Semin. Mat. Messina, Ser. II **20(5)** (1999), 167–180.

[77] I. Sciriha, P.W. Fowler, *Nonbonding orbitals in fullerenes: Nuts and cores in singular polyhedral graphs*, J. Chem. Inf. Model. **47(5)** (2007), 1763–1775.

[78] I. Sciriha, P.W. Fowler, *On nut and core singular fullerenes*, Discrete Math. **308(2–3)** (2008), 267–276.

[79] I. Sciriha, I. Gutman, *Nut graphs: Maximally extending cores*, Util. Math. **54** (1998), 257–272.

[80] J.J. Seidel, *Strongly regular graphs with* $(-1,1,0)$ *adjacency matrix having eigenvalue* 3, Linear Algebra Appl. **1** (1968), 281–298.

[81] P. Shah, A. Ashourvan, F. Mikhail, A. Pines, L. Kini, K. Oechsel, S.R. Das, J.M. Stein, R.T. Shinohara, D.S. Bassett, B. Litt, K.A. Davis, *Characterizing the role of the structural connectome in seizure dynamics*, Brain **142(7)** (2019), 1955–1972.

[82] A. Shokoufandeh, S.J. Dickinson, K. Siddiqi, S.W. Zucker, *Indexing using a spectral encoding of topological structure*, IEEE Trans. Comput. Vision Pattern Recognition **2** (1999), 491–497.

[83] D.A. Spielman, *Spectral Graph Theory and its Applications*, 48th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE, 2007, 29–38.

[84] D. Stevanović, *Approximate energy of dendrimers*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. **64** (2010), 65–73.

[85] Đ. Stevanović, I. Damnjanović, D. Stevanović, *Finding counterexamples for a conjecture of Akbari, Alazemi and Anđelić*, arXiv: 2111.15303, 2021.

[86] F. Tian, D. Wong, *Upper bounds of the energy of triangle-free graphs in terms of matching number*, Linear Multilinear Algebra **67** (2019), 20–28.

[87] G. Tinhofer, H. Schreck, *Computing the Characteristic Polynomial of a Tree*, Comput. **35** (1985), 113–125.

[88] N. Trinajstić, *Chemical Graph Theory*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1992.

[89] F. Vecchio, F. Miraglia, F. Piludu, G. Granata, R. Romanello, M. Caulo, V. Onofrj, P. Bramanti, C. Colosimo, P.M. Rossini, *"Small World" architecture in brain connectivity and hippocampal volume in Alzheimer's disease: a study via graph theory from EEG data*, Brain Imaging Behav. **11** (2017), 473–485.

[90] A.Z. Wagner, *Constructions in combinatorics via neural networks*, arXiv: 2104.14516, 2021.

[91] A.Z. Wagner, *Cross entropy for combinatorics*, URL:
https://github.com/zawagner22/cross-entropy-for-combinatorics.

[92] Y. Yang, A-w. Fan, H. Wang, H. Lv, X-D. Zhang, *Multi-distance granularity structural α-subtree index of generalized Bethe trees*, Appl. Math. Comput. **359** (2019), 107–120.

[93] Г. Калајџић, *Линеарна алгебра*, Завод за уџбенике, Београд, 2011.

[94] М. Матејић, *Развој рационалних алгоритама за конструкцију ортогоналних полинома једне промењливе*, докторска дисертација, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу, Крагујевац, 2016.

[95] Г. Миловановић, *Нумеричка анализа, I део*, Научна књига, Београд, 1988.

[96] И. Миловановић, Е. Миловановић, *Дискретна математика*, Електронски факултет, Универзитет у Нишу, 2000.

[97] Д. Стевановић, М. Ћирић, С. Симић, В. Балтић, *Дискретна математика – основе комбинаторике и теорије графова*, Друштво математичара Србије, 2008.

Прилог А

Програмски код

А.1 Непостојање 8-регуларног циркулантног матичног графа реда 16

У датом одељку је изложен програмски код на језику Wolfram Mathematica који у виду табеле за сваки могући генераторски скуп наведен у леми 3.4 одређује колико износи димензија нултог простора одговарајућих графова. Тврђење исказано у леми директно следи из чињенице да се у добијеној десној колони јављају само вредности из скупа $\{3, 5, 9\}$.

```
MatrixForm[
 Table[{S,
   16 - MatrixRank[
     ToeplitzMatrix[
      Table[Boole[MemberQ[S, j] || MemberQ[S, 16 - j]], {j, 0, 15}],
      RotateRight[
       Reverse[Table[
         Boole[MemberQ[S, j] || MemberQ[S, 16 - j]], {j, 0,
          15}]]]]]]}, {S,
   Flatten[Table[
     Join[j, k], {j, Subsets[{1, 3, 5, 7}, {2}]}, {k,
      Subsets[{2, 4, 6}, {2}]}], 1]}]]
```

А.2 Непостојање корена јединице међу нулама разних полинома

Задати одељак ће се бавити доказивањем чињенице да одређени реални полиноми од интереса не поседују ниједан корен јединице међу својим нулама. Ови полиноми се појављују на више места унутар поглавља 3 при показивању тачности разних конструкција везаних за циркулантне матичне графове. Наведимо споменуте полиноме у наставку:

$$\begin{aligned}
Z_1(x) &= x^{14} - 2x^{13} + 3x^{12} - 3x^{11} + 4x^{10} - 4x^9 + 4x^8 \\
&\qquad - 4x^7 + 4x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2x + 1, \\
Z_2(x) &= x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1, \\
Z_3(x) &= x^6 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_4(x) &= x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1,\\
Z_5(x) &= 3x^4 - 2x^2 + 3,\\
Z_6(x) &= x^2 - 2x - 1,\\
Z_7(x) &= x^2 + 2x - 1,\\
Z_8(x) &= 3x^4 + 2x^2 + 3,\\
Z_9(x) &= 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2,\\
Z_{10}(x) &= 2x^8 + 2x^7 - x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 2.
\end{aligned}$$

Пошто су сви наведени полиноми степена не изнад четрнаест, није тешко установити да је за доказивање траженог тврђења довољно показати да ниједан од задатих полинома није дељив ниједним циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ код ког је $\deg \Phi_b(x) = \varphi(b) \le 14$. У циљу концизног довршавања доказа, сада ће нам од користи бити наредна једноставна лема.

Лема А.1. *За било које $n \in \mathbb{N}$, важи*

$$\varphi(n) \ge \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Доказ. Нека је $n = 2^\alpha p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, где за $k \in \mathbb{N}_0$ вредности $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ представљају све непарне просте факторе броја $n \in \mathbb{N}$, при чему је $\alpha \in \mathbb{N}_0$ и $\beta_j \in \mathbb{N}$ за свако $j = \overline{1,k}$. Надаље је очигледно да мора бити

$$\frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = \frac{\varphi\left(2^\alpha\right)}{2^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{\varphi\left(p_j^{\beta_j}\right)}{p_j^{\frac{\beta_j}{2}}}. \tag{A.1}$$

Пошто за свако $j = \overline{1,k}$ сигурно важи

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi\left(p_j^{\beta_j}\right)}{p_j^{\frac{\beta_j}{2}}} &= \frac{\left(p_j - 1\right) p_j^{\beta_j - 1}}{p_j^{\frac{\beta_j}{2}}} = \left(p_j - 1\right) p_j^{\frac{\beta_j}{2} - 1} \ge \left(p_j - 1\right) p_j^{-\frac{1}{2}} = \frac{p_j - 1}{\sqrt{p_j}}\\
&= \frac{\sqrt{p_j} + \left(p_j - \sqrt{p_j} + \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4}}{\sqrt{p_j}} = \frac{\sqrt{p_j} + \left(p_j - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}{\sqrt{p_j}}\\
&= \frac{\sqrt{p_j} + \left(p_j - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(p_j - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{p_j}} > \frac{\sqrt{p_j}}{\sqrt{p_j}} > 1,
\end{aligned}$$

из формуле (А.1) одмах добијамо неједнакост

$$\frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \ge \frac{\varphi\left(2^\alpha\right)}{2^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Ако је $\alpha = 0$, онда је јасно да имамо $\dfrac{\varphi\left(2^\alpha\right)}{2^{\frac{\alpha}{2}}} = 1$, док за било које $\alpha \ge 1$ није тешко доћи до

$$\frac{\varphi\left(2^\alpha\right)}{2^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\frac{\alpha}{2}}} = 2^{\frac{\alpha}{2}-1} \ge 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

те у сваком случају обавезно наступа $\dfrac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. □

Дакле, коришћењем леме А.1 можемо направити закључак да неједнакост $\varphi(b) \leq 14$ имплицира $\sqrt{\frac{b}{2}} \leq 14$, тј. $b \leq 392$. Из овог разлога, како бисмо демонстрирали да ниједан од полинома $Z_j(x)$ не садржи корен јединице међу својим нулама, довољно је показати да је испуњено $\Phi_b(x) \nmid Z_j(x)$ за свако $j = \overline{1, 10}$ и $b = \overline{1, 392}$. Међутим, оваква провера се тривијално може обавити применом математичког софтвера. Одговарајући програмски код на језику Wolfram Mathematica изложен је у наставку.

```
And @@ Flatten[
  Table[Length[
     CoefficientRules[
      PolynomialRemainder[P, Cyclotomic[b, x], x]]] >=
    1, {P, {x^14 - 2 x^13 + 3 x^12 - 3 x^11 + 4 x^10 - 4 x^9 +
      4 x^8 - 4 x^7 + 4 x^6 - 4 x^5 + 4 x^4 - 3 x^3 + 3 x^2 - 2 x + 1,
      x^4 + 2 x^3 - 2 x^2 + 2 x + 1, x^6 - x^4 + 2 x^3 - x^2 + 1,
     x^6 - 2 x^5 + 3 x^4 - 2 x^3 + 3 x^2 - 2 x + 1, 3 x^4 - 2 x^2 + 3,
      x^2 - 2 x - 1, x^2 + 2 x - 1, 3 x^4 + 2 x^2 + 3,
     2 x^6 - 2 x^5 + 3 x^4 - 2 x^3 + 3 x^2 - 2 x + 2,
     2 x^8 + 2 x^7 - x^6 + 2 x^5 - 2 x^4 + 2 x^3 - x^2 + 2 x +
      2}} , {b, 1, 392}]]
```

А.3 Недељивост $Q_t^{(1)}(x)$ и $R_t^{(1)}(x)$ одређеним циклотомичним полиномима

Унутар датог одељка је дат програмски код на језику Wolfram Mathematica који служи за обављање провере да ниједан од полинома $Q_t^{(1)}(x)$ и $R_t^{(1)}(x)$ не може бити дељив циклотомичним полином $\Phi_b(x)$ за вредности $b \in \mathbb{N}$ наведене у леми 3.12.

```
Min[Table[
   Min[Table[
     Length[CoefficientRules[
       PolynomialRemainder[
        2 x^Mod[2 t - 1, b] + x^Mod[t + 1, b] - x^Mod[t, b] +
         x^Mod[t - 1, b] - x^Mod[t - 2, b] - 2, Cyclotomic[b, x],
        x]]], {t, 0, b - 1}]], {b, {3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45,
     90}}]] >= 1
```

```
Min[Table[
   Min[Table[
     Length[CoefficientRules[
       PolynomialRemainder[
        2 x^Mod[2 t - 1, b] - x^Mod[t + 1, b] - 3 x^Mod[t, b] +
         3 x^Mod[t - 1, b] + x^Mod[t - 2, b] - 2, Cyclotomic[b, x],
        x]]], {t, 0, b - 1}]], {b, {3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45,
     90}}]] >= 1
```

А.4 Недељивост $Q_t^{(2)}(x)$ и $R_t^{(2)}(x)$ одређеним циклотомичним полиномима

У наставку је наведен програмски код на језику Wolfram Mathematica који помаже при излагању доказа леме 3.18. Одговарајуће команде врше проверу да ниједан од полинома $Q_t^{(2)}(x)$ и $R_t^{(2)}(x)$ сигурно није дељив циклотомичним полином $\Phi_b(x)$ за вредности $b \in \mathbb{N}$ дате у леми 3.18.

```
Min[Table[
   Min[Table[
     Length[CoefficientRules[
       PolynomialRemainder[
        2 x^Mod[4 t - 1, b] + x^Mod[2 t + 4, b] -
         2 x^Mod[2 t + 1, b] + 2 x^Mod[2 t - 1, b] -
         x^Mod[2 t - 4, b] - 2 x, Cyclotomic[b, x], x]]], {t, 0,
      b - 1}]], {b, {3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 25, 30, 45, 50, 75, 90,
     150, 225, 450}}]] >= 1
```

```
Min[Table[
   Min[Table[
     Length[CoefficientRules[
       PolynomialRemainder[
        2 x^Mod[4 t - 1, b] - x^Mod[2 t + 4, b] -
         2 x^Mod[2 t + 1, b] + 2 x^Mod[2 t - 1, b] +
         x^Mod[2 t - 4, b] - 2 x, Cyclotomic[b, x], x]]], {t, 0,
      b - 1}]], {b, {3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 25, 30, 45, 50, 75, 90,
     150, 225, 450}}]] >= 1
```

А.5 Недељивост $Q_t^{(3)}(x)$ и $R_t^{(3)}(x)$ одређеним циклотомичним полиномима

Унутар датог одељка, биће образложена процедура за доказивање леме 3.26 путем рачунара уз помоћ четири програмске скрипте. Пре свега, неопходно је пронаћи скуп свих вредности $b \in \mathbb{N}$ које поштују систем услова наведен у леми који се тиче полинома $Q_t^{(3)}(x)$, као и вредности $b \in \mathbb{N}$ које испуњавају одговарајуће услове у вези са полиномом $R_t^{(3)}(x)$. Ова два неопходна скупа можемо веома комотно одредити применом две одговарајуће скрипте на програмском језику Python. Након тога, за добијене вредности $b \in \mathbb{N}$, неопходно је проверити да обавезно не наступа одговарајућа дељивост циклотомичним полиномом $\Phi_b(x)$ код полинома $Q_t^{(3)}(x)$, односно полинома $R_t^{(3)}(x)$. Овакву проверу није тешко обавити преко математичког софтвера који пружа подршку за симболичка израчунавања. У складу са тим, биће изложене још две скрипте на језику Wolfram Mathematica које врше тражену проверу.

У наставку се налази програмски код Python скрипти које одређују тражене скупове вредности $b \in \mathbb{N}$. Прво је дата скрипта која се тиче дељивости полинома $Q_t^{(3)}(x)$, а затим скрипта која се бави полиномом $R_t^{(3)}(x)$.

```python
import numpy as np


def main():
    part_1 = np.multiply.outer([1, 2], [1, 3, 9, 27]).reshape(-1)
    part_2 = np.multiply.outer([1, 5, 25], [1, 7, 49]).reshape(-1)

    all_of_them = np.multiply.outer(part_1, part_2).reshape(-1)
    all_of_them.sort()
    all_of_them = all_of_them.tolist()

    result = list(filter(lambda item: item % 105 != 0, all_of_them))
    result = list(filter(lambda item: item >= 3, result))

    print(len(result))
    print(result)


if __name__ == "__main__":
    main()
```

```python
import numpy as np


def main():
    part_1 = np.multiply.outer([1, 2], [1, 7, 11, 77]).reshape(-1)
    part_2 = np.multiply.outer([1, 3, 9], [1, 5, 25]).reshape(-1)

    all_of_them = np.multiply.outer(part_1, part_2).reshape(-1)
    all_of_them.sort()
    all_of_them = all_of_them.tolist()

    result = list(filter(lambda item: item % 77 != 0, all_of_them))
    result = list(filter(lambda item: item % 55 != 0, result))
    result = list(filter(lambda item: item >= 3, result))

    print(len(result))
    print(result)


if __name__ == "__main__":
    main()
```

Одељак завршавамо неопходним Wolfram Mathematica командама које врше одговарајућу проверу недељивости циклотомичним полиномима. Прво излажемо команду која довршава доказ тврђења у вези са полиномом $Q_t^{(3)}(x)$, а након тога и команду која комплетира показивање тврђења које се тиче полинома $R_t^{(3)}(x)$.

```
Min[Table[
  Min[Table[
    Length[CoefficientRules[
      PolynomialRemainder[
        2 x^Mod[2 t + 1, b] - 2 x^Mod[2 t - 1, b] +
         2 x^Mod[2 t - 2, b] + x^Mod[t + 3, b] - x^Mod[t + 2, b] +
         x^Mod[t - 1, b] - x^Mod[t - 2, b] - 2 x^3 + 2 x^2 - 2,
        Cyclotomic[b, x], x]]], {t, 0, b - 1}]], {b, {3, 5, 6, 7, 9,
    10, 14, 15, 18, 21, 25, 27, 30, 35, 42, 45, 49, 50, 54, 63, 70,
    75, 90, 98, 126, 135, 147, 150, 175, 189, 225, 245, 270, 294,
    350, 378, 441, 450, 490, 675, 882, 1225, 1323, 1350, 2450,
    2646}}]] >= 1
```

```
Min[Table[
  Min[Table[
    Length[CoefficientRules[
      PolynomialRemainder[
        2 x^Mod[2 t + 1, b] - 2 x^Mod[2 t - 1, b] +
         2 x^Mod[2 t - 2, b] - x^Mod[t + 3, b] + x^Mod[t + 2, b] -
         4 x^Mod[t + 1, b] + 4 x^Mod[t, b] - x^Mod[t - 1, b] +
         x^Mod[t - 2, b] - 2 x^3 + 2 x^2 - 2, Cyclotomic[b, x],
        x]]], {t, 0, b - 1}]], {b, {3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 18,
     21, 22, 25, 30, 33, 35, 42, 45, 50, 63, 66, 70, 75, 90, 99, 105,
     126, 150, 175, 198, 210, 225, 315, 350, 450, 525, 630, 1050,
    1575, 3150}}]] >= 1
```

A.6 Недељивост $Q_t^{(4)}(x)$ и $R_t^{(4)}(x)$ одређеним циклотомичним полиномима

У датом поглављу ће бити објашњен поступак комплетирања доказа леме 3.32 помоћу три програмске скрипте на језицима Python и Wolfram Mathematica. Најпре вреди напоменути да ће механизам доказивања бити скоро у потпуности аналоган стратегији искоришћеној у одељку A.5. Дакле, први корак биће одређивање скупа свих вредности $b \in \mathbb{N}$ које испуњавају услове наведене у леми 3.32. Оваква рачуница се тривијално може обавити уз помоћ огромног броја програмских језика, при чему је за потребе докторске дисертације одабран језик Python. После добијања траженог скупа, биће искоришћене две команде на језику Wolfram Mathematica у циљу вршења адекватне провере дељивости циклотомичним полиномима. У наставку наводимо све три употребљене скрипте — пре свега Python скрпту која одређује заједнички скуп $b \in \mathbb{N}$ вредности које се тичу оба полинома $Q_t^{(4)}(x)$ и $R_t^{(4)}(x)$, затим Wolfram Mathematica команду која проверава тражену недељивост облика $\Phi_b(x) \nmid Q_t^{(4)}(x)$, и на крају другу Wolfram Mathematica команду која се бави аналогном провером код $R_t^{(4)}(x)$ полинома.

```python
import numpy as np


def main():
    part_1 = np.multiply.outer([1, 2], [1, 3, 9]).reshape(-1)
    part_2 = np.multiply.outer([1, 5, 25], [1, 7]).reshape(-1)

    all_of_them = np.multiply.outer(part_1, part_2).reshape(-1)
    all_of_them.sort()
    all_of_them = all_of_them.tolist()

    result = list(filter(lambda item: item % 105 != 0, all_of_them))
    result = list(filter(lambda item: item >= 3, result))

    print(len(result))
    print(result)


if __name__ == "__main__":
    main()
```

```
Min[Table[
   Min[Table[
     Length[CoefficientRules[
       PolynomialRemainder[
        2 x^Mod[2 t - 1, b] + x^Mod[t + 3, b] - x^Mod[t + 2, b] +
         x^Mod[t + 1, b] - 3 x^Mod[t, b] + 3 x^Mod[t - 1, b] -
         x^Mod[t - 2, b] + x^Mod[t - 3, b] - x^Mod[t - 4, b] - 2,
        Cyclotomic[b, x], x]]], {t, 0, b - 1}]], {b, {3, 5, 6, 7, 9,
     10, 14, 15, 18, 21, 25, 30, 35, 42, 45, 50, 63, 70, 75, 90, 126,
     150, 175, 225, 350, 450}}]] >= 1
```

```
Min[Table[
   Min[Table[
     Length[CoefficientRules[
       PolynomialRemainder[
        2 x^Mod[2 t - 1, b] - x^Mod[t + 3, b] + x^Mod[t + 2, b] -
         x^Mod[t + 1, b] - x^Mod[t, b] + x^Mod[t - 1, b] +
         x^Mod[t - 2, b] - x^Mod[t - 3, b] + x^Mod[t - 4, b] - 2,
        Cyclotomic[b, x], x]]], {t, 0, b - 1}]], {b, {3, 5, 6, 7, 9,
     10, 14, 15, 18, 21, 25, 30, 35, 42, 45, 50, 63, 70, 75, 90, 126,
     150, 175, 225, 350, 450}}]] >= 1
```

A.7 Гранична вредност низова $\left(\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{MP}_k}}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ и $\left(\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{MC}_k}}{k}\right)_{k\in\mathbb{N},\,k\geq 2}$

У оквиру последњег одељка додатка, искористићемо способност језика Wolfram Mathematica за нумерички прорачун како бисмо установили да је вредност L задата изразом (5.44) заиста већа од $4\sqrt{3}$. Споменута чињеница је изузетно битна како бисмо демонстрирали да последица 5.1 заиста директно следи из теореме 5.3. Неопходна провера може да се једноставно обави тако што одрадимо довољно прецизну евалуацију израза $L-4\sqrt{3}$. Одговарајући програмски код дат је у наставку.

```
N[2 - 2*Root[x^4 - x^3 - 3 x^2 + x, 1] +
  1/Pi*Integrate[
    ArcCos[x^2/2 - 3/2 - 1/(x^2 - x - 2)], {x,
     Root[x^4 - x^3 - 7 x^2 + 5 x + 8, 1],
     Root[x^4 - x^3 - 3 x^2 + x, 1]}] +
  1/Pi*Integrate[
    ArcCos[x^2/2 - 3/2 - 1/(x^2 - x - 2)], {x,
     Root[x^4 - x^3 - 7 x^2 + 5 x + 8, 2],
     Root[x^4 - x^3 - 3 x^2 + x, 2]}] -
  1/Pi*Integrate[
    ArcCos[x^2/2 - 3/2 - 1/(x^2 - x - 2)], {x,
     Root[x^4 - x^3 - 7 x^2 + 5 x + 8, 3],
     Root[x^4 - x^3 - 3 x^2 + x, 3]}] -
  1/Pi*Integrate[
    ArcCos[x^2/2 - 3/2 - 1/(x^2 - x - 2)], {x,
     Root[x^4 - x^3 - 7 x^2 + 5 x + 8, 4],
     Root[x^4 - x^3 - 3 x^2 + x, 4]}] - 4 Sqrt[3], 20]
```

Биографија аутора

Иван Дамњановић је завршио Основну школу „Ћеле-кула“ у Нишу 2011. године са просечном оценом 5.00 као ђак генерације и Гимназију „Бора Станковић“ у Нишу 2015. године са просечном оценом 5.00 такође као ђак генерације. Током основне и средње школе, био је учесник многобројних такмичења из више наставних предмета са најзначајнијим резултатима из математике, програмирања и физике. Освојене награде укључују две бронзане медаље на Међународној Математичкој Олимпијади, две бронзане медаље на Балканској Математичкој Олимпијади, прву награду на Српској Математичкој Олимпијади, прву награду на Јуниорској Српској Математичкој Олимпијади, шест првих награда на државном такмичењу из математике, две прве награде на државном такмичењу из програмирања и једну прву награду на државном такмичењу из физике. Осим тога, био је добитник Светосавске награде за 2011. годину.

У периоду од 2015. до 2019. године, Иван Дамњановић је био студент на студијском програму Електротехника и рачунарство на основним академским студијама Електронског факултета Универзитета у Нишу. Награђен је као најбољи студент Електронског факултета 2018. године и дипломирао је 2019. године на модулу Рачунарство и информатика са просечном оценом 10.00 као најбољи дипломирани студент генерације. Дипломски рад је одбранио на тему „Спектрална теорија у статистичким методама анализе текста“ са оценом 10 под менторством Јоване Ћунић.

Од 2019. до 2020. године, био је студент на студијском програму Рачунарство и информатика на мастер академским студијама Електронског факултета Универзитета у Нишу. Мастерирао је 2020. године на модулу Инжењерство података са просечном оценом 10.00 уз награду за најбољи мастер рад из области рачунарства. Мастер рад је одбранио на тему „Анализа биолошких секвенци коришћењем система за обраду велике количине података“ са оценом 10 под менторством Наталије Стојановић.

Од 2020. године, Иван Дамњановић је студент докторских академских студија на студијском програму Електротехника и рачунарство и модулу Примењена математика на Електронском факултету Универзитета у Нишу. Осим тога, од 2023. године студент је и докторских академских студија на студијском програму Математичке науке на Факултету за математику, природне науке и информационе технологије Универзитета Приморске.

Иван Дамњановић је 2020. године примљен у радни однос као сарадник у настави на Катедри за математику на Електронском факултету Универзитета у Нишу, при чему је 2021. године изабран у звање асистент. Учествовао је у извођењу наставе на предметима Математика 1, Математика 2, Теорија графова и Дискретна математика. Такође је аутор укупно девет научних радова, од чега је седам из категорија М21 и М22.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

НЕКИ ДОПРИНОСИ СПЕКТРАЛНОЈ ТЕОРИЈИ ГРАФОВА

која је одбрањена на Електронском факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио ауторска права, нити злоупотребио интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, ________________

Потпис аутора дисертације:

Иван Г. Дамњановић

(Име, средње слово и презиме)

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације: **НЕКИ ДОПРИНОСИ СПЕКТРАЛНОЈ ТЕОРИЈИ ГРАФОВА**

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, ________________

Потпис аутора дисертације:

Иван Т. Дамњановић

(Име, средње слово и презиме)

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

НЕКИ ДОПРИНОСИ СПЕКТРАЛНОЈ ТЕОРИЈИ ГРАФОВА

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде **(CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, ________________

Потпис аутора дисертације:

Иван Г. Дамњановић

(Име, средње слово и презиме)