УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Никола Ђ. Деспенић

ОСЦИЛАЦИЈЕ КОМПОЗИТНИХ НАНОСТРУКТУРА ПРИМЕНОМ ТЕОРИЈА ВИШЕГ РЕДА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2024

UNIVERSITY OF NIŠ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Nikola Đ. Despenić

VIBRATION OF COMPOSITE NANOSTRUCTURES BY USING HIGHER-ORDER THEORY

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2024

Подаци о докторској дисертацији

Ментор: др Горан Јаневски, редовни професор,
Универзитет у Нишу, Машински факултет

Наслов: Осцилације композитних наноструктура
применом теорија вишег реда

Резиме:

У овој докторској дисертацији анализиране су осцилаторне карактеристике наногреда и наноцеви, уз разматрање утицаја различитих параметара на промену основне кружне фреквенције осциловања, критичне температуре и критичне брзине струјања флуида. Динамичке једначине добијене су Hamilton-овим принципом, док су за њихово решавање примењене аналитичке и нумеричке методе. Посебно су разматране структуре од функционално градијентних материјала, који су значајни због својих променљивих механичких својстава. Применом Eringen-ове нелокалне теорије нижег и вишег реда, као и теорије градијента деформације, представљени су математички модели разматраних структура. Анализирана је промена основне кружне фреквенције осциловања са променом температуре. Посебна пажња посвећена је промени основне кружне фреквенције осциловања, критичне температуре и критичне брзине струјања флуида, са променом експонента запреминског удела, нелокалних параметара нижег и вишег реда, параметра дужине скале, што је омогућило дубље разумевање нелокалних утицаја на промену основне кружне фреквенције осциловања. Приказано је да нелокални параметар и параметар дужине скале различито утичу на промену крутости материјала, што указује и на њихов другачији утицај на промену кружне фреквенције осциловања наноструктура.

Разматран је утицај геометријског коефицијента на промену кружне фреквенције осциловања неунифрмне наноцеви. Код неуниформне наноцеви, брзина струјања флуида изражена је у функцији геометријског коефицијента, што је омогућило анализу промене критичне брзине струјања флуида кроз неуниформну наноцев, са променом геометријског коефицијента.

Научна област:	Техничко-технолошке науке, Машинско инжењерство
Научна дисциплина:	Теоријска и примењена механика
Кључне речи:	осцилације, кружна фреквенција осциловања, нано-структуре, нелокална теорија, нелокална теорија градијента деформације, нано-греде, нано-цеви, функционално градијентни материјали, критична температура, критична брзина струјања флуида
УДК:	
CERIF класификација:	T 210 Машинство, хидраулика, вакуумска технологија и акустични инжењеринг
Тип лиценце Креативне заједнице	CC BY-NC-ND

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Dr Goran Janevski, full professor, University of Niš, Faculty of Mechanical Engineering
Title:	Vibration of composite nanostructures by using higher-order theory

Abstract:

In this doctoral dissertation, the oscillatory characteristics of nanobeams and nanotubes were analyzed, considering the influence of various parameters on the change in the fundamental circular frequency, critical temperature, and critical fluid flow velocity. The dynamic equations were derived using Hamilton's principle, and analytical and numerical methods were applied to solve them. Special attention was given to structures made of functionally graded materials, which are significant due to their variable mechanical properties. Using Eringen's lower- and higher-order nonlocal theory, as well as strain gradient theory, mathematical models of the studied structures were presented. The change in the fundamental circular frequency with temperature variation was analyzed. Special emphasis was placed on the change in the fundamental circular frequency, critical temperature, and critical fluid flow velocity, with changes in the volume fraction exponent, lower- and higher-order nonlocal parameters, and the length scale parameter, allowing for a deeper understanding of nonlocal effects on the change in the fundamental circular frequency. It was demonstrated that the nonlocal parameter and length scale parameter affect material stiffness differently, and thus have different impacts on the change in the circular frequency of nanostructures. The influence of the geometric coefficient on the change in the circular frequency of a non-uniform nanotube was considered. In the case of the non-uniform nanotube, the fluid flow velocity is expressed as a function of the geometric coefficient, allowing for the analysis of the change in the critical fluid flow velocity through the non-uniform nanotube with the variation of the geometric coefficient.

Scientific Field:	Engineering science and technology, Mechanical Engineering
Scientific Discipline:	Theoretical and applied mechanics
Key Words:	vibration, circular frequency, nanostructures, nonlocal theory, nonlocal strain gradient theory, nanobeams, nanotubes, functionally graded materials, critical temperature, critical fluid velocity
UDC:	
CERIF Classification:	T 210 Mechanical engineering, hydraulics, vacuum technology and acoustic engineering
Creative Commons License Type:	CC BY-NC-ND

Захвалност аутора

Овим путем, захваљујем се свом ментору, проф. др Горану Јаневском, редовном професору Машинског факултета у Нишу, на несебичној подршци, стручним саветима и усмеравању током читавог процеса израде докторске дисертације. Његово стрпљење, знање и инспиративни савети значајно су допринели овом истраживању.

Захваљујем се професорима и колегама са Катедре за механику Машинског факултета у Нишу, на сталној подршци, саветима и конструктивним сугестијама током мог истраживачког рада. Посебну захвалност упућујем проф. др Владимиру Стојановићу и проф. др Ивану Павловићу, који су детаљно прочитали рад и дали драгоцене савете и смернице за унапређење дисертације.

Такође, желим да се захвалим и проф. др Предрагу Козићу и проф. др Ратку Павловићу, који нажалост данас нису међу нама, али су својим саветима и стручним знањем значајно допринели мом истраживачком раду.

Захваљујем се и Министарству просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије на финансијској подршци. На почетку мог истраживачког рада био сам ангажован прво као стипендиста, а потом и као истраживач приправник у оквиру пројекта „Динамичка стабилност и нестабилност механичких система под дејством случајне побуде“ ОИ 174011.

Највећу захвалност дугујем својој породици и супрузи Маши, који су ме подржавали током читавог процеса израде овог рада. Њихово стрпљење, разумевање и несебична подршка били су ми непроцењиви.

Родитељима, мојој Нини и Маши

Садржај

1. Увод

У времену напредних технологија када се иновативна решења појављују свакодневно, истраживање наноструктура као и понашање наноматеријала има кључни значај за напредак у развоју нових технологија на малој скали. Наноматеријали се карактеришу изузетним физичким, хемијским и механичким својствима, а која се могу разликовати од материјала на макро нивоу. Наноструктуре, које су пројектоване на нанометарској скали, представљају кључни елемент савремене науке и технологије, а њихова појава омогућила је иновативне примене у индустријама попут медицине, електронике, енергетике и науке о материјалима.

Структуре на наноскали, укључујући штапове, прстенове, греде, плоче, љуске и цеви, представљају структурне делове многих нано-електромеханичких система. У оквиру њих издвајају се наномеханички резонатори, сензори, електромеханички наноактуатори и наноуређаји за складиштење енергије [1], који су само неки од примера. Овакви уређаји састоје се од елемената попут већ поменутих, носача, плоча, љуски као и других елементарних делова конструкција. Стога, разумевање механичког одзива оваквих структура има велики значај за развој нано-електромеханичких система и њихове примене у различитим областима.

Како су експериментална истраживања на нано скали веома комплексна, а често и изузетно скупа, математичко моделирање оваквих наноструктура постаје вредно пажње. При разматрању механичког понашања наноструктуре, утицај њене величине игра кључну улогу, где класична механика континуума не пружа задовољавајуће резултате. Из тог разлога, у последњих десетак година, публиковани радови разматрају механичка понашања наноструктура применом различитих нелокалних теорија.

Са друге стране, интересовање за композитне структуре је порасло, првенствено због њихових основних карактеристика као што су чврстоћа, крутост и стабилност. Ове структуре често омогућавају значајно мању масу у поређењу са, на пример, челиком, пружајући изузетну чврстоћу. У последње време, примена композитних наноструктура постаје све заступљенија у различитим областима. Првенствено се користе за преобликовање крила авиона, уређаје за прикупљање енергије и паметне структуре. Такође се примењују у развоју наноматеријала и наноструктура [2]. Функционално градијентни материјали представљају напредну класу композитних материјала који се често разматрају на малим скалама, са обећавајућим применама у нано-електромеханичким системима [3]. Функционално градијентни материјали представљају комбинацију два или више материјала са механичким карактеристикама које се мењају по одређеном закону. Овај напредак је постао могућ захваљујући развоју металургије праха. Због тога, овакве структуре налазе примену у системима где је потребно побољшати перформансе микро и нано-електромеханичких система.

Ова докторска дисертација има за циљ да математичким моделирањем и применом нелокалних теорија утврди механичко понашање различитих наноструктура. Посебна пажња посвећена је функционално градираним материјалима, при чему су анализиране динамичке карактеристике наноструктура са варијацијом материјала у једном или два правца. Представљени резултати могу послужити као основа за пројектовање нано-електромеханичких система.

1.1 Феномен осцилација и њихов утицај

Осцилације су привукле интересовање још од најранијих времена, вероватно од појаве првих музичких инструмената, као што су дувачки инструменти и бубњеви. Од тог периода, људи су постепено почели критички истраживати феномен осцилација.

Осциловање механичких система и машина важно је разматрати из више аспеката. Феномен осциловања се користи у сензорима и давачима, као што су акцелерометри, жироскопи и други уређаји, за прецизно мерење и детекцију померања и вибрација. Ипак, као и већина природних појава, вибрације могу имати негативан утицај на рад механичких система. Ови утицаји се манифестују кроз оштећења, а често могу довести и до лома појединих механичких делова. Због тога је неопходно посветити посебну пажњу вибрацијама механичких система како би се избегли нежељени ефекти, попут замора материјала, лома механичких компонети, буке, оштећења лежајева и осовина,.

Знања из теорије осцилација омогућавају контролу резонантних појава, које су чест узрок негативних последица у техничкој пракси.

Закључује се да осцилације могу имати како позитиван, тако и негативан утицај на механичке системе, што захтева примену одговарајућих мера за минимизацију нежељених ефеката у техничкој пракси. Стога је од суштинске важности прецизно одредити динамичко понашање система, било аналитички, нумерички или експериментално, како би се добијени резултати користили у пројектовању и оптимизацији механичких система.

1.2 Увод у наноструктуре: Изазови класичних теорија еластичности

Историја наноструктура у контексту динамичке анализе је релативно нова, али интензитет научних истраживања у овој области је изузетно висок. Иако је истраживање наноструктура започело у другој половини 20. века [4], динамичка анализа ових структура добила је на значају тек касније. Значајан напредак у истраживању наноструктура и њиховог динамичког понашања остварен је током 80-их и 90-их година прошлог века, када су развијене нове технике за анализу понашања материјала на нано скали [5, 6]. Наноструктуре, састављене од материјала са димензијама на нивоу нанометара, постале су кључне у многим научним и технолошким областима због својих јединствених физичких, хемијских и механичких особина, које пружају неограничене могућности за развој нових материјала и уређаја. Са повећањем употребе ових материјала, појављују се и значајни изазови у разумевању њиховог понашања на атомском нивоу. Због тога је од кључне важности одредити динамичко понашање наноструктурних система, које се може утврдити аналитичким, нумеричким методама, симулацијама, као и експериментално, како би ти резултати били коришћени у пројектовању напредних система.

Међутим, да бисмо спровели анализу наноструктура, неопходно је разумевање њихових својстава на локалној и нелокалној скали. Локална теорија, која се традиционално користи за описивање материјала, заснована је на претпоставци да су интеракције ограничене на суседне атоме или молекуле. Ипак, у наноструктурама, где је величина материјала слична или мања од карактеристичне дужине међусобних интеракција, локална теорија више није довољна за објашњење њиховог понашања.

Значај нелокалне теорије произилази из потребе за бољим разумевањем међуделовања која се протежу изван суседних атома или молекула, укључујући интеракције на нано скали. Нелокалне теорије пружају основу за описивање ових сложених феномена у наноструктурама. Оне омогућавају дубље разумевање квантног тунелирања, где честице, попут електрона или атома, пролазе кроз енергетске баријере које класична физика не би могла предвидети. Такође, ове теорије разјашњавају површинске ефекте, где атомска структура површине материјала значајно одступа од унутрашњости. Нелокалне теорије објашњавају и квантну конфинацију, феномен који се јавља када су честице заробљене у просторним димензијама сличним или мањим од њихове таласне дужине, што утиче на њихову енергетску структуру.

Важност нелокалних теорија у проучавању наноструктура је непроцењива. Оне омогућавају прецизно моделирање и предвиђање понашања структура на нано нивоу, што је кључно за развој иновативних технологија. Детаљно истраживање ових теорија у контексту наноструктура отвара нове могућности за открића и унапређења у разним областима, као што су наноелектроника, нанофотоника, наномеханика и наномедицина.

1.2.1 Eringen-ова нелокална теорија еластичности

Eringen-ова теорија, такође позната и као нелокална теорија еластичности, [7] и [8] развијена је од стране A.C. Eringen-a са циљем да објасни понашање материјала на веома малој скали. Класична теорија континуума показује своја ограничења у овом домену и не пружа адекватне апроксимације механичком одговору материјала. Теорија узима у обзир нелокални параметар који указује на утицај тачака из околине разматране зоне у материјалу. У класичној теорији еластичности, деформација у одређеној зони структуре одређена је стањем напона у тој зони. Међутим, у Eringen-овој теорији еластичности, деформација у одређеној зони зависи не само од напона у тој зони, већ и од стања у околним тачкама, узимајући у обзир нелокалне интеракције. Нелокални параметар, често означен у литератури као μ, представља карактеристичну дужину која описује утицај суседних тачака на понашање материјала у датој тачки. Eringen-ова теорија еластичности формално је представљена следећим математичким изразом

$$\sigma_{xx} - \mu^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E\varepsilon_{xx} \tag{1.1}$$

Ако је $\mu = 0$, Eringen-ова теорија своди се на класичну теорију еластичности. У том случају, деформација у одређеној тачки структуре зависи искључиво од напона у тој тачки.

Нелокална теорија еластичности је широко примењена у анализи наноструктура где утицај величине скале постаје значајан. То обезбеђује знатно тачније резултате у погледу механичког понашања материјала узимајући у обзир нелокалну интеракцију као и утицај суседних тачака структуре. Математичка формулација Eringen-ове нелокалне теорије (1.1) укључује модификацију класичних конститутивних једначина еластичности узимањем у обзир нелокалног ефеката. Та модифкација уводи интегрални појам који представља интеракцију између суседних тачака у материјалу, при чему специфична форма конститутивних релација зависи од природе проблема који се разматра. Такође важно је нагласити да је избор нелокалног параметра заснован на специфичним карактеристикама материјала и дужине скале. Избор нелокалног параметра представља компромис између прецизности модела и сложености анализе. Аналитички или нумерички прорачун овог параметра треба да се заснива на експерименталним подацима или подацима добијеним из експериментално усмерених истраживања о понашању материјала на малим скалама. Рекло би се да је избор нелокалног параметра од суштинског значаја како би се што боље описало динамичко понашање наноструктура и обезбедило добро усаглашавање између теоријских предвиђања и експерименталних резултата. Из тог разлога, утицај промене нелокалног параметра на динамичко понашање наноструктура је веома важан и његов утицај биће разматран у оквиру ове докторске дисертације.

1.2.2 Нелокална теорија градијента деформације

Теорија градијента еластичности темељно је истраживана још почетком 1960-их када је Mindlin уочио одређена проширења у односу на класичну теорију еластичности [9] и [10]. Ова проширења се првенствено односе на узимање у обзир градијентних деформационих утицаја вишег реда, заснованих на претпоставци да се материјали не могу посматрати као скуп тачака, већ као скуп атома са механизмом деформације вишег реда на микро и нано скали. На основу ове претпоставке, појавио се велики број радова који разматрају статичко и динамичко понашање структура, узимајући у обзир утицај дужине скале материјала. Међу истраживачима је настала извесна забуна у вези са дужином скале у овим теоријама. Из тог разлога, Lim је 2015. године установио нову нелокалну теорију, која је примењива на нано скали. Ова теорија је показала да нелокални параметар у Eringen-овој теорији и параметри дужине у другим теоријама, заснованим на градијенту деформације, представљају две потпуно различите физичке особине материјала разматраних на нано скали [11]. На основу ових тврдњи, нелокална теорија градијента деформације има за циљ да генерализује класичну нелокалну теорију еластичности увођењем тензора деформације вишег реда. Нелокални модел заснован на Eringen-овом моделу (1.1), кроз ову терију проширен је увођењем ефекта нелокалности градијента деформације вишег реда. Увођењем нове функције језгра одговарајући потенцијал унутрашње енергије изражава се у следећем облику

$$\begin{aligned} U_0\left(\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ij}^{'},\alpha_0,\varepsilon_{ij,m},\varepsilon_{ij,m}^{'},\alpha_1\right) &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}C_{ijkl}\int_V \alpha_0\left(\left|x-x'\right|,e_0a\right)\varepsilon_{kl}^{'}dV^{'} \\ &+\frac{l^2}{2}\varepsilon_{ij.m}C_{ijkl}\int_V \alpha_1\left(\left|x-x'\right|,e_1a\right)\varepsilon_{kl,m}^{'}dV^{'}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где параметар l представља дужину скале материјала, уведен ради одређивања значаја поља градијента деформације вишег реда. Функција језгра $\alpha_1\left(\left|x-x'\right|,e_1a\right)$ је новоуведена како би описала нелокални утицај поља градијента деформације првог реда. Константа e_1 одговара специфичној материјалној карактеристици.

Укупан тензор напона у нелокалној теорији градијента деформације дат је изразом

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\sigma}-\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \tag{1.3}$$

при чему је $\boldsymbol{\sigma}$ класични тензор напона, а $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ тензор напона вишег реда. На основу једначине (1.3), конститутивне релације теорије градијента деформације вишег реда за једнодимензионе проблеме могу се записати у следећем облику

$$\begin{gathered}\left[1-\left(e_1a\right)^2\nabla^2\right]\left[1-\left(e_0a\right)^2\nabla^2\right]t_{xx}= \\ E\left[1-\left(e_1a\right)^2\nabla^2\right]\varepsilon_{xx}-El^2\left[1-\left(e_0a\right)^2\nabla^2\right]\nabla^2\varepsilon_{xx},\end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}$ представља једнодимензиони диференцијални оператор. Овај генерализовани модел нелокалне теорије градијента деформације вишег реда обухвата три различита параметра. Два параметра дефинишу нелокални утицај величине, и то код напона нижег и вишег реда. Трећи параметар се односи на утицај величине код градијента деформације вишег реда. Математички модел, који се често среће у литератури, може се свести на једноставнији облик једначине (1.4). До таквог облика се долази занемаривањем чланова вишег реда О(∇^2) под претпоставком да су константе материјала међусобно једнаке $e_0=e_1=e$. Применом наведених корака, долази се до следеће форме једначине

$$\left[1-\left(ea\right)^2\nabla^2\right]t_{xx}=E\left[1-l^2\nabla^2\right]\varepsilon_{xx}. \tag{1.5}$$

Једначина (1.5) представља поједностављену форму конститутивних релација теорије градијента деформације вишег реда, која ће бити коришћена у даљим анализама. У наредним поглављима, управо ће једначине (1.4) и (1.5) послужити као основа за анализу динамичког одзива структура, са посебним освртом на осцилације и стабилност система.

1.3 Теорије еластичних носача

Да би се лакше разумела разлика између разматраних теорија носача, у овом поглављу ће бити представљене следеће теорије: Euler-

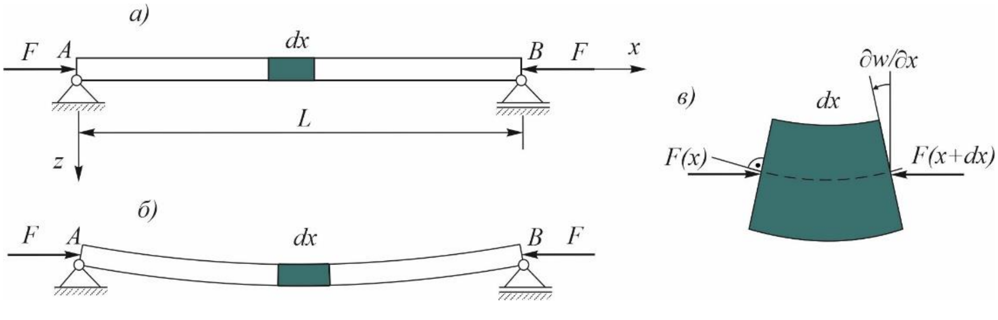
Bernoulli-јева, Timoshenko-ва, Reddy-јева и теорија прилагођена разматрању носача типа цеви која је приказана у раду [12].

При описивању теорија еластичних носача, природно је започети са Euler-Bernoulli-јевом теоријом носача, која се сматра основном теоријом у разматрању статичког и динамичког понашања носача. Основни постулат Euler-Bernoulli-јеве теорије греде јесте да сви попречни пресеци носача, који су у почетку деформације били управни на неутралну осу, остају управни и после деформације. На слици 1.3. представљен је идеализован проблем греде оптерећене аксијалним силама једнаких интензитета - F на крајевима, у тачкама А и В.

Поље померања носача Euler-Bernoulli-јевог типа, може бити представљено као функција померања у лонгитудиналном и трансверзалном правцу

$$q_1(x,z,t) = u(x,t) - z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \qquad (1.6а)$$

$$q_3(x,z,t) = w(x,t), \qquad (1.6б)$$



Слика 1.1. Слободно ослоњен носач Euler-Bernoulli-јевог типа, а) греда у недеформисаном стању, б) греда у деформисаном стању, в) елементарни део греде

при чему је $u(x,t)$ и $w(x,t)$ редом аксијално и трансверзално померање елементарне тачке носача. Поље деформација одређено је кроз шест компоненти, и то три дилатације и три клизања. Конкретно, код Euler-Bernoulli-јеве греде, поље деформација има следећи облик

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x,z,t) &= \frac{\partial q_1}{\partial x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y(x,z,t) &= \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon_z(x,z,t) &= \frac{\partial q_3}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{1.7а}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(x,z,t) &= \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0, \\ \gamma_{xz}(x,z,t) &= \frac{\partial q_1}{\partial z} + \frac{\partial q_3}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \gamma_{yz}(x,z,t) &= \frac{\partial q_2}{\partial z} + \frac{\partial q_3}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{1.7б}$$

Један од начина за извођење диференцијалних једначина је примена Hamilton-овог принципа. Овај принцип ће такође бити примењен у овом случају следећом интегралном једначином

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta U + \delta V - \delta T\right) dt = 0, \tag{1.8}$$

где су U,V,T редом потенцијална енергија, рад спољашњих сила и кинетичка енергија разматране греде. Потенцијална енергија је у том случају

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V \sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}dv = \int_A\int_L \sigma_{xx}\left(\delta\frac{\partial u}{\partial x} - z\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dAdx,\\ \delta U &= \int_L\left(N_{xx}\delta\frac{\partial u}{\partial x} - M\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx,\end{aligned} \tag{1.9}$$

при чему су N_{xx} и M нормална сила и момент савијања, дати обликом

$$N_{xx} = \int_A \sigma_{xx}dA,\;\; M = \int_A z\sigma_{xx}dA, \tag{1.10}$$

где σ_{xx} представља нормални напон у пресеку носача. Са друге стране, кинетичка енергија носача је

$$\begin{aligned}\delta T &= \frac{1}{2}\int_v \rho\delta\left(\left(\frac{\partial q_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_z}{\partial t}\right)^2\right)dv\\ \delta T &= \int_0^L\left(I_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right)\right.\\ &\quad - I_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\\ &\quad \left. + I_2\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\right)\right)dx,\end{aligned} \tag{1.11}$$

где је ρ густина материјала разматране греде, док су I_0, I_1 и I_2 масени моменти инерције облика

$$\left(I_0, I_1, I_2\right) = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\left(1, z, z^2\right)\rho\, dydz. \tag{1.12}$$

Како на крајевима носача делују аксијалне силе истих интензитета, виртуални рад спољашњих сила је

$$\delta V = -\int_0^L \left(F \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta w) \right) dx. \tag{1.13}$$

Заменом израза (1.9), (1.11) и (1.13) у интегралну Hamilton-ову једначину (1.8), добијају се основне једначине кретања у следећем облику

$$\delta u\text{:}\ \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.14а}$$

$$\delta w\text{:}\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{1.14б}$$

Hooke-ов закон представља основни принцип у области еластичности. Он описује линеарну зависност између напона и деформације у еластичним материјалима унутар граница њихове еластичности дат следећим изразом

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{1.15}$$

где је σ нормални напон у пресеку греде, E представља модул еластичности материјала и ε означава деформацију. На основу израза (1.15) и релација (1.7а) добијају се редом нормална сила и момент савијања у облику

$$N_{xx} = A_{xx} \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.16а}$$

$$M_{xx} = B_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{1.16б}$$

где су елементи матрице крутости

$$\left(A_{xx}, B_{xx}\right) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left(1, z\right) E dy dz. \tag{1.17}$$

Диференцирањем израза (1.16а) и (1.16б) и њиховом заменом у изразе (1.14а) и (1.14б), добијају се диференцијалне једначине кретања Euler-Bernoulli-јеве греде у следећем облику

$$A_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.18а}$$

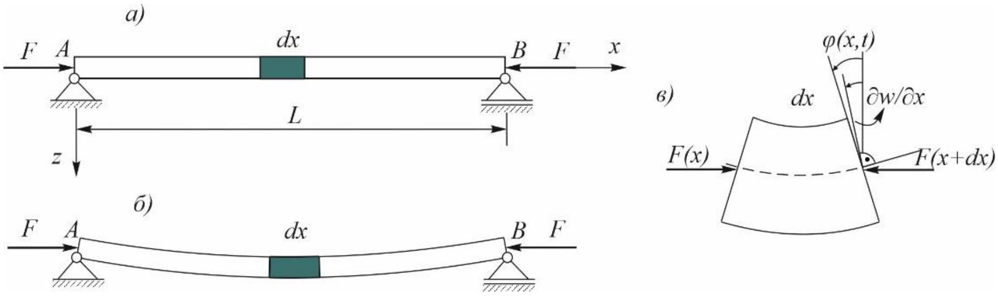
$$B_{xx} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + F \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{1.18б}$$

Примена Euler-Bernoulli-јеве греде је од великог значаја у области механике и инжењерства. Једна од предности примене ове теорије је могућност анализе различитих типова модела из техничке праксе, почев од најједноставнијих, па све до веома сложених структура и спрегнутих елемената конструкција. Ова теорија базирана је на линеарним претпоставкама, што значајно олакшавама аналитичко и нумеричко решавање проблема. Са друге стране, Euler-Bernoulli-јева теорија греде представља општи приступ за разумевање основних појмова у механичкој анализи носача. Важно је напоменути да ова теорија има и своја ограничења. Постоје структуре и услови у којима она неће обезбедити довољно прецизне резултате, попут структура где је однос дужине и попречног пресека велики. Из тог разлога, развијене су и друге теорије греда, као што је, на пример, Timoshenko-ва теорија греде. Ова теорија узима у обзир додатне утицаје, као што су попречно смицање и инерција обртања попречног пресека, чиме омогућава тачније апроксимације жељених решења.

Timoshenko-ва теорија греда, коју је развио руско-амерички инжењер и математичар Stephen Timoshenko, представља значајно унапређење у односу на класичну Euler-Bernoulli-јеву теорију. Та унапређења се првенствено огледају у занемаривању утицаја попречног смицања у Euler-Bernoulli-јевој теорији, што подразумева да попречни пресек греде остаје управан на неутралну осу током деформације. Међутим, у стварности, када се греда деформише, јављају се попречна смицања која се узимају у обзир у Timoshenko-вој теорији. Ово омогућава да апроксимације у даљој анализи буду ближе стварним моделима. Поред тога, утицај инерције обртања попречног пресека у овој теорији није занемарен, што доводи до још прецизнијих решења при динамичким оптерећењима. Поље померања у овом случају је следећег облика

$$q_1\left(x,z,t\right)=u\left(x,t\right)+z\varphi\left(x,t\right), \tag{1.19а}$$

$$q_3\left(x,z,t\right)=w\left(x,t\right), \tag{1.19б}$$



Слика 1.2. Слободно ослоњен носач Timoshenko-вог типа, а) недеформисано стање б) деформисано стање, в) елементарни део носача.

где су $u\left(x,t\right)$ и $w\left(x,t\right)$ редом аксијално и трансверзално померање елементарне тачке носача, док је $\varphi\left(x,t\right)$ угао заокретања попречног пресека носача у односу на x осу. Поље деформације одређено је следећим изразима

$$\begin{aligned} \varepsilon_x\left(x,z,t\right) &= \frac{\partial q_1}{\partial x} = \frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x} + z\frac{\partial \varphi\left(x,t\right)}{\partial x}, \\ \varepsilon_y\left(x,z,t\right) &= \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0, \qquad (1.20\text{а}) \\ \varepsilon_z\left(x,z,t\right) &= \frac{\partial q_3}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}\left(x,z,t\right) &= \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0, \\ \gamma_{xz}\left(x,z,t\right) &= \frac{\partial q_1}{\partial z} + \frac{\partial q_3}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi, \qquad (1.20\text{б}) \\ \gamma_{yz}\left(x,z,t\right) &= \frac{\partial q_2}{\partial z} + \frac{\partial q_3}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Као и у претходном примеру, основне једначине кретања могу се извести на основу Hamilton-овог принципа (1.8). У том случају варијација потенцијалне енергије има следећи облик

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz}\right)dv, \\ \delta U &= \int_A\int_L \left(\sigma_{xx}\left(\delta\frac{\partial u}{\partial x} + z\delta\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \tau_{xz}\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x} + \delta\varphi\right)\right)dAdx, \qquad (1.21) \\ \delta U &= \int_L \left(N_{xx}\delta\frac{\partial u}{\partial x} + M_{xx}\delta\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q\left(\delta\frac{\partial w}{\partial x} + \delta\varphi\right)\right)dx, \end{aligned}$$

где су нормална сила, момент савијања и сила смицања облика

$$N_{xx} = \int_A \sigma_{xx}dA,\ M_{xx} = \int_A z\sigma_{xx}dA,\ \mathrm{Q} = k_s\int_A \tau_{xz}dA. \qquad (1.22)$$

Сила смицања Q, јавља се услед појаве напона при смицању који је дат ознаком τ_{xz}. Израчунавање силе смицања подразумева примену корекционог фактора смицања k_s. Увођење овог корекционог фактора омогућава узимање у обзир утицаја попречних смицања у пресецима носача који су занемарени Euler-Bernoulli-јевом теоријом. Корекциони фактор смицања углавном зависи од геометрије носача, али и од материјала од којег је направљен. Уопштено, изрази за израчунавање овог фактора могу бити сложени, па се често примењују апроксимације како би се добила приближна вредност. У литератури се често налазе вредности корекционог фактора $k_s = 5/6$ за носаче са правоугаоним попречним пресеком. Посебно је важно нагласити да примена Timoshenko-ве теорије даје прецизније апроксимације решења код носача са великим односом висине према дужини, као и код материјала са нижом крутошћу.

Варијација кинетичке енергије носача може се изразити у следећем облику

$$\delta T = \frac{1}{2}\int_v \rho\delta\left(\left(\frac{\partial q_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_z}{\partial t}\right)^2\right)dv$$

$$\begin{aligned}\delta T = \int_0^L &\left(I_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right)\right. \\ &+ I_1\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\right) \\ &\left.+ I_2\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\right)\right)dx,\end{aligned} \tag{1.23}$$

при чему су I_0, I_1 и I_2 масени моменти инерције изражени у једначини (1.12). Рад спољашњих сила дат је изразом (1.13). На основу једначина (1.22)-(1.23), (1.13) и (1.8), добијају се основне једначине кретања Timoshenko-вог носача у облику

$$\delta u:\ \frac{\partial N_{xx}}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.24а}$$

$$\delta w:\ \frac{\partial Q}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+F\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{1.24б}$$

$$\delta\varphi:\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x}-Q=I_2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{1.24в}$$

На основу Hook-овог закона (1.15), интеграцијом леве и десне стране поменуте једначине, и у комбинацији са једначинама (1.24а), (1.24б) и (1.24в), добијају се диференцијалне једначине кретања Timoshenko-вог носача

$$A_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.25а}$$

$$C_{xz}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+F\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{1.25б}$$

$$D_{xx}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-C_{xz}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi\right)=I_2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \tag{1.25в}$$

при чему су коефицијенти крутости облика

$$\begin{aligned} D_{xx}&=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} z^2 E dydz,\\ C_{yz}&=k_s\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} G dydz. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Timoshenko-ва теорија, како је наглашено на почетку, представља значајно унапређење у односу на класичну Euler-Bernoulli-јеву теорију. Међутим, има одређене недостатке који могу утицати на тачност резултата. У овој теорији, фактор смицања је константан за све носаче са истим односом висине и ширине пресека. У пракси, овај однос може варирати од једне структуре до друге, што значи да константна вредност није увек прецизна за све носаче.

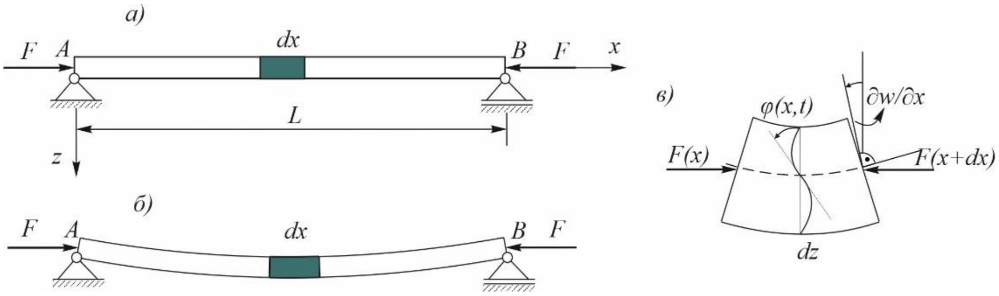
Timoshenko-ва теорија је погодна за носаче са дебљим пресецима, где су попречни смицајни утицаји израженији. За носаче са танким пресецима, класична теорија често даје довољно прецизне резултате, па је сложеност Timoshenko-ве теорије у тим случајевима мање оправдана. Ово указује на потребу за теоријом вишег реда у специфичним случајевима, где Timoshenko-ва теорија не пружа задовољавајуће резултате.

Reddy-јева теорија греда, позната и као теорија вишег реда, представља додатни приступ моделирању носача [13, 14]. Ова теорија је погодна за примену када је сложеност математичких формулација, које се њоме добијају, оправдана. У поређењу са Timoshenko-вом теоријом која узима у обзир утицаје савијања и попречних смицања, Reddy-јева теорија додатно узима у обзир деформације које се јављају унутар самог попречног пресека носача. Ово подразумева, на пример, кретање влакана унутар попречног пресека у односу на неутралну осу, што значи да се деформација анализира детаљније и са већом прецизношћу. Међутим, потребно је напоменути да Reddy-јева теорија захтева комплексније математичке прорачуне у односу на претходно поменуте теорије, и примењује се у случајевима када су тачнији резултати неопходни. Поље померања Reddy-јеве теорије је дато обликом

$$q_1(x,z,t)=u(x,t)+z\varphi(x,t)-\frac{4}{3}\frac{z^3}{h^2}\left(\varphi(x,t)+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad (1.27a)$$

$$q_3\left(x,z,t\right)=w\left(x,t\right), \qquad (1.27б)$$

где су $u\left(x,t\right)$ и $w\left(x,t\right)$ лонгитудинално и трансверзално померање тачака носача, док је $\varphi\left(x,t\right)$ угао између пресека деформисаног носача и z осе.



Слика 1.3. Слободно ослоњен носач Reddy-јевог типа, а) недеформисано стање б) деформисано стање, в) елементарни део носача

Поље деформација је

$$\varepsilon_x\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_1}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+z\left(1-\frac{4}{3}\frac{z^2}{h^2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{4}{3}\frac{z^3}{h^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_2}{\partial y}=0, \qquad (1.28а)$$

$$\varepsilon_z\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_3}{\partial z}=0,$$

$$\gamma_{xy}\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_1}{\partial y}+\frac{\partial q_2}{\partial x}=0,$$

$$\gamma_{xz}\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_1}{\partial z}+\frac{\partial q_3}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\left(1-4\frac{z^2}{h^2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi\right)\right), \qquad (1.28б)$$

$$\gamma_{yz}\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_2}{\partial z}+\frac{\partial q_3}{\partial y}=0.$$

На основу Hamilton-овог принципа (1.8), добијају се основне једначине кретања, где је потенцијална енергија Reddy-јеве греде

$$\begin{gathered}\delta U=\int_V\left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}\right)dv\;,\\ \delta U=\int\limits_L\left(N_{xx}\delta\varepsilon_{xx}^0+M_{xx}\delta\kappa+P\delta\theta+Q\delta\gamma+R\delta\beta\right)dx,\end{gathered}\tag{1.29}$$

при чему су

$$\begin{gathered}\varepsilon_{xx}^0=\frac{\partial u}{\partial x},\delta\kappa=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\delta\theta=-c_1\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),\\ \delta\gamma=\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi\right),\delta\beta=-c2\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi\right),\\ c_1=\frac{4}{3h^2},\quad c_2=\frac{4}{h^2},\end{gathered}\tag{1.30}$$

док су

$$\begin{gathered}P=\int\limits_A\sigma_{xx}z^3dA,\\ R=\int\limits_A\sigma_{xz}z^2dA.\end{gathered}\tag{1.31}$$

Варијација кинетичке енергије Reddy-јевог носача биће

$$
\begin{aligned}
\delta T &= \frac{1}{2}\int_{v} \rho\delta\left(\left(\frac{\partial q_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_z}{\partial t}\right)^2\right)dv \\
\delta T &= \int_0^L \left(I_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right)\right. \\
&\quad + I_2\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\right) \\
&\quad + c_1\left[-I_4\frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(\delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\right)\right. \\
&\quad \left. - I_4\frac{\partial \delta\varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\right] \\
&\quad \left. + c_1 I_6\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\right)dx.
\end{aligned} \tag{1.32}
$$

Масени моменти инерција су

$$
\left(I_4, I_6\right) = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\left(z^4, z^6\right)\rho\, dydz. \tag{1.33}
$$

Како на крајевима носача дејствују аксијалне силе истог интензитета, виртуални рад спољашњих сила може бити изражен као и у једначини (1.13). Стога, на основу Hamilton-овог принципа (1.8), основне једначине кретања Reddy-јеве греде дате су следећим обликом

$$
\delta u\text{:}\ \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.34a}
$$

$$\begin{aligned}\delta w\!:\ &\frac{\partial Q}{\partial x}-c_2\frac{\partial R}{\partial x}+c_1\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\\ &=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+c_1 I_4\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x\partial t^2}\\ &-c_1^{\,2}I_6\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}\right)+F\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\end{aligned}\tag{1.34б}$$

$$\begin{aligned}\delta\varphi\!:\ &\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}-c_1\frac{\partial P}{\partial x}-Q+c_2R\\ &=I_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c_1\left(2I_4-I_6\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c_1\left(I_4-I_6\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}.\end{aligned}\tag{1.34в}$$

На основу претходних основних једначина кретања (1.34), као и на основу једначине (1.15), добијају се диференцијалне једначине кретања Reddy-јеве греде

$$A_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(B_{xx}-k_1E_{xx}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-k_1E_{xx}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\tag{1.35а}$$

$$\begin{aligned}&\left(C_{xz}+k_2F_{xz}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-c_2\left(\left(C_{xz}+k_2F_{xz}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)\\ &+c_1\left(E_{xx}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\left(H_{xx}-k_1L_{xx}\right)\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-k_1L_{xx}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)\\ &=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+c_1I_4\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial t^2}\\ &-c_1^{\,2}I_6\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}\right)+F\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\end{aligned}\tag{1.35б}$$

$$\begin{aligned} & B_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(D_{xx}-k_1H_{xx}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-k_1H_{xx}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ & -c_1\left(E_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(H_{xx}-k_1L_{xx}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-k_1L_{xx}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right) \\ & -\left(C_{xz}+k_2F_{xz}\right)\left(\varphi+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+c_2\left(\left(F_{xz}+k_2J_{xz}\right)\left(\varphi+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) \\ & =I_2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c_1\left(2I_4-I_6\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c_1\left(I_4-I_6\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}, \end{aligned} \tag{1.35в}$$

при чему су $k_1=\dfrac{4}{3h^2}$ и $k_2=\dfrac{4}{h^2}$, док су коефицијенти крутости

$$\begin{aligned} & \left(B_{xx},E_{xx},H_{xx},K_{xx},L_{xx}\right)= \\ & =\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\left(z,z^3,z^4,z^5,z^6\right)Edydz, \end{aligned} \tag{1.36}$$

$$\left(F_{xz},F_{xz}\right)=\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}G\left(z^2,z^4\right)dydz.$$

На крају разматрања различитих теорија еластичних носача, дат је приказ теорије погодне за анализу динамичког понашања цеви, познату у литератури као Zhang-Fu модел [12]. Овај модел пружа прецизније предвиђање попречне смичуће деформације.

Оно што овај модел издваја од других теорија носача јесте употреба Laurent-овог реда за опис поља померања, за разлику од већине других модела носача вишег реда који користе конвенционални Taylor-ов ред. Сматра се да Zhang-Fu модел може успешно описати различите геометријске карактеристике цеви.

Део ове дисертације обухвата анализу динамичког понашања наноцеви под различитим спољашњим утицајима, као што су струјање флуида, температурни утицаји, различити типови материјала цеви и еластични слојеви. За ову анализу биће коришћен Zhang-Fu модел, а диференцијалне једначине осциловања цеви биће представљене у наредним поглављима. Поље померања и деформација Zhang-Fu модела су облика

$$q_1\left(x,z,t\right)=u\left(x,t\right)-z\frac{\partial w}{\partial x}+g\left(y,z\right)\left[\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\left(x,t\right)\right] \quad (1.37а)$$

$$q_3\left(x,z,t\right)=w\left(x,t\right), \quad (1.37б)$$

$$\varepsilon_x\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_1}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+g\left(y,z\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\right),$$

$$\varepsilon_y\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_2}{\partial y}=0, \quad (1.38а)$$

$$\varepsilon_z\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_3}{\partial z}=0,$$

$$\gamma_{xy}\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_1}{\partial y}+\frac{\partial q_2}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\left(x,t\right)\right),$$

$$\gamma_{xz}\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_1}{\partial z}+\frac{\partial q_3}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\left(x,t\right)\right), \quad (1.38б)$$

$$\gamma_{yz}\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_2}{\partial z}+\frac{\partial q_3}{\partial y}=0,$$

при чему је функција $g\left(y,z\right)$ дефинисана обликом

$$g\left(y,z\right)=z+z\frac{R_o{}^2R_i^2/r^2-r^2/3}{R_o{}^2+R_i^2}, \quad (1.39)$$

где су R_o и R_i редом спољашњи и унутрашњи полупречници цеви.

Оно што би се требало истаћи при анализи структура које користе Zhang-Fu модел, јесте управо физички смисао функције $g\left(y,z\right)$. У физичом смислу, ова функција дефинише трансверзалну расподелу деформације смицања и може бити представљена као нелинеарна расподела напона смицања и деформације. Ово је разлог због чега су апроксимације кружних фреквенција осциловања у вишим модовима тачније.

У овом делу изложене су различите теорије греда које се користе у анализи статичког и динамичког понашања структура. Приказане су класична теорија и теорија првог реда, као што су Euler-Bernoulli-јева и Timoshenko-ва теорија, а затим и Reddy-јева теорија вишег реда. Примећено је да свака теорија има своје предности, али и ограничења, што понајвише зависи од конкретних карактеристика структуре која се анализира. Одабир адекватних теорија од значаја је за тачну и комплетну анализу динамичког понашања одабране структуре. Избор одговарајуће теорије посебно је важан у случајевима анализа композитних наноструктура. Ове структуре одликују динамичке специфичности као што су међумолекуларне интеракције, различита оптерећења као и окружење у коме се структура налази. У овим ситуацијама, потребно је узети у обзир већи број фактора како би се осигурала прецизна анализа.

1.4 Композитни материјали и њихов значај

Композитни материјали представљају значајан напредак у науци о материјалима, омогућавајући развој нових решења у различитим индустријама. Ови материјали су комбинација различитих компоненти, чије заједничко деловање омогућава боља својства у односу на конвенционалне материјале. Композити се издвајају својом лаком структуром, повећаном чврстоћом и отпорношћу на корозију, у поређењу са на пример, челиком. Због бројних предности, они се широко примењују у индустријама као што су авио-индустрија, аутомобилска индустрија, грађевинарство и медицина, пружајући нове могућности за иновације и напредак. Композитни материјали, који се састоје од компоненти са различитим својствима, омогућавају оптимизацију карактеристика како би задовољили специфичне потребе различитих индустрија. Један материјал ретко може да задовољи све потребне захтеве, као што су чврстоћа, крутост, отпорност на замор и корозију, или топлотна и електрична проводљивост. Управо због тога, композити се дизајнирају тако да комбинују најбоље особине појединачних материјала, чиме се постиже жељени скуп карактеристика који је неопходан за одређену примену.

Композитни материјали могу се класификовати у четири категорије:

- Влакнасти (влакнасто-ојачани) композитни материјали,
- Ламинатни композитни материјали,
- Честично-ојачани композитни материјали и
- Функционално-градијентни материјали.

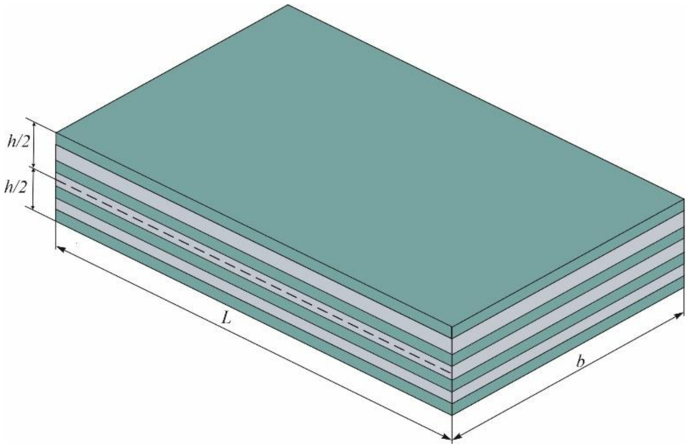
Дугачка влакна су генерално јача и отпорнија у поређењу са истим материјалом у расутом облику. Ова разлика у механичким својствима произлази из мањег броја дефеката у влакнима у односу на расути материјал. Влакна се геометријски карактеришу веома великим односом дужине и пречника, при чему је пречник близак кристалној величини. Влакно је појединачни филамент материјала, а ако однос дужине и пречника прелази 1000, филамент се сматра влакном. Влакна могу бити континуална или кратка/исецкана. Континуална влакна се користе у композитима и служе за ојачање матрице која је различита од самих влакана. Композити формирани коришћењем континуалних влакана називају се влакнасти композити. Насупрот томе, композити од кратких влакана састоје се од влакана исечених на мале комаде.

Ламинатни композити су материјали сачињени од слојева најмање два различита материјала који су међусобно спојени. Ови материјали се користе да би се искористиле најбоље особине сваког слоја и везивног материјала, стварајући структуру која задовољава одређене захтеве. Чест пример су ламинатне структуре састављене од два различита метална материјала, познате као биметали, а чест пример примене су прекидачи.

Ламинат представља један слој композитног материјала и може се сматрати танком плочом знатно мање дебљине од укупне дебљине структуре. Ламинатна структура је скуп ламината спојених како би обезбедила одговарајућу крутост и чврстоћу. Додатно, ламинати могу бити ојачани влакнима унутар матрице материјала, а влакна могу бити распоређена у једном или два правца, слободно или ткано. Слојеви ламината могу бити оријентисани у истом или различитим правцима. Ова варијација у оријентацији влакана чини такозвану ламинациону шему. На пример, ако су влакна оријентисана под углом од 0° или 90°, ламинатна структура може издржати смичућа оптерећења. Ламинациона шема и својства материјала појединих ламината омогућавају дизајнерима флексибилност у постизању жељених карактеристика крутости и чврстоће структуре.

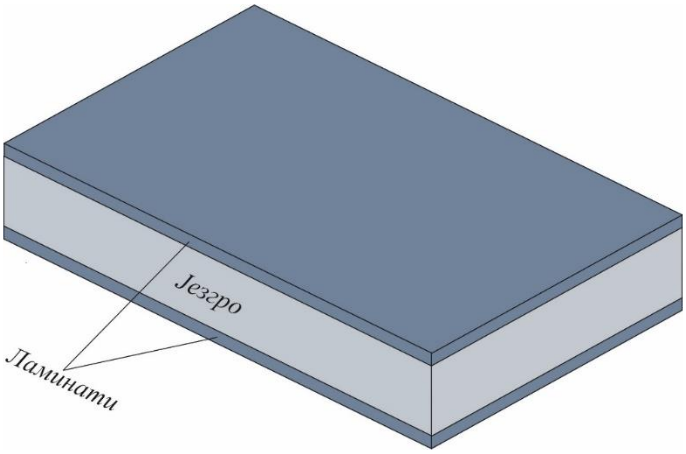
Ламинатне структуре имају широку примену, захваљујући својим бројним предностима. У авио-индустрији, оне се користе у конструкцији авионских крила, омогућавајући спајање материјала различитих својстава за оптимизацију аеродинамичких перформанси. Избором одговарајућих материјала може се постићи већа крутост и чврстоћа конструкција, што омогућава развој компоненти са високим односом чврстоће и тежине. Влакнасти материјали, попут стаклених и карбонских влакана, широко се користе због својих изузетних својстава у погледу односа чврстоће и тежине. У аутомобилској индустрији, делови каросерије често су израђени као ламинатне структуре, што доприноси смањењу тежине возила и побољшању њихове динамике и потрошње горива.

Међутим, ламинатне структуре имају и своје недостатке. Због разлика у својствима између слојева, напони смицања који се јављају између њих, нарочито на ивицама ламината, могу проузроковати деламинацију. Такође, неусклађеност између својстава матрице и влакана може довести до одвајања влакана од матрице. Приликом спајања ламината могу се јавити деформације услед интерламинарних шупљина, деламинације, погрешне оријентације влакана, искиданих влакана, као и варијације у дебљини ламината. Потпуно елиминисање свих недостатака је готово немогуће, због чега је неопходно пажљиво разматрање анализе, методологије дизајна и процеса спајања приликом креирања ламинатне структуре.



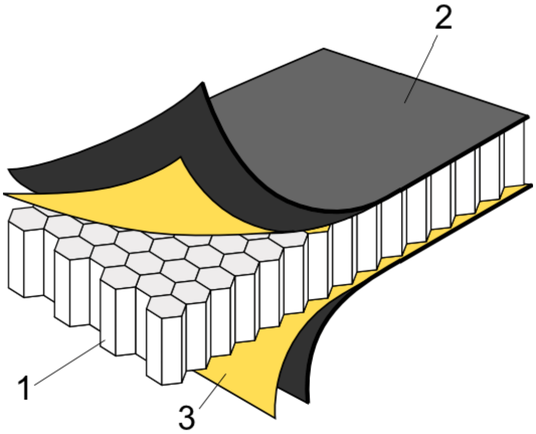
Слика 1.4. Ламинатна плоча

Када је реч о ламинатним структурама, на овом месту битно је напоменути једну класу ламинатних структура под називом *сендвич структуре* које у последњим декадама налазе своју широку примену.



Слика 1.5. Сендвич структура

Сендвич структуре имају низ предности у односу на друге структурне материјале. Ове предности укључују повећану стабилност, лакоћу конструкције и отпорност на корозију. Као и ламинатне структуре, сендвич структуре се широко примењују у авио и аутомобилској индустрији. Главна карактеристика сендвич структуре је језгро које има знатно већу дебљину у односу на ламинате који се налазе са горње и доње стране. Ово језгро је обично направљено од различитог материјала и има другачију геометрију у поређењу са ламинатима (слика 1.8). Ламинати су танки, али се одликују високом крутошћу, због чега се најчешће израђују од метала, металних легура, шперплоче или ојачане пластике. У последњој деценији, епоксидна смола ојачана карбонским влакнима постала је најчешћи избор за горње и доње слојеве сендвич структура у авио-индустрији. Материјал језгра може се разликовати у зависности од избора материјала за ове слојеве. Језгра су често израђена од металних, пластичних или влакнастих материјала, док је у последње време примат преузела конфигурација са пенастим језгром [15]. Једна од највише коришћених сендвич структура је саћаста структура, где је језгро облика саћа, најчешће израђено од материјала као што су фиберглас или алуминијум. Саћасте сендвич структуре се широко примењују на површинама за контролу лета авиона, као што су спојлери и закрилца.

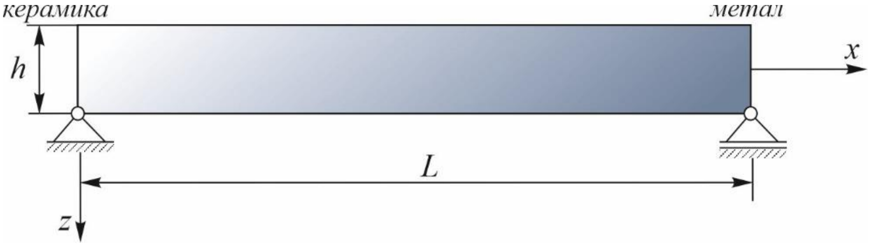


Слика 1.6. Саћаста сендвич структура [16]

Функционално градијентни материјали (FGM) представљају савремену класу композитних материјала. Иако је концепт FGM материјала дуго присутан (још од 1980-их година у Јапану – погледати радове!!!), њихова примена је постала могућа тек са развојем технологије.

Неке научне студије указују на то да се функционално градијентни материјали могу наћи и у природи, на пример у структури људских костију или коже [17]. Посебна пажња у истраживањима посвећена је процесу производње FGM материјала, који је изазован и сложен. До данас је објављен велики број научних радова који се баве различитим методама производње FGM-а [18, 19, 20]. FGM материјали се производе слојевито, уз примену различитих техника као што су таложење паром, металургија праха, центрифугално ливење и метода израде чврстог облика. Основна карактеристика ових материјала је постепена промена механичких својстава дуж структуре, у аксијалном, трансверзалном или оба правца, у складу са одређеним законом.

За разлику од ламинатних структура, код којих се својства мењају слој по слој, FGM материјали омогућавају континуирану промену својстава унутар запремине структуре. Ови материјали могу бити направљени комбинацијом различитих материјала, као што су керамика и метал, како би се постигле жељене особине. На пример, комбинација керамике и метала може пружити високу чврстоћу и добру отпорност на корозију. Са инжењерске тачке гледишта, FGM материјали омогућавају оптимизацију понашања структуре кроз примену различитих материјала. То резултира структурама са одличним термичким изолацијама, високом отпорношћу на хабање и корозију, што отвара широк спектар примена, од авио-индустрије и аутомобилске индустрије, па све до биомедицинских апликација као што су импланти и протезе.



Слика 1.7. Носач од функционално градијентног материјала

Карактеристике фукнционално градираних материјала мењају се дуж структуре са једног краја на други. На слици 1.10. може се видети слободно ослоњена греда, где се материјал мења у аксијалном правцу и то тако да је на левом крају чиста керамика, односно на десном крају чист метал, а све између мења се према закону [21, 22, 23, 24] и то

$$P_f\left(x\right)=P_cV_c\left(x\right)+P_mV_m\left(x\right), \tag{1.40}$$

где су P_c и P_m механичке карактеристике материјала (Young-ов модул еластичности, густина материјала, Poisson-ов коефицијент и сл.) које редом одговарају материјалу типа керамика и метал. У изразу (1.40) $V_c\left(x\right)$ и $V_m\left(x\right)$ представљају запремински удео керамике и метала. Они су дефинисани према закону (1.40) за одговарајућу структуру у којој се материјал мења у аксијалном правцу и дат је изразом

$$V_c\left(x\right)=\left(\frac{x}{L}\right)^{p_x},\ V_m\left(x\right)=1-V_c\left(x\right),0\leq x\leq L, \tag{1.41}$$

где је p_x експонент запреминског удела материјала у аксијалном правцу. Уколико се материјал мења у трансверзалном правцу, запремински удео керамике и метала може се изразити као

$$V_c(z)=\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^{p_t},\ V_m(z)=1-V_c(z),-\frac{h}{2}\leq z\leq\frac{h}{2}, \quad (1.42)$$

где је p_t експонент запреминског удела материјала у трансверзалном правцу. Коначно, на основу закона дистрибуције, карактеристике материјала функционално градиране структуре дате су изразом

$$P_f(x)=(P_c-P_m)\left(\frac{x}{L}\right)^{p_x}+P_m. \quad (1.43)$$

У случају да се ради о трансверзалној дистрибуцији материјала, функција је дефинисана следећим изразом

$$P_f(z)=(P_c-P_m)\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^{p_t}+P_m. \quad (1.44)$$

Након уводних разматрања, отвара се простор за детаљно истраживање осцилација, наноструктура и композитних материјала. Кроз анализу феномена осцилација, истакнут је њихов значај. Поглавље посвећено наноструктурама и њиховим динамичким аспектима представило је нову перспективу у истраживањима, омогућавајући формирање и креирање структура на нано скали. Теорије носача показују да анализа и дизајн механичких система може бити изазован задатак, али и прилика за одабир најпогодније теорије. Која ће се од њих применити, зависи од геомеријских и материјалних карактеристика, а све са циљем одређивања апроксимација које највише одговарају стварним вредностима. Са увођењем композитних материјала, отвара се простор за иновације и инжењерску креативност, а преглед њихових могућности и примена показује њихову значајну улогу. Узимајући у обзир ова разматрања, следеће поглавље посвећено је дубљем истраживању динамичког понашања композитних наноструктура и утицају различитих параметара на промене у њиховим динамичким карактеристикама.

2. Eringen-ова нелокална теорија Euler-Bernoulli-јеве и Timoshenko-ве теорије носача

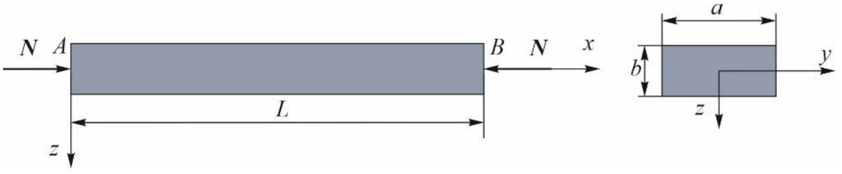
Проблеми са којима су се истраживачи сусрели при механичкој анализи наноструктура, пре свега била је у ограниченим могућностима примене класичне теорије континуума, због немогућности да добро апроксимира нелокалне ефекте на нано скали. При математичком моделирању наногреда, потребно је у обзир узети управо утицаје интеракције тачака на микроскопском и нано нивоу. Из тог разлога, Eringen-ова нелокална теорија еластичности користи се како нелокални ефекти не би остали занемарени при разматрању наноструктура. Применом ове нелокалне теорије омогућена је адекватна апроксимација динамичког понашања наногреда, што је од значаја при пројектовању нано-електро-механичких система. У овом делу биће представљена Eringen-ова нелокална теорија примењена на Euler-Bernoulli-јевом и Timoshenko-овом еластичном носачу. Ова анализа има за циљ да детаљно опише динамичко понашање наногреда, са узетим у обзир утицајима који се појављују на микроскопским и нано скалама. Такође, циљ ће бити креирање математичких модела који описују њихове осцилације, узимајући у обзир различите граничне услове који се јављају у реалним окружењима. Нарочито ће бити анализирана критична сила извијања и промена кружних фреквенција услед дејства притисне аксијалне силе. Анализа ће бити спроведена за различите геометријске и материјалне карактеристике носача са узетим у обзир утицајем нелокалног параметра. Тиме се омогућава дубље разумевање динамичког понашања наноструктура, што може бити од користи адекватнијем дизајнирању и оптимизацији нано-механичких и нано-електро-механичких система.

2.1 Eringen-ова нелокална теорија Euler-Bernoulli-јевог носача

Размотримо еластични носач Euler-Bernoulli-јевог типа, дужине L, ширине a и висине b. На крајевима греде делује притисна аксијална сила интензитета N. Динамичке једначине одређујемо применом Hamilton-овог принципа датим интегралном једначином

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta U+\delta V-\delta T\right)dt=0, \tag{2.1}$$

где су $\delta U,\delta V,\delta T$, редом варијација потенцијалне енергије, виртуални рад спољашњих сила и варијација кинетичке енергије.



Слика 2.1. Еластични носач Euler-Bernoulli-јевог типа

У овом случају биће размотрена три различита гранична услова, и то слободно ослоњен носач (S-S), конзола (C-F) и обострано уклештена греда (C-C). Поље померања Euler-Bernoulli-јеве греде, дато је изразима

$$q_1\left(x,z,t\right)=-z\frac{\partial w\left(x,t\right)}{\partial x}, \tag{2.2а}$$

$$q_3\left(x,z,t\right)=w\left(x,t\right), \tag{2.2б}$$

при чему је $w\left(x,t\right)$ трансверзално померање референтне тачке на греди. Поље деформација дефинисано је обликом

$$\varepsilon_x\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_1}{\partial x}=-z\frac{\partial^2 w\left(x,t\right)}{\partial x^2}, \qquad (2.3)$$

па је варијација потенцијалне енергије носача

$$\delta U=\int_V \sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}dv=\int\limits_A\int\limits_L\sigma_{xx}\left(-z\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dAdx-\int\limits_L M\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx, (2.4)$$

где $M=\int\limits_A z\sigma_{xx}dA$ представља момент савијања. Варијацију кинетичке енергије можемо изразити следећим обликом

$$\begin{gathered}\delta T=\frac{1}{2}\int\limits_v\rho\delta\left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial q_3}{\partial t}\right)^2\right)dv,\\ \delta T=\int\limits_0^L\left(\rho A\left(\frac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right)+\rho I\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)\right)\right)dx,\end{gathered} \qquad (2.5)$$

где су A и I редом површина попречног пресека и аксијални момент инерције за осу z. Како на носач делује аксијална сила, виртуални рад спољашњих сила биће

$$\delta V=\int\limits_0^L\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta w\right)\right)dx. \qquad (2.6)$$

Заменом једначина (2.4) - (2.6) у једначину (2.1) добија се основна динамичка једначина осциловања Euler-Bernoulli-јеве греде

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-\rho I\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}-N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \qquad (2.7)$$

Ако се занемари утицај инерције обртања пресека, добија се добро позната основна динамичка једначина Euler-Bernoulli-јевог носача

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \tag{2.8}$$

На основу Eringen-ове нелокалне теорије (1.1), нелокални момент савијања биће изражен као

$$M=\left(ea\right)^2\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{2.9}$$

па у комбинацији са једначином (2.8), добија се нелокална диференцијална једначина осциловања наногреде облика

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\left(1-\left(ea\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=0. \tag{2.10}$$

Увођењем бездимензионих величина, тако да је $\overline{w}=\frac{w}{L},\xi=\frac{x}{L}$, једначина (2.10) добија облик

$$\frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \xi^4}+\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \tau^2}-P\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)=0, \tag{2.11}$$

при чему су бездимензионе величине

$$\mu=\frac{ea}{L},\tau=t\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}},P=\frac{NL^2}{EI}. \tag{2.12}$$

Трансверзално померање претпостављамо као производ функција које раздвајају променљиве

$$\overline{w}\left(\xi,\tau\right)=\overline{W_n}\left(\xi\right)e^{i\omega_n\tau}, \tag{2.13}$$

па заменом једначине (2.13) у једначину (2.11) добија се следећа диференцијална једначина

$$\left(1+\mu^2 P\right)\frac{d^4\overline{W_n}}{\partial\xi^4}+\left(\mu^2{\omega_n}^2-P\right)\frac{d^2\overline{W_n}}{\partial\xi^2}-{\omega_n}^2\overline{W_n}\left(\xi\right)=0. \quad (2.14)$$

Функцију облика која треба да задовољи граничне услове, претпостављамо у следећем запису

$$\overline{W_n}\left(\xi\right)=Ae^{\lambda_n\xi}+Be^{-\lambda_n\xi}+Ce^{i\lambda_n\xi}+De^{-i\lambda_n\xi}, \qquad (2.15)$$

где су A,B,C,D константе. С обзиром да је

$$e^{\pm i\lambda_n\xi}=cos\,\lambda_n\xi\pm i\,sin\,\lambda_n\xi, \qquad (2.16)$$

функција облика добија следећу форму

$$\overline{W_n}\left(\xi\right)=C_1\,cos\,\lambda_n\xi+C_2\,sin\,\lambda_n\xi+C_3\,ch\,\lambda_n\xi+C_4 sh\lambda_n\xi. \quad (2.17)$$

где су $C_j\ \left(j=1,2,3,4\right)$ интеграционе константе.

У даљем раду ће бити размотрена три различита случаја граничних услова: слободно ослоњеног носача, конзолног носача и обострано уклештеног носача. Испитаће се утицај нелокалног параметра на промену фреквенција осциловања, као и утицај аксијалне притисне силе на промену тих фреквенција. Поред тога, анализираће се и промена критичне силе извијања у зависности од вредности нелокалног параметра.

2.1.1 Слободно ослоњен носач

За случај слободно ослоњене греде, гранични услови налажу да су трансверзално померање и момент савијања на крајевима носача једнаки нули, што је приказано изразима

$$\overline{w}(0,\tau)=0\,,\overline{w}(1,\tau)=0\,,\frac{\partial^2\overline{w}(0,\tau)}{\partial x^2}=0\,,\frac{\partial^2\overline{w}(1,\tau)}{\partial x^2}=0. \quad (2.18)$$

Заменом претпостављеног решења (2.13) и граничних услова (2.18) у једначину (2.17), добија се систем алгебарских једначина облика

$$C_1+C_3=0, \quad (2.19а)$$

$$-C_1\,cos\,\lambda_n-C_2\,sin\,\lambda_n+C_3\,ch\,\lambda_n+C_4sh\lambda_n=0, \quad (2.19б)$$

$$-C_1+C_3=0, \quad (2.19в)$$

$$\begin{gathered}-\lambda_n{}^2C_1\,cos\,\lambda_n-\lambda_n{}^2C_2\,sin\,\lambda_n+\lambda_n{}^2C_3ch\lambda_n+\\+\lambda_n{}^2C_4sh\lambda_n=0,\end{gathered} \quad (2.19г)$$

односно у матричном запису

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ -cos\,\lambda_n & -sin\,\lambda_n & ch\,\lambda_n & sh\lambda_n\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -\lambda_n^{\;2}\,cos\,\lambda_n & -\lambda_n^{\;2}\,sin\,\lambda_n & \lambda_n^{\;2}\,ch\,\lambda_n & \lambda_n^{\;2}sh\lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{bmatrix}=0. \quad (2.20)$$

С обзиром да је потребно потражити решења различита од тривијалних, потребно је да константе $C_j\ (j=1,2,3,4)$ буду различите од нуле. То ће бити задовољено условом да је детерминанта једначине (2.20) једнака нули

$$det\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ cos\,\lambda_n & sin\,\lambda_n & ch\,\lambda_n & sh\lambda_n\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -\lambda_n^{\;2}\,cos\,\lambda_n & -\lambda_n^{\;2}\,sin\,\lambda_n & \lambda_n^{\;2}\,ch\,\lambda_n & \lambda_n^{\;2}sh\lambda_n\end{bmatrix}=0, \quad (2.21)$$

одакле следи фреквентна једначина система

$$sh\lambda_n \, sin\,\lambda_n = 0. \tag{2.22}$$

Заменом сопствене функције $\overline{W_n}$

$$\overline{W_n}\left(\xi\right) = C_n \, sin\,\lambda_n \xi, \tag{2.23}$$

у једначину (2.14) одређују се корени карактеристичне једначине, а самим тим и кружне фреквенције система у функцији притисних аксијалних сила. Критичну силу извијања одређујемо из услова да се носач налази у положају индиферентне равнотеже. Физички услов на основу тога налаже да механички систем не осцилује. Овај услов се математички формулише тако што се кружна фреквенција осциловања у фреквентној једначини изједначи са нулом. На тај начин се добија најнижа сила у првом моду, која истовремено представља критичну силу извијања система као решење те једначине.

2.1.2 Конзола

За случај греде која је уклештена са једне стране, док је са друге стране слободна (конзола), гранични услови су такви да су на левом крају (уклештење) угиб и нагиб једнаки нули, док су на слободном крају носача момент и трансверзална сила једнаки нули. Гранични услови су у том случају дати следећим релацијама

$$\overline{w}\left(0,\tau\right) = 0\,, \frac{\partial \overline{w}\left(0,\tau\right)}{\partial x} = 0\,, \frac{\partial^2 \overline{w}\left(1,\tau\right)}{\partial x^2} = 0\,, \frac{\partial^3 \overline{w}\left(1,\tau\right)}{\partial x^3} = 0. \tag{2.24}$$

Заменом претпостављеног решења (2.13) и граничних услова (2.24), у једначину (2.17) добија се систем алгебарских једначина следећег облика

$$C_1 + C_3 = 0, \tag{2.25a}$$

$$C_2 + C_4 = 0, \qquad (2.25б)$$

$$-C_1 \cos\lambda_n - C_1 \sin\lambda_n + C_3 ch\lambda_n + C_4 sh\lambda_n = 0, \qquad (2.25в)$$

$$C_1 \sin\lambda_n - C_2 \cos\lambda_n + C_3 sh\lambda_n + C_n ch\lambda_n = 0, \qquad (2.25г)$$

односно у матричном запису

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\cos\lambda_n & -\sin\lambda_n & ch\lambda_n & sh\lambda_n \\ \sin\lambda_n & -\cos\lambda_n & sh\lambda_n & ch\lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0. \qquad (2.26)$$

Како је неопходно да решења система алгебарских једначина (2.25) буду из групе нетривијалних, детерминанта система алгебарских једначина мора бити једнака нули

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\cos\lambda_n & -\sin\lambda_n & ch\lambda_n & sh\lambda_n \\ \sin\lambda_n & -\cos\lambda_n & sh\lambda_n & ch\lambda_n \end{bmatrix} = 0, \qquad (2.26)$$

где се као и у претходном примеру добија фреквентна једначина облика

$$1 + ch\lambda_n \cos\lambda_n = 0. \qquad (2.27)$$

Функција $\overline{W_n}(\xi)$ која задовољава граничне услове за случај конзоле [25] је следећег облика

$$\overline{W_n}(\xi) = C_n \left[\frac{ch\lambda_n\xi - \cos\lambda_n\xi}{ch\lambda_n + \cos\lambda_n} - \frac{sh\lambda_n\xi - \sin\lambda_n\xi}{sh\lambda_n + \sin\lambda_n} \right]. \qquad (2.28)$$

Заменом сопствене функције (2.28) која задовољава граничне услове у једначину (2.14), могу се одредити кружне фреквенције осциловања конзоле као и критична сила извијања.

2.1.3 *Обострано уклештена греда*

Анализа модела обострано уклештене греде, где су угиб и нагиб на левом и десном крају носача једнаки нули, налаже да гранични услови буду математички формулисани следећим изразима

$$\bar{w}(0,\tau)=0\,,\frac{\partial \bar{w}(0,\tau)}{\partial x}=0\,,\bar{w}(1,\tau)=0\,,\frac{\partial \bar{w}(1,\tau)}{\partial x}=0. \tag{2.29}$$

Сада, на основу граничних услова (2.29) и претпостављеног решења (2.17) следи систем од четири алгебарске једначине облика

$$C_1+C_3=0, \tag{2.30а}$$

$$C_2+C_4=0, \tag{2.30б}$$

$$C_1\,cos\,\lambda_n+C_2\,sin\,\lambda_n+C_3\,ch\,\lambda_n+C_4sh\lambda_n=0, \tag{2.30в}$$

$$\begin{gathered}-C_1\,sin\,\lambda_n+C_2\,cos\,\lambda_n+C_3sh\lambda_n+\\+C_4ch\lambda_n=0,\end{gathered} \tag{2.30г}$$

или у матричном запису

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ cos\,\lambda_n & sin\,\lambda_n & ch\lambda_n & sh\lambda_n \\ -sin\,\lambda_n & cos\,\lambda_n & sh\lambda_n & ch\lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}=0. \tag{2.31}$$

Претходни систем једначина поседује решења различита од тривијалних ако и само ако је детерминанта система једнака нули, односно

$$det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ cos\,\lambda_n & sin\,\lambda_n & ch\lambda_n & sh\lambda_n \\ -sin\,\lambda_n & cos\,\lambda_n & sh\lambda_n & ch\lambda_n \end{bmatrix}=0, \qquad (2.32)$$

чијим решавањем се добија фреквентна једначина облика

$$1-ch\lambda_n\, cos\,\lambda_n=0. \qquad (2.33)$$

Нормална функција облика [25] која задовољава граничне услове је

$$\overline{W_n}\left(\xi\right)=C_n\left[\frac{ch\lambda_n\xi-cos\,\lambda_n\xi}{ch\lambda_n-cos\,\lambda_n}-\frac{sh\lambda_n\xi-sin\,\lambda_n\xi}{sh\lambda_n-sin\,\lambda_n}\right], \qquad (2.34)$$

где заменом сопствене функције (2.34) у једначину (2.14) могу се одредити кружна фреквенција осциловања и критична сила извијања.

У наставку ће бити приказан утицај нелокалног параметра на промену фреквенција осциловања. Поред тога, анализираће се како аксијална притисна сила утиче на промену тих фреквенција. Такође ће бити анализиран утицај промене нелокалног параметра на критичну силу извијања.

2.1.4 Кружне фреквенције осциловања и критична сила извијања Euler-Beronulli-јеве наногреде

У овом делу анализираће се промена кружних фреквенција осциловања и критичне силе извијања Euler-Bernoulli-јевог наноносача при различитим граничним условима: слободно ослоњени носач, конзола и обострано уклештен носач. Основни циљ истраживања је испитивање утицаја нелокалног параметра на промену фреквенција осциловања и критичне силе извијања. Такође, анализираће се утицај притисне аксијалне силе на промену кружних фреквенција осциловања. Овим истраживањем приказује се динамичко понашање носача у различитим условима, као и утицај нелокалног параметра и притисне аксијалне силе на промену његових карактеристика.

У првом делу разматраће се промена фреквенције осциловања слободно ослоњеног наноносача за различите вредности нелокалног параметра, као и за различите вредности притисне аксијалне силе.

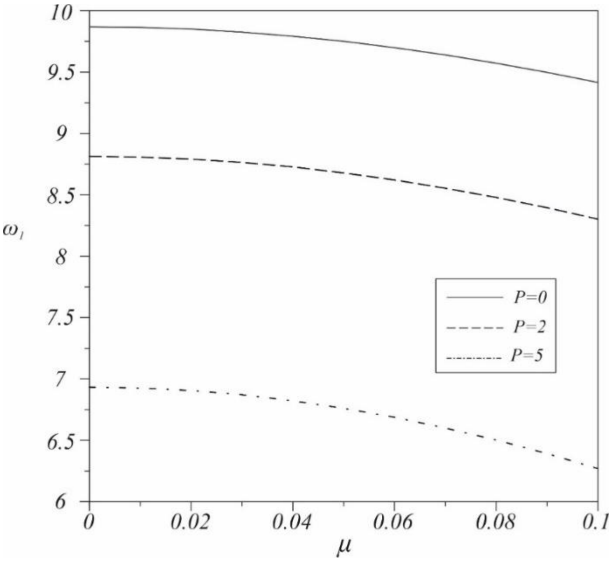
Табела 2.1. Бездимензиона фреквенција осциловања ω_1 слободно ослоњене наногреде за различите вредности нелокалног параметра μ и бездимензионе аксијалне притисне силе P

μ	$P = 0$	$P = 2$	$P = 5$
0	9,8696	8,8130	6,9326
0,01	9,8647	8,8076	6,9257
0,02	9,8502	8,7913	6,9049
0,03	9,8261	8,7642	6,8705
0,04	9,7926	8,7267	6,8225

У табели 2.1 су приказане фреквенције осциловања слободно ослоњене наногреде за различите вредности нелокалног параметра и притисне аксијалне силе. Може се закључити да са повећањем нелокалног параметра и притисне аксијалне силе долази до смањења фреквенција осциловања, што указује на заначајан утицај ових фактора. Смањење фреквенције осциловања може се објаснити утицајем нелокалности између различитих тачака у материјалу, јер нелокални параметар представља меру интеракције између суседних тачака. Та интеракција измећу суседних тачака доводи до повећане флексибилности или редуковане крутости материјала. Као резултат тога, наноструктура почиње да се понаша као структура мање крутости, што повећава период осцилација, а смањује фреквенцију.

Са друге стране, утицај притисне аксијалне силе доводи до повећања напрезања у структури, што додатно утиче на крутост структуре, па тако са повећањем притисне аксијалне силе долази до повећања напона у структури што даље резултује редукцијом крутости структуре. Редукција крутости последично доводи до умањења фреквенције осциловања. Како аксијална притисна сила расте и достигне граничну вредност да структура заузме индиферентно стање равнотеже, престаје осциловање (кружна фреквенција опада до вредности да је једнака нули) и структура је на нивоу граничне нестабилности, односно долази до појаве извијања. Појава извијања је изненадна где структура губи способност да издржи аксијална оптерећења, где долази до појаве нестабилности система, а јавља се када аксијална притисна сила достигне критичну вредност. На слици 2.2 приказана је промена фреквенције осциловања за различите типове ослањања, као и за различите вредности нелокалног параметра и притисне аксијалне силе.

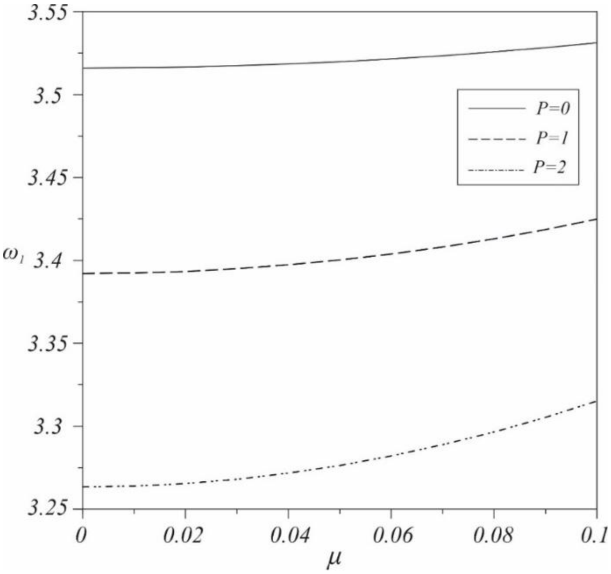
На слици 2.2. представљена су три дијаграма која описују динамичко понашање наногреде при различитим граничним условима и разликама у вредностима нелокалног параметра и притисне аксијалне силе. На слици 2.2а, који приказује динамичко понашање слободно ослоњене наногреде, може се уочити да са повећањем аксијалне притисне силе фреквенција осциловања опада, што је и очекивано, јер у неком тренутку аксијална притисна сила достиже критичну вредност, што доводи до појаве извијања. Осим тога, при повећању нелокалног параметра, такође је приметно умањење вредности фреквенције осциловања.



Слика 2.2а Промена фреквенције осциловања слободно ослоњене наногреде ω_1 са променом нелокалног параметра μ и бездимензионе притисне аксијалне силе P

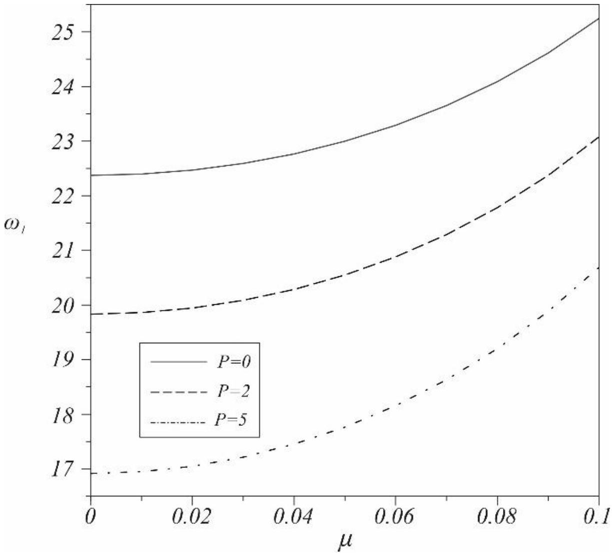
На слици 2.2в, која представља обострано уклештену наногреду, уочава се слична појава смањења фреквенције осциловања са повећањем притисне аксијалне силе, све до достизања њене критичне вредности, када се јавља извијање структуре. Ипак, повећање нелокалног параметра доводи до повећања фреквенције осциловања наногреде.

На слици 2.2б приметна је тенденција смањења фреквенције осциловања при повећању притисне аксијалне силе. Као и у претходном случају, повећање нелокалног параметра такође доводи до повећања вредности кружних фреквенција осциловања, као и у случају обострано уклештене греде.



Слика 2.2б Промена фреквенције осциловања конзолне наногреде ω_1 са променом нелокалног параметра μ и притисне силе P

Оваква појава код конзоле и обострано уклештене греде могла би се објаснити тако да повећање нелокалног параметра може утицати на појачану концентрацију напонских варијација у околини зоне концентрисане силе. Нелокални параметар модификује расподелу напона у материјалу, што може резултирати различитим напонским концентрацијама. Оне могу довести до повећања усклађености атома или молекула у материјалу, што потенцијално може повећати жилавост или крутост материјала, чиме се повећава и стабилност структуре.



Слика 2.2в Промена фреквенције осциловања обострано уклештене наногреде ω_1 са променом нелокалног параметра μ и бездимензионе притисне силе P

У табели 2.2. приказани су резултати критичне силе извијања са променама вредности нелокалног параметра. Оно што је приметно јесте да са повећањем нелокалног параметра, у случају слободно ослоњене греде, долази до смањења критичне силе извијања. Насупрот томе, код обострано уклештене греде и конзоле, повећање нелокалног параметра доводи до повећања критичне силе извијања.

Табела 2.2. Бездимензиона критична сила извијања за различите вредности нелокалног параметра и различите типове ослањања ($S-S$; слободно-ослоњена греда, $C-C$; обострано уклештена греда, $C-F$; конзола)

μ	$S-S$	$C-C$	$C-F$
0	9,8696	23,3375	14,4372
0,01	9,8599	23,3921	14,4581
0,02	9,8308	23,5574	14,5211
0,03	9,7827	23,8382	14,6273
0,04	9,7162	24,2427	14,7786

Код слободно ослоњеног носача сматра се да носач има већу слободу при извијању у поређењу са другим типовима ослањања. Повећањем нелокалног параметра, повећава се утицај нелокалних утицаја и напонских концентрација на крајевима носача, што може резултирати смањењем критичне силе извијања, јер се носач лакше деформише. Насупрот томе, код обострано уклештеног носача и конзоле, повећање нелокалног параметра доводи до боље расподеле напона у материјалу, што може повећати крутост и стабилност структуре. Као резултат, критична сила извијања расте са порастом нелокалног параметра.

2.2 Eringen-ова нелокална теорија Timoshenko-вог носача

У овом делу биће размотрено динамичко понашање Timoshenko-вог носача, применом Eringen-ове нелокалне теорије еластичности. Основна разлика између Euler-Bernoulli-јеве и Timoshenko-ве греде јесте да код Euler-Bernoulli-јеве греде попречни пресек током савијања носача остаје управан на неутралну осу греде, док се код Timoshenko-ве греде узима у обзир утицај смицања, односно претпоставља се да попречни пресек може ротирати у односу на неутралну осу. Euler-Bernoull-јева теорија носача погодна је за анализу греда код којих је однос дужине у односу на димензије попречног пресека велики, па се утицај ротације попречног пресека може занемарити, за разлику од Timoshenko-ве греде која даје добре апроксимације код греда са релативно већом дебљином у односу на њену дужину. Геометрија греде бића иста као и код Euler-Bernoulli-јевог носача, док на крајевима греде делује притисна аксијална сила интензитета N, као и у разматраном примеру (слика 2.1.). Динамичке једначине биће одређене Hamilton-овим принципом, а као и у претходном примеру, биће анализирани различити гранични услови.

Поље померања Timoshenko-вог носача представљено је као

$$q_1\left(x,z,t\right)=z\varphi\left(x,t\right), \tag{2.35а}$$

$$q_3\left(x,z,t\right)=w\left(x,t\right), \tag{2.35б}$$

где је $\varphi\left(x,t\right)$ ротација попречног пресека услед савијања носача. Поље деформација је тада

$$\varepsilon_x\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_1}{\partial x}=z\frac{\partial\varphi\left(x,t\right)}{\partial x}, \tag{2.36а}$$

$$\gamma_{xz}\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_1}{\partial z}+\frac{\partial q_3}{\partial x}=\frac{\partial w\left(x,t\right)}{\partial x}+\varphi\left(x,t\right). \qquad (2.36б)$$

Варијација потенцијалне енергије Timoshenko-ве наногреде може се представити изразом

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V\left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}\right)dv,\\ \delta U &= \int_L\left[M\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Q\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi\right)\right]dx,\end{aligned} \qquad (2.37)$$

при чему су момент савијања и трансверзална сила смицања изражени у облику

$$M=\int_A z\sigma_{xx}dA, \quad Q=\int_A\tau_{xz}dA. \qquad (2.38)$$

Варијација кинетичке енергије Timoshenko-ве наногреде дата је изразом

$$\begin{aligned}\delta T &= \frac{1}{2}\int_v\rho\delta\left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial q_3}{\partial t}\right)^2\right)dv,\\ \delta T &= \int_0^L\left[\rho A\left(\frac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right)+\rho I\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right)\right]dx.\end{aligned} \qquad (2.39)$$

На крајевима носача делује аксијална притисна сила, па је виртуални рад према спољашњим оптерећењима облика

$$\delta V=\int_0^L\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta w\right)\right)dx. \qquad (2.40)$$

На основу Hamilton-овог принципа (2.1) и једначина (2.37), (2.39) и (2.40), добијају се динамичке једначине Timoshenko-ве наногреде

$$\delta w: \frac{\partial Q}{\partial x}+N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{2.41а}$$

$$\delta\varphi: \frac{\partial M}{\partial x}-Q=\rho I\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{2.41б}$$

На основу Eringen-ове нелокалне теорије (1.1), нелокални момент савијања и нелокална трансверзална сила смицања су

$$M=\left(ea\right)^2\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+EI\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tag{2.42а}$$

$$Q=\left(ea\right)^2\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+k_sGA\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi\right). \tag{2.42б}$$

Заменом релација (2.42) у једначине (2.41а) и (2.41б) добијају се нелокалне диференцијалне једначине

$$EI\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-k_sGA\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi\right)=\left(1-\left(ea\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\rho I\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \tag{2.43а}$$

$$k_sGA\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\left(1-\left(ea\right)^2\frac{\partial}{\partial}\right)\left[\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]. \tag{2.43б}$$

Елиминацијом угла $\varphi\left(x,t\right)$, добија се нелокална диференцијална једначина осциловања Timoshenko-ве наногреде

$$\begin{aligned}&EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+L_0\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-L_0N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+L_0\frac{NEI}{k_sGA}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\\&-L_0\left(\rho I+\frac{\rho AEI}{k_sGA}+L_0\frac{N\rho I}{k_sGA}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}\\&+L_0{}^2\frac{\rho A\rho I}{k_sGA}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}=0,\end{aligned} \tag{2.44}$$

где је L_0 диференцијални оператор

$$L_0 = \left(1-\left(ea\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right). \tag{2.45}$$

Увођењем бездимензионих величина

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad w = \frac{\overline{w}}{L}, \tag{2.46}$$

добија се нелокална бездимензиона диференцијална једначина осциловања Timoshenko-ве наногреде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \xi^4} + \overline{L_0}\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \tau^2} - \overline{L_0} P \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \xi^2} + \overline{L_0} I_0 \frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} - \\
-\overline{L_0}\,\overline{E}\frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + \overline{L_0} P \overline{E}\frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \xi^4} + \overline{L_0}^2 I_0 \overline{E}\frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \tau^4} - \\
-\overline{L_0}^2 P \overline{E} I_0 \frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} = 0,
\end{gathered} \tag{2.47}$$

где су

$$\begin{gathered}
\overline{L_0} = \left(1-\mu^2 \nabla^2\right), \mu = \frac{ea}{L}, \nabla = \frac{\partial}{\partial \xi}, \\
I_0 = \frac{I}{AL^2}, \overline{E} = \frac{EI}{k_s GAL^2}, P = \frac{NL^2}{EI}.
\end{gathered} \tag{2.48}$$

Трансверзално померање може се одредити методом раздвајања промењљивих, тако да можемо претпоставити решење у облику

$$\overline{w}\left(\xi,\tau\right) = \overline{W_n}\left(\xi\right) e^{i\omega_n \tau}, \tag{2.49}$$

па једначина (2.47) добија облик

$$\begin{aligned} &\left(1+\overline{L_0}P\overline{E}\right)\frac{d^4\overline{W_n}}{d\xi^4}+\overline{L_0}\left[\left(I_0+\overline{E}\right){\omega_n}^2-P\right. \\ &\left.+\overline{L_0}PI_0\overline{E}\right]\frac{d^2\overline{W_n}}{d\xi^2}+\overline{L_0}\left[\overline{L_0}I_0\overline{E}{\omega_n}^4-{\omega_n}^2\right]\overline{W_n}=0. \end{aligned} \tag{2.50}$$

2.2.1 Кружне фреквенције осциловања и критична сила извијања Timoshenko-ве наногреде

Анализа кружне фреквенције осциловања и критичне силе извијања Timoshenko-вог наноносача биће спроведена уз разматрање промене вредности нелокалног параметра на примерима носача са различитим граничним условима. Ова анализа има за циљ да прикаже промену неких карактеристика наноносача у различитим условима и да истакне разлике између Euler-Bernoulli-јеве и Timoshenko-ве теорије. Ове теорије играју значајну улогу у инжењерству и пројектовању структура.

Euler-Bernoulli-јева теорија се користи када су утицаји смицања занемарљиви, док Timoshenko-ва теорија узима у обзир и утицаје смицања и ротације попречних пресека. Разлика у резултатима добијених применом ових теорија може бити значајна, а избор одговарајућег модела зависи од специфичних жељених или неопходних услова.

Према литератури, Timoshenko-ва теорија и друге теорије вишег реда имају посебан значај у динамичком понашању материјала на микро и нано скали. У овим случајевима, утицаји смицања и интеракције између атома и молекула не могу се занемарити, што доводи до приметних разлика у поређењу са Euler-Bernoulli-јевом теоријом. Такође, Timoshenko-ва теорија може смањити грешке при одређивању резонантних фреквенција у оквиру модалне анализе, што јој даје предност у односу на Euler-Bernoulli-јеву теорију носача.

У овом делу биће анализирана наногреда следећих геометријских и материјалних карактеристика

$$L = 100nm, a = 1nm, b = 0.5nm, \tag{2.51}$$

$$\begin{gathered} E = 201{,}04 * 10^9 Pa, \rho = 8166 kg/m^3, \\ \nu = 0{,}3, G = E/2(1+\nu). \end{gathered} \tag{2.52}$$

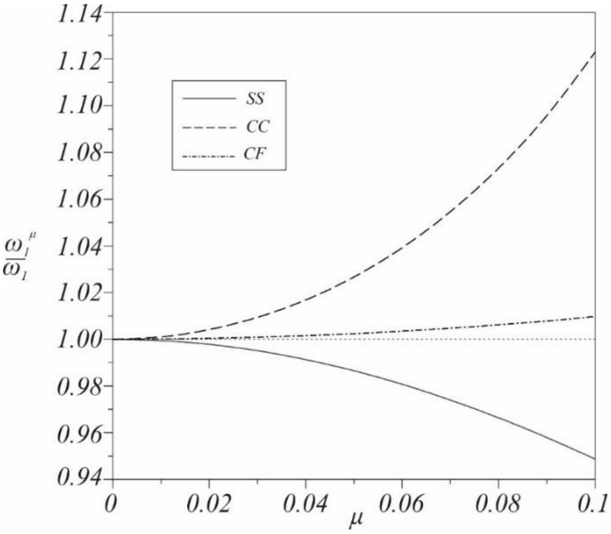
Корекциони фактор код Timoshenko-ве теорије греда обично се узима за правоугаоне попречне пресеке са вредношћу $k_s = 5/6$.

Табела 2.3. Бездимензиона кружна фреквенција осциловања ω_1 слободно ослоњене Timoshenko-ве наногреде за различите вредности нелокалног параметра μ и бездимензионе притисне аксијалне силе P

μ	$P=0$	$P=2$	$P=5$
0	9,8691	8,8126	6,9321
0,01	9,8643	8,8071	6,9251
0,02	9,8497	8,7908	6,9044
0,03	9,8256	8,7638	6,8699
0,04	9,7921	8,7262	6,8220

У табели 2.3. приказани су резултати бездимензионе кружне фреквенције осциловања слободно-ослоњене Timoshenko-ве наногреде, за различите вредности нелокалног параметра и бездимензионе притисне аксијалне силе.

Слично понашање као код Euler-Bernoulli-јеве теорије уочено је и код Timoshenko-ве теорије кроз резултате представљене у табели 2.3. Може се приметити да се са повећањем нелокалног параметра, вредност кружне фреквенције смањује. Иста тенденција смањења уочена је и са критичном силом извијања, где са повећањем вредности бездимензионе аксијалне притисне силе, долази до смањења кружне фреквенције осциловања. Разлике у резултатима приказаним у табелама 2.1. и 2.3. последица су узимања у обзир утицаја инерције ротације попречних пресека и смицања.



Слика 2.3. Промена фреквенције осциловања Timoshenko-ве наногреде ω_1 за различите граничне услове са променом нелокалног параметра μ и за вредност бездимензионе притисне аксијалне силе $P=1$

Табела 2.4. Бездимензиона критична сила извијања Timoshenko-ве наногреде за различите вредности нелокалног параметра и различите типове ослањања ($S-S$; слободно-ослоњена греда, $C-C$; обострано укљештена греда, $C-F$; конзола)

μ	$S-S$	$C-C$	$C-F$
0	9,8689	23,3410	14,4385
0,01	9,8592	23,3956	14,4594
0,02	9,8302	23,5610	14,5224
0,03	9,7821	23,8418	14,6286
0,04	9,7155	24,2464	14,7800

На слици 2.3. може се видети тенденција промене фреквенције осциловања Timoshenko-ве наногреде за различите вредности нелокалног параметра. Оно што се може уочити, а што је приказано и на слици 2.1 јесте да фреквенција у случају слободно ослоњене греде опада са порастом нелокалног параметра. Ово је супротно у случајевима обострано уклештене греде и конзоле, где са порастом нелокалног параметра долази до пораста кружне фреквенције осциловања.

Анализом критичне силе извијања Timoshenko-ве наногреде, можемо уочити сличне тенденције као и код Euler-Bernoulli-јеве теорије. У случају слободно ослоњене греде, повећањем нелокалног параметра долази до смањења критичне силе извијања, док код обострано уклештене греде и конзоле, повећање нелокалног параметра доводи до повећања критичне силе извијања.

3. Нелокална теорија градијента деформације функционално градијентне Euler-Bernoulli-јеве и Timoshenko-ве теорије носача

Анализа доступне литературе и интересовање истраживача показују да је нелокална теорија градијента деформације значајан напредак у проучавању носача и других структура на нано скали. Ова теорија узима у обзир концепт нелокалности, који је од суштинског значаја за прецизну анализу статичког и динамичког одзива структура под различитим условима оптерећења и типовима ослањања. Mindlin [9, 10] је током 1960-их година детаљно истраживао теорију градијента еластичности, уочавајући одређена проширења у односу на класичну теорију еластичности. Ова проширења узимају у обзир додатне елементе градијента деформације вишег реда, засноване на претпоставци да се материјали не могу представити као скуп тачака, већ као скуп атома са механизмом деформације вишег реда на микро и нано скали.

Многа истраживања су објављена која узимају у обзир статичко и динамичко понашање материјала, као и утицај дужине скале. Међутим, међу истраживачима је постојала конфузија у вези са утицајем дужине скале у тим теоријама, као и са нелокалним параметром у Eringen-овој теорији [7, 8]. Из тог разлога, Lim је 2015. године [11] установио нову нелокалну теорију примењиву на нано скали, која је показала да нелокални параметар у Eringen-овој теорији и утицај дужине скале у теорији градијента деформације представљају две различите физичке карактеристике материјала на нано скали.

Нелокална теорија градијента деформације има за циљ генерализацију класичне нелокалне теорије еластичности, увођењем тензора деформације вишег реда. Нелокални модел заснован на Eringen-овој теорији, приказан у једначини (1.1), проширен је увођењем утицаја нелокалности градијента деформације вишег реда. Нелокални модели који ће се користити у даљој анализи представљени су у једначинама (1.4) и (1.5).

Примена параметра дужине скале у теорији градијента деформације и нелокалног параметра у Eringen-овој теорији представља два различита приступа у анализи материјала и конструкција. Оба параметра имају своје физичко значење и предности. Теорија градијента деформације се односи на анализу утицаја градијента деформације у материјалу путем параметра дужине скале. Ова анализа узима у обзир промењивост деформације, што је посебно значајно у материјалима који су подложни молекуларним или геометријским девијацијама. Ово омогућава детаљније и прецизније моделирање у таквим случајевима.

Са друге стране, нелокални параметар у Eringen-овој теорији се односи на узимање у обзир нелокалних утицаја. Овај параметар је мера осетљивости тачке у материјалу у односу на утицај суседних тачака, описујући понашање материјала које не може бити потпуно објашњено применом класичних, локалних теорија.

Како је наведено, примена нелокалне теорије градијента деформације, која узима у обзир како утицај дужине скале тако и нелокални параметар из Eringen-ове теорије, игра кључну улогу у анализи материјала и конструкција. Овакав приступ омогућава комплетније моделирање и анализу материјала изложених разним нелокалним и градијентним утицајима. У многим случајевима, материјали могу бити подложни симултаном деловању молекуларних нерегуларности и нелокалних утицаја. Стога, примена нелокалне теорије градијента деформације омогућава боље разумевање и предвиђање динамичког понашања таквих материјала.

Такође ће бити анализиран утицај неуједначености материјала у структури применом метода за математичко моделирање функционално градијентних структура. Посебна пажња ће бити посвећена утицају експонента запреминског удела на промену фреквенције осциловања и критичне силе извијања на Euler-овим и Timoshenko-вим наноносачима.

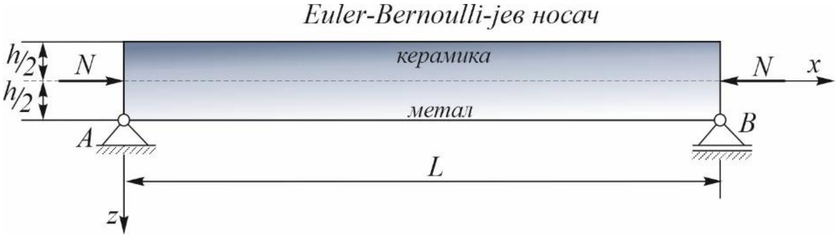
У овом делу ће бити анализиране слободне осцилације функционално градијентних, слободно ослоњених Euler-Bernoulli-јевих и Timoshenko-вих наноносача кроз примену нелокалне теорије градијента деформације. Основни значај примене ове теорије у односу на класичну Eringen-ову нелокалну теорију, лежи у њеној способности да омогући детаљнију и прецизнију апроксимацију одзива материјала и структура, посебно у случајевима где су концентрације напона и неједнака расподела напона критични фактори. У овом делу ће се такође анализирати утицај аксијалне притисне силе, различитих вредности параметра дужине скале и нелокалног параметра на промену фреквенције осциловања слободно ослоњених наноносача. Поред тога, утицај експонента запреминског удела у материјалу на промену фреквенције осциловања и критичне силе извијања биће посебно разматран ради бољег разумевања основних осцилаторних карактеристика функционално градијентних материјала.

3.1 Нелокална теорија градијента деформације функционално градијентног Euler-Bernoulli-јевог носача

Као и у претходном случају, размотриће се еластични слободно ослоњени носач Euler-Bernoulli-јевог типа, дужине L, ширине a и висине b, који је оптерећен притисном аксијалном силом интензитета N у тачкама A и B на крајевима носача. Овај носач моделиран је тако да је функционално градијентног типа, где се механичке карактеристике материјала мењају у трансверзалном правцу (слика 3.1). Ефективне механичке карактеристике материјала функционално градијентне греде могу се изразити у облику

$$P_f\left(z\right)=\left(P_c-P_m\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^p+P_m, \qquad (3.1)$$

где су P_c и P_m, редом механичка својства керамике на горњој површини греде $z=h/2$ и метала која одговарају доњој површини греде $z=-h/2$. Материјали који се користе су керамика Si3Ni4 и метал типа SUS304.



Слика 3.1. Функционално градијентна слободно ослоњена Euler-Bernoulli-јева наногреда оптерећена притисном аксијалном силом

На основу поља померања Euler-Bernoulli-јевог носача (2.2) и поља деформација (2.3), варијација потенцијалне и кинетичке енергије је

$$\delta U = \int_V \sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} dv = \int_A \int_L \sigma_{xx} \left(-z\delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dAdx,$$

$$\delta U = -\int_L M \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx, \tag{3.1a}$$

$$\delta T = \frac{1}{2} \int_v \rho(z) \delta \left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_3}{\partial t} \right)^2 \right) dv$$

$$\delta T = \int_0^L \left(I_0 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \right) + I_2 \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \right) \right) dx, \tag{3.1б}$$

где су инерцијалне карактеристике нижег и вишег реда облика

$$\left(I_0, I_2 \right) = \int_A \left(1, z^2 \right) \rho(z) dA. \tag{3.2}$$

На основу Hamilton-овог принципа (2.1) и једначина (3.1) и (2.6) добија се основна динамичка једначине Euler-Bernoulli-јевог носача, тако да је

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{3.3}$$

Конститутивна једначина на основу теорије градијента деформације је облика

$$\left(1 - (ea)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{xx} = \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E \varepsilon_{xx} \tag{3.4}$$

односно момент савијања

$$M=\left(ea\right)^{2}\frac{\partial^{2}M}{\partial x^{2}}+\left(1-l^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\right)E\varepsilon_{xx}, \qquad (3.5)$$

где је l параметар дужине скале материјала који фигурише у нелокалној теорији градијента деформације. На основу нелокалног момента савијања (3.5) и основне динамичке једначине носача (3.3), добија се диференцијална једначина осциловања функционално градијентне Euler-Bernoulli-јеве наногреде, а на основу нелокалне теорије градијента деформације

$$\begin{gathered}\left(1-l^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\right)D_{xx}\frac{\partial^{4}w}{\partial x^{4}}=\\ \left(1-\left(ea\right)^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\right)\left[-I_{0}\frac{\partial^{2}w}{\partial t^{2}}+I_{2}\frac{\partial^{4}w}{\partial x^{2}\partial t^{2}}-N\frac{\partial^{2}w}{\partial x^{2}}\right],\end{gathered} \qquad (3.6)$$

где је елемент матрице крутости изражен у облику

$$D_{xx}=\int_{A}z^{2}E\left(z\right)dA. \qquad (3.7)$$

Увођењем бездимензионих величина тако да је $\overline{w}=\frac{w}{L},\xi=\frac{x}{L}$, диференцијална једначина (3.6) добија облик

$$\begin{gathered}\left(1-\bar{l}^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\right)\frac{\partial^{4}\overline{w}}{\partial\xi^{4}}+\\ +\left(1-\mu^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}\right)\left[k_{I}k_{I_{0}}\frac{\partial^{2}\overline{w}}{\partial\tau^{2}}-k_{I}k_{I_{2}}\frac{\partial^{4}\overline{w}}{\partial\xi^{2}\partial\tau^{2}}-k_{N}\frac{\partial^{2}\overline{w}}{\partial\xi^{2}}\right]=0,\end{gathered} \qquad (3.8)$$

где је

$$\bar{l} = \frac{l}{L}, \mu = \frac{ea}{L}, k_I = \frac{I}{AL^2}, \tau = \frac{t}{L^2}\sqrt{\frac{E_C I}{\rho_C A}},$$
$$k_{I_0} = \frac{E_C I_0 L^2}{\rho_C D_{xx}}, k_{I_2} = \frac{E_C I_2}{\rho_C D_{xx}}, k_N = \frac{NL^2}{D_{xx}}. \tag{3.9}$$

при чему су ρ_C и E_C редом, густина материјала и модул еластичности који одговарају материјалу типа керамика.

Трансверзално померање може се одредити методом раздвајања променљивих, тако да можемо претпоставити решење у облику

$$\overline{w}\left(\xi,\tau\right) = \overline{W_n}\left(\xi\right)e^{i\omega_n\tau}, \tag{3.10}$$

па заменом у једначину (3.9) добија се диференцијална једначина

$$\begin{gathered}\bar{l}^2\frac{d^6\overline{W_n}}{\partial\xi^6} - \left(1 + \mu^2 k_I k_{I_2}\omega_n{}^2 - \mu^2 k_N\right)\frac{d^4\overline{W_n}}{\partial\xi^4} + \\ + \left(\mu^2 k_I k_{I_0}\omega_n{}^2 + k_I k_{I_2}\omega_n{}^2 + k_N\right)\frac{d^2\overline{W_n}}{\partial\xi^2} - \\ - \omega_n{}^2 k_I k_{I_0}\overline{W_n}\left(\xi\right) = 0.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Као што се може видети у једначини (3.11), по први пут појављује се бездимензиони параметар градијента деформације $\bar{l}$ који представља однос параметра градијента деформације и дужине. У наставку се, на основу диференцијалне једначине (3.11), може размотрити утицај бездимензионог параметра градијента деформације на промену фреквенције осциловања функционално градијентне наногреде.

3.1.1 Анализа кружне фреквенције осциловања и критичне силе извијања функционално градијентне слободно ослоњене Euler-Beronulli-јеве наногреде

У овом делу биће извршена анализа кружне фреквенције осциловања и критичне силе извијања функционално градијентне слободно ослоњене Euler-Bernoulli-јеве наногреде. Поред анализе утицаја нелокалног параметра као и параметра дужине скале, у обзир ће бити узет и утицај експонента запреминског удела материјала на промену фреквенције осциловања и критичне силе извијања. Овом анализом, циљ је да се стекне увид у сложено понашање греда у различитим условима и како нелокални параметар, утицај дужине скале, експонент запреминског удела и аксијална притисна сила утичу на промену основних осцилаторних карактеристика наноструктура и статичке стабилности разматране наногреде. Геометријске и материјалне каркатеристике носача који је узет у разматрање су

$$L = 100nm, a = 1nm, b = 0.5nm, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} E_m &= 201.04 \cdot 10^9 Pa, \rho_m = 8166 kg/m^3, \\ E_c &= 348.43 \cdot 10^9 Pa, \rho_c = 2370 kg/m^3, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где су E и ρ редом, модул еластичности и густина материјала, док индекси m и c одговарају материјалима типа метал и керамика.

У табелама 3.1 и 3.2 могу се видети вредности кружних фреквенција осциловања слободно ослоњене фукционално градијентне наногреде, са узетим у обзир утицајима нелокалног параметра и дужине скале. Такође, анализирана је и промена вредности притисне аксијалне силе при усвојеној вредности вредности експонента запреминског удела од $p=1$.

При анализи слободно ослоњене функционално градијентне наногреде са дејством притисне аксијалне силе, а са коришћењем нелокалне теорије градијента деформације могу се уочити две интересантне појаве.

Табела 3.1. Бездимензиона фреквенција осциловања ω_1 за различите вредности нелокалног параметра μ и бездимензионе аксијалне притисне силе k_N

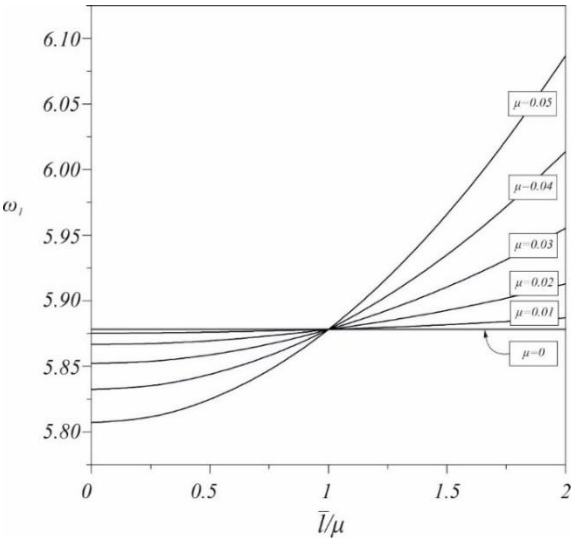
μ	$k_N=0$	$k_N=4$	$k_N=6$
0	5,8782	4,5332	3,6807
0,01	5,8753	4,5294	3,6761
0,02	5,8667	4,5181	3,6622
0,03	5,8523	4,4995	3,6391
0,04	5,8323	4,4735	3,6070

Табела 3.2. Бездимензиона фреквенција осциловања ω_1 за различите вредности ефекта дужине скале $\bar{l}$ и бездимензионе аксијалне притисне силе k_N

$\bar{l}$	$k_N=0$	$k_N=4$	$k_N=6$
0	5,8782	4,5332	3,6807
0,01	5,8811	4,5369	3,6853
0,02	5,8898	4,5482	3,6992
0,03	5,9043	4,5669	3,7222
0,04	5,9245	4,5929	3,7541

Прво, са повећањем нелокалног параметра, долази до смањења фреквенције осциловања наногреде. Ово смањење може се објаснити тиме што већи број атома и молекула у околини утиче на деформацију, што смањује микро-нерегуларности и напонске концентрације. Као резултат, материјал постаје мање крут и мање склон деформисању. Са друге стране, повећање утицаја дужине скале доводи до повећања фреквенције осциловања, што је резултат компактније структуре материјала на микро и нано скали. Односно, повећање утицаја дужине скале доводи до тога да ће најмањи микро и нано аспекти материјала бити распоређени ближе један другом. Ово даље узрокује стварање компактније структуре. Самим тим, промена наведене карактеристике би у динамичком сценарију довела до умањења потенцијалних амплитуда осцилација носача и то при већим фреквенцијама.

На слици 3.2. приказана је промена фреквенције осциловања функционално градијентне наногреде са променом односа утицаја дужине скале $\bar{l}$ и нелокалног параметра μ. Оно што се може закључити јесте да за вредност $\bar{l}/\mu = 1$, вредности фреквенције осциловања одговарају класичној теорији еластичности, док за вредности $\bar{l}/\mu < 1$ и $\bar{l}/\mu > 1$ вредности фреквенција осциловања наногреде су у оквиру вредности нелокалне теорије градијента деформације [26]. За вредности $\bar{l}/\mu < 1$ могу се установити ниже вредности фреквенције осциловања, што је супротно када су вредности $\bar{l}/\mu > 1$. Посебно се може закључити да за више вредности нелокалног параметра μ, а при повећању утицаја дужине скале, долази до значајнијих промена у фреквенцији осциловања наногреде. Конкретно, за више вредности нелокалног параметра μ, утицај дужине скале је израженији, што се види кроз наглији пораст фреквенције. Ово значи да код структура са већим нелокалним параметрима, дужина скале има доминантнији утицај на повећање фреквенције осциловања.

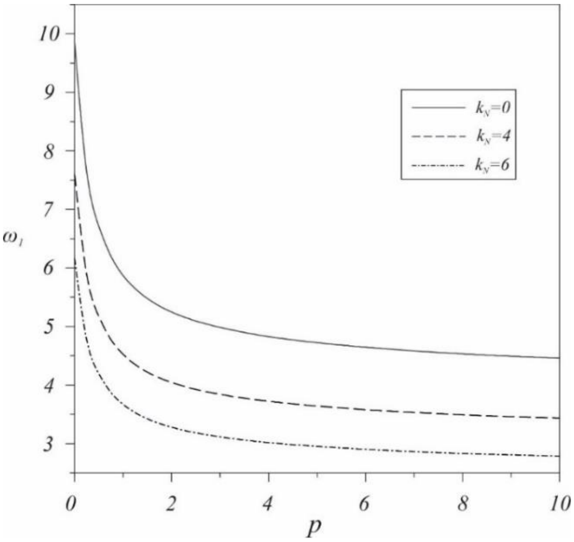


Слика 3.2. Промена фреквенције осциловања функционално градијентне наногреде ω_1 са променом односа утицаја дужине скале $\bar{l}$ и нелокалног параметра μ

На слици 3.3. приказана је промена фреквенције осциловања наногреде са променом експонента запреминског удела функционално градијентног материјала. Оно што се може закључити, јесте да са повећањем експонента запреминског удела долази до смањивања вредности фреквенције осциловања. За вредност $p=0$ вредности фреквенција осциловања греде одговарају случају где је материјал по читавој запремини керамика. Са повећањем вредности експонента, долази до пораста запреминског удела метала у овом типу материјала, што доводи до смањења фреквенције осциловања.

Критична сила извијања за различите вредности нелокалног параметра, утицаја дужине скале као и експонента запреминског удела, приказана је у табели 3.3. Увидом у приказане резултате, закључује се да као и код фреквенције осциловања са порастом нелокалног параметра долази до смањења вредности критичне силе извијања. Ова тенденција је супротна у поређењу са случајем повећања утицаја дужине.

У овом делу истраживања представљене су неке основне осцилаторне карактеристике функционално градијентне слободно ослоњене Euler-Bernoulli-јеве наногреде која је изложена дејству притисне аксијалне силе. Динамичке једначине добијене су Hamilton-овим принципом, док су диференцијалне једначине осциловања наногреде добијене применом нелокалне теорије градијента деформације.



Слика 3.3. Промена фреквенције осциловања функционално градијентне наногреде ω_1 у функцији експонента запреминског удела p за различите вредности притисне аксијалне силе

Табела 3.3. Бездимензиона критична сила извијања за различите вредности утицаја дужине скале $\bar{l}$ и нелокалног параметра μ

μ	$\bar{l}=0$	$\bar{l}=0{,}02$	$\bar{l}=0{,}04$
0	9,8696	9,9086	10,0255
0,01	9,8599	9,8988	10,0156
0,02	9,8308	9,8696	9,9860
0,03	9,7827	9,8213	9,9372
0,04	9,7162	9,7545	9,8696

Утицаји нелокалног параметра и дужине скале материјала на промену кружне фреквенције анализирани су и приказани у табелама 3.1, 3.2. и на слици 3.2. Изводи се закључак да увећање нелокалног параметра доводи до смањења фреквенције осциловања, што је супротно у случају повећања утицаја дужине скале. Јасно је да повећање нелокалног параметра доводи до повећања интеракције између атома у материјалу, чиме се последично повећава и његова крутост. Са друге стране, повећање утицаја дужине скале може повећати вредности фреквенција јер додаје структурну сложеност материјалу. Такође, нелокални утицај је знатно већи за вредности μ од 0,02 до 0,01.

3.2 Нелокална теорија градијента деформације функционално градијентног Timoshenko-вог носача

У овом делу анализиран је модел функционално градијентног слободно ослоњеног Timoshenko-вог носача у оквиру нелокалне теорије градијента деформације. Сада ће се размотрити еластични слободно ослоњени носач Timoshenko-ов носач, дужине L, ширине a и висине b, који је оптерећен притисном аксијалном силом интензитета N у тачкама A и B на крајевима носача. Овај носач моделиран је тако да је функционално градијентног материјала, где се механичке карактеристике материјала мењају у трансверзалном правцу (слика 3.4). Ефективне механичке карактеристике материјала функционално градијентне греде изражене су у једначини (3.1).

Слика 3.4. Функционално градијентна слободно ослоњена Timoshenko-ва наногреда оптерећена притисном аксијалном силом

На основу поља померања (2.35) и поља деформација (2.36), варијација потенцијална енергија Timoshenko-вог носача биће

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_V \left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz}\right)dv = \\ &= \int\limits_L \left[M\delta\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Q\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi\right)\right]dx.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Варијација кинетичка енергија носача, на основу поља померања (2.35) је

$$\delta T=\frac{1}{2}\int_{v}\rho\delta\left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial q_3}{\partial t}\right)^2\right)dv$$

$$\delta T=\int_{0}^{L}\left[I_0\left(\frac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right)+I_2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\right)\right]dx, \tag{3.15}$$

С обзиром да на носач делује притисна аксијална сила, виртуални рад спољашњих сила представљен је једначином (2.6), па се на основу Hamilton-овог принципа (2.1) и једначина (3.14) и (3.15) добијају динамичке једначине Timoshenko-ве греде

$$\delta w:\frac{\partial Q}{\partial x}+N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{3.16а}$$

$$\delta\varphi:\frac{\partial M}{\partial x}-Q=I_2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{3.16б}$$

Како је нелокална теорија градијента деформације дефинисана обликом

$$\left(1-(ea)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{xx}=\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E(x)\varepsilon_{xx}, \tag{3.17а}$$

$$\left(1-(ea)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\tau_{xz}=\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G(x)\gamma_{xz}, \tag{3.17б}$$

на основу динамичких једначина (3.16) и нелокалне теорије градијента деформације (3.17) добијају се диференцијалне једначине осциловања Timoshenko-ве наногреде у следећем облику

$$\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)C_{xz}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)= \\ =\left(1-(ea)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right], \tag{3.18а}$$

$$\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[D_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-C_{xz}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi\right)\right]= \\ =\left(1-(ea)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)I_2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{3.18б}$$

где је елемент матрице крутости изражен интегрално

$$C_{xz}=\int_A k_s G(z)\,dA. \tag{3.19}$$

Елиминацијом угла ротације попречног пресека $\varphi(x,t)$, добија се диференцијална једначина осциловања Timoshenko-ве наногреде

$$L_1^2 C_{xz}D_{xx}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-L_0L_1D_{xx}I_0\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+L_0L_1D_{xx}N\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+ \\ +L_0L_1C_{xz}I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-L_0L_1C_{xz}N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-L_0L_1C_{xz}I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+ \\ +L_0^2I_0I_2\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}-L_0^2I_2N\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}=0, \tag{3.20}$$

где су диференцијални оператори

$$L_0=1-(ea)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2},\; L_1=1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{3.21}$$

Увођењем бездимензионих величина, тако да је $\overline{w}=\frac{w}{L},\xi=\frac{x}{L}$, диференцијална једначина (3.20) добија облик

$$\overline{L_1}^2 \frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \xi^4} - \overline{L_0}\,\overline{L_1} k_C k_I k_{I_0} \frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + \overline{L_0}\,\overline{L_1} k_C k_N \frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \xi^4} +$$
$$+\overline{L_0}\,\overline{L_1} k_I k_{I_0} \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \tau^2} - \overline{L_0}\,\overline{L_1} k_N \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \xi^2} - \overline{L_0}\,\overline{L_1} k_I k_{I_2} \frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} + \quad (3.22)$$
$$+\overline{L_0}^2 k_C {k_I}^2 k_{I_0} k_{I_2} \frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \tau^4} - \overline{L_0}^2 k_C k_I k_{I_2} k_N \frac{\partial^4 \overline{w}}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} = 0,$$

при чему је

$$k_C = \frac{D_{xx}}{C_{xz} L^2}. \quad (3.23)$$

Методом раздвајања промењљивих, где је $\overline{w}(\xi,\tau) = \overline{W_n}(\xi) e^{i\omega_n \tau}$, и заменом у једначину (3.22) следи

$$L_1{}^2 \frac{d^4 \overline{W_n}}{d\xi^4} + L_0 L_1 k_C k_I k_{I_0} \omega^2 \frac{d^2 \overline{W_n}}{d\xi^2} + L_0 L_1 k_C k_N \frac{d^4 \overline{W_n}}{d\xi^4} -$$
$$-L_0 L_1 k_I k_{I_0} \omega^2 \overline{W_n} - L_0 L_1 k_N \frac{d^2 \overline{W_n}}{d\xi^2} + L_0 L_1 k_I k_{I_2} \omega^2 \frac{d^2 \overline{W_n}}{d\xi^2} + \quad (3.24)$$
$$+L_0{}^2 k_C {k_I}^2 k_{I_0} k_{I_2} \omega^4 \overline{W_n} + L_0{}^2 k_C k_I k_{I_2} k_N \omega^2 \frac{d^2 \overline{W_n}}{d\xi^2} = 0,$$

где су бездимензиони диференцијални оператори

$$L_0 = 1 - \mu^2 \frac{d^2}{d\xi^2}, L_1 = 1 - \bar{l}^2 \frac{d^2}{d\xi^2}. \quad (3.25)$$

3.2.1 Динамичка анализа функционално градијентне слободно ослоњене Timoshenko-ве наногреде

У овом делу анализиране су фреквенције осциловања функционално градијентне слободно ослоњене Timoshenko-ве наногреде. Нанонoсач изложен је дејству притисних аксијалних сила на његовим крајевима A и B (слика 3.4). Као што је то и представљено једначинама, анализа је спроведена применом нелокалне теорије градијента деформације. Анализирани су утицаји нелокалног параметра и дужине скале на промену кружних фреквенција осциловања наногреде. Утицај експонента запреминског удела такође је део анализе функционално градијентне наногреде. Геометријске и материјалне каркатеристике носача који се разматра су

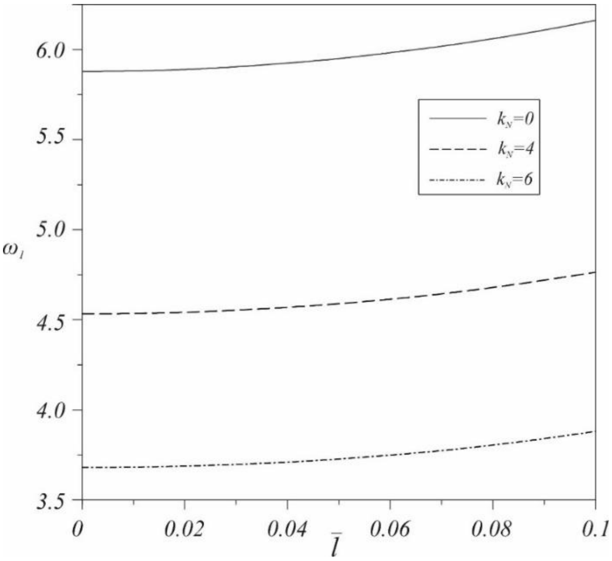
$$L = 100nm, a = 1nm, b = 0.5nm, \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} E_m &= 201.04 \cdot 10^9 Pa, \rho_m = 8166 kg/m^3, \\ E_c &= 348.43 \cdot 10^9 Pa, \rho_c = 2370 kg/m^3, \end{aligned} \tag{3.27}$$

где су E и ρ редом, модул еластичности и густина материјала, док индекси m и c одговарају материјалима типа метал и керамика.

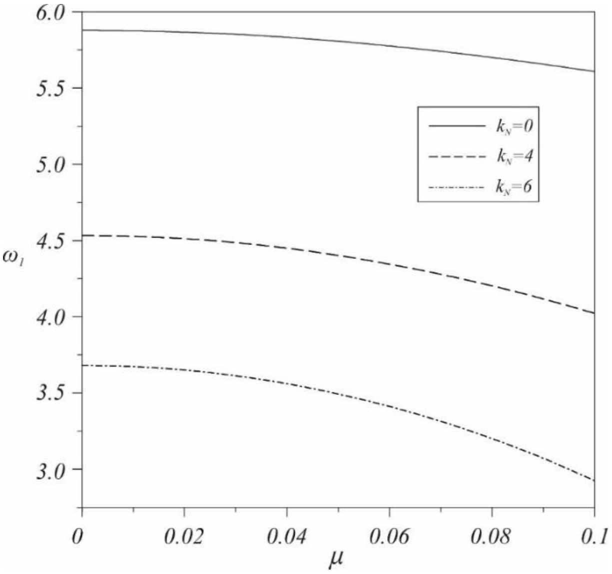
Слика 3.5а приказује промену основне кружне фреквенције осциловања у функцији промене дужине скале за различите вредности притисне аксијалне силе. На слици 3.5б приказана је промена основне кружне фреквенције у функцији нелоколаног параметра за различите вредности притисне аксијалне силе. Може се закључити да повећање нелокалног параметра доводи до смањења фреквенције осциловања. Са друге стране, повећање утицаја дужине скале доводи до повећања фреквенције осциловања, што је и објашњено у претходном поглављу, а то је резултат компактније структуре материјала на микро и нано скали. Ова појава се објашњава тиме што повећање нелокалног параметра доводи до смањења крутости. Насупрот томе, утицај дужине скале утиче другачије. Због тензора градијента деформације, са повећањем овог утицаја крутост се повећава. То доводи до повећања кружних фреквенција осциловања.

Поред тога, на слици 3.6. може се видети утицај притисне аксијалне силе, где њено повећање доводи до смањења фреквенције осциловања. На слици 3.6. приказана је континуална промена кружне фреквенције у функцији притисне аксијалне силе. Може се закључити да се значајно смањење фреквенције осциловања појављује у непосредној близини критичне вредности аксијалне силе.



Слика 3.5а. Промена основне кружне фреквенције осциловања функционално градијентне наногреде ω_1 са променом утицаја дужине скале за различите вредности притисне аксијалне силе

У табели 3.4. представљени су резултати промене фреквенције осциловања са променом нелокалног параметра и дужине скале. Примећени су посебни утицаји нелокалног параметра и утицаја дужине скале за вредности које су веће од 0,02. Такође, за вредности $\mu > \bar{l}$ значајно је приметан утицај смањења крутости. Са друге стране, за вредности $\mu < \bar{l}$ доводи до повећања крутости и повећању фреквенције осциловања.



Слика 3.5б. Промена основне кружне фреквенције осциловања функционално градијентне наногреде ω_1 са променом нелокалног параметра μ за различите вредности аксијалне притисне силе

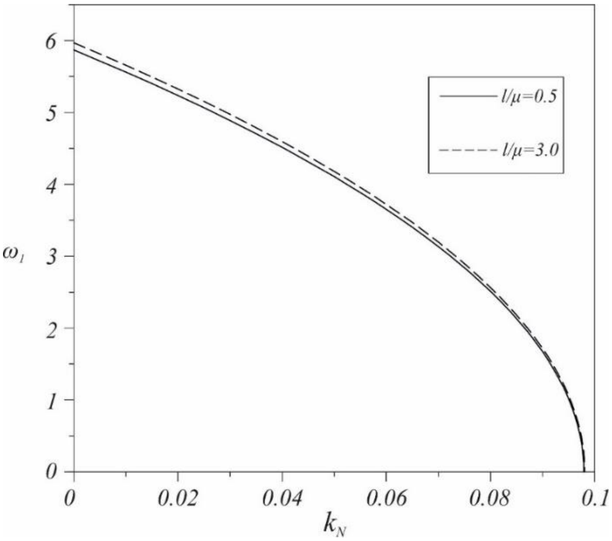
Табела 3.4. Бездимензиона критична сила извијања за различите вредности ефекта дужине скале $\bar{l}$ и нелокалног параметра μ

μ	$\bar{l}$	$k_N = 0$	$k_N = 4$	$k_N = 6$
0	0	5,8780	4,5329	3,6804
0,01		5,8751	4,5276	3,6729
0,02		5,8665	4,5118	3,6506
0	0,01	5,8809	4,5352	3,6822
0,01		5,8780	4,5299	3,6748
0,02		5,8694	4,5141	3,6524
0	0,02	5,8896	4,5419	3,6877
0,01		5,8867	4,5366	3,6803
0,02		5,8780	4,5208	3,6581

У овом делу поглавља приказана је промена основне карактеристике осциловања Timoshenko-ове функционално градијентне слободно ослоњене наноногреде. Резултати промене основне кружне фреквенције осциловања у зависности од аксијалне притисне силе, нелокалног параметра и утицаја дужине скале представљени су кроз дијаграме и табеле. На основу анализе, закључено је да ови параметри, заједно са дејством аксијалне притисне силе, имају значајан утицај на промену основне кружне фреквенције наноструктуре.

Утврђено је да повећање нелокалног параметра доводи до смањења фреквенције осциловања. Ова појава се физички може објаснити тиме што повећање нелокалног параметра појачава нелокалне утицаје у суседним тачкама, што доводи до смањења крутости и фреквенције осциловања.

Са друге стране, повећање утицаја дужине скале доводи до повећања фреквенције осциловања наноногреде. Ова појава се објашњава повећањем крутости структуре које се јавља са порастом утицаја дужине скале. Ово последично доводи до већих вредности кружних фреквенција осциловања. Насупрот томе, аксијална притисна сила има супротан утицај, смањујући фреквенцију осциловања.



Слика 3.6. Промена основне кружне фреквенције осциловања функционално градијентне наногреде ω_1 са променом притисне аксијалне силе k_N

4. Кружна фреквенција и извијање услед термичког утицаја слободно ослоњене функционално градијентне Euler-Bernoulli-јеве наногреде применом нелокалне теорије градијента деформације вишег реда

У овом поглављу анализирана је промена основне осцилаторне карактеристике функционално градијентне наногреде применом нелокалне теорије градијента деформације вишег реда. Постоји велики број метода за статичку и динамичку анализу наноструктура, као што су молекуларна динамичка симулација [27, 28] и некласична механика континуума. Eringen-ова нелокална теорија [7, 8] је пример некласичне теорије континуума која узима у обзир утицаје зависне од величине. Према овој теорији, напон у одређеној зони не зависи само од деформације у тој зони, већ и од деформација у околним зонама. Теорије градијента еластичности [9, 29], су још један пример некласичне теорије континуума. Оне третирају материјале и структуре као скуп атома са градијентима деформације вишег реда на малим скалама.

Lim и коаутори [11] развили су нелокалну теорију градијента деформације вишег реда. У њиховој теорији, утицај дужине скале и нелокални параметри представљају различите физичке карактеристике. За разлику од Eringen-ове теорије, која не узима у обзир нелокални напон вишег реда, теорија градијента деформације узима у обзир само локалне градијенте деформације вишег реда. Стога, нелокална теорија градијента деформације вишег реда се ослања на утицаје поља градијента деформације као и на глобалне нелокалне утицаје.

Истраживање извијања наноносача услед термичких утицаја било је предмет интензивног истраживања у последњих десетак година. Ebrahimi и коаутори [21] истраживали су утицај термичког ефекта на слободне осцилације функционално градијентних Euler-Bernoulli-јевих наноносача користећи метод диференцијалне трансформације. Исти аутори [22], анализирали су слободне осцилације и извијање Timoshenko-вих носача под термичким утицајем, користећи класичну нелокалну теорију еластичности. У овом истраживању анализирана је промена бездимензионе фреквенције осциловања у зависности од температуре и експонента запреминског удела материјала.

Анализа карактеристика извијања функционално градијентних микро-носача у термичком окружењу приказана је у раду [30], Модел који је узет у разматрање односио се на континуално повезан носач еластичним темељом Pasternak-овог типа изложен аксијалној притисној сили. Анализиран је утицај порозности материјала и термичких утицаја на промену фреквенције осциловања наноносача. Динамичке једначине добијене су применом Hamilton-овог принципа, а решења су одређена методом диференцијалне трансформације.

Динамичко понашање „паметних“ наноструктура анализирано је у раду [31]. Разматран је утицај магнетних, електричних и еластичних својстава функционално градијентних наноносача на њихове осцилације. У овом раду примењена је теорија деформације смицања вишег реда са тригонометријском функцијом деформације. Li и коаутори [32] анализирали су слободне осцилације функционално градијентних Timoshenko-вих и Euler-Bernoulli-јевих наноносача, применом нелокалне теорије градијента деформације. У њиховом истраживању, карактеристике материјала су се мењале у зависности од експонента запреминског удела у трансверзалном правцу. Аутори су приказали утицај овог експонента и дужине скале на промену фреквенције осциловања слободно ослоњеног функционално градијентног наноносача.

Khaniki и коаутори [33] разматрали су трансверзалне осцилације Euler-Bernoulli-јевих наноносача применом нелокалне теорије градијента деформације. Резултати су добијени генерализованом методом диференцијалне квадратуре. Динамичка нестабилност Timoshenko-вих носача анализирана је у раду [34], узимањем у обзир утицаја термичког и магнетног дејства. Једначине су изведене применом Hamilton-овог принципа, применом нелокалне теорије градијента деформације.

Lu и коаутори [35] анализирали су слободне осцилације наноносача применом теорије вишег реда са синусном деформацијом смицања и нелокалном теоријом градијента деформације. За одређивање кружне фреквенције осциловања слободно ослоњених наноносача примењен је Navier-ов метод. Barati и коаутори [36] анализирали су простирање таласа кроз порозни систем два еластично повезана носача слојем Pasternak-овог типа. Ова анализа је извршена применом генерализоване нелокалне bi-Helmholtz теорије градијента еластичности.

Pavlović и коаутори [37, 38] анализирали су стабилност наноносача применом нелокалне теорије градијента деформације вишег реда. На основу Lyapunov-љевог метода, аутори су одредили границе скоро сигурне асимптотске стабилности и нестабилности аналитичким и нумеричким методама као и применом Monte Carlo симулације.

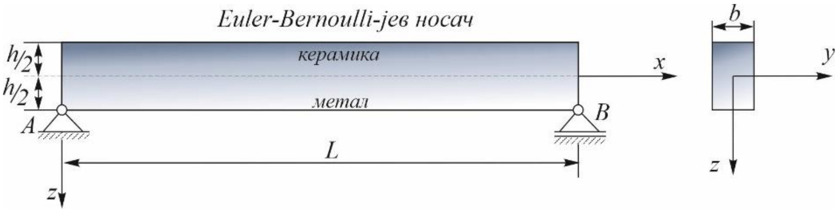
У овом поглављу анализирана је промена фреквенције осциловања као и критична сила извијања функционално градијентног слободно ослоњеног наноносача, применом нелокалне теорије градијента деформације вишег реда. Динамичке једначине изведене су применом Hamilton-овог принципа, а резултати су добијени аналитичким методама, као што је приказано у раду [23]. Добијени резултати упоређени су са резултатима објављених у наведеним референцама. У овом поглављу такође је анализиран утицај нелокалних параметара и дужине скале на фреквенцију осциловања и критичну силу извијања, као и утицај експонента запреминског удела на динамичко понашање наноносача.

4.1 Математички модел

Размотримо функционално градијентну слободно ослоњену наногреду, где се карактеристике материјала мењају у трансверзалном правцу. Геометрија наногреде дефинисана је дужином L и правоугаоним попречним пресеком, ширине b и висине h. С обзиром да се разматра наногреда под дејством силе услед термичког утицаја, на основу закона о мешању, ефективне карактеристике материјала могу бити представљене у облику [39]

$$P_f\left(T,z\right)=P_c\left(T\right)V_c\left(z\right)+P_m\left(T\right)V_m\left(z\right), \tag{4.1}$$

где су $P_c\left(T\right)$ и $P_m\left(T\right)$, редом температурно зависна механичка својства керамике Si_3N_4 на горњој површини греде $z=h/2$ и метала $SUS304$ која одговарају доњој површини греде $z=-h/2$.



Слика 4.1. Геометрија функционално градијентне Euler-Bernoulli-јеве нанограде

Температурно зависне карактеристике материјала, као што су модул еластичности, густина, коефицијент топлотног ширења и сл., могу се записати у облику [40]

$$P(T) = P_0\left(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3\right), \tag{4.2}$$

Где P_0, P_{-1}, P_1, P_2 и P_3 представљају коефицијенте који су приказани у табели 4.1. а који одговарају материјалима Si_3N_4 и $SUS304$. На крају, закон расподеле материјала греде може бити представљен као

$$P(z,T) = \left(P_c(T) - P_m(T)\right)\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p + P_m(T). \tag{4.3}$$

Како је већ напоменуто да ће у овом раду бити примењена нелокална теорија градијента деформације вишег реда, нелокални напон у одређеној зони структуре, не зависи само од деформације у тој зони већ и од деформација у њеној околини. На основу те теорије, функција потенцијалне енергије може се записати у следећем облику

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\int_V \alpha_0\left(\left|x - x'\right|, e_0a\right)\varepsilon'_{kl}\,dV' \\ &+ \frac{l^2}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij,m}\int_V \alpha_1\left(\left|x - x'\right|, e_1a\right)\varepsilon'_{kl,m}\,dV', \end{aligned} \tag{4.4}$$

при чему је C_{ijkl} тензор модула еластичности, ε_{ij} и ε'_{kl} представљају Декартове компоненте тензора деформације у тачкама x и x', док су α_0 и α_1 одговарајуће функције језгра.

Табела 4.1. Температурно зависни коефицијенти модула еластичности E, коефицијента топлотне експанзије α густине материјала ρ и кондуктивност за материјале Si_3N_4 и $SUS304$ [21, 22, 23, 24, 41, 42]

Материјал		P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
Si_3N_4	$E\,[Pa]$	$348.43 \cdot 10^9$	0	$-3.01 \cdot 10^{-4}$	$2.16 \cdot 10^{-7}$	$-8.946 \cdot 10^{-11}$
	$\alpha\,\left[K^{-1}\right]$	$5.8723 \cdot 10^6$	0	$9.095 \cdot 10^{-4}$	0	0
	$\rho\,\left[kg/m^3\right]$	2370	0	0	0	0
	$\kappa\,\left[W/mK\right]$	13.723	0	$-1.032 \cdot 10^{-3}$	$5.466 \cdot 10^{-7}$	$-7.876 \cdot 10^{-11}$
$SUS304$	$E\,[Pa]$	$201.04 \cdot 10^9$	0	$3.079 \cdot 10^{-4}$	$-6.534 \cdot 10^{-7}$	0
	$\alpha\,\left[K^{-1}\right]$	$12.330e \cdot 10^6$	0	$8.086 \cdot 10^{-4}$	0	0
	$\rho\,\left[kg/m^3\right]$	8166	0	0	0	0
	$\kappa\,\left[W/mK\right]$	15.379	0	$-1.264 \cdot 10^{-3}$	$2.092 \cdot 10^{-6}$	$-7.223 \cdot 10^{-10}$

На основу претходне једначине (4.4), класични тензор напона $\boldsymbol{\sigma}$, тензор напона вишег реда $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ и укупан тензор напона $\mathbf{t}$ могу се записати као

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \int_V \boldsymbol{\alpha}_0\left(\left|x-x'\right|, e_0 a\right)\mathrm{C} : \boldsymbol{\varepsilon}' dV', \\
\boldsymbol{\sigma}^{(1)} &= l^2 \int_V \boldsymbol{\alpha}_1\left(\left|x-x'\right|, e_0 a\right)\mathrm{C} : \nabla\boldsymbol{\varepsilon}' dV', \\
t &= \boldsymbol{\sigma} - \nabla\boldsymbol{\sigma}^{(1)}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Конститутивне нелокалне релације у диференцијалном облику на основу нелокалне теорије градијента деформације вишег реда биће

$$\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)t_{xx}= \\ E\left[\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-l^2\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\varepsilon_{xx}, \tag{4.6}$$

где су нелокални параметри облика $\mu_0=\left(e_0a\right)^2$ и $\mu_1=\left(e_1a\right)^2$. Укупан тензор напона у диференцијалном облику је

$$t_{xx}=\sigma_{xx}-\frac{\partial\sigma_{xx}^{(1)}}{\partial x}. \tag{4.7}$$

при чему су σ_{xx} нормални напон и $\sigma_{xx}^{(1)}$ нормални напон вишег реда.

Поље померања Euler-Bernoulli-јеве греде за неку материјалну тачку у правцима x, y и z, може се записати у облику

$$q_1\left(x,z,t\right)=u\left(x,t\right)-z\frac{\partial w\left(x,t\right)}{\partial x}, \tag{4.8а}$$

$$q_3\left(x,z,t\right)=w\left(x,t\right), \tag{4.8б}$$

где су u и w померања тачке на структури у x и z правцу. Применом једначина (4.8а) и (4.8б) компонентна дилатација може се записати у облику

$$\varepsilon_{xx}\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_1}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w\left(x,t\right)}{\partial x^2}. \tag{4.9}$$

Динамичке једначине могу се одредити применом Hamilton-овог принципа

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta U + \delta V - \delta T \right) dt = 0, \tag{4.10}$$

у временском интервалу $t_1 < t < t_2$. Варијација потенцијалне енергије Euler-Bernoulli-јевог носача применом нелокалне теорије градијента деформације може се изразити у облику

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \left(\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}^{(1)} \delta \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} \right) dv = \\ \delta U &= \int_L \left(N \frac{\partial u}{\partial x} - M \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx + \left[N^{(1)} \delta \frac{\partial u}{\partial x} - M^{(1)} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_0^L , \end{aligned} \tag{4.11}$$

где је нормална сила

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA. \tag{4.12}$$

Варијација кинетичке енергије Euler-Bernoulli-јевог носача је

$$\begin{aligned} \delta T &= \frac{1}{2} \int_v \rho(z) \delta \left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial q_3}{\partial t} \right)^2 \right) dv \\ \delta T &= \int_0^L \left(I_0 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \right) \right) \right. \\ &\quad - I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) \\ &\quad \left. + I_2 \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \right) \right) dx, \end{aligned} \tag{4.13}$$

при чему је инерцијална карактеристика носача

$$I_1 = \int_A z \rho(z) dA. \tag{4.14}$$

С обзиром на термички утицај, виртуални рад биће изражен у облику

$$\delta V=\int_V E\left(T,z\right)\alpha\left(T,z\right)\left(T-T_0\right)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x}dv,$$
$$\delta V=-\int_L N^T\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x}dx. \qquad (4.15)$$

Заменом једначина (4.11), (4.13) и (4.15) у једначину (4.10) добијају се динамичке једначине Euler-Bernoulli-јевог носача у облику

$$\delta u\colon\ \frac{\partial N}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-I_1\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}, \qquad (4.16а)$$

$$\delta w\colon\ \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-N^T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}-I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}, \qquad (4.16б)$$

где су гранични услови који одговарају класичној теорији у тачкама $x=0$ и $x=L$

$$N=0 \quad \text{или} \quad u=0, \qquad (4.17а)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}-I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}=0 \quad \text{или} \quad w=0, \qquad (4.17б)$$

$$M=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0, \qquad (4.17в)$$

док су гранични услови који одговарају теорији вишег реда у тачкама $x=0$ и $x=L$

$$N^{(1)}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad (4.18а)$$

$$M^{(1)}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \qquad (4.18б)$$

Умајући у виду релацију (4.6) и њеном интеграцијом по површини, нормална сила и момент савијања су

$$\begin{aligned}&\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)N=\\&=A_{xx}\left[\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-l^2\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}-\\&-B_{xx}\left[\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-l^2\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\end{aligned} \tag{4.19а}$$

$$\begin{aligned}&\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)M=\\&=B_{xx}\left[\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-l^2\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}-\\&-C_{xx}\left[\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-l^2\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\end{aligned} \tag{4.19б}$$

где су елементи матрице крутости

$$\left(A_{xx},B_{xx},C_{xx}\right)=\int_A\left(1,z,z^2\right)E\left(z,T\right)dA. \tag{4.20}$$

Заменом динамичких једначина (4.16а) и (4.16б) у једначине (4.19а) и (4.19б), изрази за нормалну силу и момент савијања у експлицитном облику

$$\begin{aligned}&N=\mathcal{L}_2\left[I_0\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}-I_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}\right]+\\&+A_{xx}\left[\mathcal{L}_1-l^2\mathcal{L}_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}-B_{xx}\left[\mathcal{L}_1-l^2\mathcal{L}_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\end{aligned} \tag{4.21а}$$

$$M=\mathcal{L}_2\left[N^T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}-I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}\right]+ \\ +B_{xx}\left[\mathcal{L}_1-l^2\mathcal{L}_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}-C_{xx}\left[\mathcal{L}_1-l^2\mathcal{L}_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{4.21б}$$

при чему су линеарни диференцијални оператори

$$\mathcal{L}_0=1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2},\ \mathcal{L}_1=1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ \mathcal{L}_2=\left(\mu_0+\mu_1\right)-\mu_0\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{4.22}$$

Заменом једначина (4.21а) и (4.21б) у динамичке једначине (4.16а) и (4,16б), добијају се нелокалне диференцијалне једначине Euler-Bernoulli-јеве функционално градијентне наногреде

$$\mathcal{L}_3\left[A_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-B_{xx}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right]-\mathcal{L}_4\left[I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-I_1\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right]=0, \tag{4.23а}$$

$$\mathcal{L}_3\left[B_{xx}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-C_{xx}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right]- \\ -\mathcal{L}_4\left[N^T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}-I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}\right]=0, \tag{4.23б}$$

где су оператори $\mathcal{L}_3=\mathcal{L}_1-l^2\mathcal{L}_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\mathcal{L}_4=1-\mathcal{L}_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Након примене бездимензионих параметара усвојених у облику

$$\xi=\frac{x}{L},\ U\left(\xi,\tau\right)=\frac{u\left(x,t\right)}{L}, \\ W\left(\xi,\tau\right)=\frac{w\left(x,t\right)}{L},\ \tau=\frac{t}{L^2}\sqrt{\frac{E_c\left(T_c\right)I}{\rho_c\left(T_c\right)A}}, \tag{4.24}$$

где $E_c\left(T_c\right)$ и $\rho_c\left(T_c\right)$ представљају модул еластичности и густину за материјал Si_3N_4 на температури T_c, $I=\frac{bh^3}{12}$ момент инерције за осу код греде правоугаоног попречног пресека и $A=bh$ површину попречног пресека, добија се бездимензиона форма система диференцијалних једначина (4.22) у следећем облику

$$\mathcal{L}_{(3)}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}-k_B\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3}\right]-k_I\mathcal{L}_{(4)}\left[k_{I0}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}-k_{I1}\frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \tau^2}\right]=0, \quad (4.25а)$$

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{(3)}\left[k_B\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}-k_C\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4}\right]-\mathcal{L}_{(4)}\left[k_N\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+\right.\\ \left.+k_I\left(k_{I0}\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}+k_{I1}\frac{\partial^3 U}{\partial \xi \partial \tau^2}-k_{I2}\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \tau^2}\right)\right]=0,\end{gathered} \quad (4.25б)$$

где су уведене смене

$$\begin{gathered}k_B=\frac{B_{xx}}{A_{xx}L},\ k_C=\frac{C_{xx}}{A_{xx}L^2},\ k_N=\frac{N^T}{A_{xx}},\\ k_I=\frac{I}{AL^2},\ k_{I0}=\frac{E_c\left(T_c\right)I_0}{\rho_c\left(T_c\right)A_{xx}},\\ k_{I1}=\frac{E_c\left(T_c\right)I_1}{\rho_c\left(T_c\right)A_{xx}L},\ k_{I2}=\frac{E_c\left(T_c\right)I_2}{\rho_c\left(T_c\right)A_{xx}L^2}.\end{gathered} \quad (4.26)$$

Диференцијални оператори у бездимензионој форми, представљени су следећим изразима

$$\begin{gathered}\nabla=\frac{\partial}{\partial \xi},\ \mathcal{L}_{(0)}=1-k_{\mu 0}\nabla^2,\ \mathcal{L}_{(1)}=1-k_{\mu 1}\nabla^2,\\ \mathcal{L}_{(2)}=k_{\mu 0}+k_{\mu 1}-k_{\mu 0}k_{\mu 1}\nabla^2,\\ \mathcal{L}_{(3)}=\mathcal{L}_{(1)}-k_l\mathcal{L}_{(0)}\nabla^2,\ \mathcal{L}_{(4)}=\mathcal{L}_{(0)}\mathcal{L}_{(1)}=1-\mathcal{L}_{(2)}\nabla^2.\end{gathered} \quad (4.27)$$

Нелокални параметри као и утицај дужине скале у бездимензионом облику су: $k_l = \dfrac{l^2}{L^2}$, $k_{\mu 0} = \dfrac{\mu_0}{L^2}$, $k_{\mu 1} = \dfrac{\mu_1}{L^2}$.

4.2 Различити облици термичког утицаја

При униформном порасту температуре, такозваном *uniform temperature rise* (UTR), температура функционално градијентног наноносача равномерно се повећава за ΔT. Пошто је температура константна у правцу z, закључује се da је:

$$T(z) = T_0 + \Delta T = const. \tag{4.28}$$

У случају линеарног пораста температуре (Linear Temperature Rise – LTR), температура функционално градијентног наноносача линеарно се мења у тансверзалном правцу. Овај тип температурне промене утиче на понашање носача, што се мора узети у обзир приликом анализе његових механичких својстава у следећем облику

$$T(z) = T_m + \Delta T\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right). \tag{4.29}$$

Температура горњег и доњег слоја наногреде редом је дефинисана као $T_c = T\left(\dfrac{h}{2}\right)$ и $T_m = T\left(-\dfrac{h}{2}\right)$, где је $\Delta T = T_c - T_m$. У овом случају, температура доњег слоја подешена је на одређену вредност: $T_m = T_0 + 5 = 305\ \mathrm{K}$.

У случају проводљивости топлоте у трансверзалном правцу, температура функционално градијентне наногреде има нелинеарну промену (Nonlinear Temperature Rise - NLTR) у трансверзалном правцу.

У том контексту, проблем се може описати диференцијалном једначином која је приказана у раду [41]

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\kappa\left(z,T\right)\frac{dT\left(z\right)}{dz}\right)=0 \tag{4.30}$$

где су познате температуре на на горњем и доњем слоју наногреде: $T_c=T\left(\frac{h}{2}\right)$ и $T_m=T\left(-\frac{h}{2}\right)$. Да би се одредило аналитичко решење једначине (4.29), уобичајено је претпоставити да топлотна проводљивост не зависи од температуре, $\kappa=\kappa\left(z\right)$. Уз ову претпоставку, једначина (4.29) може бити изражена у следећем облику

$$T\left(z\right)=T_m+\frac{\Delta T}{\lambda}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{ki+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)^{ki+1}\left(\frac{\kappa_m-\kappa_c}{\kappa_m}\right)^{i}, \tag{4.31}$$

где је

$$\lambda=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{ki+1}\left(\frac{\kappa_m-\kappa_c}{\kappa_m}\right)^{i}. \tag{4.32}$$

4.3 Нумеричка анализа

У овом делу приказан је аналитички облик природне фреквенције као основне карактеристике осцилација на основу једначина (4.25). За израчунавање фреквенције осциловања и критичне силе извијања, са узетим у обзир термичким утицајем слободно ослоњеног Euler-Bernoulli носача, примењен је Navier-ов метод. Функције померања, која задовољавају граничне услове, претпостављају се у облику периодичних функција времена

$$U\left(\xi,\tau\right)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n\cos\left(n\pi\xi\right)e^{i\omega_n\tau}, \qquad (4.33а)$$

$$W\left(\xi,\tau\right)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n\sin\left(n\pi\xi\right)e^{i\omega_n\tau}, \qquad (4.33б)$$

где је $i=\sqrt{-1}$, а $U_j, W_j,\left(j=1,2,..n\right)$ представљају непознате Fourier-ове коефицијенте.

Заменом претпостављених решења (4.33) у диференцијалне једначине (4.25), као и елиминацијом аксијалног померања $U\left(\xi,\tau\right)$ из једначина (4.25), добија се диференцијална једначина облика

$$\left(\mathcal{L}_{(5)}\frac{\partial^4}{\partial\tau^4}+\mathcal{L}_{(6)}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\mathcal{L}_{(7)}\right)W=0, \qquad (4.34)$$

где су линеарни диференцијални оператори облика

$$\mathcal{L}_{(5)}=k_I^2\left(\beta_1\nabla^2-k_{I0}^2\right)\mathcal{L}_{(4)}{}^2, \qquad (4.35а)$$

$$\mathcal{L}_{(6)}=k_I\mathcal{L}_{(4)}\left(k_{I0}\mathcal{L}_{(3)}\nabla^2-k_Nk_{I0}\mathcal{L}_{(4)}\nabla^2-\beta_2\mathcal{L}_{(3)}\nabla^4\right), \qquad (4.35б)$$

$$\mathcal{L}_{(7)}=\mathcal{L}_{(3)}\left(\beta_3\mathcal{L}_{(3)}\nabla^6+k_N\mathcal{L}_{(4)}\nabla^4\right). \qquad (4.35в)$$

У претходним изразима коришћене су следеће смене

$$\beta_1=k_{I0}k_{I2}-k_{I1}^2, \qquad (4.36а)$$

$$\beta_2=k_{I2}-2k_Bk_{I1}+k_Ck_{I0}, \qquad (4.36а)$$

$$\beta_3=k_C-k_B^2. \qquad (4.36а)$$

Карактеристичну једначину добијамо заменом једначине (4.33б) у једначину (4.34)

$$A_\omega \omega_n^4 + B_\omega \omega_n^2 + C_\omega = 0\,, \tag{4.37}$$

где су коефицијенти

$$A_\omega = -\alpha_4^2 k_I^2 \left[\beta_1 n^2 \pi^2 + k_{I0}^2 \right], \tag{4.38а}$$

$$B_\omega = \alpha_4 k_I \left[\alpha_3 k_{I0} n^2 \pi^2 + \beta_2 \alpha_3 n^4 \pi^4 - k_N k_{I0} \alpha_4 n^2 \pi^2 \right], \tag{4.38б}$$

$$C_\omega = \alpha_3 n^4 \pi^4 \left(k_N \alpha_4 - \alpha_3 \beta_3 n^2 \pi^2 \right), \tag{4.38в}$$

$$\alpha_0 = 1 + k_{\mu 0} n^2 \pi^2\,, \tag{4.38г}$$

$$\alpha_1 = 1 + k_{\mu 1} n^2 \pi^2\,, \tag{4.38д}$$

$$\alpha_2 = k_{\mu 0} + k_{\mu 1} + k_{\mu 0} k_{\mu 1} n^2 \pi^2\,, \tag{4.38ђ}$$

$$\alpha_3 = \alpha_1 + k_l \alpha_0 n^2 \pi^2\,, \tag{4.38е}$$

$$\alpha_4 = 1 + \alpha_2 n^2 \pi^2\,. \tag{4.38ж}$$

Корени карактеристичне једначине (4.37) су

$$\omega_{12n} = \pm \sqrt{\frac{-B_\omega \pm \sqrt{B_\omega^2 - 4A_\omega C_\omega}}{2A_\omega}}\,, \tag{4.39а}$$

$$\omega_{34n} = \pm \sqrt{\frac{B_\omega \pm \sqrt{B_\omega^2 - 4A_\omega C_\omega}}{2A_\omega}}\,, \tag{4.39б}$$

одакле ће се разматрати само реална решења при анализи кружне фреквенције осциловања.

Критична температура може се одредити из услова да је фреквенција осциловања једнака нули, а овај услов је задовољен уколико је $C_{\omega}=0$. Након одговарајућих трансформција, утицај дужине скале у бездимензионом облику може се представити као

$$k_l=\frac{1+k_{\mu 1}n^2\pi^2}{1+k_{\mu 0}n^2\pi^2}\frac{k_N\left(1+k_{\mu 0}n^2\pi^2\right)-\alpha_7 n^2\pi^2}{\alpha_7 n^4\pi^4}. \tag{4.40}$$

4.4 Резултати и дискусија

У овом делу анализирани су утицаји промене термичких услова, расподеле функционално градијентног материјала, експонента запреминског удела материјала, као и нелокалних параметара и параметра дужине скале на промену фреквенције осциловања. Функционално градијентни носач сачињен је од два материјала, где је доњи слој у потпуности направљен од материјала $SUS304$, док је горњи слој у потпуности направљен од материјала Si_3N_4. Носач има материјалне карактеристике приказане у табели 4.1, док су геометријске карактеристике: дужина $L=10\,\mathrm{nm}$, ширина $b=1\,\mathrm{nm}$ и висина h која се мења и биће разматрано неколико случајева.

Валидација добијених резултата извршена је упоређивањем са резултатима објављеним у раду [21]. Резултати фреквенције осциловања слободно ослоњеног носача приказани су у Табели 4.2 за различите вредности бездимензионог нелокалног параметра $k_{\mu_0}=0;\,0{,}01;\,0{,}02$, различите промене температуре $\Delta T=0,\,20,\,40$, као и експонента запреминског удела материјала $p=0{,}2;\,1{,}5$. Резултати у Табели 4.2 обухватају утицај дужине скале $l=0$ и нелокалног параметра вишег реда $\mu_1=0$.

Референтни радови [21] и [22] приказују резултате фреквенције осциловања и критичне температуре за различите вредности нелокалног параметра μ_0 и експонента запреминског удела p. У овом раду одређене су фреквенције осциловања и критичне температуре при промени вредности нелокалног параметра и експонента запреминског удела, као и утицаја нелокалног параметра вишег реда μ_1 и параметра дужине скале l.

Табела 4.2. Основна кружна фреквенција ω_1 слободно ослоњене наногреде

k_{μ_0}	ΔT [K]	$p=0{,}2$		$p=1$		$p=5$	
		Реф. [21]		Реф. [21]		Реф. [21]	
0	0	8,6845	8,6846	7,0638	7,0638	6,0496	6,0497
	20	8,3092	8,3151	6,6661	6,6708	5,6474	5,6514
	40	7,9105	7,9157	6,2332	6,2374	5,2019	5,2054
0,01	0	8,2853	8,2853	6,7390	6,7391	5,7715	5,7716
	20	7,8910	7,8966	6,3209	6,3254	5,3484	5,3522
	40	7,4700	7,4750	5,8629	5,8668	4,8759	4,8792
0,02	0	7,9365	7,9365	6,4553	6,4554	5,5286	5,5286
	20	7,5239	7,5292	6,0175	6,0218	5,0853	5,0889
	40	7,0812	7,0859	5,5346	5,5382	4,5859	4,5890

Табела 4.3. Утицај нелокалних параметара и утицаја дужине скале на промену критичне температуре ΔT_{cr} [K] слободно ослоњене греде за LTR случај ($p = 0,1$ и $L/h = 50$)

$\mu_0 \left[nm^2 \right]$	$\mu_1 \left[nm^2 \right]$	$l^2 \left[nm^2 \right]$			
		0	1	2	3
0	0	68,9262	76,4676	83,9636	91,4150
	1	68,9262	75,7920	82,6202	89,4112
	2	68,9262	75,2276	81,4971	87,7354
	3	68,9262	74,7488	80,5443	86,3130
1	0	62,0220	69,6055	77,1428	84,6348
	1	62,0220	68,9262	75,792	82,6202
	2	62,0220	68,3586	74,6628	80,9352
	3	62,0220	67,8772	73,7048	79,5051
2	0	56,2260	63,8453	71,4177	78,9441
	1	56,2260	63,1628	70,0607	76,9203
	2	56,2260	62,5925	68,9262	75,2276
	3	56,2206	62,1089	67,9637	73,7908
3	0	51,2912	58,9412	66,5437	74,0996
	1	51,2912	58,2559	65,1813	72,0679
	2	51,2912	57,6834	64,0423	70,3686
	3	51,2912	57,1978	63,0760	68,9262

Резултати приказани у табелама 4.3 – 4.7 представљају критичну температуру слободно ослоњене функционално градијентне наногреде. У овим табелама приказана је њена промена за различите вредности нелокалних параметара и дужине скале за два случаја функције промене температуре: линеарна (LTR) и нелинеарна функција промене (NLTR). Представљени резултати показују да повећање утицаја дужине скале доводи до повећања критичне температуре.

Табела 4.4. Утицај нелокалних параметара и утицаја дужине скале на промену критичне температуре ΔT_{cr} [K] слободно ослоњене греде за LTR случај ($p=1$ и $L/h=50$)

$\mu_0\ \left[nm^2\right]$	$\mu_1\ \left[nm^2\right]$	$l^2\ \left[nm^2\right]$			
		0	1	2	3
0	0	49,1109	54,8391	60,5418	66,2192
	1	49,1109	54,3256	59,5191	64,6917
	2	49,1109	53,8966	58,6644	63,4145
	3	49,1109	53,5328	57,9394	62,3309
1	0	43,8746	49,6265	55,3524	61,0528
	1	43,8746	49,1109	54,3256	59,5191
	2	43,8746	48,6801	53,4674	58,2368
	3	43,8746	48,3148	52,7395	57,1488
2	0	39,4848	45,2567	51,0024	56,7221
	1	39,4848	44,7393	49,9720	55,1832
	2	39,4848	44,3070	49,1109	53,8966
	3	39,4848	43,9404	48,3804	52,8049
3	0	35,7514	41,5405	47,3031	53,0395
	1	35,7514	41,0216	46,2697	51,4961
	2	35,7514	40,5880	45,4060	50,2057
	3	35,7514	40,2204	44,6735	49,1109

На слици 4.2 приказана је зависност критичне температуре од нелокалног параметра μ_0 за различите вредности нелокалног параметра вишег реда μ_1 и утицаја дужине скале l. Приказани су резултати за нелокалну теорију градијента деформације нижег реда (LONGST), где су μ_0 и μ_1 једнаки, као и за нелокалну теорију градијента деформације вишег реда (HONGST), где су μ_0 и μ_1 различити. Такође, приказани су резултати класичне теорије континуума (Classic), као и Eringen-ове нелокалне теорије еластичности (ENCT).

Табела 4.5. Утицај нелокалних параметара и утицаја дужине скале на промену критичне температуре ΔT_{cr} [K] слободно ослоњене греде за NLTR случај ($p=0{,}1$ и $L/h=50$)

$\mu_0\ \left[nm^2\right]$	$\mu_1\ \left[nm^2\right]$	$l^2\ \left[nm^2\right]$			
		0	1	2	3
0	0	69,8527	77,5239	85,1543	92,7448
	1	69,8527	76,8365	83,7864	90,7032
	2	69,8527	76,2621	82,643	88,9959
	3	69,8527	75,775	81,673	87,547
1	0	62,8347	70,5435	78,211	85,8378
	1	62,8347	69,8527	76,8365	83,7864
	2	62,8347	69,2756	75,6875	82,071
	3	62,8347	68,7861	74,7128	80,6152
2	0	56,9468	64,6876	72,3865	80,0441
	1	56,9468	63,994	71,0064	77,9845
	2	56,9468	63,4145	69,8527	76,2621
	3	56,9468	62,923	68,8741	74,8004
3	0	51,9362	59,7046	67,4304	75,1145
	1	51,9362	59,0085	66,0455	73,0478
	2	51,9362	58,4269	64,8878	71,3195
	3	51,9362	57,9337	63,9058	69,8527

Такође, може се закључити да повећање нелокалног параметра μ_0 доводи до смањења критичне температуре. На слици 4.3 приказана је зависност критичне температуре и нелокалног параметра вишег реда μ_1 , за различите вредности нелокалног параметра μ_0. И у овом случају, закључује се да са повећањем нелокалног параметра μ_1 долази до смањења критичне температуре.

За боље разумевање овог проблема, промена критичне температуре функционално градијентне наногреде представљена је на слици 4.4 у функцији промене параметра дужине скале и за различите вредности нелокалних параметара μ_0 и μ_1.

Табела 4.6. Утицај нелокалних параметара и ефекта дужине скале на промену критичне температуре ΔT_{cr} [K] слободно ослоњене греде за NLTR случај ($p = 0{,}1$ и $L/h = 50$)

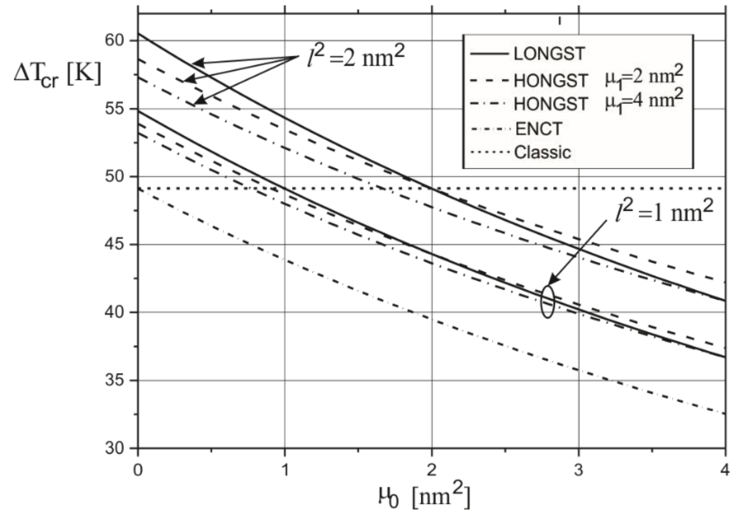
$\mu_0\ \left[nm^2\right]$	$\mu_1\ \left[nm^2\right]$	$l^2\ \left[nm^2\right]$			
		0	1	2	3
0	0	69,8527	77,5239	85,1543	92,7448
	1	69,8527	76,8365	83,7864	90,7032
	2	69,8527	76,2621	82,643	88,9959
	3	69,8527	75,775	81,673	87,547
1	0	62,8347	70,5435	78,211	85,8378
	1	62,8347	69,8527	76,8365	83,7864
	2	62,8347	69,2756	75,6875	82,071
	3	62,8347	68,7861	74,7128	80,6152
2	0	56,9468	64,6876	72,3865	80,0441
	1	56,9468	63,994	71,0064	779845
	2	56,9468	63,4145	69,8527	76,2621
	3	56,9468	62,923	68,8741	74,8004
3	0	51,9362	59,7046	67,4304	75,1145
	1	51,9362	59,0085	66,0455	73,0478
	2	51,9362	58,4269	64,8878	71,3195
	3	51,9362	57,9337	63,9058	69,8527

Може се закључити да ниже вредности нелокалних параметара доводе до виших вредности критичне температуре. Другим речима, највећа критична температура се постиже при најнижој вредности нелокалних параметара (μ_0 и μ_1), што одговара класичној теорији носача. Важно је напоменути да су вредности приказане на дијаграмима 4.2–4.4 добијене за експонент запреминског удела $p = 1$.

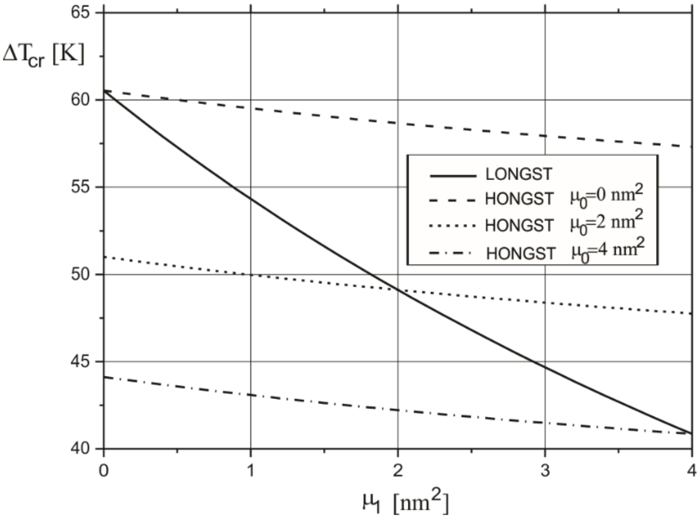
Из истог разлога, на слици 4.5 приказана је промена критичне температуре у зависности од новог уведеног фактора у облику $l_\mu = \dfrac{l^2}{\mu}$ за различите вредности нелокалног параметра и за једнаке вредности $\mu = 1nm^2$, $\mu = 2nm^2$ и $\mu = 3nm^2$.

Табела 4.7. Утицај нелокалних параметара и утицаја дужине скале на промену критичне температуре ΔT_{cr} [K] слободно ослоњене греде за NLTR случај ($p=0{,}1$ и $L/h=50$)

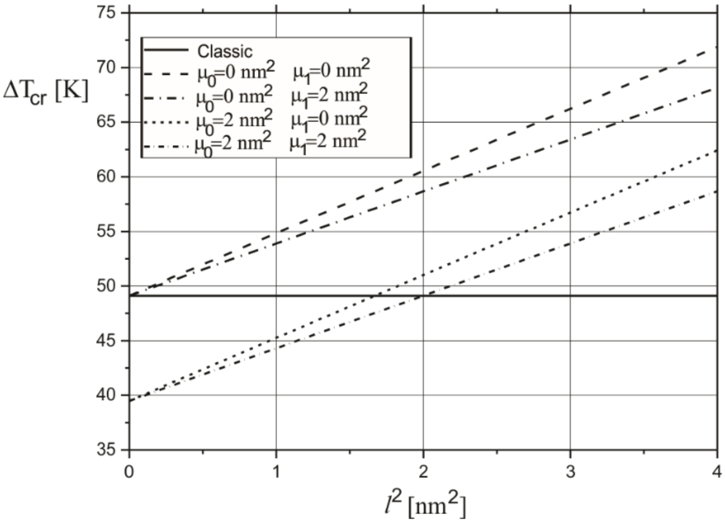
$\mu_0\ \left[nm^2\right]$	$\mu_1\ \left[nm^2\right]$	$l^2\ \left[nm^2\right]$			
		0	1	2	3
0	0	51,4254	57,4813	63,5221	69,5481
	1	51,4254	56,9379	62,4380	67,9256
	2	51,4254	56,4800	61,5321	66,5698
	3	51,4254	56,0992	60,7640	65,4198
1	0	45,9001	51,9700	58,0246	64,0641
	1	45,9001	51,4254	56,9379	62,4380
	2	45,9001	50,9704	56,0301	61,0791
	3	45,9001	50,5847	55,2602	59,9266
2	0	41,2757	47,3575	53,4237	59,4747
	1	41,2757	46,8118	52,3350	57,8455
	2	41,2757	46,3560	51,4254	56,4840
	3	41,2757	45,9695	50,6540	55,3293
3	0	37,3485	43,4404	49,5167	55,5774
	1	37,3485	42,8938	48,4261	53,9456
	2	37,3485	42,4373	47,5150	52,5820
	3	37,3485	42,0501	46,7424	51,4254



Слика 4.2. Промена критичне температуре са променом нелокалног параметра μ_0 за различите вредности μ_1 и l



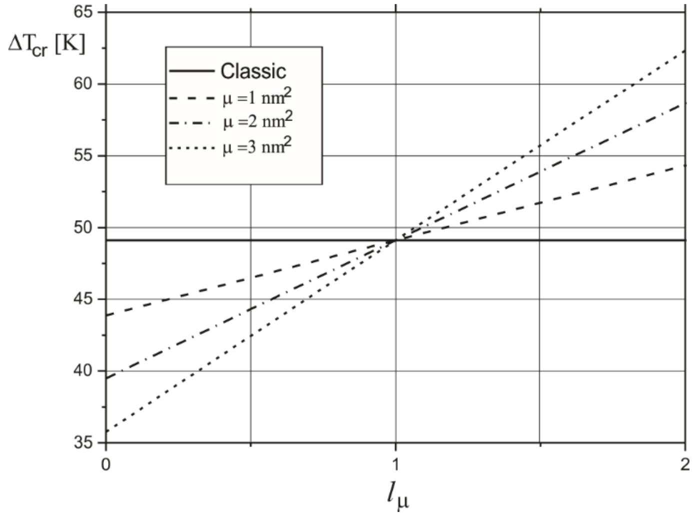
Слика 4.3. Промена критичне температуре са променом нелокалног параметра μ_1 за различите вредности μ_0 ($l^2 = 2\ \mathrm{nm}^2,\ p = 1,\ L/h = 50$)



Слика 4.4. Промена критичне температуре са променом параметра дужине скале l^2 за различите вредности μ_0 и μ_1 ($p = 1,\ L/h = 50$)

Табела 4.8. Промена основне кружне фреквенције осциловања за различите вредности нелокалног параметра и утицаја дужине скале $p=0{,}1,\ L/h=20$ и $\Delta T=20$ [K]

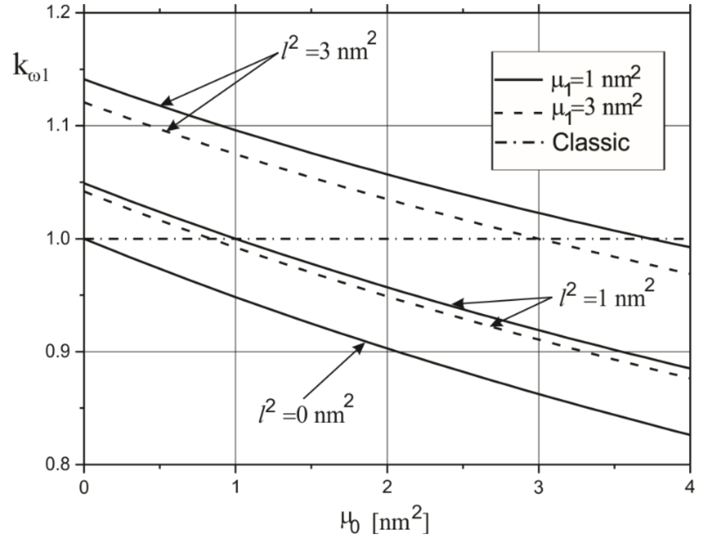
$\mu_0\ \left[nm^2\right]$	$\mu_1\ \left[nm^2\right]$	$l^2\ \left[nm^2\right]$			
		0	1	2	3
0	0	8,4722	8,9058	9,3193	9,7152
	1	8,4722	8,8678	9,2464	9,6101
	2	8,4722	8,8358	9,1851	9,5215
	3	8,4722	8,8087	9,1327	9,4457
1	0	8,0573	8,5121	8,9438	9,3556
	1	8,0573	8,4722	8,8678	9,2464
	2	8,0573	8,4388	8,8038	9,1542
	3	8,0573	8,4103	8,7492	9,0754
2	0	7,6936	8,1687	8,6176	9,0443
	1	7,6936	8,1272	8,5387	8,9313
	2	7,6936	8,0923	8,4722	8,8358
	3	7,6936	8,0626	8,4155	8,7541
3	0	7,4699	7,8659	8,3311	8,7717
	1	7,4699	7,8227	8,2495	8,6552
	2	7,4699	7,7865	8,1806	8,5567
	3	7,4699	7,7557	8,1219	8,4722



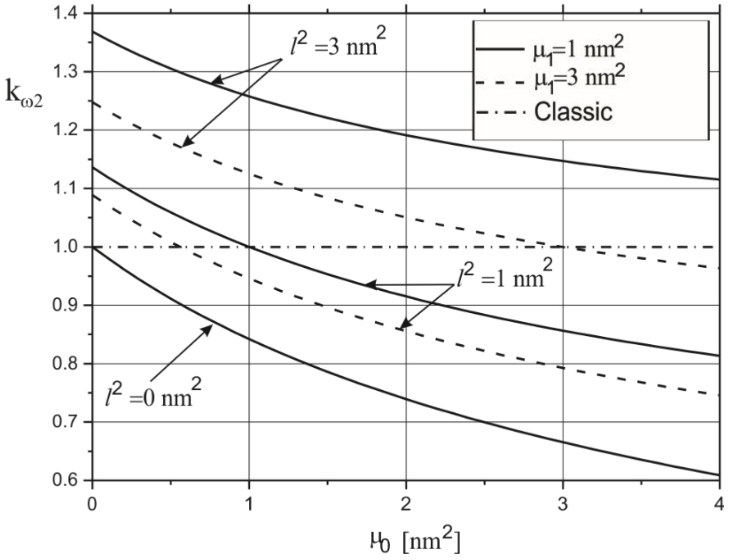
Слика 4.5. Промена критичне температуре са променом параметра дужине скале l_{μ} ($p=1,\ L/h=50,\ \mu=\mu_0=\mu_1$)

Табела 4.9. Промена фреквенције осциловања са променом нелокалних параметара и утицаја дужине скале, NLTR, $p=0{,}1$, $L/h=20$ и $\Delta T=20$ [K]

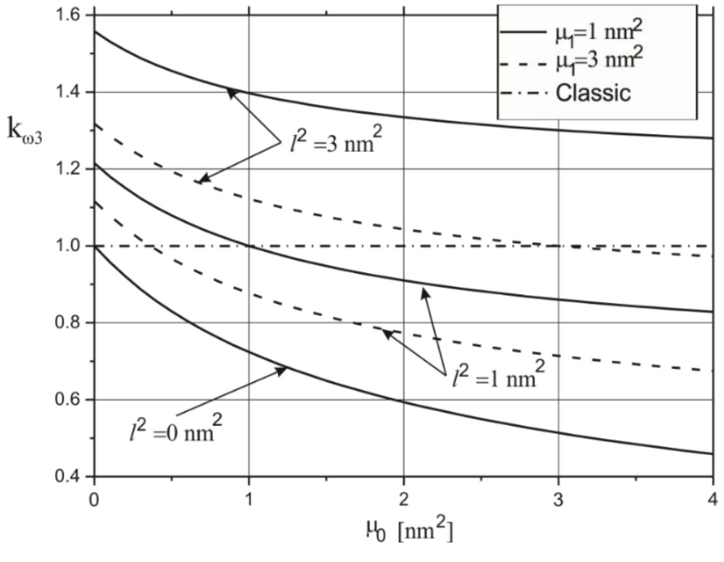
$\mu_0\ \left[nm^2\right]$	$\mu_1\ \left[nm^2\right]$	$l^2\ \left[nm^2\right]$			
		0	1	2	3
0	0	8,4743	8,9078	9,3212	9,7170
	1	8,4743	8,8697	9,2483	9,4119
	2	8,4743	8,8378	9,1869	9,5233
	3	8,4743	8,8106	9,1346	9,4475
1	0	8,0594	8,5141	8,9457	9,3574
	1	8,0594	8,4743	8,8697	9,2483
	2	8,0594	8,4408	8,8057	9,1561
	3	8,0594	8,4124	8,7512	9,0773
2	0	7,6959	8,1708	8,6196	9,0462
	1	7,6959	8,1293	8,5407	8,9332
	2	7,6959	8,0944	8,4743	8,8378
	3	7,6959	8,0648	8,4175	8,7561
3	0	7,3736	7,8681	8,3332	8,7737
	1	7,3736	7,8250	8,2516	8,6572
	2	7,3736	7,7887	8,1828	8,5587
	3	7,3736	7,7579	8,1240	8,4743



Слика 4.6. Промена критичне температуре са променом параметра дужине скале l^2 за различите вредности μ_0 и μ_1 ($p=1$, $L/h=50$)



Слика 4.7. Промена критичне температуре у функцији промене параметра дужине скале l^2 за различите вредности μ_0 и μ_1 ($p=1,\ L/h=50$)



Слика 4.8. Промена критичне температуре у функцији промене параметра дужине скале дужине скале l^2 за различите вредности μ_0 и μ_1 ($p=1,\ L/h=50$)

Изводи се закључак да је критична температура мања када је нелокални параметар мањи од параметра дужине скале ($l_\mu < 1$). С друге стране, критична сила је већа у поређењу са резултатима добијеним класичном теоријом када је параметар дужине скале већи од нелокалног параметра ($l_\mu > 1$). У случају једнаких вредности нелокалног параметра и параметра дужине скале ($l_\mu = 1$), решења се поклапају са резултатима добијеним класичном нелокалном теоријом еластичности.

Табеле 4.8 и 4.9 показују промену фреквенције осциловања слободно ослоњеног функционално градијентног носача при линеарној (LTR) и нелинеарној промени температуре (NLTR). Како параметар дужине скале расте, тако се повећава и фреквенција осциловања. За мале вредности параметра дужине скале, повећање нелокалног параметра вишег реда нема значајан утицај на промену фреквенције осциловања, што није случај са нелокалним параметром μ_0. Повећање нелокалног параметра μ_0 доводи до смањења основне кружне фреквенције осциловања.

Уведени параметар $k_{\omega n} = \dfrac{\omega_n}{\omega_{nc}}$, примењен је за квантитативну процену утицаја нелокалних параметара μ_0 и μ_1 и параметра дужине скале l. У случају када је $l = 0$, промена нелокалног параметра вишег реда нема значајан утицај на фреквенцију осциловања, што се може видети на основу добијених резултата у табелама 4.8 и 4.9.

У овом поглављу показано је како различите вредности нелокалних параметара и параметра дужине скале утичу на основну кружну фреквенцију осциловања и критичну температуру. Разматрана су два случаја промене температуре: линеарна и нелинеарна промена у трансверзалном правцу у односу на подужну осу носача. Повећање нелокалних параметара доводи до смањења фреквенције осциловања и критичне температуре, при чему у крајњем случају наступа индиферентни положај равнотеже (фреквенција се смањује до границе да је једнака нули и нема даљих осцилација носача) и наступа извијање. За мале вредности параметра дужине скале, нелокални параметар има највећи утицај на промену критичне температуре и фреквенције осциловања. За веће вредности параметра дужине скале, доминантан утицај прелази на нелокални параметар вишег реда.

Уколико су нелокални параметри једнаки ($\mu_0 = \mu_1$), а параметар дужине скале мањи од нелокалног параметра, критична температура и фреквенција осциловања су ниже у поређењу са добијеним резултатима применом класичне теорије. У супротном, када је параметар дужине скале већи од нелокалног параметра, критична температура и фреквенција осциловања су веће у односу на резултате добијене класичном теоријом. Ако је параметар дужине скале једнак нули, утицај нелокалног параметра вишег реда на критичну температуру и фреквенцију осциловања постаје занемарљив.

5. Кружна фреквенција и извијање услед термичког утицаја слободно ослоњене функционално градијентне Timoshenko-ве наногреде применом нелокалне теорије градијента деформације вишег реда

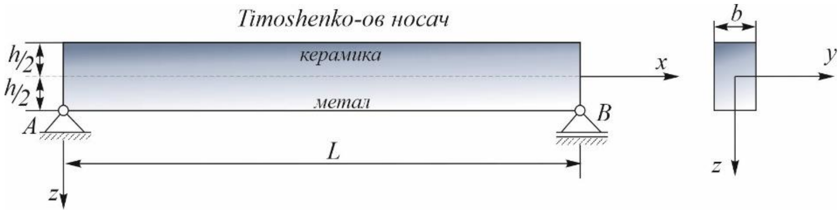
Извијање носача услед термичког утицаја, као основне структурне компоненте, представља један од основних проблема који су истраживачи проучавали током претходних година. Функционално градијентни носачи, због своје примене у техничкој пракси, завредели су пажњу истраживача деценијама. У прилог томе говори и велики број објављених радова у овој области. Због тога је разумевање механичког понашања функционално градијентних наноструктура услед термичког утицаја кључно за успешно моделирање наномеханичких система.

Постоји више метода за статичку и динамичку анализу наноструктура, укључујући молекуларну динамичку симулацију [27, 42] и некласичну механику континуума. Како је раније поменуто, Eringen-ова нелокална теорија еластичности [7, 8] је једна од некласичних теорија континуума. Ова теорија узима у обзир утицај величине, односно претпоставку да напон у референтној зони не зависи само од деформације у тој зони, већ и од деформације у њеној околини. Са друге стране, теорије градијента еластичности [29, 9] такође су некласичне теорије континуума које могу предвидети повећање крутости структуре. Према овим теоријама, материјали треба да се третирају као атоми са механизмима деформације вишег реда на малој скали. Lim и коаутори [11] представили су нелокалну теорију градијента деформације вишег реда. Они су показали да нелокални параметри и параметар дужине скале представљају две различите физичке карактеристике, како је и наведено у претходном поглављу.

У овом делу биће приказане разлике основне осцилаторне каркатеристике слободно ослоњене функционално градијентне Timoshenko-ве наногреде у односу на Euler-Bernoulli-јеву греду. Анализираће се промена фреквенције осциловања са променом нелокалних параметара, утицај дужине скале, запреминског удела, као и утицај силе услед термичког утицаја, као што је приказано у раду [24]. Такође ће се размотрити и случај извијања услед промене температуре.

5.1 *Математички модел*

У овом делу биће анализирана функционално градијентна слободно ослоњена наногреда (Слика 5.1.) са следећим геометријским карактеристикама: дужине L, ширине b и висине h. Карактеристике материјала мењају се у трансверзалном правцу према закону приказаном једначином (4.3). Температурно зависни коефицијенти материјала типа Si_3N_4 и $SUS304$ приказани су у табели 4.1.



Слика 5.1. Геометрија функционално градијентне Timoshenko-ове наногреде

Компоненте померања Timoshenko-ве греде за неку материјалну тачку у правцима x, y и z могу се записати у облику

$$q_1\left(x,z,t\right)=u\left(x,t\right)+z\varphi\left(x,t\right), \tag{5.1a}$$

$$q_3\left(x,z,t\right)=w\left(x,t\right), \tag{5.1б}$$

где су u и w померања тачке носача у x и z првацу, а $\varphi\left(x,t\right)$ представља угао ротације попречног пресека услед савијања носача. На основу једначина (5.1a) и (5.1б) следе компоненте дилатације у следећем облику

$$\varepsilon_{xx}\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_1}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial\varphi\left(x,t\right)}{\partial x}, \tag{5.2a}$$

$$\gamma_{xz}\left(x,z,t\right)=\frac{\partial q_3}{\partial x}+\frac{\partial q_1}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi. \tag{5.2б}$$

Динамичке једначине могу се одредити као и у претходним случајевима Hamilton-овим принципом у следећем облику

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta U+\delta V-\delta T\right)dt=0, \tag{5.3}$$

у временском интервалу $t_1<t<t_2$. Варијација потенцијалне енергије функционално градијентног Timoshenko-вог наноносача је

$$\delta U=\int_V\left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{xz}\delta\gamma_{xz}+\sigma_{xx}^{(1)}\delta\frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial x}+\sigma_{xz}^{(1)}\delta\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial x}\right)dv$$

$$\begin{aligned}\delta U&=\int_L\left(N\frac{\partial\delta u}{\partial x}+M\frac{\partial\delta\varphi}{\partial x}+Q\frac{\partial\delta w}{\partial x}+Q\delta\varphi\right)dx\\&+\left[N^{(1)}\frac{\partial\delta u}{\partial x}+M^{(1)}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial x}+Q^{(1)}\frac{\partial\delta w}{\partial x}+Q^{(1)}\delta\varphi\right]_0^L,\end{aligned}\tag{5.4}$$

где су аксијална сила и момент савијања облика

$$\begin{aligned}\left(N,M\right)&=\int_A\left(1,z\right)t_{xx}dA,Q=k_s\int_A t_{xz}dA,\\\left(N^{(1)},M^{(1)}\right)&=\int_A\left(1,z\right)\sigma_{xx}^{(1)}dA,Q^{(1)}=k_s\int_A\sigma_{xz}^{(1)}dA.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Варијација кинетичке енергије функционално градијентног Timoshenko-вог наноносача је представљена изразом

$$\begin{aligned}\delta T&=\frac{1}{2}\int_v\rho\left(z\right)\delta\left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial q_3}{\partial t}\right)^2\right)dv\\\delta T&=\int_0^L\left(I_0\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right)\right)\right.\\&+I_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\\&\left.+I_2\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right)\right)dx,\end{aligned}\tag{5.6}$$

где је $\rho\left(z\right)$ густина материјала која се мења према закону расподеле приказаним једначином (4.3). Инерцијалне карактеристике носача су облика

$$\left(I_0,I_1,I_2\right)=\int_A\left(1,z,z^2\right)\rho\left(z\right)dA.\tag{5.7}$$

Као што је напоменуто, разматран је и термички утицај, па ће виртуални рад бити

$$\delta V = \int_V E(T,z)\alpha(T,z)(T-T_0)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x}dv$$
$$\delta V = -\int_L N^T \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \delta w}{\partial x}dx, \qquad (5.8)$$

где су $E(T,z)$ и $\alpha(T,z)$ редом, Young-ов модул еластичности и коефицијент топлотног ширења. Сила у лонгитудиналном правцу која се јавља као последица термичког утицаја је облика

$$N^T = b\int_{-h/2}^{h/2} E(T,z)\alpha(T,z)(T-T_0)dz. \qquad (5.9)$$

Заменом једначина (5.4), (5.6) и (5.8), у једначину (5.3), добијају се динамичке једначине Timoshenko-вог наноносача у следећем облику

$$\delta u\colon \frac{\partial N}{\partial x} = I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \qquad (5.10а)$$

$$\delta w\colon \frac{\partial Q}{\partial x} - N^T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (5.10б)$$

$$\delta \varphi\colon \frac{\partial M}{\partial x} - Q = I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \qquad (5.10в)$$

где су гранични услови који одговарају класичној теорији у тачкама за $x=0$ и $x=L$

$$N=0 \quad \text{или} \quad u=0, \qquad (5.11а)$$

$$Q - N^T\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad w=0, \qquad (5.11б)$$

$$M=0 \quad \text{или} \quad \varphi=0, \tag{5.11в}$$

односно гранични услови који одговарају теорији вишег реда у тачкама за $x=0$ и $x=L$

$$N^{(1)}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{5.12а}$$

$$Q^{(1)}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial x}+\varphi=0, \tag{5.12б}$$

$$M^{(1)}=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}=0. \tag{5.12в}$$

Нелокална нормална сила, нелокални момент савијања као и нелокална сила смицања могу се изразити на основу једначине (4.6) према нелокалној теорији градијента деформације вишег реда у следећем облику

$$\begin{gathered}\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)N= \\ A_{xx}\left[\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-l^2\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}- \\ +B_{xx}\left[\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-l^2\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial \varphi}{\partial x},\end{gathered} \tag{5.13а}$$

$$\begin{gathered}\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)M= \\ B_{xx}\left[\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-l^2\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+ \\ +D_{xx}\left[\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-l^2\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\frac{\partial \varphi}{\partial x},\end{gathered} \tag{5.13б}$$

$$\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)Q=$$
$$C_{xz}\left[\left(1-\mu_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)-l^2\left(1-\mu_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi\right) \tag{5.13в}$$

где су елементи матрице крутости

$$D_{xx}=\int_A z^2E\left(z,T\right)dA,$$
$$C_{xz}=k_s\int_A G\left(z,T\right)dA. \tag{5.14}$$

Након увођења следећих бездимензионих величина

$$\xi=\frac{x}{L},U\left(\xi,\tau\right)=\frac{u\left(x,t\right)}{L},$$
$$W\left(\xi,\tau\right)=\frac{w\left(x,t\right)}{L},\tau=\frac{t}{L^2}\sqrt{\frac{E_C\left(T_C\right)I}{\rho_C\left(T_C\right)A}}, \tag{5.15}$$

добијају се нелокална нормална сила, нелокални момент савијања и нелокална сила смицања у следећем облику

$$N=A_{xx}\left\{\mathcal{L}_3\left[\frac{\partial U}{\partial\xi}+k_B\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right]+\right.$$
$$\left.+k_I\mathcal{L}_2\left[k_{I0}\frac{\partial^3U}{\partial\xi\partial\tau^2}+k_{I1}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\xi\partial\tau^2}\right]\right\}, \tag{5.16а}$$

$$\begin{aligned} M = A_{xx}L & \left\{ \mathcal{L}_3 \left[k_B \frac{\partial U}{\partial \xi} + k_D \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right] + \right. \\ & + \mathcal{L}_2 \left[k_N \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + k_I k_{I0} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \right. \\ & \left. \left. + k_I k_{I1} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi \partial \tau^2} + k_I k_{I2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi \partial \tau^2} \right] \right\}, \end{aligned} \tag{5.16б}$$

$$\begin{aligned} Q = A_{xx} & \left\{ k_C \mathcal{L}_3 \left[\frac{\partial W}{\partial \xi} + \varphi \right] + \right. \\ & \left. + \mathcal{L}_2 \left[k_I k_{I0} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \tau^2} + k_N \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} \right] \right\}, \end{aligned} \tag{5.16в}$$

при чему су примењени следећи диференцијални оператори

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_0 = 1 - k_{\mu 0} \nabla^2, \mathcal{L}_1 = 1 - k_{\mu 1} \nabla^2, \nabla = \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \mathcal{L}_2 = \left(k_{\mu 0} + k_{\mu 1} \right) - k_{\mu 0} k_{\mu 1} \nabla^2, \\ \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_1 - k_l \mathcal{L}_0 \nabla^2 = 1 - \left(k_{\mu 1} + k_l \right) \nabla^2 + k_{\mu 0} k_{\mu 1} \nabla^4, \end{gathered} \tag{5.17}$$

где су

$$\begin{gathered} k_B = \frac{B_{xx}}{A_{xx}L}, k_C = \frac{C_{xz}}{A_{xx}}, k_D = \frac{D_{xx}}{A_{xx}L^2}, k_N = \frac{N^T}{A_{xx}}, \\ k_I = \frac{I}{AL^2}, k_{I0} = \frac{E_C\left(T_C\right) I_0}{\rho_C\left(T_C\right) A_{xx}}, k_{I1} = \frac{E_C\left(T_C\right) I_1}{\rho_C\left(T_C\right) A_{xx} L}, \\ k_{I1} = \frac{E_C\left(T_C\right) I_2}{\rho_C\left(T_C\right) A_{xx} L^2}, k_l = \frac{l^2}{L^2}, k_{\mu 0} = \frac{\mu_0}{L^2}, k_{\mu 1} = \frac{\mu_1}{L^2}. \end{gathered} \tag{5.18}$$

На основу једначина (5.16) и заменом извода нормалне силе, нелокалног момента савијања и нелокалне силе смицања у динамичке једначине (5.10а), (5.10б) и (5.10в) добијају се нелокалне диференцијалне једначине Timoshenko-ве функционално градијентне наногреде

$$\mathcal{L}_3\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+k_B\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right]-k_I\mathcal{L}_4\left[k_{I0}\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}+k_{I0}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}\right]=0, \quad (5.19\text{а})$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_3\left[k_B\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}+k_D\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-k_C\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}+\varphi\right)\right]\\&-k_I\mathcal{L}_4\left[k_{I1}\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}+k_{I1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}\right]=0,\end{aligned} \quad (5.19\text{б})$$

$$k_C\mathcal{L}_3\left[\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right]-k_N\mathcal{L}_4\left[\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}\right]-k_I k_{I0}\mathcal{L}_4\left[\frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2}\right]=0, \quad (5.19\text{в})$$

при чему је диференцијални оператор $\mathcal{L}_4$

$$\mathcal{L}_4=\mathcal{L}_0\mathcal{L}_1=1-\left(k_{\mu0}+k_{\mu1}\right)\nabla^2+k_{\mu0}k_{\mu1}\nabla^2. \quad (5.20)$$

5.2 Нумеричка анализа

У овом делу приказано је аналитичко решење кружне фреквенције осцилација функционално градијентне слободно ослоњене Timoshenko-ве наногреде. Такође, анализиран је утицај нелокалних параметара и параметра дужине скале на промену кружне фреквенције осциловања Timoshenko-вог нанonосача. Поред тога, с обзиром да термички утицај није занемарен, анализирана је промена критичне температуре са променом нелокалних параметара као и параметра дружине скале. За случај слободно ослоњене наногреде, гранични услови Timoshenko-вог носача биће

$$N=0, w=0 \text{ и } M=0, \quad (5.21)$$

односно гранични услови који одговарају теорији вишег реда су облика

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\, Q^{(1)}=0 \text{ и } \frac{\partial \varphi}{\partial x}=0. \tag{5.22}$$

Како је тотални напон смицања облика

$$t_{xz}=\sigma_{xz}-\frac{\partial \sigma_{xz}^{(1)}}{\partial x}, \tag{5.23}$$

заменом једначине (5.2б) у релацију тоталног напона смицања, добија се нелокална сила смицања вишег реда

$$\begin{gathered}Q^{(1)}=A_{xx}\left\{k_C\left[\frac{k_{\mu 1}{}^2}{k_{\mu 0}-k_{\mu 1}}\mathcal{L}_0\mathcal{L}_3-\frac{k_{\mu 1}{}^2-k_l{}^2\left(k_{\mu 0}-k_{\mu 1}\right)}{k_{\mu 0}-k_{\mu 1}}\right.\right.\\ \left.\left(1-\frac{k_{\mu 0}k_{\mu 1}k_l{}^2}{k_{\mu 1}{}^2-k_l{}^2\left(k_{\mu 0}-k_{\mu 1}\right)}\nabla^2\right)\right]\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}+\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)+ \qquad (5.24)\\ \left.+\frac{k_{\mu 1}{}^2}{k_{\mu 0}-k_{\mu 1}}\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\left(k_I k_{I0}\frac{\partial^3 W}{\partial \xi \partial \tau^2}+k_N\frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3}\right)\right\}.\end{gathered}$$

Функције померања које задовољавају граничне услове (5.11) могу се претпоставити у следећем

$$U\left(\xi,\tau\right)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n\cos\left(n\pi\xi\right)e^{i\omega_n\tau} \tag{5.25а}$$

$$W\left(\xi,\tau\right)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n\sin\left(n\pi\xi\right)e^{i\omega_n\tau} \tag{5.25б}$$

$$\varphi\left(\xi,\tau\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\left(n\pi\xi\right)e^{i\omega_n\tau} \tag{5.25в}$$

где су $i=\sqrt{-1}$ и n број хармоника. У изразима (5.25а), (5.25б) и (5.25в) U_j, W_j, φ_j $\left(j=1,2,..n\right)$ представљају непознате Fourier-ове коефицијенте.

Заменом претпостављених решења (5.25) у систем диференцијалних једначина (5.19), као и елиминацијом $U\left(\xi,\tau\right)$ и $\varphi\left(\xi,\tau\right)$, добија се диференцијална једначина следећег облика

$$\mathcal{L}_{(8)}\left(\mathcal{L}_{(5)}\mathcal{L}_{(7)}-\mathcal{L}_{(6)}{}^{2}\right)W+k_{C}{}^{2}\mathcal{L}_{(3)}{}^{2}\mathcal{L}_{(5)}\frac{\partial^{2}W}{\partial\xi^{2}}=0, \qquad (5.26)$$

где су линеарни диференцијални оператори облика

$$\mathcal{L}_{(5)}=\mathcal{L}_{(3)}\nabla^{2}-k_{I}k_{I0}\mathcal{L}_{(4)}\frac{\partial^{2}}{\partial\tau^{2}}, \qquad (5.27а)$$

$$\mathcal{L}_{(6)}=k_{B}\mathcal{L}_{(3)}\nabla^{2}-k_{I}k_{I1}\mathcal{L}_{(4)}\frac{\partial^{2}}{\partial\tau^{2}}, \qquad (5.27б)$$

$$\mathcal{L}_{(7)}=k_{D}\mathcal{L}_{(3)}\nabla^{2}-k_{C}\mathcal{L}_{(3)}-k_{I}k_{I2}\mathcal{L}_{(4)}\frac{\partial^{2}}{\partial\tau^{2}}, \qquad (5.27в)$$

$$\mathcal{L}_{(8)}=\left(k_{C}\mathcal{L}_{(3)}-k_{N}\mathcal{L}_{(4)}\right)\nabla^{2}-k_{I}k_{I0}\mathcal{L}_{(4)}\frac{\partial^{2}}{\partial\tau^{2}}. \qquad (5.27г)$$

Заменом једначине (5.25б) у једначину (5.26), добија се карактеристична једначина облика

$$\alpha_{4}{}^{2}A_{\omega}\omega_{n}^{4}+\alpha_{3}\alpha_{4}B_{\omega}\omega_{n}^{2}+\alpha_{3}{}^{2}C_{\omega}=0, \qquad (5.28)$$

где су коефицијенти

$$A_{\omega}=-k_{I}{}^{2}\left[\left(\alpha_{1}\alpha_{6}+\alpha_{3}\alpha_{5}k_{I0}{}^{2}\right)n^{2}\pi^{2}-\alpha_{3}k_{C}k_{I0}{}^{2}\right], \qquad (5.29а)$$

$$\begin{aligned}B_{\omega}=k_{I}\Big[&\left(\alpha_{2}\alpha_{3}k_{I0}+\alpha_{1}\alpha_{5}\right)n^{4}\pi^{4}\\&-k_{C}k_{I0}\left(\alpha_{3}-k_{N}\alpha_{4}\right)n^{2}\pi^{2}\Big],\end{aligned} \qquad (5.\,29б)$$

$$C_\omega = k_C k_N \alpha_4 n^4 \pi^4 - \alpha_1 \alpha_2 n^6 \pi^6, \qquad (5.\ 29в)$$

$$\alpha_1 = k_C \alpha_3 - k_N \alpha_4, \qquad (5.\ 29г)$$

$$\alpha_2 = k_D - {k_B}^2, \qquad (5.\ 29д)$$

$$\alpha_3 = 1 + \left(k_{\mu 1} + k_I\right) n^2 \pi^2 + k_{\mu 0} k_I n^4 \pi^4, \qquad (5.\ 29ђ)$$

$$\alpha_4 = 1 + \left(k_{\mu 1} + k_I\right) n^2 \pi^2 + k_{\mu 0} k_{\mu 1} n^4 \pi^4, \qquad (5.\ 29е)$$

$$\alpha_5 = k_{I2} - 2 k_B k_{I1} + k_D k_{I0}, \qquad (5.\ 29ж)$$

$$\alpha_6 = k_{I0} k_{I2} - {k_{I1}}^2. \qquad (5.\ 29з)$$

Корени карактеристичне једначине (5.28) су $\lambda_n = \omega_n^2$, где је квадрат кружне фреквенције у следећој аналитичкој форми

$$\omega_{12n} = \pm\sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_4}}\sqrt{\frac{-B_\omega \pm \sqrt{B_\omega^2 - 4A_\omega C_\omega}}{2A_\omega}}, \qquad (5.30а)$$

$$\omega_{34n} = \pm\sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_4}}\sqrt{\frac{B_\omega \pm \sqrt{B_\omega^2 - 4A_\omega C_\omega}}{2A_\omega}}, \qquad (5.30б)$$

где ће се разматрати само реална и ненегативна решења при анализи кружне фреквенције осциловања.

У претходном поглављу истакнути су различити случајеви промене температуре, од униформне промене температуре, преко линеарне промене, до нелинеарне промене температуре. У следећем делу детаљно су приказани добијени резултати и дискусија.

У овом делу поглавља анализирани су утицаји експонената запреминског удела, дужине скале и нелокалних параметара на промену фреквенције осциловања и критичне температуре услед које долази до извијања. Како је и раније наглашено, функционално градијентна греда сачињена је од материјала Si_3N_4 и $SUS304$. Материјалне карактеристике приказане су у табели 4.1, док су геометријске карактеристике носача: дужина $L = 10nm$, ширина $b = 1nm$ и висина h која варира.

У табели 5.1 и 5.2 приказано је поређење добијених резултата са резултатима датим у радовима [43, 44]. Вредности параметара коришћених у овој анализи биће

$$\begin{gathered} k_B = 0, k_C = \frac{k_s}{2(1+\nu)}, k_D = k_I, k_N = 0, \\ k_{I0} = 1, k_{I1} = 0, k_{I2} = k_I. \end{gathered} \tag{5.31}$$

Табела 5.1. Основна кружна фреквенција осциловања слободно ослоњене наногреде са референтним радом [43]

k_{μ_0}	$L/h=5$		$L/h=10$		$L/h=20$		$L/h=100$	
	Реф. [43]		Реф. [43]		Реф. [43]		Реф. [43]	
0	9,2740	9,2744	9,7075	9,7074	9,8281	9,8281	9,8679	9,8679
0,01	8,8477	8,8480	9,2612	9,2612	9,3763	9,3763	9,4143	9,4142
0,02	8,6636	8,6636	8,8713	8,8713	8,9816	8,9815	9,0179	9,0179
0,03	8,4752	8,4755	6,7998	6,7998	6,1414	6,1413	5,2166	5,2166

Табела 5.2. Основна кружна фреквенција осциловања слободно ослоњене наногреде за различите вредности експонента запреминског удела са референтним радом [44] ($L/h=50$)

k_{μ_0}	$p=0$		$p=0.5$		$p=1$		$p=5$	
	Реф. [44]		Реф. [44]		Реф. [44]		Реф. [44]	
0	9,8631	9,8631	7,7413	7,7413	6,9917	6,9917	5,9389	5,9389
0,01	9,4097	9,4097	7,3854	7,3854	6,6703	6,6703	5,6659	5,6659
0,02	9,0136	9,0135	7,0745	7,0745	6,3895	6,3894	5,4274	5,4273
0,03	8,6636	8,6636	6,7998	6,7998	6,1414	6,1413	5,2166	5,2166

У табелама 5.3 и 5.4 приказани су резултати критичне температуре услед које долази до извијања за различите функције промене температуре (линеарна и нелинеарна), дужине скале као и нелокалних параметара. На основу приказаних резултата, може се закључити да повећање утицаја дужине скале доводи до повећања критичне температуре. Такође, повећање нелокалних параметара μ_0 и μ_1 доводи до смањења критичне температуре.

Табела 5.3. Утицај нелокалних параметара и дужине скале на промену критичне температуре $\Delta T_{cr}\left[K\right]$ слободно ослоњене греде за LTR случај $\left(p=1, L/h=50\right)$

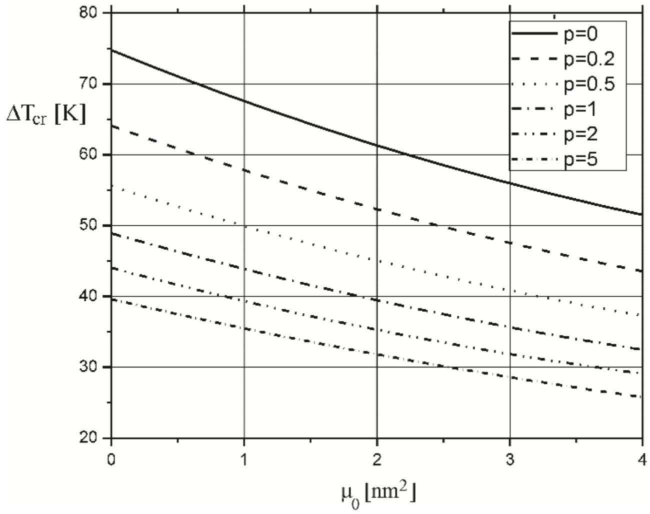
$\mu_0\left[nm^2\right]$	$\mu_1\left[nm^2\right]$	$l^2\left[nm^2\right]$			
		0	1	2	3
0	0	49,0533	54,7761	60,4733	66,1440
	1	49,0533	54,2631	59,4516	64,6183
	2	49,0533	53,8345	58,5977	63,3430
	3	49,0533	53,4710	57,8734	62,2606
1	0	43,8219	49,5684	55,2889	60,9846
	1	43,8219	49,0533	54,2631	59,4520
	2	43,8219	48,6229	53,4057	58,1707
	3	43,8219	48,2579	52,6784	57,0837
2	0	39,4363	45,2027	50,9429	56,6569
	1	39,4363	44,6858	49,9135	55,1196
	2	39,4363	44,2539	49,0533	53,8343
	3	39,4363	43,8877	48,3235	52,7436
3	0	35,7065	41,4901	47,2472	52,9776
	1	35,7065	40,9716	46,2148	51,4360
	2	35,7065	40,5385	45,3520	50,1470
	3	35,7065	40,1712	44,6201	49,0533

На слици 5.1 приказана је промена критичне температуре услед које долази до извијања у функцији промене нелокалног параметра μ_0 за различите вредности експонента запреминског удела. Разматрајући резултате приказане на слици 5.1 који одговарају Eringen-овој нелокалној теорији ($\mu_1=0$, $l=0$) може се закључити да повећање нелокалног параметра доводи до смањења вредности критичне температуре. Такође, може се закључити да повећање експонента запреминског удела доводи до смањења вредности критичне температуре.

Табела 5.4. Утицај нелокалних параметара и ефекта дужине скале на промену критичне температуре $\Delta T_{cr}\left[K\right]$ слободно ослоњене греде за NLTR случај $\left(p=1,L/h=50\right)$

$\mu_0\left[nm^2\right]$	$\mu_1\left[nm^2\right]$	$l^2\left[nm^2\right]$			
		0	1	2	3
0	0	50,8666	56,8402	62,7871	68,7142
	1	50,8666	56,3045	61,7195	67,1184
	2	50,8666	55,8581	60,8287	65,7855
	3	50,8666	55,4810	60,0705	64,6536
1	0	45,4148	51,4038	57,3710	63,3165
	1	45,4148	50,8666	56,3006	61,7162
	2	45,4148	50,4179	55,4061	60,3786
	3	45,4148	50,0375	54,6474	59,2440
2	0	40,8519	46,8540	52,8351	58,7987
	1	40,8519	46,3160	51,7616	57,1936
	2	40,8519	45,8665	50,8666	55,8520
	3	40,8519	45,4853	50,1042	54,7138
3	0	36,9746	42,9889	49,3428	54,9579
	1	36,9746	42,4489	47,9091	53,3495
	2	36,9746	41,9978	47,0107	52,0053
	3	36,9746	41,6153	46,2487	50,8666

На основу резултата приказаним у табелама 5.3 и 5.4 закључује се да смањење параметра дужине скале, као и повећање нелокалног параметра вишег реда, доводи до смањења критичне температуре. Са повећањем параметра дужине скале, расте и утицај нелокалног параметра вишег реда μ_1, јер за вредности параметра дужине скале $l^2=0$, повећање нелокалног параметра вишег реда не утиче на промену критичне температуре.

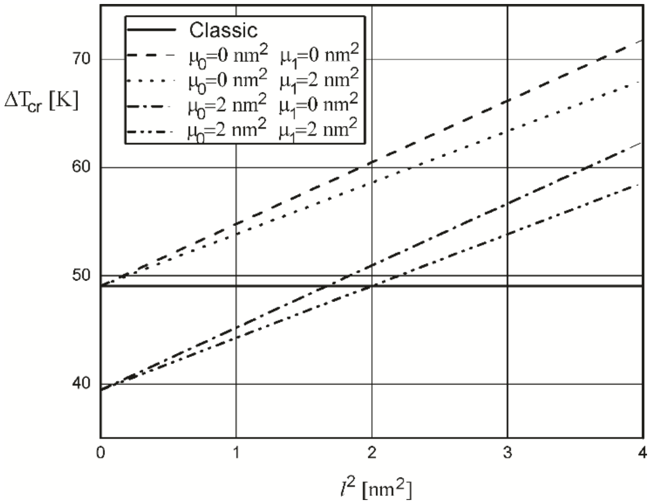


Слика 5.2. Промена критичне темературе у функцији промене нелокалног параметра μ_0 за различите вредности експонента запреминског удела p

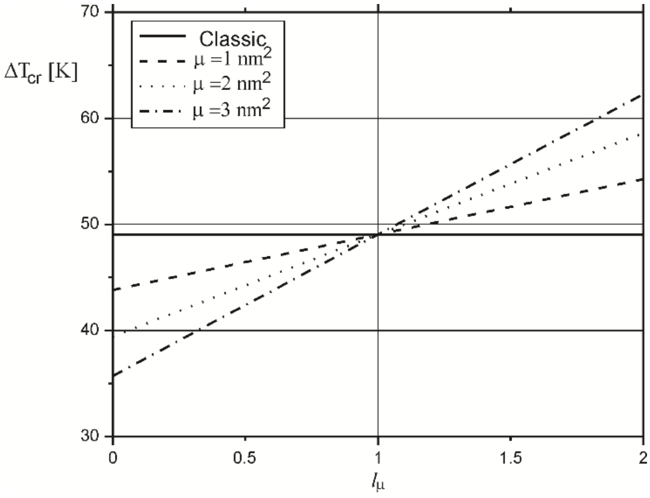
За боље разумевање овог проблема, промена критичне температуре функционално градијентне наногреде представљена је на слици 5.3, у функцији промене параметра дужине скале, а за различите вредности нелокалних параметра. Takође, на слици 5.4 приказана је промена критичне температуре у функцији односа параметра дужине скале и нелокалног параметра у облику

$$l_\mu = \frac{l^2}{\mu}, \tag{5.32}$$

при чему је усвојено да је $\mu = \mu_0 = \mu_1$.



Слика 5.3. Промена критичне темературе у функцији промене параметра l за различите вредности нелокалних параметара



Слика 5.4. Промена критичне темературе у функцији промене параметра l_μ за различите вредности нелокалног параметра

Закључује се да резултати добијени нелокалном теоријом градијента деформације, дају ниже вредности критичне температуре у односу на решења добијена класичном теоријом $(l = 0, \mu = 0)$, односно када је нелокални параметар већи од параметра дужине скале ($l_\mu < 0$). Са друге стране, веће вредности критичне температуре добијају се у односу на класичну теорију, у случају када је ($l_\mu > 0$). Када је нелокални параметар једнак параметру дужине скале, вредности критичне температуре одговарају вредностима добијених класичном теоријом.

Табела 5.5. Основна кружна фреквенција осциловања ω_1 за различите вредности нелокалних параметара и параметра дужине скале слободно ослоњене греде за случај LTR $\left(p=1, L/h=20, \Delta T=30K\right)$

$\mu_0\left[nm^2\right]$	$\mu_1\left[nm^2\right]$	$l^2\left[nm^2\right]$			
		0	1	2	3
0	0	5,6111	5,9136	6,2013	6,4763
	1	5,6111	5,8871	6,1506	6,4033
	2	5,6111	5,8648	6,1080	6,3418
	3	5,6111	5,8459	6,0716	6,2891
1	0	5,3209	5,6390	5,9400	6,2265
	1	5,3209	5,6111	5,8871	6,1506
	2	5,3209	5,5878	5,8425	6,0865
	3	5,3209	5,5679	5,8044	6,0316
2	0	5,0659	5,3989	5,7126	6,0100
	1	5,0659	5,3699	5,6576	5,9313
	2	5,0659	5,3455	5,6111	5,8648
	3	5,0659	5,3247	5,5715	5,8078
3	0	4,8391	5,1868	5,5126	5,8201
	1	4,8391	5,1565	5,4555	5,7389
	2	4,8391	5,1311	5,4073	5,6701
	3	4,8391	5,1094	5,3662	5,6111

У табелама 5.5 и 5.6 приказани су резултати основних кружних фреквенција осциловања за различите вредности нелокалних параметара и параметра дужине скале.

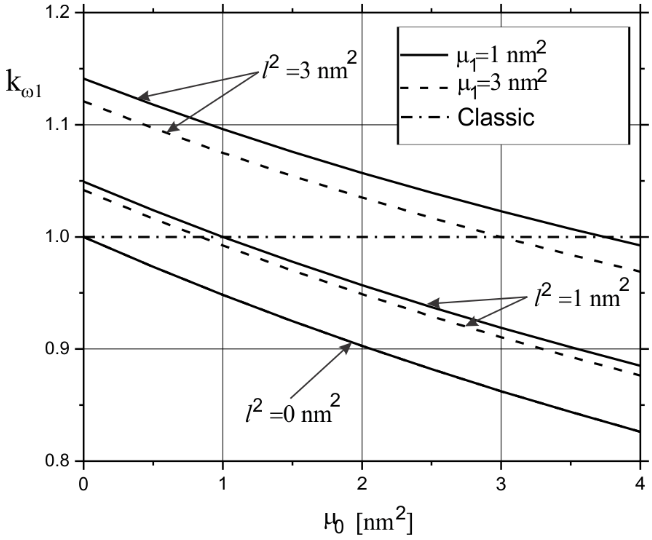
Табела 5.6. Основна кружна фреквенција осциловања ω_1 за различите вредности нелокалних параметара и параметра дужине скале слободно ослоњене греде за NLTR случај када је $\left(p=1, L/h=20, \Delta T=30K\right)$

$\mu_0\left[nm^2\right]$	$\mu_1\left[nm^2\right]$	$l^2\left[nm^2\right]$			
		0	1	2	3
0	0	5,6220	5,9239	6,2112	6,4857
	1	5,6220	5,8974	6,1605	6,4129
	2	5,6220	5,8752	6,1180	6,3514
	3	5,6220	5,8563	6,0816	6,2988
1	0	5,3324	5,6498	5,9503	6,2363
	1	5,3324	5,6220	5,8974	6,1605
	2	5,3324	5,5987	5,8529	6,0965
	3	5,3324	5,5789	5,8149	6,0418
2	0	5,0778	5,4102	5,7233	6,0201
	1	5,0778	5,3812	5,6683	5,9416
	2	5,0778	5,3568	5,6220	5,8752
	3	5,0778	5,3361	5,5824	5,8183
3	0	4,8516	5,1985	5,5236	5,8306
	1	4,8516	5,1683	5,4666	5,7495
	2	4,8516	5,1429	5,4186	5,6808
	3	4,8516	5,1213	5,3775	5,6220

Резултати приказани у табелама показују да се са повећањем параметра дужине скале повећава и основна кружна фреквенција осциловања. Насупрот томе, повећање нелокалних параметара нижег и вишег реда доводи до смањења фреквенције осциловања. Да би се боље разумео утицај ових параметара на промену фреквенције осциловања, уводи се нови параметар, познат као фреквентни однос, и дефинисан је једначином (5.32)

$$k_\omega = \frac{\omega_n}{\omega_{nc}}. \qquad (5.32)$$

На слици 5.5 приказана је промена фреквентног односа у зависности од нелокалног параметра μ_0 и за различите вредности параметра дужине скале и нелокалног параметра вишег реда. Овде је ω_n бездимензиона фреквенција осциловања добијена применом нелокалне теорије, док је ω_{nc} бездимензиона фреквенција осциловања изведена применом класичне теорије.



Слика 5.5. Промена фреквентног односа бездимензионе фреквенције осциловања слободно ослоњене функционално градијентне наногреде са променом нелокалног параметра μ_0 $\left(LTR, p=1, L/h=50\right)$

Фреквентни однос омогућава квантитативну процену утицаја нелокалних параметара μ_0 и μ_1, као и параметра дужине скале. Може се закључити да је фреквентни однос мањи од јединице уколико је $l=0$, без обзира на вредности нелокалних параметара μ_0 и μ_1. Повећање нелокалних параметара доводи до смањења фреквентног односа, што се дешава и смањењем параметра дужине скале. У случају када је параметар дужине скале нула, промена нелокалног параметра вишег реда μ_1, не утиче на промену фреквентног односа. Када су нелокални параметри и утицај дужине скале једнаки, односно $l^2 = \mu_0 = \mu_1$ фреквентни однос биће једнак јединици ($k_\omega = 1$).

Као и у претходном поглављу, у овом делу анализирана је основна осцилаторна карактеристика наноносача за различите вредности нелокалних параметара и параметра дужине скале. При узимању у обзир критичне температуре која доводи до извијања, анализирана су два различита сценарија промене температуре: линеарна и нелинеарна промена у трансверзалном правцу у односу на осу наноносача. Закључује се да нема значајније разлике у резултатима добијеним на основу Euler-Bernoulli-јевог модела носача који је анализиран у претходном поглављу. Утврђено је да повећање нелокалних параметара смањује фреквенцију осцилација и критичну температуру при којој долази до извијања наноносача.

За мале вредности параметра дужине скале, доминантан утицај на промену критичне температуре и фреквенције осцилација има нелокални параметар нижег реда. За веће вредности параметра дужине скале, доминантан утицај прелази на нелокални параметар вишег реда. Када су нелокални параметри једнаки, за вредности параметра дужине скале мање од нелокалног параметра, критична температура и фреквенција осцилација наноносача су ниже него у класичној теорији. Насупрот томе, за вредности параметра дужине скале веће од нелокалног параметра, критична температура и фреквенција осцилација су веће у поређењу са класичном теоријом. У случају када је параметар дужине скале једнак нули, нелокални параметар вишег реда нема утицаја на критичну температуру и фреквенцију осцилација.

6. Утицај Zhang-Fu-овог модела на промену основне осцилаторне карактеристике наноцеви

Анализа основних осцилаторних карактеристика цеви представља важну и изазовну тему у научним и инжењерским истраживањима, с обзиром на њихову широку примену. У последњих неколико деценија, развој технологије омогућио је креирање цевних структура на микро и нано скали. Примери таквих структура укључују протеинске микроцевне ћелије и различите врсте наноцеви и нановлакана [45, 46, 47]. Ове структуре играју кључну улогу у медицини и биологији, омогућавајући иновативна решења за бројне аспекте живота и побољшање здравља.

Наноцеви се користе у биомедицини као носачи за лекове, омогућавајући прецизну доставу лека на одређено место у телу. Осим тога, користе се за развој биокомпатибилних имплантата који делују на молекуларном нивоу у интеракцији са ћелијама тела. Такође се примењују за брзу и прецизну дијагностику болести, праћење биомаркера и изучавање ћелијских процеса [48, 49]. Развој изузетно осетљивих медицинских сензора представља један од кључних доприноса нанотехнологије у медицини. У регенеративној медицини, наноцеви омогућавају контролу раста и развоја ткива, као и обнављање оштећених ткива.

Наноцеви имају значајну примену не само у медицини, већ и у другим научним и технолошким областима. Преглед литературе показује да су карбонске наноцеви (Carbon Nanotubes - CNTs) привукле велику пажњу научника у последњих неколико деценија. Карбонске наноцеви су наноструктуре са изузетним својствима, те су први пут теоријски разматране 1970. године од стране Richard Smalley-а и Leslie Thorn-а. Први експерименти који су доказали постојање угљеничних наноцеви забележени су 1991. године од стране Sumio Iijima [50]. Ове структуре настају савијањем графенских решетки у цилиндре, и постоје у следећим облицима: једноструке (Single-Walled Carbon Nanotubes – SWCNTs), двоструке (Double-Walled Carbon Nanotubes – DWCNTs) и вишеструке (Multi-Walled Carbon Nanotubes – MWCNTs), зависно од броја цилиндричних слојева.

Карбонске наноцеви имају изванредне физичке и хемијске особине. Одликује их изузетна чврстоћа и мала маса, а могу проводити електричну струју, што их чини идеалним за разне примене. Осим тога, карактерише их висока термичка стабилност, механичка чврстоћа и жилавост [51, 52]. Због ових особина, оне су предмет бројних истраживања у разним областима. У електроници се користе за израду брзих и ефикасних транзистора, док у медицини служе као контрасни агенси за снимање, побољшавајући резолуцију и осетљивост слике. Такође се примењују у развоју биосензора за детекцију биомолекула. Када се уграде у материјале као што су полимери или метали, карбонске наноцеви побољшавају механичка својства и служе као проводљиви адитиви, чиме доприносе развоју напредних композита и проводних полимера. У ваздухопловној индустрији, користе се за креирање лакших структура, у енергетици за производњу батерија и суперкондензатора, а у заштити животне средине за пречишћавање воде због способности да апсорбују загађиваче.

Због ових својстава и механичких карактеристика, карбонске наноцеви су предмет интензивних истраживања у бројним инжењерским областима. При пројектовању наноелектромеханичких система (NEMS), неопходно је познавати статичко и динамичко понашање наноструктура, због чега су статичка и динамичка анализа карбонских наноцеви честа тема истраживања [53, 54, 55]. Научници су испитивали механичко понашање наноцеви користећи теорије носача попут Euler-Bernoulli-јеве и Timoshenko-ве, а понекад се у литератури наилази и на радове засноване на теоријама вишег реда, као што је Reddy-јева теорија.

Ипак, у научним круговима постоји тежња за развојем теорије вишег реда која би била прилагођена анализи цевних структура. Zhang и Fu [12] први су предложили теорију вишег реда, назвавши је „префињени модел носача“. Ова теорија побољшава предвиђање деформације попречног смицања. Теорија носача вишег реда користи проширени облик Laurent-овог реда за опис поља померања, за разлику од конвенционалних модела који се ослањају на Taylor-ов ред. На тај начин, ова теорија боље обухвата геометријске карактеристике цеви.

У поменутом раду представљене је теорија која је заправо упрошћени модел трећег реда. Показано је да је расподела попречног напона смицања у моделу трећег реда слична оној предвиђеној Saint-Venant-овим решењем. У последњој деценији објављен је велики број радова који се баве динамичком анализом наноцеви применом ове теорије. С обзиром на важност ове теорије за динамичку анализу, део ове докторске дисертације биће посвећен даљем истраживању њене примене.

6.1 Zhang-Fu-ов модел греда

Теорија ће бити детаљније анализирана применом на моделу еластичног носача са кружним попречним пресеком, са унутрашњим полупречником R_i и спољашњим полупречником R_o. Проблем је анализиран у два координатна система: Декартовом и поларно-цилиндричном. Циљ рада [12] је успостављање новог модела носача. Претпостављено је да је материјал цеви линеарно еластичан ради поједностављења, иако би се могле користити и напредне теорије, као што су нелинеарни еластични и хипереластични модели [56]. Young-ов модул еластичности, модул смицања и Poisson-ов коефицијент за цев означени су као E,G,ν, при чему важи да је $E=2\left(1+\nu\right)G$.

Као што је наведено у раду [12], један од главних изазова је дефинисање поља померања које узима у обзир три компоненте у правцу x,y,z. У овој теорији, трансверзално померање се сматра константним, тако да не постоји деформација у равни попречног пресека. За носач у равни $x-z$, померање v је једнако нули, што подразумева да се већина теорија носача разликује по претпоставкама за лонгитудинално померање. За носаче са правоугаоним попречним пресеком, претпоставља се да је померање u облика

$$u\left(x,z,t\right)=\sum_{i=0}^{+\infty}z^{i}\varphi_{i}\left(x\right). \tag{6.1}$$

Ова претпоставка пружа добар опис поља померања и напона, док су у раду [57] предложене неке измене, укључујући Reddy-јев модел трећег реда. Међутим, при детаљнијем испитивању деформација носача, показује се да је лонгитудинално померање такође повезано са трансверзалним померањима што је значајно у неким случајевима, нарочито код носача неправилног облика или код структура мањих крутости. Да би се ово превазишло, неки истраживачи [58, 59] предложили су да се узму у обзир оба аксијална померања у правцима оса y и z која се могу апроксимирати одабараним члановима из MacLaurin-ових полинома

$$u(x,z,t)=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}z^i y^j \varphi_{ij}(x). \tag{6.2}$$

Разлог за коришћење MacLaurin-ових полинома је тај што је MacLaurin-ов ред специјалан случај Taylor-овог реда који је развијен од нуле, што је посебно корисно за моделирање малих померања у механичким системима. Једначина (6.2) дефинише опште поље померања за различите типове носача. Међутим, не узима у обзир кључне геометријске карактеристике носача, при чему већи број чланова у полиномима нема улогу код одређених типова носача [58]. Очигледно је да је променљива $r=\sqrt{x^2+y^2}$ погоднија за дефинисање поља померања код кружних и прстенастих попречних пресека. Зато је предложено да се, уместо променљиве y користи

$$u(x,z,t)=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}z^i r^j \varphi_{ij}(x). \tag{6.3}$$

Модел трећег реда на основу претходних једначина представљен је у поједностављеном облику, при чему су изостављени чланови вишег реда за $i>1,|j|>2$. Поред тога, аксијално померање u треба да буде непарна функција у односу на z, па су чланови са $i=0,\ j=1$ занемарени. Коначно, поље померања еластичне цеви има следећи облик

$$u\left(x,y,z\right)=z\left[\varphi\left(x\right)+\frac{\varphi_1\left(x\right)}{r^2}+r^2\varphi_2\left(x\right)\right], \qquad (6.4а)$$

$$w\left(x,z,t\right)=w\left(x\right). \qquad (6.4б)$$

Након дефинисања поља померања, поље деформација може се записати у облику

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=z\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+r^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right], \qquad (6.5а)$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}=2yz\left(\varphi_2-\frac{\varphi_1}{r^4}\right), \qquad (6.5б)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}&=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\\&=\varphi+\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2z^2}{r^4}\right)\varphi_1+\left(r^2+2z^2\right)\varphi_2+\frac{\partial w}{\partial x},\end{aligned} \qquad (6.5в)$$

где су $\varphi,\varphi_1,\varphi_2$ три непознате функције.

Једначине равнотеже могу се одредити применом варијационог принципа. Поље померања представљено једначинама (6.4) није лако решити због више непознатих функција. Стога је поједностављен модел добијен условом да је напон смицања на крајњим површинама (унутрашњег и спољашњег полупречника) једнак нули. Напон смицања у радијалном правцу може се записати као

$$\begin{aligned}\gamma_{xr}&=\gamma_{xz}\,sin\theta+\gamma_{xy}\,cos\theta=\\&=\frac{z}{r}\left(\varphi+\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\varphi_1}{r^2}+3r^2\varphi_2\right).\end{aligned} \qquad (6.6)$$

Како је и предвиђено, напон смицања на површинама једнак је нули. Из тога следи да непознате променљиве φ_1 и φ_2 могу бити дефинисане у функцији φ и $\partial w/\partial x$

$$\varphi_1 = \frac{\varphi + \partial w/\partial x}{R_0^{-2} + R_i^{-2}}, \quad \varphi_2 = \frac{\varphi + \partial w/\partial x}{3\left(R_0^{\,2} + R_i^2\right)}. \tag{6.7}$$

На крају, аксијално померање може се израчунати на основу једначине (6.7) у облику

$$u = f\frac{\partial w}{\partial x} + g\varphi, \tag{6.8}$$

где је

$$f = \frac{z}{R_0^{\,2} + R_i^2}\left(\frac{R_0^{\,2} R_i^2}{r^2} - \frac{r^2}{3}\right), \tag{6.9а}$$

$$g = f + z. \tag{6.9б}$$

На основу претходно дефинисаних функционалних параметара, могуће је извршити статичку и динамичку анализу носача. У наставку ће се приказати динамичка анализа порозне наноцеви применом Zhang-Fu модела.

6.2 Кружна фреквенција осциловања порозне наноцеви применом Zhang-Fu-овог модела

Порозне структуре садрже празнине, шупљине или поре, које могу значајно утицати на њихова физичка и механичка својства, а често се јављају у различитим природним и индустријским процесима. Порозне структуре могу настати током производног процеса, као што је ливење или синтеровање. Поред тога, постоје природни процеси као што су ерозија, хемијско разлагање, или биолошки процеси, који такође могу довести до формирања порозних структура. У неким случајевима, порозне структуре се намерно уводе у материјале, када је њихова мала маса и прозност од посебног значаја, на пример у изолационим материјалима.

У раду [26] испитиван је утицај порозности наноцеви на промену фреквенције осциловања. У овом истраживању коришћена је нелокална теорија градијента деформације у комбинацији са Zhang-Fu-овим моделом носача. Порозна наноцев је направљена од функционално градијентних материјала, при чему је материјал температурно завистан и континуално варира у радијалном правцу.

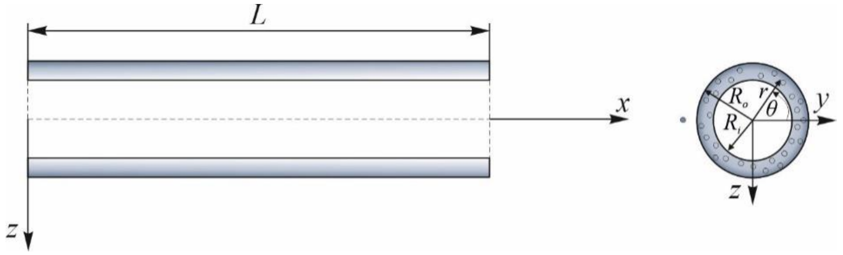
Код модела наноцеви сачињеног од два различита материјала, са униформном расподелом порозности, ефективне карактеристике материјала попут Young-овог модула еластичности, густине материјала и коефицијента топлотне експанзије могу се дефинисати као

$$\begin{aligned} E(r,T) = \left[E_c(T) - E_m(T)\right]\left(\frac{r-R_i}{R_o-R_i}\right)^p + E_m(T) - \\ -\frac{\beta}{2}\left[E_c(T) - E_m(T)\right], \end{aligned} \tag{6.10a}$$

$$\alpha\left(r,T\right)=\left[\alpha_c\left(T\right)-\alpha_m\left(T\right)\right]\left(\frac{r-R_i}{R_o-R_i}\right)^p+\alpha_m\left(T\right)- \\ -\frac{\beta}{2}\left[\alpha_c\left(T\right)-\alpha_m\left(T\right)\right], \tag{6.10б}$$

$$\rho\left(r\right)=\left(\rho_c-\rho_m\right)\left(\frac{r-R_i}{R_o-R_i}\right)^p+\rho_m-\frac{\beta}{2}\left(\rho_c-\rho_m\right), \tag{6.10в}$$

при чему ознаке у индексима „m“ и „c“ представљају ознаке за метал и керамику, β представља запремински удео порозности, док је p експонент запремиснког удела материјала. Механичке карактеристике материјала су температурно зависне и дефинисане су изразом (4.2).



Слика 6.1. Геометрија функционално градијентне порозне наноцеви

Поље померања функционално градијентне наноцеви према Zhang-Fu-овом моделу [12, 26] је облика

$$q_1\left(x,y,z,t\right)=u-z\frac{\partial w}{\partial x}+g\left(y,z\right)\left[\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right], \tag{6.11а}$$

$$q_2\left(x,y,z,t\right)=0, \tag{6.11б}$$

$$q_3\left(x,y,z,t\right)=w\left(x,t\right), \tag{6.11в}$$

при чему је

$$g\left(y,z\right)=z+z\left(\frac{R_o^{\;2}R_i^2}{r^2}-\frac{r^2}{3}\right)\left(R_o^{\;2}+R_i^{\;2}\right)^{-1}, \qquad (6.12)$$

где су $u\left(x,t\right)$, $w\left(x,t\right)$ и $\psi\left(x,t\right)$ су редом, аксијално, трансверзало померање и ротација попречног пресека у односу на y осу.

Код теорија као што је Zhang-Fu-ова, могуће је смањење њеног реда. Уколико је функција $g\left(y,z\right)$ једнака нули, добија се Euler-Bernoulli-јев модел носача, док у случају када је $g\left(y,z\right)=z$, модел се своди на Timoshenko-в облик првог реда. На основу једначина (6.11а-6.11в) поље деформације је облика

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial q_1}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+g\left(y,z\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\right), \qquad (6.13а)$$

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial q_1}{\partial z}+\frac{\partial q_3}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right), \qquad (6.13б)$$

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial q_1}{\partial y}+\frac{\partial q_2}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right), \qquad (6.13в)$$

Применом Hamilton-овог принципа (2.1) добијају се динамичке једначине осциловања порозне наноцеви. Варијација потенцијалне енергије може се представити као

$$\delta U=\int_V\left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\left(\sigma_{xz}\delta\varepsilon_{xz}+\sigma_{xy}\delta\varepsilon_{xy}\right)+\sigma_{xx}^{(1)}\delta\frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\left(\sigma_{xz}{}^{(1)}\delta\frac{\partial\varepsilon_{xz}}{\partial x}+\sigma_{xy}{}^{(1)}\delta\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\right)\right)dV=$$
$$\delta U=\int_L\left(N\frac{\partial\delta u}{\partial x}-M\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+P\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right)+\right. \qquad (6.14)$$
$$\left.+Q\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\delta\psi\right)\right)dx+\left[N^{(1)}\delta\frac{\partial u}{\partial x}-M^{(1)}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\right.$$
$$\left.+P^{(1)}\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right)+Q^{(1)}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\delta\psi\right)\right]_0^L,$$

при чему су момент савијања вишег реда и сила смицања облика

$$P=\int_A g\sigma_{xx}dA,$$
$$Q=\int_A\left(\frac{\partial g}{\partial z}\tau_{xz}+\frac{\partial g}{\partial y}\tau_{xy}\right)dA,$$
$$P^{(1)}=\int_A g\sigma_{xx}{}^{(1)}dA, \qquad (6.15)$$
$$Q^{(1)}=\int_A\left(\frac{\partial g}{\partial z}\tau_{xz}{}^{(1)}+\frac{\partial g}{\partial y}\tau_{xy}{}^{(1)}\right)dA.$$

Виртуални рад спољашњих сила је

$$\delta V=-\int_0^L\left[q\delta w+N^T\frac{\partial w}{\partial x}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]dx, \qquad (6.16)$$

при чему је

$$N^T=\int_A\rho\left(r\right)\alpha\left(r,T\right)\Delta TdA. \qquad (6.17)$$

Варијација кинетичке енергије може се написати у облику

$$
\begin{aligned}
\delta T_p &= \frac{1}{2}\int_v \rho(r)\,\delta\left(\left(\frac{\partial q_1}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial q_2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial q_3}{\partial t}\right)^2\right)dv = \\
&= \int_0^L \left[I_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \delta u}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \delta w}{\partial t}\right)+I_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial t}- \right.\\
&-I_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial \delta\psi}{\partial t}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial t}\right)+ \\
&+I_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial t}+\right.\\
&\left.\left.+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial \delta\psi}{\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial \delta\psi}{\partial t}\right)\right]dx,
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

где су инерцијалне карактеристике цеви

$$
\left(I_0,I_1,I_2,I_3\right)=\int_A\left(1,z^2,zg,g^2\right)\rho dA. \tag{6.19}
$$

Заменом једначина (6.14), (6.16) и (6.18) у једначину (2.1), динамичке једначине су

$$
\delta u\text{:}\ \frac{\partial N_x}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{6.20а}
$$

$$
\delta\psi\text{:}\ \frac{\partial P}{\partial x}-Q=-I_2\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}+I_3\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right), \tag{6.20б}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta w\text{:}\ &\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial Q}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-I_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+ \\
&+2I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+I_2\frac{\partial^3 \psi}{\partial x\partial t^2}-I_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}- \\
&-I_3\frac{\partial^3 \psi}{\partial x\partial t^2}+N^T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-q.
\end{aligned}
\tag{6.20в}
$$

На основу термо-еластичних конститутивних релација наногреде, а на основу нелокалне теорије градијента деформације добија се

$$\left(1-(ea)^2\nabla^2\right)\sigma_{xx}=\left(1-l^2\nabla^2\right)E(r,T)\varepsilon_{xx}, \qquad (6.21а)$$

$$\left(1-(ea)^2\nabla^2\right)\tau_{xz}=\left(1-l^2\nabla^2\right)G(r,T)\gamma_{xz}, \qquad (6.21б)$$

$$\left(1-(ea)^2\nabla^2\right)\tau_{xy}=\left(1-l^2\nabla^2\right)G(r,T)\gamma_{xy}, \qquad (6.21в)$$

где је $G(r,T)=E/\left[2(1+\nu)\right]$ модул смицања, док је $\nabla=\partial/\partial x$. Интеграцијом једначина (6.21) добијају се редом, нормална сила, момент савијања нижег и вишег реда, као и сила смицања у следећем облику

$$N_x=(ea)^2\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2}+A_{11}\left(1-l^2\nabla^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (6.22а)$$

$$\begin{aligned}M=(ea)^2\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\left(1-l^2\nabla^2\right)\Bigg[&-D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\\&+E_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\Bigg],\end{aligned} \qquad (6.22б)$$

$$\begin{aligned}P=(ea)^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\left(1-l^2\nabla^2\right)\Bigg[&-E_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\\&+H_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\Bigg],\end{aligned} \qquad (6.22в)$$

$$Q=(ea)^2\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\left(1-l^2\nabla^2\right)B_{11}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right). \qquad (6.22г)$$

Елементи матрице крутости су

$$\left(A_{11},D_{11},E_{11},H_{11}\right)=\int_A\left(1,z^2,zg,g^2\right)E(r,T)\,dA, \qquad (6.23а)$$

$$B_{11} = \int_A \left[\left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)^2 \right] G(r,T)\, dA. \qquad (6.23б)$$

Сада, на основу динамичких једначина (6.20) и конститутивних релација (6.22), добијају се диференцијалне једначине осцилаторног кретања порозне наноцеви

$$A_{11}\left(1 - l^2\nabla^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = I_0\left(1 - (ea)^2\,\nabla^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (6.24а)$$

$$\begin{aligned} &\left(1 - l^2\nabla^2\right)\left[-E_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + H_{11}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - \right. \\ &\left. -A_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) \right] = \left(1 - (ea)^2\,\nabla^2\right)\left[-I_2\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \right. \qquad (6.24б) \\ &\left. +I_3\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(1 - l^2\nabla^2\right)\left[-E_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + H_{11}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) + D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \right. \\ &\left. -E_{11}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right) - B_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] = \\ &= \left(1 - (ea)^2\,\nabla^2\right)\left[q - N^T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \right. \qquad (6.24в) \\ &\left. -2I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - I_2\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} + I_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + I_3\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} \right]. \end{aligned}$$

На основу добијених диференцијалних једначина (6.24), може се даље анализирати утицај нелокалног параметра (ea) и дужине скале l на промену основне кружне фреквенције осциловања механичког система. Ова нелокална теорија градијента деформације може се редуковати на Eringen-ову нелокалну теорију еластичности тако што се дужина скале изједначи са нулом. Додатно, може се свести и на класичну теорију, ако се занемаре и нелокални параметар и дужина скале. У наставку ће се приказати и анализа промене фреквенције осциловања наноносача у зависности од промене параметра запреминског удела. Тиме се омогућава јасно сагледавање симултаног утицаја оба параметра на промену кружне фреквенције. Оваква анализа има значај у процесу пројектовања наноцеви и сличних наноструктура.

6.3 Нумеричка анализа са резултатима

У овом делу разматран је проблем слободних осцилација, па је утицај спољашњег оптерећења занемарен, односно $q=0$. Примењен је Navier-ов метод, баш како је урађено и у раду [26], за одређивање аналитичког решења фреквенције осциловања наноцеви. Функције померања могу се претпоставити у следећем облику

$$\psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n e^{i\omega_n t}\cos\beta_n x, \qquad (6.25а)$$

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n e^{i\omega_n t}\sin\beta_n x, \qquad (6.25б)$$

где су $i=\sqrt{-1}$, $\beta_n=n\pi/L$, док Φ_n и W_n представљају непознате Fourier-ове коефицијенте. Решење аксијалног померања $u(x,t)$ није представљено, јер је једначина (6.24а) потпуно независна. Заменом претпостављених решења (6.25) у систем диференцијалних једначина (6.24) добија се

$$\begin{aligned}
&\eta\Big[\left(-H_{11}\beta_n^{\,2}+B_{11}\right)\varPhi_n+\left(E_{11}\beta_n^{\,3}-H_{11}\beta_n^{\,3}\right.\\
&\left.-B_{11}\beta_n\right)W_n\Big]=\lambda\Big[-I_3\omega_n^{\,2}\,\varPhi_n+\left(-I_3\omega_n^{\,2}\beta_n^{\,2}\right.\\
&\left.+I_2\omega_n^{\,2}\beta_n\right)W_n\Big],
\end{aligned}\tag{6.26а}$$

$$\begin{aligned}
&\eta\Big[\left(-2E_{11}\beta_n^{\,4}+H_{11}\beta_n^{\,4}+D_{11}\beta_n^{\,4}+B_{11}\beta_n^{\,2}\right)W_n\\
&+\left(H_{11}\beta_n^{\,3}-E_{11}\beta_n^{\,3}+B_{11}\beta_n\right)\varPhi_n\Big]=\\
&=\lambda\Big[\left(N^T\beta_n^{\,2}+I_0\omega_n^{\,2}\beta_n^{\,2}+I_1\omega_n^{\,2}\beta_n^{\,2}-2I_2\omega_n^{\,2}\beta_n^{\,2}\right.\\
&\left.+I_3\omega_n^{\,2}\beta_n^{\,2}\right)W_n+\left(-I_2\omega_n^{\,2}\beta_n+I_3\omega_n^{\,2}\beta_n\right)\varPhi_n\Big].
\end{aligned}\tag{6.26б}$$

Ове једначине могу бити записане у матричном облику и то

$$\left(\eta\begin{bmatrix}S_{22} & S_{23}\\ S_{32} & S_{33}\end{bmatrix}-\lambda\omega_n^{\,2}\begin{bmatrix}R_{22} & R_{23}\\ R_{32} & R_{33}\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\varPhi_n\\ W_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},\tag{6.27}$$

при чему је матрица крутости са елементима

$$\begin{aligned}
S_{22}&=-H_{11}\beta_n^{\,2}+B_{11},\\
S_{23}&=E_{11}\beta_n^{\,3}-H_{11}\beta_n^{\,3}-B_{11}\beta_n,\\
S_{32}&=-E_{11}\beta_n^{\,3}+H_{11}\beta_n^{\,3}+B_{11}\beta_n,\\
S_{33}&=-2E_{11}\beta_n^{\,4}+H_{11}\beta_n^{\,4}+D_{11}\beta_n^{\,4}\\
&+B_{11}\beta_n^{\,2}+\frac{\lambda}{\eta}\left(-N^T\beta_n^{\,2}\right),
\end{aligned}\tag{6.28}$$

док су елементи матрице масе

$$\begin{aligned}
R_{22}&=-I_3,\\
R_{23}&=-I_3\beta_n+I_2\beta_n,\\
R_{32}&=I_3\beta_n-I_2\beta_n,\\
R_{33}&=I_0+I_1\beta_n^{\,2}-2I_2\beta_n^{\,2}+I_3\beta_n^{\,2}.
\end{aligned}\tag{6.29}$$

Смене коришћене у претходним релацијама су облика

$$\eta = 1 + l^2 \beta_n^{\ 2}, \lambda = 1 + \left(ea\right)^2 \beta_n^{\ 2}. \tag{6.30}$$

Основна кружна фреквенција осциловања може се одредити из услова да је детерминанта матрице коефицијената (6.27) једнака нули.

У табелама 6.1 и 6.2 приказано је првих шест бездимензионих кружних фреквенција, при чему је $\Omega_n = \omega_n L^2 / R_0 \sqrt{\rho_0 / E_0}$, док је $n = 1,2,3,4$. Резултати у табели 6.1 потврђују да бездимензиона кружна фреквенција осциловања опада са повећањем нелокалног параметара ea. Са друге стране, у табели 6.2 види се да повећање параметра дужине скале доводи до повећања кружне фреквенције осциловања.

На сликама 6.2-6.4 види се промена кружне фреквенције осциловања $\Omega_n \left(n = 1,2,3\right)$ са променом односа параметра дужине скале и нелокалног параметра l/ea за функционално градијентну слободно ослоњену греду која је направљена од материјала $Si_3N_4/SUS304$.

Табела 6.1. Промена бездимензионе кружне фреквенције осциловања слободно ослоњене греде са променом нелокалног параметра $\left(p = 1, R_i/R_o = 0{,}5, \Delta T = 0, L/h = 20, l = 0, \beta = 0\right)$

$ea\left(nm\right)$	Ω_n			
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
0	8,234	31,154	64,833	105,467
1	8,134	29,722	58,647	89,302
2	7,855	26,379	47,180	65,672
3	7,449	22,672	37,440	49,427
4	6,972	19,399	30,384	38,991
5	6,476	16,731	25,329	31,990

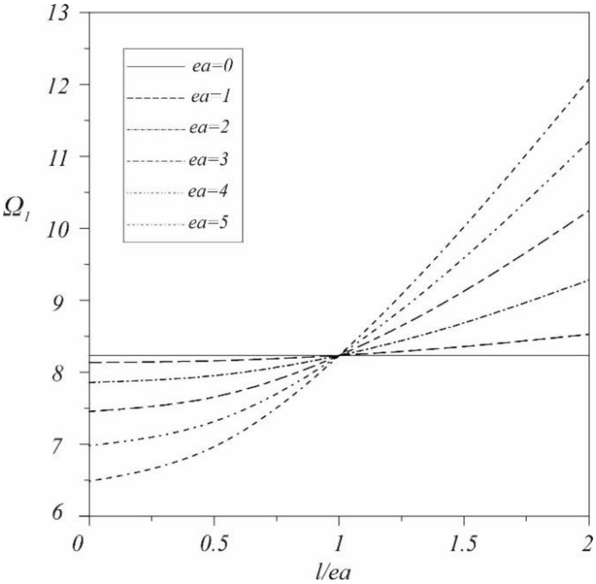
Може се уочити да када је $l/ea=1$ резултати добијени коришћењем нелокалне теорије градијента деформације одговарају вредностима израчунатим класичном теоријом $l=0, ea=0.$ Међутим, када је овај параметар мањи од један, резултати добијени нелокалном теоријом градијента деформације мањи су од оних добијеним класичном теоријом. Ипак, када је овај параметар већи од један, резултати добијени коришћењем нелокалне теорије градијента деформације већи су у односу на резултате добијене класичном теоријом. Ово потврђује да кружна фреквенција осциловања добијена нелокалном теоријом градијента деформације може дати исте резултате као и класична теорија, али могу се добити и мање и веће вредности у односу на класичну теорију, што зависи од параметара дужине скале и нелокалног параметра.

Табела 6.2. Промена бездимензионе кружне фреквенције осциловања слободно ослоњене греде са променом параметра дужине скале $\left(p=1, R_i/R_o=0{,}5, \Delta T=0, L/h=20, \mu=0, \beta=0\right)$

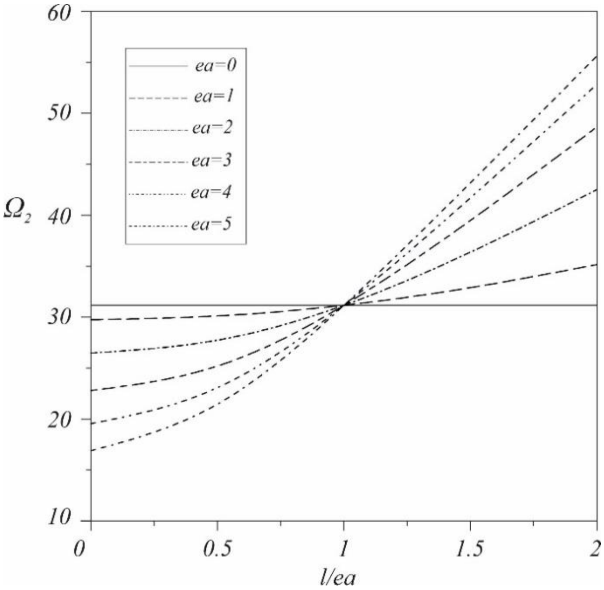
$l(nm)$	Ω_n			
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
0	8,234	31,154	64,833	105,467
1	8,335	32,655	71,671	124,557
2	8,631	36,793	89,089	169,376
3	9,103	42,810	112,267	225,044
4	9,725	50,032	138,339	285,278
5	10,470	58,012	165,947	347,741

Овај феномен може се објаснити тиме да када је $l/ea<1$ долази до појаве смањења крутости, па се добијају мање вредности фреквенције осциловања, док када је $l/ea>1$, због тензора градијента деформације, долази до повећања крутости структуре, а самим тим и до повећања фреквенције осциловања. Такође, када су ови параметри међусобно једнаки, ефекат величине је занемарен, односно добијају се исте вредности као и код класичне теорије.

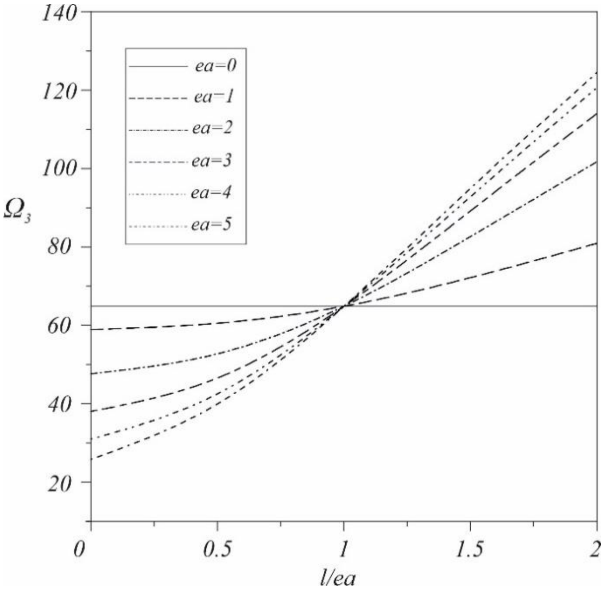
Са друге стране, на сликама 6.5-6.7 приказана је промена кружне фреквенције осциловања са променом параметра запреминског удела наноцеви. Уочава се да пораст параметра запреминског удела доводи до опадања кружне фреквенције осциловања. Такође, на сликама 6.5-6.7 може се видети да пораст температуре доводи до опадања кружне фреквенције осциловања.



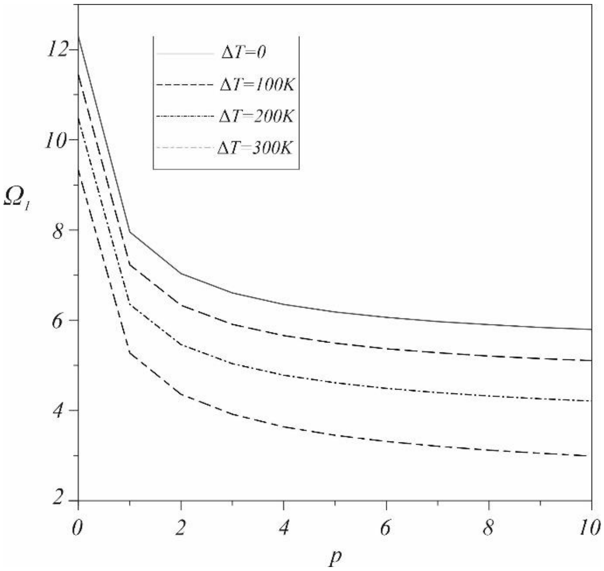
Слика 6.2. Промена основне кружне фреквенције осциловања Ω_1 са променом односа параметра дужине скале l и нелокалног параметра ea



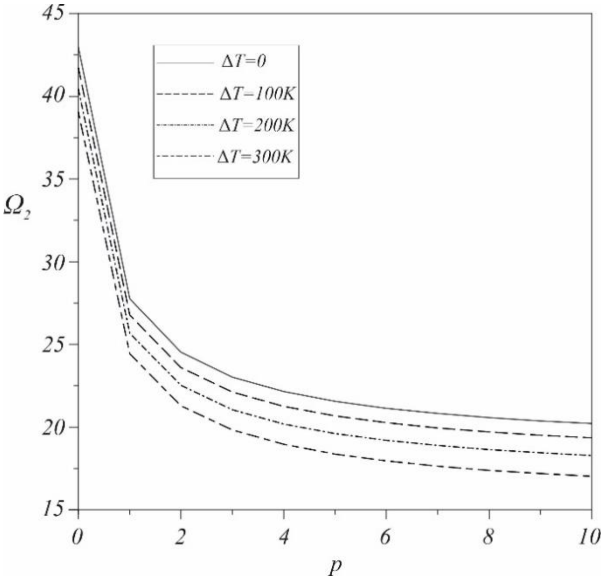
Слика 6.3. Промена кружне фреквенције осциловања Ω_2 са променом односа параметра дужине скале l и нелокалног параметра ea



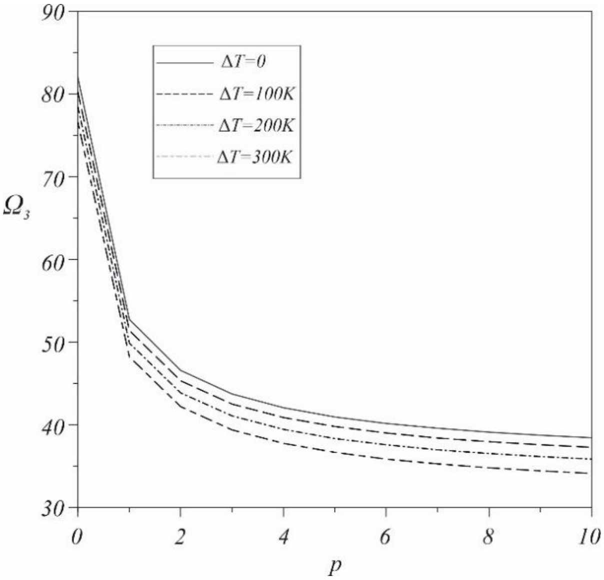
Слика 6.4. Промена кружне фреквенције осциловања Ω_3 са променом односа параметра дужине скале l и нелокалног параметра ea



Слика 6.5. Промена кружне фреквенције осциловања Ω_1 са променом параметра запреминског удела p и променом температуре ΔT



Слика 6.6. Промена кружне фреквенције осциловања Ω_2 са променом параметра запреминског удела p и променом температуре ΔT



Слика 6.7. Промена кружне фреквенције осциловања Ω_3 са променом параметра запреминског удела p и променом температуре ΔT

На сликама 6.4-6.6 може се видети значајнији пад кружне фреквенције осциловања у границама параметра запреминског удела $0 \leq p \leq 1$. Како се за $p = 0$ ради о материјалу типа Si_3N_4, са порастом овог параметра долази до пораста удела материјала типа $SUS304$, што доводи до пада кружне фреквенције осциловања. Оно што је такође јасно, јесте да је пад кружне фреквенције осциловања за вредности параметра запреминског удела већих од 5 незнатан, јер при тим вредностима доминантан материјал постаје $SUS304$.

Пораст температуре такође доводи до опадања фреквенције осциловања, што је и оправдано тиме да пораст температуре доводи до смањења крутости материјала, што даље доводи до статичке нестабилности, односно извијања.

У овом поглављу представљена је теорија греде вишег реда прилагођена коришћењу на проблемима разматрања статичке и динамичке анализе цеви. Овај модел, по избору аутора, назван је Zhang-Fu-овим моделом, јер је овај модел први пут представљен у раду [12]. Оно што је било специфично јесте да је аксијално померање неке тачке на носачу представљено на основу променљиве $r=\sqrt{x^2+y^2}$, која се чинила бољом у представљању греде кружног и прстенастог попречног пресека.

Након тога извршена је динамичка анализа порозне наноцеви као и у раду [26], коришћењем теорије Zhang-Fu-овог модела. Како је анализа извршена у оквиру нелокалне теорије градијента деформације, закључено је да утицај нелокалног параметра и параметра дужине скале даје потпуно другачији одзив наноцеви, односно са порастом нелокалног параметра долази до смањења кружне фреквенције осциловања, за разлику од пораста параметра дужине скале који доводи до пораста кружне фреквенције осциловања. Како је и овде случај о функционално градијентној наноцеви, разматран је утицај параметра запреминског удела, где са порастом долази до опадања кружне фреквенције осциловања. Такође, са порастом температуре, долази до опадања кружне фреквенције осциловања.

7. Основна кружна фреквенција осциловања неуниформне и функционално градијентне наноцеви

У овом поглављу анализирана је промена основне осцилаторне карактеристике неуниформне функционално градијентне наноцеви. Неуниформне структуре јесу структуре које не поседују константне или униформне физичке и механичке карактеристике дуж целе структуре. За оваквим структурама показано је велико интересовање истраживача јер се посебно ради на побољшању перформанси система у којима су ове компоненте укључене, као и на оптимизацији материјала за различите примене. У нанотехнологији посебно се помињу кроз научне радове, а као разлог наводи се могућност за израду компоненти типа сензора, генератора и сл. Када је примена у питању, може се напоменути да се примена налази у аутомобилској индустрији, где се користе композитне структуре са различитим степеном жилавости тако да на различитим деловима могу повећати оптималну комбинацију жилавости и тежине материјала. Са друге стране, сада већ добро познато, у медицини овакве структуре могу послужити као носачи лекова, где омогућавају контролисано отпуштање лекова.

Као што је већ наведено, за оваквим структурама показано је интересовање истраживача, па се и мноштво радова може прочитати са темом динамичког понашања и динамичке стабилности наноцеви. Тако су She и коаутори [26] представили анализу осцилација порозне наноцеви применом нелокалне теорије градијента деформације и Zhang-Fu-овог модела греде, где је размотрен термички утицај, утицај нелокалног параметара и параметар дужине скале, као и утицај порозности и запреминског удела на промену фреквенције осциловања наноцеви. Shafiei и She [60] размотрили су осцилације функционално градијентне наноцеви чији се материјал мења у два правца (bi-directional functionally graded materials - BDFG) применом Zhang-Fu-овог модела греде. Ипак, основна намена наноцеви јесте транспорт флуида, па је утицај струјања флуида на динамичко понашање наноцеви нешто што је разматрано у прошлости. Тако су Von Karman-ова нелинеарност и утицај струјања флуида на динамичко понашање функционално градијентне наноцеви разматрани у раду [61]. Такође, Deng и коаутори [62] представили су хибридни метод за израчунавање критичне брзине струјања флуида и кружне фреквенције осциловања вискоеластичне функционално градијентне наноцеви. Слободне осцилације и извијање наноцеви применом модела вишег реда размотрене су у раду [63].

У овом поглављу анализиране су промене кружне фреквенције осциловања неуниформне функционално градијентне наноцеви са променом материјала у два правца, а на основу Zhang-Fu-овог модела греде и нелокалне теорије градијента деформације, као што је приказано у раду [64]. Овде се може видети како повећање нагиба наноцеви има утицај на промену кружне фреквенције осциловања као и промену термичке силе извијања. Утицај параметра дужине скале, нелокалног параметра као и параметра запреминског удела нису остали неразмотрени у овом поглављу. Динамичке једначине добијене су Hamilton-овим принципом док су резултати израчунати Galerkin-овом методом.

7.1 Кинематске релације неуниформне функционално градијентне наноцеви

Размотримо функционално градијентну наноцев, где се карактеристике материјала мењају у два правца, у радијалном и лонгитудиналном правцу. Геометрија наноцеви дефинисана је дужином L, унутрашњим полупречником на левом крају наноцеви R_{i_1} и спољашњим полупречником на левом крају наноцеви R_{o_1} (Слика 7.1). Карактеристике материјала мењају се у радијалном и лонгитудиналном правцу наноцеви на основу закона о мешању могу бити записане у облику

$$P_f(T,r,x)=P_c(T)V_c(r,x)+P_m(T)V_m(r,x), \qquad (7.1)$$

где су $P_c(T)$ и $P_m(T)$, редом температурно зависна механичка својства керамике Si_3N_4 и метала $SUS304$, док су $V_c(r,x)$ и $V_m(r,x)$, редом запремински удео керамике и метала у материјалу. Користећи закон о мешању, запремински удео може се представити изразом

$$\begin{gathered} V_c(r,x)=\left(\frac{r-R_i(x)}{R_o(x)-R_i(x)}\right)^{p_r}\left(\frac{x}{L}\right)^{p_x},\ 0\le x\le L, \\ V_m(r,x)=1-V_c(r,x), R_i(x)\le r\le R_o(x), \end{gathered} \qquad (7.2)$$

при чему су p_r и p_x, редом, експоненти запреминског удела у радијалном и лонгитудиналном правцу.

На основу једначине (4.2) и једначине (7.2), расподела материјала (7.1) представљена је у облику

$$P_f\left(T,r,x\right)=\left(P_c\left(T\right)-P_m\left(T\right)\right)\left(\frac{r-R_i\left(x\right)}{R_o\left(x\right)-R_i\left(x\right)}\right)^{p_r}\left(\frac{x}{L}\right)^{p_x}+ \qquad (7.3)$$
$$+P_m\left(T\right).$$

Унутрашњи и спољашњи полупречник наноцеви зависни су од координате x, тако да су $R_i\left(x\right)$ и $R_o\left(x\right)$, изражени су у облику

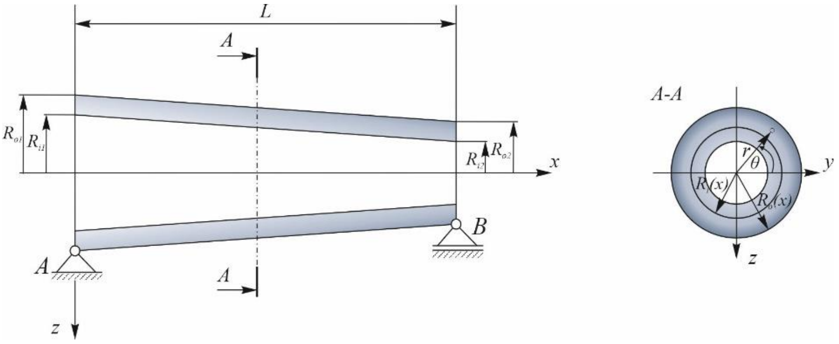
$$R_i\left(x\right)=R_{i_1}\left(1-\beta\frac{x}{L}\right), \qquad (7.4а)$$

$$R_o\left(x\right)=R_{o_1}\left(1-\beta\frac{x}{L}\right), \qquad (7.4б)$$

где се радијус мења линеарно у аксијално правцу, при чему је β геометријски коефицијент који дефинише нагиб наноцеви. Геометријски коефицијент β може се дефинисати записом

$$\beta=\frac{R_{i_1}-R_{i_2}}{R_{i_1}}=\frac{R_{o_1}-R_{o_2}}{R_{o_1}}, \qquad (7.5)$$

где су R_{i_1}, R_{o_1}, R_{i_2} и R_{o_2} унутрашњи (*i*) и спољашњи (*o*) полупречник на левом (1) и десном крају (2) наноцеви. Температурно зависни коефицијенти карактеристика материјала Si_3N_4 и $SUS304$ приказани су у табели 4.1.



Слика 7.1. Геометрија неуниформне функционално градиране наноцеви – z на доле!!!

Компоненте померања Zhang-Fu-овог модела греде за цеви [12], у x, y и z правцу могу се записати у облику

$$q_x = u(x,t) - z\frac{\partial w}{\partial x} + g(y,z)\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \psi(x,t)\right], \tag{7.6a}$$

$$q_z = w(x,t), \tag{7.6б}$$

где су $u(x,t)$ и $w(x,t)$, редом померања у аксијалном и трансверзалном правцу, док $\psi(x,t)$ представља ротацију попречног пресека у односу на y осу. Функција $g(y,z)$ може се изразити у облику [12]

$$g(y,z) = z + z\frac{R_1^2 R_0^2 / r^2 - r^2/3}{R_1^2 + R_0^2}. \tag{7.7}$$

На основу једначина (7.6а) и (7.6б) следе компонентне дилатације у следећем облику

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(y,z)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right), \tag{7.8a}$$

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial q_x}{\partial z}+\frac{\partial q_z}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\left(x,t\right)\right), \tag{7.8б}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial q_x}{\partial y}+\frac{\partial q_y}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\left(x,t\right)\right). \tag{7.8в}$$

Укупни нелокални тензор напона t_{ij} биће записан у облику [11]

$$t_{ij}=\sigma_{ij}-\nabla\sigma_{ij}^{(1)}, \tag{7.9}$$

при чему је σ_{ij} класични тензор напона, док је $\sigma_{ij}^{(1)}$ тензор напона вишег реда, док је $\nabla=\partial/\partial x$.

Веза између поларно-цилиндричног координатног система и Декартових координата може бити успостављена и записана у облику

$$\begin{aligned} &y=r\,cos\,\theta,\quad z=r\,sin\,\theta,\\ &r^2=y^2+z^2,\quad 0\leq x\leq L. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Динамичке једначине разматраног проблема могу се одредити као и у претходним случајевима Hamilton-овим принципом у следећем облику

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta U+\delta V-\delta T_p\right)dt=0, \tag{7.11}$$

Варијација потенцијалне енергије неуниформне функционално градиране наноцеви δU је

$$\begin{gathered}\delta U=\int_V\Big[\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\\+\sigma_{xx}^{(1)}\nabla\delta\varepsilon_{xx}+\tau_{xz}^{(1)}\nabla\delta\gamma_{xz}+\tau_{xy}^{(1)}\nabla\delta\gamma_{xy}\Big]dv,\\\delta U=\int_0^L\left[N_{xx}\frac{\partial\delta u}{\partial x}-M_{xx}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+P\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right)+\right.\\\left.+Q\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\delta\psi\right)\right]dx+\left[N_{xx}^{(1)}\frac{\partial\delta u}{\partial x}-M_{xx}^{(1)}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+\right.\\\left.+P^{(1)}\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right)+Q^{(1)}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\delta\psi\right)\right]_0^L,\end{gathered}\tag{7.12}$$

где су аксијална сила, момент савијања нижег и вишег реда, као и сила смицања облика

$$\begin{gathered}\left(N_{xx},\,M_{xx},P\right)=\int_A\left(1,z,g\right)t_{xx}dA,\\Q=\int_A\left(t_{xz}\frac{\partial g}{\partial z}+t_{xy}\frac{\partial g}{\partial y}\right)dA,\end{gathered}\tag{7.13а}$$

$$\begin{gathered}\left(N_{xx}^{(1)},\,M_{xx}^{(1)},P^{(1)}\right)=\int_A\left(1,z,g\right)\sigma_{xx}^{(1)}dA,\\Q^{(1)}=\int_A\left(\tau_{xz}^{(1)}\frac{\partial g}{\partial z}+\tau_{xy}^{(1)}\frac{\partial g}{\partial y}\right)dA.\end{gathered}\tag{7.13б}$$

Варијација кинетичке енергије неуниформне функционално градиране наноцеви δT_p је представљена изразом

$$\delta T_p = \frac{1}{2}\int_v \rho(r,x,T)\delta\left(\left(\frac{\partial q_x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_z}{\partial t}\right)^2\right)dv$$

$$\begin{aligned}\delta T_p = \int_0^L \Bigg[& I_0(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \delta w}{\partial t}\right) + I_1(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial t} - \\ & -I_2(x)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial \delta\psi}{\partial t} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial t}\right) + \\ & +I_3(x)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial \delta\psi}{\partial t} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial \delta\psi}{\partial t}\right)\Bigg]dx,\end{aligned} \qquad (7.14)$$

где $\rho(r,x,T)$ представља густину материјала наноцеви која се мења према закону расподеле на основу једначине (7.3). Инерцијалне карактеристике наноцеви су облика

$$\begin{aligned}&\left(I_0(x), I_1(x), I_2(x), I_3(x)\right) = \\ &= \int_{R_0}^{R_1}\int_0^{2\pi}\left(1, z^2, zg, g^2\right)\rho(r,x,T)rdrd\theta.\end{aligned} \qquad (7.15)$$

Као што је напоменуто, разматран је термички утицај, па је виртуални рад δV облика

$$\begin{aligned}\delta V &= -\int_v E(r,x,T)\alpha(r,x,T)\Delta T\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)dv, \\ \delta V &= -\int_0^L\left(N^T(x)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta w)\right)dx,\end{aligned} \qquad (7.16)$$

при чему су $E(r,x,T)$ и $\alpha(r,x,T)$ Young-ов модул еластичност и коефицијент топлотног ширења. Сила у лонгитудиналном правцу, која се јавља као последица термичког утицаја је облика

$$N^T = \int_{R_0}^{R_1}\int_{0}^{2\pi} E\left(r,x,T\right)\alpha\left(r,x,T\right)\Delta T r dr d\theta, \qquad (7.17)$$

где је $\Delta T = T - T_0$ промена температуре, при чему је T_0 референтна температура.

Заменом једначина (7.12), (7.14) и (7.16) у једначину (7.11), добијају се динамичке једначине неуниформне функционално градијентне наноцеви у следећем облику

$$\delta u\colon\ \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = I_0\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (7.18а)$$

$$\delta\psi\colon\ \frac{\partial P}{\partial x} - Q = -I_2\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} + I_3\left(x\right)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right), \qquad (7.18б)$$

$$\begin{aligned}\delta w\colon\ &\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} = I_0\left(x\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ &-\frac{\partial}{\partial x}\left(I_1\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(I_2\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right) \\ &+\frac{\partial}{\partial x}\left(I_2\left(x\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(I_3\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right) \\ &-\frac{\partial}{\partial x}\left(I_3\left(x\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(N^T\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right),\end{aligned} \qquad (7.18в)$$

са одговарајућим граничним условима

$$N_{xx} = 0 \quad \text{или} \quad u = 0 \qquad (7.19а)$$

$$P - M_{xx} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad (7.19б)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}+Q-\left(I_1(x)-2I_2(x)+I_3(x)\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\\ -\left(I_3(x)-I_2(x)\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-N^T(x)\frac{\partial w}{\partial x},\ \text{или}\ w=0,\end{gathered}\qquad(7.19в)$$

$$P=0\quad\text{или}\quad\psi=0.\qquad(7.19г)$$

Како је проблем разматран у оквиру нелокалне теорије градијента деформације, нелокалне конститутивне релације у диференцијалном облику су

$$\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)t_{xx}=\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E(r,x,T)\varepsilon_{xx},\qquad(7.20а)$$

$$\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)t_{xz}=\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G(r,x,T)\gamma_{xz},\qquad(7.20б)$$

$$\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)t_{xy}=\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G(r,x,T)\gamma_{xy}.\qquad(7.20в)$$

Нелокална нормална сила, нелокални момент савијања нижег и вишег реда, нелокална сила смицања, могу се на основу једначина (7.20) изразити у облику

$$N_{xx}=\mu^2\frac{\partial^2 N_{xx}}{\partial x^2}+\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x},\qquad(7.21а)$$

$$\begin{gathered}M_{xx}=\mu^2\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+\\ +\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[-B_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_{xx}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right],\end{gathered}\qquad(7.21б)$$

$$P=\mu^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+$$
$$+\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[-D_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+E_{xx}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right], \qquad (7.21в)$$

$$Q=\mu^2\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)C_{yz}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right), \qquad (7.21г)$$

при чему су елементи матрице крутости

$$\left(A_{xx},B_{xx},D_{xx},E_{xx}\right)=$$
$$=\int_{R_0}^{R_1}\int_0^{2\pi}\left(1,z^2,zg,g^2\right)E\left(r,x,T\right)rdrd\theta, \qquad (7.22)$$
$$C_{yz}=\int_{R_0}^{R_1}\int_0^{2\pi}G\left(r,x,T\right)\left(\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)rdrd\theta.$$

На основу једначина (7.18) и заменом извода нормалне силе, момента савијања нижег и вишег реда и силе смицања (7.21), нелокалне диференцијалне једначине неуниформне функционално градијентне наноцеви са променом материјала у два правца, изражене су у облику

$$\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)I_0\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (7.23а)$$

$$\begin{aligned}&\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(E_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial x}\left(E_{xx}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)-C_{yz}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)\right]=\\&=\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[-I_2\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}+I_3\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}+\right.\\&\left.+I_3\left(x\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right],\end{aligned}\tag{7.23б}$$

$$\begin{aligned}&\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\right.\\&+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D_{xx}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E_{xx}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\\&\left.+\frac{\partial}{\partial x}\left(C_{yz}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(C_{yz}\psi\left(x,t\right)\right)\right]=\\&=\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[I_0\left(x\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(I_1\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right)+\right.\\&+2\frac{\partial}{\partial x}\left(I_2\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(I_2\left(x\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(I_3\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right)-\\&\left.-\frac{\partial}{\partial x}\left(I_3\left(x\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(N_T\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\end{aligned}\tag{7.23в}$$

7.2 Нумеричка анализа

Одмах се може закључити да је једначина (7.23а) зависна само од променљиве $u\left(x,t\right)$. Занемаривањем једначине (7.23а), анализа кружне фреквенције осциловања се може извршити на основу једначина (7.23б) и (7.23в). Претпостављена решења, које задовољавају граничне услове, могу се записати у облику

$$\psi\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{N}\Psi_k\,cos\left(\lambda x\right)e^{i\omega_k t}=\sum_{k=1}^{N}\Psi_k\eta_k\left(x\right)e^{i\omega_k t}, \qquad (7.24\text{а})$$

$$\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{N}W_k\,sin\left(\lambda x\right)e^{i\omega_k t}=\sum_{k=1}^{N}W_k\varphi_k\left(x\right)e^{i\omega_k t}, \qquad (7.24\text{б})$$

при чему је $\lambda=k\pi/L$, док су Ψ_k и W_k непознати Fourier-ови коефицијенти. Користећи Galerkin-ов метод, једначине (7.23б) и (7.23в) могу се записати у облику

$$\left(\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}-\omega_k^{\,2}\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}\Psi_k\\ W_k\end{pmatrix}=0, \qquad (7.25)$$

где су $\left[K_{ij}\right]$ и $\left[M_{ij}\right]$ редом, матрица крутости и матрица масе.

Анализа разматраног проблема представља утицај промене температуре на промену кружне фреквенције осциловања наноцеви. Такође, утицај геометријског коефицијента, нелокалног параметра, параметра дужине скале и експонента запреминског удела на промену фреквенције осциловања наноцеви је разматрана у овом поглављу. Геометрија наноцеви која је приказана на Слици 7.1., усвојена је тако да је на левом крају наноцеви унутрашњи полупречник $R_{i_1}=0{,}5\ \text{nm}$ док је спољашњи полупречник $R_{o_1}=1\ \text{nm}$. Резултати представљени у дијаграмима и у табелама су са дужином наноцеви од $L=20\ \text{nm}$ и $L=100\ \text{nm}$.

Инспирација за ову анализу долази из радова [26] и [60], па је поређење резултата управо извршено са тим радовима, са одговарајућим параметрима. За различите вредности нелокалног параметра и параметра дужине скале, резултати бездимензионе фреквенције осциловања приказани су у табелама 7.1 и 7.2. У овом разматрању, усвојено је да је бездимензиона фреквенција осциловања облика $\Omega_k = \omega_k \left(L^2 / R_{o_1} \right) \sqrt{\rho_{m0} / E_{m0}}$, док је геометријски коефицијент једнак нули. Такође, однос унутрашњег и спољашњег полупречника у овој анализи биће $R_i/R_o = 0{,}5$ и $R_i/R_o = 0{,}2$.

Табела 7.1. Фреквенција осциловања слободно ослоњене функционално градијентне наноцеви за различите вредности нелокалног параметра μ $\left(\Delta T = 0, p_r = 1, p_x = 0, R_i/R_o = 0{,}5, L/R_o = 20, l = 0, \beta = 0 \right)$

$\mu(nm)$	Извор	Ω_n		
		Ω_1	Ω_2	Ω_3
0	[26]	8,234	31,154	64,833
		8,2346	31,1597	64,8547
1	[26]	8,134	29,722	58,647
		8,1349	29,7272	58,6670
2	[26]	7,855	26,379	47,180
		7,8561	26,3839	47,1965
3	[26]	7,449	22,672	37,440
		7,4490	22,6757	37,4526
4	[26]	6,972	19,399	30,384
		6,9725	19,4024	30,3941
5	[26]	6,476	16,731	25,329
		6,4760	16,7336	25,3376

Резултати приказани у табелама 7.1-7.4 представљају валидацију резултата разматраног проблема. Потребно је нагласити да разлика у резултатима која је приказана у табелама 7.3 и 7.4, полази од геометријске Von-Karman-ове нелинеарности која је коришћена у раду [60] док је у овом истраживању разматран линеарни проблем.

Табела 7.2. Фреквенција осциловања слободно ослоњене функционално градијентне наноцеви за различите вредности дужине скале l $\left(\varDelta T=0, p_r=1, p_x=0, R_i/R_o=0{,}5, L/R_o=20, \mu=0, \beta=0\right)$

$l(nm)$	Извор	$\varOmega_n$		
		$\varOmega_1$	$\varOmega_2$	$\varOmega_3$
0	[26]	8,234	31,154	64,833
		8,2346	31,1597	64,8547
1	[26]	8.335	32,655	71,671
		8,3356	32,6611	71,6950
2	[26]	8,631	36,793	89,089
		8,6314	36,7999	89,1195
3	[26]	9,103	42,810	112,267
		9,1032	42,8178	112,3053
4	[26]	9,725	50,032	138,339
		9,7252	50,0414	138,3863
5	[26]	10,470	58,012	165,947
		10,4708	58,0223	166,0033

Табела 7.3. Фреквенције осциловања слободно ослоњене функционално градијентне наноцеви са променом материјала у два правца за различите вредности нелокалног параметра μ $\left(\varDelta T=50, p_r=1, p_x=1,\right.$ $\left.R_i/R_o=0{,}2, L/R_o=10, \beta=0\right)$

$\mu(nm)$	Извор	$l=0$	$l=0.4$	$l=0.8$
0	[60]	5,879144	5,927092	6,068072
		5,918222	5,966030	6,107210
0.25	[60]	5,860236	5,908058	6,048649
		5,899896	5,947565	6,088332
0.5	[60]	5,80454	5,851994	5,991503
		5,845886	5,893144	6,032696
0.75	[60]	5,714994	5,761856	5,899587
		5,758953	5,805549	5,943147
1	[60]	5,596031	5,642102	5,777504
		5,643273	5,688990	5,823991

Табела 7.4. Фреквенције осциловања слободно ослоњене функционално градијентне наноцеви са променом материјала у два правца за различите вредности нелокалног параметра μ $\left(\varDelta T=50, p_r=1, p_x=1, R_i/R_o=0{,}1, L/R_o=10, \beta=0\right)$

$\mu(nm)$	Извор	$l=0$	$l=0.4$	$l=0.8$
0	[60]	5,86373	5,911414	6,05154
		5,906636	5,954368	6,095322
0.25	[60]	5,844808	5,892372	6,032142
		5,888323	5,935916	6,076458
0.5	[60]	5,789074	5,836284	5,974981
		5,834351	5,881533	6,020862
0.75	[60]	5,699474	5,746112	5,883118
		5,747481	5,794003	5,931380
1	[60]	5,580449	5,626325	5,761058
		5,631889	5,677533	5,812316

Утицај неуниформне наноцеви на промену кружне фреквенције осциловања наноцеви разматрана је кроз утицај геометријског коефицијента β. Различите вредности овог коефицијента и његов утицај на промену кружне фреквенције осциловања разматрано је у наставку.

У табелама 7.5 и 7.6 приказани су резултати основне кружне фреквенције осциловања за различите вредности геометријског коефицијента, али и за различите вредности нелокалног параметра и параметра дужине скале. Може се закључити да са повећањем геометријског коефицијента долази до смањења бездимензионе фреквенције осциловања. Такође, повећање нелокалног параметра доводи до смањења фреквенције осциловања, док при повећању параметра дужине скале, долази до повећања фреквенције осциловања. Овај феномен разматран је и у претходним поглављима ове докторске дисертације, а објашњава се тако да повећање нелокалног параметра доводи до смањења крутости. Насупрот томе, због тензора градијента деформације, са повећањем утицаја дужине скале, долази до повећања крутости па и до повећања кружне фреквенције осциловања.

За различите вредности геометријског коефицијента, промена кружне фреквенције осциловања са повећањем нелокалног параметра приказана је и на слици 7.2. Такође, на слици 7.3, приказана је промена кружне фреквенције осциловања при повећању параметра дужине скале. При овом разматрању, промена температуре није узета у обзир.

Табела 7.5. Основна кружна фреквенције осциловања слободно ослоњене функционално градијентне наноцеви са променом материјала у два правца за различите вредности геометријског коефицијента β и нелокалног параметра μ $\left(\Delta T = 20, p_r = 1, p_x = 1, R_i/R_o = 0{,}5, L/R_o = 20\right)$

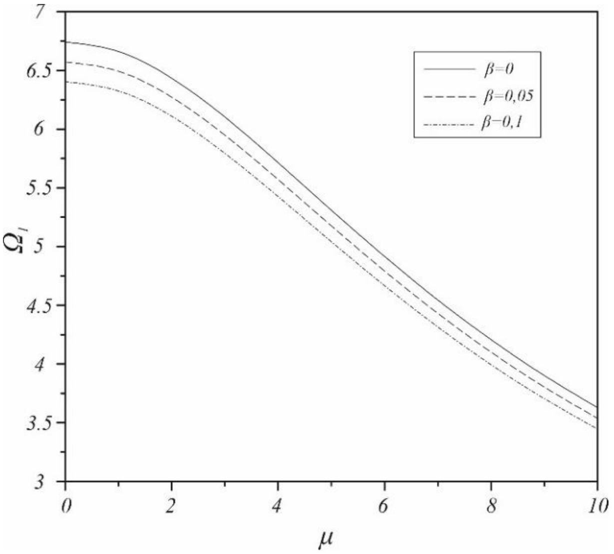
$\mu(nm)$	β			
	0	0,05	0,1	0,15
0	6,6199	6,4467	6,2738	6,1012
1	6,5373	6,3661	6,1952	6,0246
2	6,3062	6,1406	5,9753	5,8103
3	5,9678	5,8105	5,6534	5,4965
4	5,5704	5,4226	5,2751	5,1279
5	5,1544	5,0165	4,8790	4,7417

На сликама 7.4-7.7 приказана је промена основне кружне фреквенције осциловања за различите вредности температурних промена и геометријског коефицијента. Треба напоменути да слика 7.4 одговара материјалу типа керамика јер су експоненти запреминског удела једнаки нули ($p_r = 0$, $p_x = 0$), док слика 7.5 одговара промени материјала у радијалном правцу ($p_r = 1$, $p_x = 0$). Слика 7.6 представља промену материјала у аксијалном правцу ($p_r = 0$, $p_x = 1$), док је на слици 7.7 представљена промена материјала у два правца ($p_r = 1$, $p_x = 1$). Коефицијенти коришћени у овој анализу су ($L/R_1 = 100$, $R_i/R_o = 0{,}5$, $\mu = 1$, $l = 1$).

Табела 7.6. Основна кружна фреквенција осциловања слободно ослоњене функционално градијентне наноцеви са променом материјала у два правца за различите вредности геометријског коефицијента β и параметра дужине скале l $\left(\Delta T = 20, p_r = 1, p_x = 1, R_i/R_o = 0{,}5, L/R_o = 20\right)$

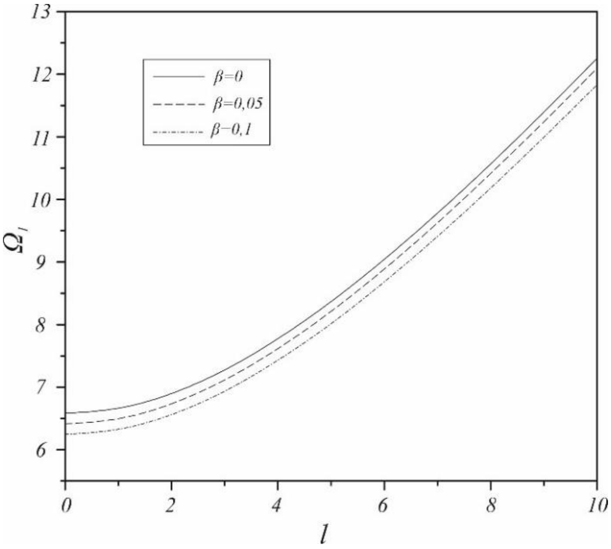
$\mu(nm)$	β			
	0	0,05	0,1	0,15
0	6,4553	6,2832	6,1134	5,9461
1	6,5373	6,3661	6,1952	6,0246
2	6,7773	6,6086	6,4344	6,2543
3	7,1596	6,9941	6,8145	6,6195
4	7,6627	7,5006	7,3134	7,0993
5	8,2648	8,1055	7,9088	7,6723

Закључује се да повећање промене температуре ΔT доводи до смањења фреквенције осциловања, све до достизања критичне вредности када долази и до губитка стабилности наноцеви.

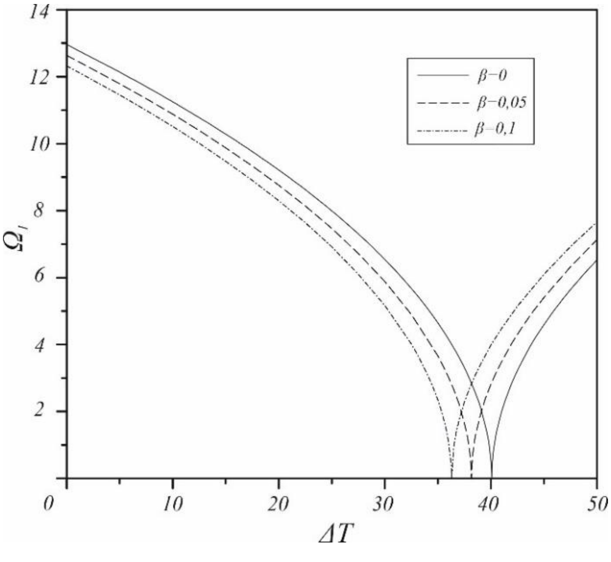


Слика 7.2. Промена основне кружне фреквенције осциловања Ω_1 са променом нелокалног параметра μ и геометријског коефицијента β

Значајно смањење фреквенције осциловања уочено је управо у зони када температура достиже своју критичну вредност. Такође, уочљиво је да мале вредности експонената запреминског удела дају велике вредности фреквенције осциловања, и касније достижу критичну вредност температуре.

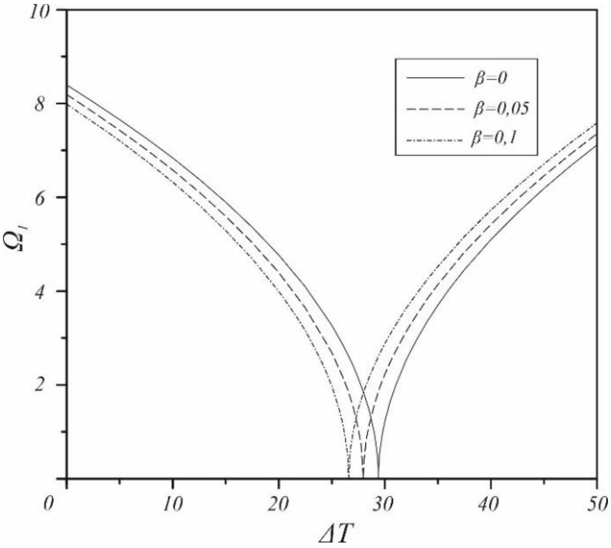


Слика 7.3. Промена основне кружне фреквенције осциловања Ω_1 са променом параметра дужине скале l и геометријског коефицијента β



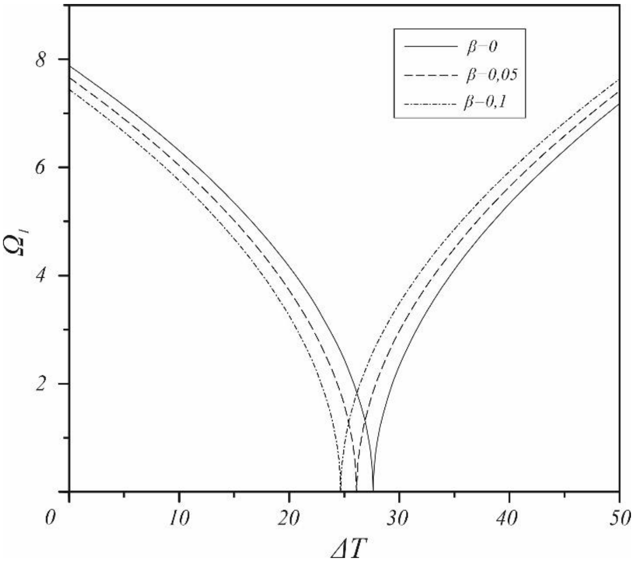
Слика 7.4. Промена основне кружне фреквенције осциловања са променом температуре ΔT и геометријксог коефицијента β

$\left(p_r = 0, p_x = 0\right)$



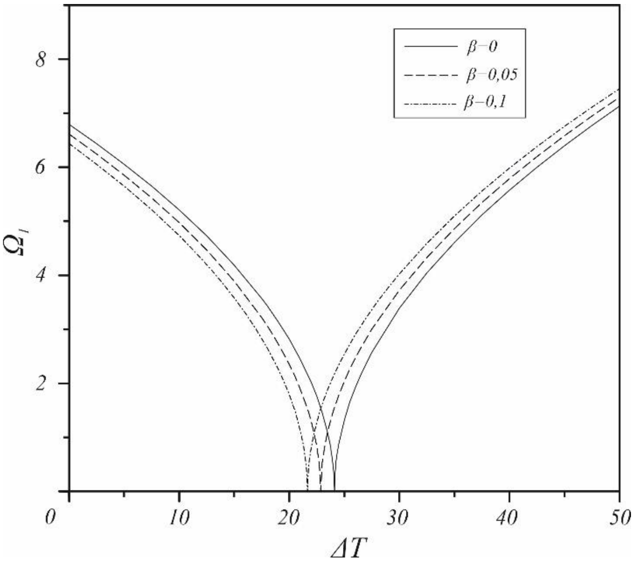
Слика 7.5. Промена основне кружне фреквенције осциловања са променом температуре ΔT и геометријксог коефицијента β

$\left(p_r = 1, p_x = 0\right)$



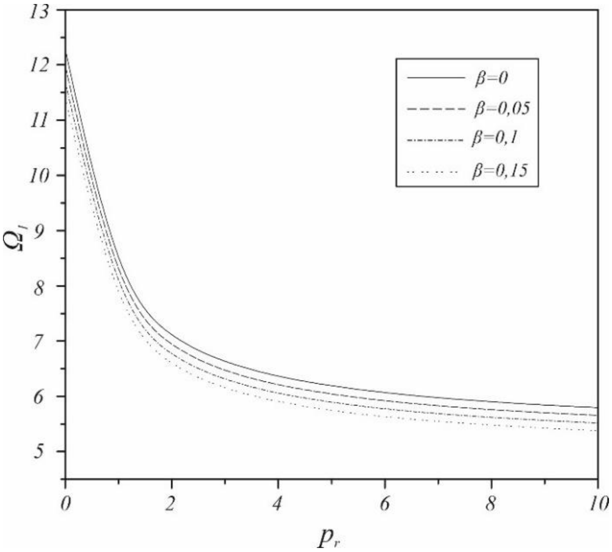
Слика 7.6. Промена основне кружне фреквенције осциловања са променом температуре ΔT и геометријксог коефицијента β

$\left(p_r = 0, p_x = 1\right)$

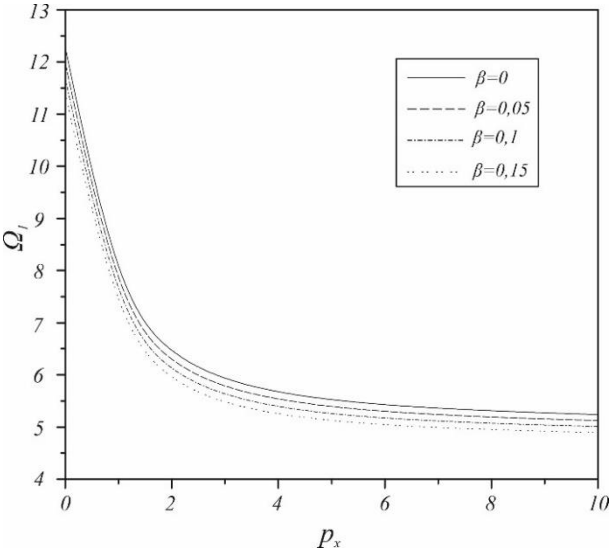


Слика 7.7. Промена основне кружне фреквенције осциловања са променом температуре ΔT и геометријксог коефицијента β $(p_r = 1, p_x = 1)$

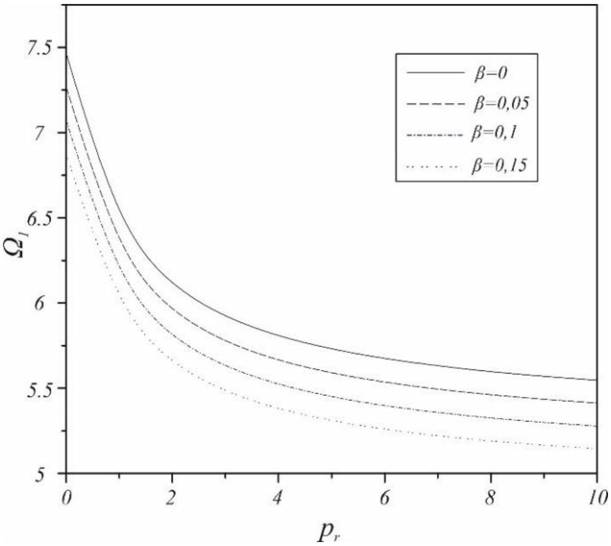
Промена основне кружне фреквенције осциловања и експонента запреминског удела у радијалном правцу приказана је на дијаграму 7.8, где фреквенција осциловања опада са повећањем експонента запреминског удела p_r. Са друге стране, промена основне кружне фреквенције осциловања са променом експонента запреминског удела у аксијалном правцу приказана је на слици 7.9, где такође, са повећањем експонента p_x долази до смањења кружне фреквенције осциловања. На слици 7.10 представљена је промена основне кружне фреквенције осциловања са променом експонента запреминског удела у радијалном и аксијалном правцу. Може се закључити да утицај експонента запреминског удела у аксијалном правцу има значајно ниже вредности фреквенције за мање вредности експонента запреминског удела у радијалном правцу.



Слика 7.8. Промена кружне фреквенције осциловања са променом експонента запреминског удела у радијалном правцу p_r $\left(p_x = 0\right)$



Слика 7.9. Промена кружне фреквенције осциловања са променом експонента запреминског удела у аксијалном правцу p_x $\left(p_r = 0\right)$



Слика 7.10. Промена кружне фреквенције осциловања са променом експонента запреминског удела у радијалном правцу p_r $\left(p_x = 1\right)$

Основна кружна фреквенција осциловања смањује се са порастом експонента p_r што је и очекивано с обзиром на ефекат повећања крутости структуре.

Резултати у табели 7.7 представљају механизам како се у реалним условима може предвидети одговарајућа фреквенција осциловања (уколико је потребно може се обезбедити и иста фреквенција, али је у овој табели представљен резултат са параметрима који су из скупа реалних и ненегативних вредности) варирајући један параметар разматране структуре, док фреквенција остаје непромењена. Ово је веома важно, због могуће потребе да се задовоље нека физичка ограничења за неке сложеније моделе.

Табела 7.7. Усаглашавање приближно истих резултата бездимензионе фреквенције осциловања са променом различитих параметара када је $\mu = 2$, $l = 1$, $R_i/R_o = 0.5$, $L/R_o = 20$

	β			
	0	0,05	0,1	0,15
$\Delta T = 80,$ $p_r = 1,$ $p_x = 1$	5,8826	5,7068	5,5355	5,3535
$\Delta T = 0,$ $p_r = 3,$ $p_x = 1$	5,9146	5,7686	5,6230	5,4778
$\Delta T = 0,$ $p_r = 1,$ $p_x = 2$	5,8957	5,7467	5,5979	5,4493

На пример, због потенцијалног температурног ограничења, потребно је да се користи други материјал, па је примарна осцилаторна карактеристика модела, попут кружне фреквенција осциловања у овом случају, потребно подесити на основу варијације једног параметра.

Са друге стране, уколико је потребно да се задовоље потребе неке комплексне геометрије, након избора одговарајућег материјала и након промене једног параметра, фреквенција осциловања се може задовољити одговарајућом вредношћу.

У овом поглављу приказана је анализа промене кружне фреквенције осциловања неуниформне функционално градијентне наноцеви са променом материјала у два правца, а у оквиру нелокалне теорије градијента деформације. Динамичке једначине изведене су применом Hamilton-овог принципа, а резултати добијени су Galerkin-овим принципом. Карактеристике материјала мењају се у два правца и то у аксијалном и радијалном правцу. Извршена је анализа промене основне кружне фреквенције осциловања са променом нелокалног параметра и параметра дужине скале. Такође, анализа промене основне кружне фреквенције осциловања и критичне температуре са променом геометријског коефицијента разматрана је у овом поглављу. Повећање геометријског коефицијента доводи до смањења кружне фреквенције осциловања. Такође, закључује се да повећање нелокалног параметра и параметра дужине скале има значајан утицај на промену кружне фреквенције осциловања. Повећање нелокалног параметра доводи до смањења кружне фреквенције осциловања, док повећање параметра дужине скале доводи до пораста кружне фреквенције осциловања. Различите вредности експонената запреминског удела и како оне утичу на промену кружне фреквенције осциловања и критичне температуре неуниформне функционално градиране наноцеви је такође анализиран. Модел цеви које је материјала типа керамика $\left(p_r = 0, p_x = 0\right)$, даје веће вредности кружне фреквенције осциловања и критичне температуре. Са повећањем ових експонената, што значи повећање удела метала у наноцеви, доводи до смањења кружне фреквенције осциловања као и критичне температуре.

8. Основна кружна фреквенција осциловања неуниформне и функционално градијентне наноцеви услед струјања флуида

У претходном поглављу анализирана је промена кружне фреквенције осциловања слободно ослоњене неуниформне функционално градијентне наноцеви, где је показано како промена нагиба неуниформне наноцеви утиче на промену кружне фреквенције осциловања. Ипак, са развитком нанотехнологије појавила се могућност примене наноцеви у области фармације, па се тако веома често помињу као одлични резервоари нанофлуида али су и одлични за транспорт флуида [65, 66]. Могу складиштити знатну количину водоника на ниским притисцима, а могу се користити и као носачи за дистрибуцију лека [61, 63, 67].

У овом поглављу разматрана је промена кружне фреквенције осциловања слободно ослоњене неуниформне функционално градијентне наноцеви која може наћи примену у пројектовању наносензора, актуатора и нанофлуидних канала. Такође, велику примену могу наћи у транспорту флуида, па истраживање о механичком одзиву наноцеви при струјању флуида може дати значајан допринос. У прошлости је разматран механички одзив струјања вискозног флуида кроз наноцев, па је у раду [62] анализирана стабилност вискоеластичне наноцеви засноване на Eringen-овој нелокалној теорији еластичности. У раду [68] разматране су принудне осцилације наноцеви при струјању вискозног флуида, при чему је наноцев ослоњена на Pasternak-ов еластични темељ. Кинематске релације су представљене су коришћењем Euler-Bernoulli-јеве теорије, док су нелинеарне диференцијалне једначине израчунате применом Galerkin-овог метода. У раду [61], Liu и коаутори разматрали су динамичку стабилност и анализирали осцилације функционално градијентне наноцеви при струјању флуида, на основу нелокалне теорије градијента деформације и Von-Karman-ове нелинеарности. Применом Zhang-Fu-овог модела, динамички одзив фукционално градијентне наноцеви је такође разматран у прошлости [63, 69].

Ипак, иако постоји мноштво радова који разматрају утицај струјања флуида кроз наноцев са променом карактеристика наноцеви, не постоје радови који показују промену кружне фреквенције осциловања са струјањем флуида кроз неуниформну наноцев. У овом поглављу биће разматрана промена кружне фреквенције осциловања неуниформне функционално градијентне наноцеви са променом материјала у два правца, али и са струјањем флуида кроз наноцев, баш како је представљено у раду [70]. Динамичке једначине разматраног проблема изведене су на основу Zhang-Fu-овог модела греде и нелокалне теорије градијента деформације, применом Hamilton-овог принципа. У овом поглављу дефинисана је веза између геометријског коефицијента β који дефинише нагиб наноцеви и брзине струјања флуида. Утицај брзине струјања флуида, промене температуре, параметра дужине скале, нелокалног параметра, као и параметра запреминског удела, на промену кружне фреквенције осциловања разматране су у овом поглављу. Резултати представљени у овом поглављу израчунати су коришћењем Galerkin-ове методе.

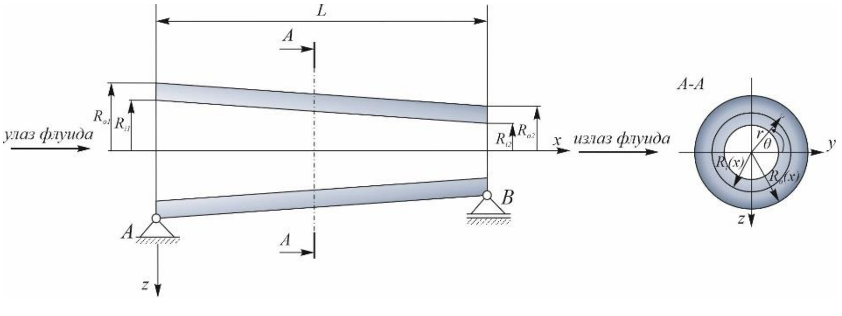
8.1 Кинематске релације неуниформне функционално градијентне наноцеви

У овом поглављу разматрана је неуниформна функционално градијентна наноцев, где се материјал мења у два правца, у радијалном и аксијалном. Дужина наноцеви је L, унутрашњи полупречник на левом крају наноцеви R_{i_1} а спољашњи полупречник на левом крају наноцеви R_{o_1} (Слика 8.1). Унутрашњи и спољашњи полупречник линеарно се мењају у аксијалном правцу, тако да полупречници наноцеви могу бити приказани у облику

$$R_i\left(x\right)=R_{i_1}\left(1-\beta\frac{x}{L}\right), \tag{8.1а}$$

$$R_o\left(x\right)=R_{o_1}\left(1-\beta\frac{x}{L}\right), \tag{8.1б}$$

где је β геометријски коефицијент који дефинише нагиб наноцеви, а који је представљен у једначини (7.5)



Слика 8.1. Геометрија неуниформне функционално градијентне наноцеви

На основу једначине (4.2) и једначине (7.2), расподела материјала може се написати у облику

$$P_f\left(T,r,x\right)=\left(P_c\left(T\right)-P_m\left(T\right)\right)\left(\frac{r-R_i\left(x\right)}{R_o\left(x\right)-R_i\left(x\right)}\right)^{p_r}\left(\frac{x}{L}\right)^{p_x}\qquad(8.2)$$
$$+P_m\left(T\right).$$

Температурно зависни коефицијенти карактеристике материјала Si_3N_4 и $SUS304$ задати су у табели 4.1.

С обзиром да је класична теорија показала одређена ограничења у разматрању наноструктура, и у овом поглављу биће коришћена нелокална теорија градијента деформације. Тотални нелокални тензор напона изражен је у једначини (7.9) на основу Lim-ове нелокалне теорије градијента деформације [11].

За случај еластичног материјала у једнодимензионом разматрању и на основу поларних координата, генералисане нелокалне конститутивне релације у диференцијалном облику базиране на нелокалној теорији градијента деформације могу се записати у облику

$$\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)t_{xx}=\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E\left(T,r,x\right)\varepsilon_{xx},\qquad(8.3\text{а})$$

$$\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)t_{xz}=\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G\left(T,r,x\right)\gamma_{xz},\qquad(8.3\text{б})$$

$$\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)t_{xy}=\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G\left(T,r,x\right)\gamma_{xy},\qquad(8.3\text{в})$$

где су ε_{xx}, γ_{xz} и γ_{xy}, редом аксијална дилатација и клизања. Нелокални параметар је $\mu=ea$, док је E Young-ов модул еластичности, а $G=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$ модул смицања.

На основу Zhang-Fu-ове теорије поље померања неуниформне функционално градијентне наноцеви представљено је у облику

$$q_x = u(x,t) - z\frac{\partial w}{\partial x} + g(y,z)\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \psi(x,t)\right], \qquad (8.4а)$$

$$q_z = w(x,t), \qquad (8.4б)$$

где су $u(x,t)$ и $w(x,t)$, редом, померања у аскијалном и трансверзалном правцу, док $\psi(x,t)$ представља ротацију попречног пресека у односу на y осу. Функција $g(y,z)$ може се изразити у облику

$$g(y,z) = z + z\frac{R_1^2 R_0^2 / r^2 - r^2/3}{R_1^2 + R_0^2}. \qquad (8.5)$$

Уколико је функција $g(y,z) = z$, долази до снижавања реда теорије, па тако теорија вишег реда постаје Timoshenko-ва теорија. Са друге стране, уколико је $g(y,z) = 0$ добија се Euler-Bernoulli-јева теорија греде. Компоненте дилатација, на основу једначина (8.4) могу се записати у облику

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(y,z)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right), \qquad (8.6а)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial q_x}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi(x,t)\right), \qquad (8.6б)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi(x,t)\right). \qquad (8.6в)$$

при чему је веза између поларних и Декартових координата успостављена у једначини (7.10).

Динамичке једначине могу се одредити Hamilton-овим принципом у следећем облику

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta U+\delta V-\delta T_p-\delta T_f\right)dt=0, \tag{8.7}$$

где су δU, δV, δT_p и δT_f редом, потенцијална енергија наноцеви, виртуални рад, кинетичка енергија наноцеви и кинетичка енергија струјања флуида.

Варијација потенцијалне енергије δU неуниформне функционално градијентне наноцеви, а на основу поља деформација (8.6), може се изразити у облику

$$\begin{aligned}\delta U=&\int_V\Big[\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\\&+\sigma_{xx}^{(1)}\nabla\delta\varepsilon_{xx}+\tau_{xz}^{(1)}\nabla\delta\gamma_{xz}+\tau_{xy}^{(1)}\nabla\delta\gamma_{xy}\Big]dv,\\ \delta U=&\int_0^L\left[N_{xx}\frac{\partial\delta u}{\partial x}-M_{xx}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+S\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right)\right.\\&\left.+Q\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\delta\psi\right)\right]dx+\left[N_{xx}^{(1)}\frac{\partial\delta u}{\partial x}-M_{xx}^{(1)}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\right.\\&\left.+S^{(1)}\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right)+Q^{(1)}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\delta\psi\right)\right]_0^L,\end{aligned} \tag{8.8}$$

где је $\nabla=\partial/\partial x$. Аксијална сила, момент савијања нижег и вишег реда, као и сила смицања представљени су у облику

$$\begin{aligned}\left(N_{xx},M_{xx},S\right)&=\int_A\left(1,z,g\right)t_{xx}dA,\\ Q&=\int_A\left(t_{xz}\frac{\partial g}{\partial z}+t_{xy}\frac{\partial g}{\partial y}\right)dA,\end{aligned} \tag{8.9a}$$

$$\begin{aligned}&\left(N_{xx}^{(1)},\, M_{xx}^{(1)},S^{(1)}\right)=\int_A\left(1,z,g\right)\sigma_{xx}^{(1)}dA,\\&Q^{(1)}=\int_A\left(\tau_{xz}^{(1)}\frac{\partial g}{\partial z}+\tau_{xy}^{(1)}\frac{\partial g}{\partial y}\right)dA\end{aligned}\qquad(8.9б)$$

Варијација кинетичке енергије δT_p наноцеви изражена је у облику

$$\begin{aligned}\delta T_p&=\frac{1}{2}\int_v\rho\left(r,x,T\right)\delta\left(\left(\frac{\partial q_x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial q_y}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial q_z}{\partial t}\right)^2\right)dv\\\delta T_p&=\int_0^L\Bigg[I_0\left(x\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\delta u}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial\delta w}{\partial t}\right)+I_1\left(x\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial t}\\&-I_2\left(x\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial t}\right)\qquad(8.10)\\&+I_3\left(x\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}\right.\\&\left.+\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}\right)\Bigg]dx,\end{aligned}$$

где $\rho\left(r,x,T\right)$ представља густину материјала која се мења према закону расподеле (8.2). Инерцијалне карактеристике наноцеви су облика

$$\begin{aligned}&\left(I_0\left(x\right),I_1\left(x\right),I_2\left(x\right),I_3\left(x\right)\right)=\\&=\int_{R_0}^{R_1}\int_0^{2\pi}\left(1,z^2,zg,g^2\right)\rho\left(r,x,T\right)rdrd\theta.\end{aligned}\qquad(8.11)$$

Као и у претходним разматрањима и овде је термички утицај узет у обзир, па је виртуални рад δV према спољашњем оптерећењу представљен у облику

$$\begin{aligned} \delta V &= -\int_{v} E\left(r,x,T\right)\alpha\left(r,x,T\right)\Delta T\,\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta w\right)dv, \\ \delta V &= -\int_{0}^{L}\left(N^{T}\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta w\right)\right)dx, \end{aligned} \tag{8.12}$$

док је резултанта силе која се јавља као последица термичког утицаја изражена у облику

$$N^{T} = \int_{R_0}^{R_1}\int_{0}^{2\pi} E\left(r,x,T\right)\alpha\left(r,x,T\right)\Delta T r dr d\theta, \tag{8.13}$$

где је $\Delta T = T - T_0$ промена температуре, при чему је T_0 референтна температура.

Варијација кинетичке енергије струјања флуида може се записати у облику [61, 63, 69, 71]

$$\begin{aligned} \delta T_f &= \frac{1}{2}\int_{v}\rho_f\delta\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}+U_f\left(x\right)+U_f\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}\right. \\ &\qquad \left.\left(\frac{\partial w}{\partial t}+U_f\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{2}\right)dv, \\ \delta T_f &= \int_{0}^{L}\left[m_f\left(x\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t}+U_f\left(x\right)+U_f\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right. \\ &\qquad \left(\frac{\partial \delta u}{\partial t}+U_f\left(x\right)\frac{\partial \delta u}{\partial x}\right) \\ &\qquad +m_f\left(x\right)\left(\frac{\partial \delta w}{\partial t}+U_f\left(x\right)\frac{\partial \delta w}{\partial x}\right) \\ &\qquad \left.\left(\frac{\partial \delta w}{\partial t}+U_f\left(x\right)\frac{\partial \delta w}{\partial x}\right)\right]dx, \end{aligned} \tag{8.14}$$

где $m_f(x) = \rho_f A_f(x)$ представља масу флуида унутар цеви, док је $U_f(x)$ брзина струјања флуида кроз наноцев. Увођењем коефицијента клизања између флуида и зидова наноцеви, брзина струјања флуида на зидовима наноцеви је

$$U_f(x) = k_f V_f(x), \tag{8.15}$$

при чему је $V_f(x)$ брзина струјања флуида док је k_f корекциони фактор који зависи од Knudsen-овог броја, коефицијента акомодације вектора количине кретања као и других коефицијената који се добијају експериментално [63, 71].

Оно што се може закључити јесте да брзина струјања није иста на левом крају наноцеви (улазу) и на десном крају наноцеви (излазу), односно јасно је да се мења у аксијалном правцу. Брзина струјања флуида у неком пресеку може се изразити из једначине континуитета, тако да је

$$Y = A_{f_1} V_{f_1} = A_{f_2} V_{f_2} = A_f(x) V_f(x), \tag{8.16}$$

где је Y проток флуида кроз наноцев, A_{f_1}, V_{f_1} и A_{f_2}, V_{f_2} представљају редом површину попречног пресека и брзину струјања флуида на левом (1) и десном (2) крају наноцеви. $A_f(x)$ и $V_f(x)$ представљају површину попречног пресека и брзину струјања флуида у неком пресеку наноцеви. Како се површина попречног пресека $A_f(x)$ може изразити у облику

$$A_f(x) = R_{i_1}{}^2 \pi \left(\beta \frac{x}{L} - 1 \right)^2, \tag{8.17}$$

из једначине континуитета (8.16) добија се брзина струјања флуида кроз наноцев, тако да је

$$V_f\left(x\right)=V_{f_1}\left(\beta\frac{x}{L}-1\right)^{-2}. \tag{8.18}$$

На овај начин, направљена је веза између брзине струјања флуида на левом крају наноцеви V_{f_1} и геометријског коефицијента β. Са познавањем брзине струјања на улазу у наноцев и нагиба наноцеви, односно геометријског коефицијента β, позната је брзина у било ком пресеку наноцеви.

Заменом једначина (8.8), (8.10), (8.12) и (8.14) у једначину (8.7), интегралећи парцијално и сматрајући да су коефицијенти δu и δw једнаки нули, добијају се динамичке једначине неуниформне функционално градијентне наноцеви

$$\begin{aligned}\delta u\text{:}\ \frac{\partial N_{xx}}{\partial x}&=\left(I_0\left(x\right)+m_f\left(x\right)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\\&+m_f\left(x\right)k_fV_f\left(x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(m_f\left(x\right)k_fV_f\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\\&+\frac{\partial}{\partial x}\left(m_f\left(x\right)k_f{}^2V_f{}^2\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\end{aligned} \tag{8.19а}$$

$$\delta\psi\text{:}\ \frac{\partial S}{\partial x}-Q=-I_2\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}+I_3\left(x\right)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) \tag{8.19б}$$

$$\begin{aligned}\delta w\text{:}\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial Q}{\partial x} &= \left(I_0\left(x\right)+m_f\left(x\right)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}- \\ &-\frac{\partial}{\partial x}\left(I_1\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right)+2\frac{\partial}{\partial x}\left(I_2\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right)+ \\ &+\frac{\partial}{\partial x}\left(I_2\left(x\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(I_3\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right)- \\ &-\frac{\partial}{\partial x}\left(I_3\left(x\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(N^T\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+ \\ &+m_f\left(x\right)k_f V_f\left(x\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(m_f\left(x\right)k_f V_f\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial t}\right)+ \\ &+\frac{\partial}{\partial x}\left(m_f\left(x\right)k_f{}^2 V_f{}^2\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right),\end{aligned}\tag{8.19в}$$

са граничним условима који одговарају класичној теорији

$$\begin{aligned}&N_{xx}-m_f\left(x\right)k_j V_f\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial t}- \\ &-m_f\left(x\right)k_j{}^2 V_f\left(x\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad \text{или}\quad u=0\end{aligned}\tag{8.20а}$$

$$S-M_{xx}=0\quad \text{или}\quad \frac{\partial w}{\partial x}=0,\tag{8.20б}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial S}{\partial x}+Q-\left(I_1\left(x\right)-2I_2\left(x\right)+I_3\left(x\right)\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}- \\ &-\left(I_3\left(x\right)-I_2\left(x\right)\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}-N^T\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial x}- \\ &-m_f\left(x\right)\left(k_f V\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial t}+k_f{}^2 V^2\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \text{или}\quad w=0,\end{aligned}\tag{8.20в}$$

$$S=0\quad \text{или}\quad \psi=0,\tag{8.20г}$$

односно граничним условима који одговарају теорији вишег реда

$$N_{xx}^{(1)} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{8.21а}$$

$$M_{xx}^{(1)} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{8.21б}$$

$$S^{(1)} = 0, \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} \right) = 0, \tag{8.21в}$$

$$Q^{(1)} = 0, \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \delta \psi \right) = 0. \tag{8.21г}$$

На основу конститутивних релација нелокалне теорије градијента деформације (8.3), компонентних дилатација (8.6) и израза за аксијалну силу, момент савијања нижег и вишег реда и силе смицања (8.9а), добијају се нелокална нормална сила, нелокални момент савијања нижег и вишег реда и нелокална сила смицања у облику

$$\left(1 - \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) N_{xx} = \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) A_{xx}(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{8.22а}$$

$$\begin{gathered} \left(1 - \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) M_{xx} = \\ = \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left[-B_{xx}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{xx}(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right], \end{gathered} \tag{8.22б}$$

$$\begin{gathered} \left(1 - \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) P = \\ = \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left[-D_{xx}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_{xx}(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right], \end{gathered} \tag{8.22в}$$

$$\left(1 - \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) Q = \left(1 - l^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) C_{yz}(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right), \tag{8.22г}$$

где су елементи матрице крутости

$$\left(A_{xx}(x),B_{xx}(x),D_{xx}(x),E_{xx}(x)\right)=$$
$$=\int_{R_0}^{R_1}\int_{0}^{2\pi}\left(1,z^2,zg,g^2\right)E(r,x,T)rdrd\theta, \tag{8.23}$$
$$C_{yz}(x)=\int_{R_0}^{R_1}\int_{0}^{2\pi}G(r,x,T)\left(\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)rdrd\theta.$$

На основу једначина (8.19) и заменом извода нормалне нелокалне силе, нелокалног момента савијања нижег и вишег реда и нелокалне силе смицања (8.22), добијају се нелокалне диференцијалне једначине неуниформне функционално градијентне наноцеви

$$\begin{gathered}\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\\
=\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\left(I_0(x)+m_f(x)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\right.\\
+m_f(x)k_fV(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(m_f(x)k_fV(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\\
\left.+\frac{\partial}{\partial x}\left(m_f(x)k_f^{2}V^2(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right],\end{gathered} \tag{8.24a}$$

$$\begin{gathered}\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(E_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\right.\\ \left.+\frac{\partial}{\partial x}\left(E_{xx}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)-C_{yz}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi\right)\right]=\\ =\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[-I_2\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}+I_3\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}+\right.\\ \left.+I_3\left(x\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right],\end{gathered}\tag{8.24б}$$

$$\begin{gathered}\left(1-l^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D_{xx}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)-\right.\\ \left.-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E_{xx}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(C_{yz}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(C_{yz}\psi\left(x,t\right)\right)\right]=\\ =\left(1-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left[\left(I_0\left(x\right)+m_f\left(x\right)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(I_1\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right)+\right.\\ +2\frac{\partial}{\partial x}\left(I_2\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(I_2\left(x\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(I_3\left(x\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}\right)-\\ -\frac{\partial}{\partial x}\left(I_3\left(x\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(N_T\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+m_f\left(x\right)k_f V\left(x\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\\ +\frac{\partial}{\partial x}\left(m_f\left(x\right)k_f V\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(m_f\left(x\right)k_f{}^2V^2\left(x\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right)\end{gathered}\tag{8.24в}$$

8.2 Нумеричка анализа

Као и претходном поглављу, може се закључити да је једначина (8.24а) зависна само од променљиве $u\left(x,t\right)$, па се решавање овог проблема своди на решавање једначина (8.24б) и (8.24в), при чему су претпостављана решења, која задовољавају граничне услове, облика

$$\psi\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{N}\Psi_k\,cos\left(\lambda x\right)e^{i\omega_k t}=\sum_{k=1}^{N}\Psi_k\eta_k\left(x\right)e^{i\omega_k t}, \qquad (8.25а)$$

$$w\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{N}W_k\,sin\left(\lambda x\right)e^{i\omega_k t}=\sum_{k=1}^{N}W_k\varphi_k\left(x\right)e^{i\omega_k t}, \qquad (8.25б)$$

где је $\lambda=k\pi/L$, док Ψ_k и W_k представљају непознате Fourier-ове коефицијенте. Користећи Galerkin-ов метод, једначине (8.24б) и (8.24в) могу се записати у облику

$$\left(\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}-\omega_k{}^2\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}\Psi_k\\ W_k\end{pmatrix}=0, \qquad (8.26)$$

где су $\left[K_{ij}\right]$ и $\left[M_{ij}\right]$ матрица крутости и матрица масе, тако да су елементи матрице крутости облика

$$\begin{aligned}
K_{11} &= E_{xx}\left(x\right)\left(k_{12}-l^2k_{14}\right)-C_{yz}\left(x\right)\left(k_{10}-l^2k_{12}\right),\\
K_{12} &= \left(E_{xx}\left(x\right)-D_{xx}\left(x\right)\right)\left(s_{13}-l^2s_{15}\right)-C_{yz}\left(x\right)\left(s_{11}-l^2s_{13}\right),\\
K_{21} &= -\left(E_{xx}\left(x\right)-D_{xx}\left(x\right)\right)\left(p_{13}-l^2p_{15}\right)+\\
&\quad +C_{yz}\left(x\right)\left(p_{11}-l^2p_{13}\right), \qquad (8.27)\\
K_{22} &= \left(2D_{xx}\left(x\right)-B_{xx}\left(x\right)-E_{xx}\left(x\right)\right)\left(c_{14}-l^2c_{16}\right)+\\
&\quad +C_{yz}\left(x\right)\left(c_{12}-l^2c_{14}\right)-\\
&\quad -\left(m_f\left(x\right)k_f{}^2V\left(x\right)^2+N^T\right)\left(c_{12}-\mu^2c_{14}\right),
\end{aligned}$$

док су елементи матрице масе

$$\begin{aligned} M_{11} &= -I_3(x)\left(k_{10} - \mu^2 k_{12}\right), \\ M_{12} &= \left(I_2(x) - I_3(x)\right)\left(s_{11} - \mu^2 s_{13}\right), \\ M_{21} &= \left(I_3(x) - I_2(x)\right)\left(p_{11} - \mu^2 p_{13}\right), \\ M_{22} &= -\left(I_0(x) + m_f(x)\right)\left(c_{10} - \mu^2 c_{12}\right) - \\ &-\left(2I_2(x) - I_1(x) - I_3(x)\right)\left(c_{12} - \mu^2 c_{14}\right), \end{aligned} \tag{8.28}$$

при чему је

$$\begin{aligned} k_{10} &= \int_0^L \eta_k \eta_k dx, \quad k_{12} = \int_0^L \eta_k'' \eta_k dx, \quad k_{14} = \int_0^L \eta_k^{(IV)} \eta_k dx, \\ s_{11} &= \int_0^L \varphi_k' \eta_k dx, \quad s_{13} = \int_0^L \varphi_k''' \eta_k dx, \quad s_{15} = \int_0^L \varphi_k^{(V)} \eta_k dx, \\ p_{11} &= \int_0^L \varphi_k \eta_k' dx, \quad p_{13} = \int_0^L \varphi_k \eta_k''' dx, \quad p_{15} = \int_0^L \varphi_k \eta_k^{(V)} dx, \\ c_{10} &= \int_0^L \varphi_k \varphi_k dx, \quad c_{11} = \int_0^L \varphi_k' \varphi_k dx, \quad c_{12} = \int_0^L \varphi_k'' \varphi_k dx, \\ c_{13} &= \int_0^L \varphi_k''' \varphi_k dx, \quad c_{14} = \int_0^L \varphi_k^{(IV)} \varphi_k dx, \quad c_{16} = \int_0^L \varphi_k^{(VI)} \varphi_k dx \end{aligned} \tag{8.29}$$

У даљем тексту биће приказана промена кружне фреквенције осциловања са променом брзине струјања флуида и промене температуре. Такође, геометријски утицај, односно нагиб наноцеви, и њен утицај на промену основне кружне фреквенције осциловања наноцеви неће бити занемарен. Поред тога, у разматрање ће бити укључени утицај нелокалног параметра, утицај дужине скале и експонента запреминског удела. Геометрија наноцеви приказана је на слици 8.1, при чему је унутрашњи полупречник на левом крају наноцеви $R_{i_1} = 0{,}5\ \mathrm{nm}$, спољашњи полупречник на левом крају наноцеви $R_{o_1} = 1\ \mathrm{nm}$, док је дужина наноцеви $L = 100\ \mathrm{nm}$.

Упоредна анализа резултата кружне фреквенције осциловања са радовима [26] и [60], извршена је у претходном поглављу, а резултати приказани у табелама 7.1.-7.4., што важи и у овом случају, без присуства флуида. У овом поглављу, извршена је анализа резултата кружне фреквенције осциловања наноцеви са присуством флуида.

Како је у оквиру ове анализе разматрана промена кружне фреквенције осциловања и утицај струјања флуида у наставку ће се користити бездимензионална брзина струјања флуида која је изражена у облику $v = V_{f1}\sqrt{\left(m_f L^2\right)/\left(E_{m0} I_f\right)}$. Како је брзина струјања флуида на улазу у цев позната, на основу геометријског коефицијента β, може се изразити брзина струјања флуида кроз наноцев у сваком пресеку наноцеви на основу једначине (8.22).

Као што се може видети из табела 8.1. и 8.2. са повећањем брзине струјања флуида, долази до опадања фреквенције осциловања. Фреквенција осциловања представљена је у бездимензионом облику $\Omega_k = \omega_k \left(L^2/R_{o_1}\right)\sqrt{\rho_{m0}/E_{m0}}$.

Такође, примећује се да кружна фреквенција осциловања опада са променом температуре. На сликама 8.2 и 8.3 приказана је промена кружне фреквенције осциловања са променом бездимензионе брзине струјања флуида. Пад вредности фреквенције осциловања посебно је забележен у зони критичне брзине струјња флуида. На слици 8.2 приказана је промена кружне фреквенције осциловања при промени материјала у радијалном правцу, док се на слици 8.3 материјал мења у два правца, радијалном и лонгитудиналном правцу.

Табела 8.1. Промена основна кружне фреквенције осциловања Ω_1 за различите вредности бездимензионалне брзине струјања флуида v и геометријског коефицијента β, $\left(\Delta T = 0, p_r = 1, p_x = 1, \mu = 2, l = 1, L/R_{o_1} = 100, R_i/R_o = 0.5\right)$

v	β			
	0	0,05	0,1	0,15
0	6,6182	6,4428	6,2703	6,1009
2	6,5308	6,3484	6,1682	5,9904
4	6,2611	6,0564	5,8514	5,6460
6	5,7838	5,5355	5,2812	5,0196
8	5,0402	4,7105	4,3594	3,9804
10	3,8801	3,3646	2,7529	1,9542

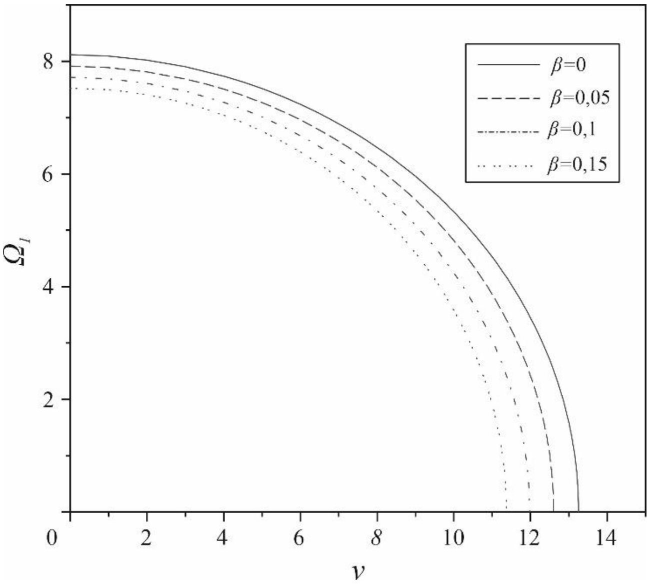
Такође је примећено да повећање запреминског удела неког од материјала у неком од праваца (лонгитудиналном или радијалном), такође доводи до смањења фреквенције осциловања. Исто се може рећи и за геометријски коефицијент β где са порастом коефицијента долази до опадања фреквенције осциловања.

На сликама 8.4 и 8.5 приказана је промена кружне фреквенције осциловања са променом температуре и геометријског коефицијента.

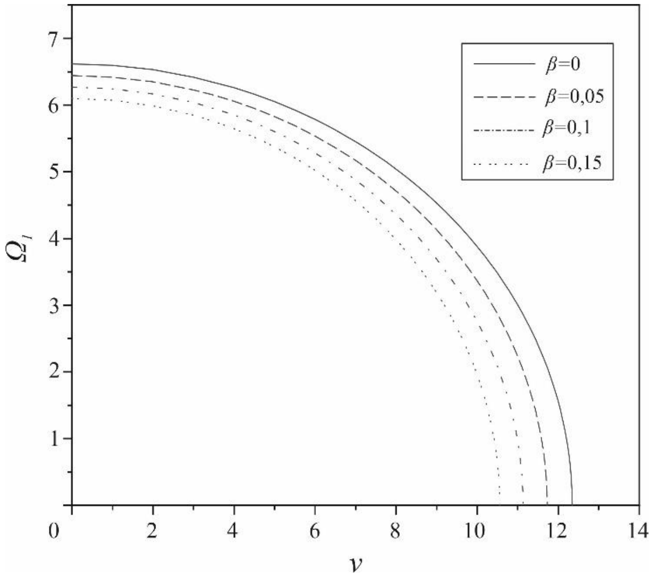
Табела 8.2. Промена основне кружне фреквенције осциловања Ω_1 за различите вредности промене температуре ΔT и геометријског коефицијента β, $\left(v=0, p_r=1, p_x=1, \mu=2, l=1, L/R_{o_1}=100, R_i/R_o=0.5\right)$

ΔT	β			
	0	0,05	0,1	0,15
0	6,6182	6,4428	6,2703	6,1009
5	5,8970	5,6996	5,5036	5,3090
10	5,0694	4,8387	4,6059	4,3706
12	4,6964	4,4464	4,1918	3,9312
15	4,0715	3,7806	3,4773	3,1575
18	3,3288	2,9662	2,5681	2,1138

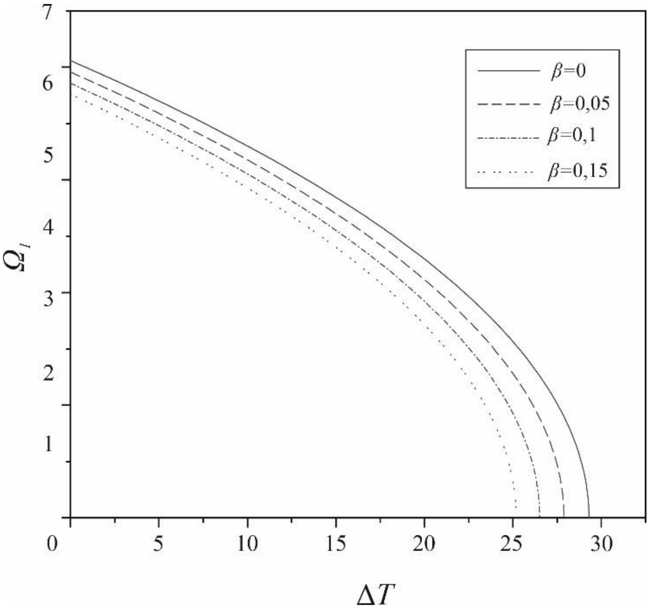
Брзина струјања флуида у овом разматрању је занемарена ($v=0$), али присуство флуида у наноцеви није занемарено ($m_f \neq 0$). Такође, слика 8.4 представља резултате за $p_r=1$, $p_x=0$ промену материјала у радијалном правцу, док су на слици 8.5 представљени резултати када се материјал мења у оба правца, односно када је $p_r=1$ и $p_x=1$.



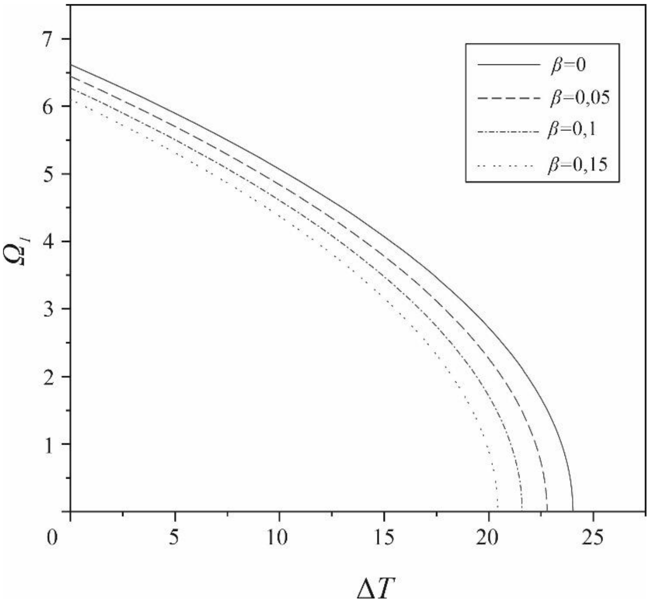
Слика 8.2. Промена основне кружне фреквенције осциловања Ω_1 са променом брзине струјања флуида v ($p_r = 1, \ p_x = 0$)



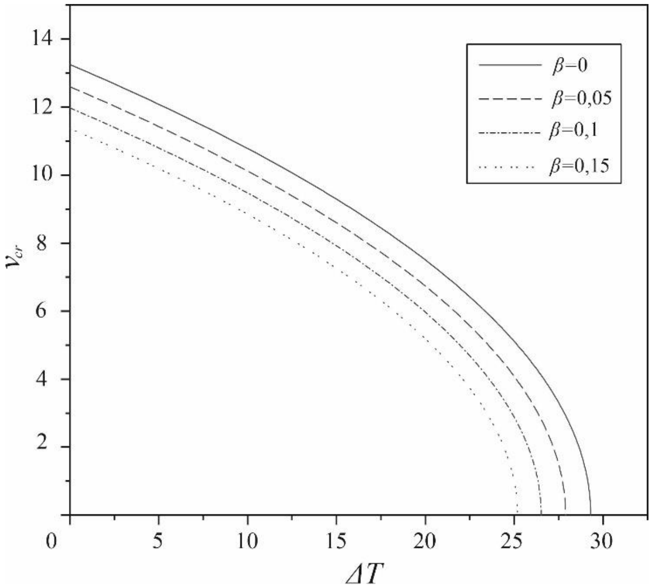
Слика 8.3. Промена основне кружне фреквенције осциловања Ω_1 са променом брзине струјања флуида v ($p_r = 1, \ p_x = 0$)



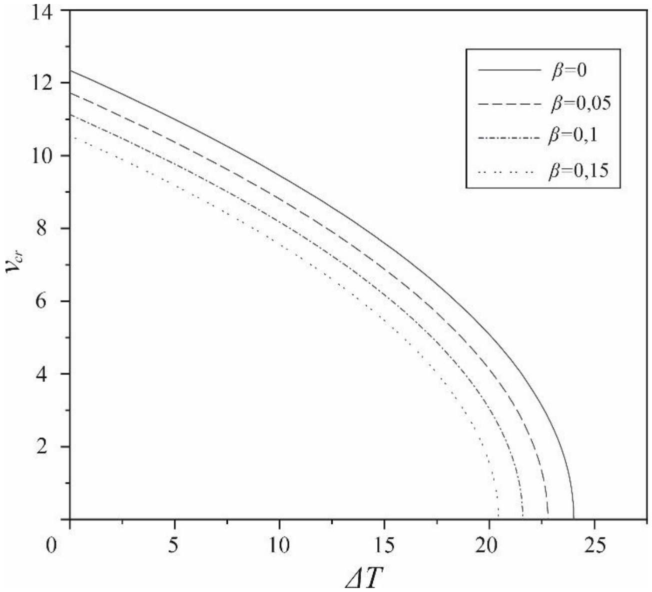
Слика 8.4. Промена основне кружне фреквенције осциловања Ω_1 са променом температуре и геометријског коефицијента за ($p_r = 1,\ p_x = 0$)



Слика 8.5. Промена основне кружне фреквенције осциловања Ω_1 са променом температуре и геометријског коефицијента за ($p_r = 1,\ p_x = 1$)



Слика 8.6. Промена критичне брзине струјања флуида v_{cr} са променом температуре и геометријског коефицијента ($p_r = 1,\ p_x = 0$)



Слика 8.7. Промена критичне брзине струјања флуида v_{cr} са променом температуре и геометријског коефицијента ($p_r = 1,\ p_x = 1$)

Оно што се очигледно види са претходних слика јесте да пораст температуре доводи до смањења кружне фреквенције осциловања све до достизања критичне вредности. Опадање кружне фреквенције осциловања посебно је забележено у зони око критичне вредности промене температуре. Такође, са слика се види да ниже вредности експонента запреминског удела дају веће вредности фреквенција осциловања и касније долазе до критичних вредности промене температуре. Различите вредности геометријског коефицијента и његов утицај на промену кружне фреквенције осциловања наноцеви такође су видљиве на сликама 8.4 и 8.5, где са порастом вредности геометријског коефицијента долази до опадања кружне фреквенције осциловања.

Са слика 8.2. и 8.3. бездимензиона фреквенција осциловања опада до достизања критичне вредности брзине струјања флуида. Када брзина струјања флуида достигне критичну вредност, и даљим повећањем брзине флуида, вредности бездимензионе фреквенције осциловања не припадају реалном делу сопствених вредности. Из тог разлога, интересантно би било размотрити понашање бездимензионалне брзине струјања флуида са повећањем температуре, што је и приказано на сликама 8.6. и 8.7. Са повећањем промене температуре, критична брзина струјања флуида се смањује до нуле, када температура достигне своју критичну вредност.

У овом поглављу спроведена је анализа промене кружне фреквенције осциловања неуниформне функционално градијентне наноцеви са струјањем флуида унутар цеви, али и са променом материјала у два правца, а на основу Zhang-Fu-ове теорије греде. Коришћењем нелокалне теорије градијента деформације добијене су динамичке једначине Hamilton-овим принципом, док су резултати кружне фреквенције осциловања и критичне брзине струјања флуида израчунате Galerkin-овим принципом. Карактеристике материјала мењају се у два правца и то у аксијалном и радијалном правцу. Приказана је промена кружне фреквенције осциловања са променом брзине струјања флуида и промене температуре. Повећање брзине струјања флуида и повећање температуре доводи до опадања кружне фреквенције осциловања наноцеви, све док брзина струјања флуида и промена температуре не достигну критичну вредност. Како брзина струјања флуида у цеви није константна вредност, односно нема исту вредност на улазу и излазу из наноцеви, то ће брзина струјања флуида зависити од геометрије наноцеви, односно геометријског коефицијента β. У овом поглављу размотрено је како повећање нагиба наноцеви утиче на промену кружне фреквенције осциловања и брзине струјања флуида. Кружна фреквенција осциловања опада са повећањем брзине струјања флуида све док брзина струјања флуида не достигне критичну вредност. Узет је у обзир и утицај експонента запреминског удела на промену кружне фреквенције осциловања и критичне брзине струјања флуида. Закључује се да са повећањем експонента запреминског удела, односно повећањем концентрације метала у наноцеви, долази до смањења бездимензионе фреквенције осциловања наноцеви и критичне брзине струјања флуида кроз наноцев.

9. Закључак

У овој дисертацији разматране су слободне осцилације униформних и неуниформних наноструктура, са фокусом на функционално градијентне наноцеви. Ово истраживање било је усмерено ка разумевању осцилаторних карактеристика оваквих структура при различитим условима и применама. Значај ове дисертације лежи у томе што пружа увид у осцилаторно понашање наноматеријала при различитим условима.

Дисертација је конципирана кроз осам поглавља. У првом поглављу представљена су уводна разматрања кроз анализу различитих нелокалних теорија које су коришћене. Такође су разматрани материјали, посебно композитни материјали са релативно новом класом која се назива функционално градијентни материјали, који су коришћени у овом истраживању. Њихов значај као и интересовање истраживача у овој области, привукли су аутора ове дисертације да размотри различите типове структура са овим материјалима.

Друго поглавље заузима анализа кружне фреквенције осциловања и критична сила извијања Euler-Bernoulli-јевог и Timoshenko-вог нано-носача. Детаљно је представљен поступак извођења једначина кроз Eringen-ову нелокалну теорију носача. Приказан је и поступак одређивања кружне фреквенције осциловања и критичне силе извијања наногреде за различите граничне услове.

Анализа кружне фреквенције осциловања и критичне силе извијања Euler-Bernoulli-јеве и Timoshenko-ве наногреде применом нелокалне теорије градијента деформације приказана је у трећем поглављу. У овом поглављу први пут је представљена нелокална теорија градијента деформације и приказан је значај њене употребе. Поред нелокалног параметра у Eringen-овој нелокалној теорији, у теорији градијента деформације користи се параметар дужине скале кроз који се приказује анализа ефекта градијента деформације. У овој теорији подразумева се укључивање промењљивости деформације што може бити од важности у материјалима на нано нивоу. Значај употребе нелокалне теорије градијента деформације у примени код структура на нано скали лежи у томе што омогућава бољу апроксимацију одзива материјала, посебно у случајевима када се јавља неједнака расподела напона у структури. У овом делу истраживања разматрана је функционално градијентна греда, где се материјал мења у трансверзалном правцу. Разматрана је промена основне кружне фреквенције осциловања као и кртична сила извијања при промени нелокалног параметра и параметра дужине скале.

Четврто поглавље представља истраживање какав је утицај промене температуре на осцилације функционално градијентне слободно ослоњене Euler-Bernoulli-јеве наногреде. У последњих неколико година у радовима из ове области представљено је како термички ефекат ствара утицај на промену осцилаторних карактеристика наноструктура. У овом истраживању показано је како различити параметри, попут нелокалних параметра и параметра дужине скале утичу на промену фреквенције осциловања слободно ослоњене греде, али и на промену критичне температуре. Оно што је закључено, јесте да нелокални параметар нижег реда има такав утицај да са његовим повећањем долази до смањења кружне фреквенције осциловања наногреде. Ипак, и нелокални параметар вишег реда показује свој утицај на промену кружне фреквенције осциловања, баш како је и раније поменуто због способности да представи нелинеарне ефекте који могу утицати на механичко понашање структура. Када се говори о нелинарним ефектима, пре свега се мисли на промену динамичких карактеристика материјала. Закључено је да када су нелокални параметри једнаки, за вредности параметра дужине скале који су мањи од нелокалног параметра, кружна фркевенција осциловања наногреде је мања него у класичној теорији. Насупрот томе, за вредности параметра дужине скале које су веће од нелокалног параметра, кружне фреквенције осциловања су веће у односу на класичну теорију.

Термички утицај функционално градијентне слободно ослоњене Timoshenko-ве наногреде разматран је у петом поглављу. Слично као и у четвртом поглављу, закључено је да промена нелокалних параметара, параметра дужине скале и параметра запреминског удела доводи до промене кружне фреквенције осциловања наногреде.

У шестом поглављу представљена је Zhang-Fu-ова теорија вишег реда (често се у литератури може прочитати „префињен модел греде“) која је прилагођена за статичку и динамичку анализу цеви. Овом теоријом постигнуто је повећање тачности у процени попречне смичуће деформације, као и њеног утицаја на механички одзив наноцеви. Од 2013. године, када је ова теорија установљена, појавило се доста радова на тему механичког одзива цеви при различитим отерећењима. Тако је, последњих година испитиван утицај струјања флуида кроз цев применом Zhang-Fu-ове теорије. Промена осцилаторних карактеристика наноструктура са Zhang-Fu-овом теоријом представља значајан допринос науци, што је и јасно кроз радове који су објављени у овој области. Конкретно, у раду [12] управо је представљена теорија вишег реда при разматрању статичког и динамичког понашања цеви. У овом раду показано је да је боље представити аксијално померање неке тачке на носачу (цеви) на основу променљиве r, јер се то учинило бољом променљивом у представљању греде кружног или прстенастог попречног пресека. Представљена теорија коришћена је у следећим поглављима ове дисертације како би се испитала промена основне осцилаторне карактеристике нелокалне функционално градијентне неуниформне наноцеви.

Промена основне осцилаторне карактеристике неуниформне функционално градиране наноцеви са променом материјала у два правца коришћењем Zhang-Fu-ове теорије греде, али и нелокалне теорије градијента деформације, разматрана је у седмом поглављу. Неуниформне структуре су од значаја, јер механичке карактеристике нису једнаке у неком од праваца разматране структуре. Различите комбинације неуниформних структура могу допринети перформанси система али и утицати на оптимизацију материјала за различите примене. Овде је показано како геометријски параметар β утиче на промену кружне фреквенције осциловања, али и промену температуре, јер ни овде, као што је то био случај и у претходним поглављима, термички утицај није изостављен. Показано је и како нелокални параметар, параметар дужине скале и параметар запреминског удела утичу на промену кружне фреквенције осциловања наноцеви.

У последњем поглављу представљен је утицај струјања флуида на промену кружне фреквенције осциловања неуниформне функционално градијентне наноцеви. Посебно је наглашено да је брзина струјања флуида повезана са геометријским коефицијентом β, јер је јасно да брзина струјања флуида није константног интензитета с обзиром на промену попречног пресека. Ова веза успостављена је једначином континуитета. Такође је разматрано какав ефекат на промену основне осцилаторне карактеристике наноцеви имају термички утицај, утицај промене материјала и утицај промене нелокалног параметра и параметра дужине скале. Закључено је да промена брзине струјања флуида доводи до смањења кружне фреквенције осциловања, све до критичне вредности брзине струјања флуида која доводи до нестабилности система. Промена критичне брзине струјања са променом нелокалног параметра, параметра дужине скале, параметра запреминског удела и промена температуре разматрани су у последњем поглављу.

Допринос ове дисертације огледа се у формулацији математичких модела за различите типове структура и различите типове проблема који су разматрани, а који се могу искористити за постављање нових структура, различитих геометрија, оптерећења... Приказани резултати могу послужити као основа за даља истраживања у области функционално градијентних наноструктура, где би даљи рад могао бити и разматрање стохастичког утицаја код структура са оваквим типом материјала. Како смо тренутно у ери вештачке интелигенције, ауторов научно-истраживачки рад биће усмерен на развоју предиктивних модела како би се предвидео најбољи материјал структуре према спољашњем оптерећењу, теорији која је коришћена, граничних услова и сл. Излазак из „нано света“, аутор види кроз испитивање статичког и динамичког понашања структура добијених адитивним технологијама, што је такође поље које је значајно за истраживање.

Референце

[1] A. Farajpour, M. H. Ghayesh и H. Farokhi, „A review on the mechanics of nanostructures,“ *International Journal of Engineering Science,* т. 133, pp. 231-263, 2018.

[2] K. Jagath Narayana и R. Gupta Burela, „A review of recent research on multifunctional composite materials and structures with their applications,“ *Materials Today: Proceedings,* т. 5, бр. 2, pp. 5580-5590, 2018.

[3] M. H. Ghayes и A. Farajpour, „A review on the mechanics of functionally graded nanoscale and microscale structures,“ *International Journal of Engineering Science,* т. 137, pp. 8-36, 2019.

[4] R. P. Feznman, „There's Plenty of Room at the Bottom,“ *Engineering and Science,* т. 23, бр. 5, pp. 22-36, 1960.

[5] J.-P. Leburton, J. Pascual и C. S. Torres, Phonons in Semiconductor Nanostructures, NATO Science Series E: (NSSE, volume 236), 1993.

[6] E. Dowty, „Vibrational interactions of tetrahedra in silicate glasses and crystals,“ *Physics and Chemistry of Minerals,* т. 14, pp. 122-138, 1987.

[7] A. C. Eringen, „On differential equations on nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves,“ *Journal of Applied Physics,* т. 54, бр. 9, pp. 4703-4710, 1983.

[8] A. C. Eringen, Nonlocal continuum field theories, New York: Springer, 2002.

[9] R. Mindlin, „Micro-structure in linear elasticity,“ *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* т. 16, pp. 51-78, 1964.

[10] R. Mindlin, „On the equations of elastic materials with micro-structure,“ *International Journal of Solids and Structures,* т. 1, бр. 1, pp. 73-78, 1965.

[11] C. W. Lim, G. Zhang и J. N. Reddy, „A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation,“ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids,* т. 78, pp. 298-313, 2015.

[12] P. Zhang и Y. Fu, „A higher-order beam model for tubes,“ *European Journal of Mechanics - A/Solids,* т. 38, pp. 12-29, 2013.

[13] J. N. Reddy, „A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates,“ *Journal of Applied Mechanics,* т. 51, бр. 4, pp. 745-752, 1984.

[14] J. Reddy, Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, CRC Press, 2003.

[15] G. Bragagnolo, A. D. Crocombe, S. L. Ogin и I. Mohagheghian, „Flexural Behaviour of Foam Cored Sandwich Structures with Through-Thichness Reinforcements,“ *Journal of Composites Science,* т. 7, бр. 3, p. 125, 2023.

[16] V. Triska и G. T. Bugajski, „Non-destructive inspection of honeycomb sandwich using infrared thermography,“ у *International Conference on Military Technologies (ICMT) 2015*, Brno, Czech Republic, 2015.

[17] S. C. Aysha, B. Varghase и A. Baby, „A review on functionally graded materials,“ *The International Journal of Engineering and Science,* т. 3, бр. 6, p. 2319, 2014.

[18] N. Zhang, T. Khan, H. Guo, S. Shi, W. Zhong и W. Zhang, „Functionally Graded Materials: An Overview of Stability, Buckling, and Free Vibration Analysis,“ *Advances in Materials Science and Engineering,* т. 2019, p. 1354150, 2019.

[19] Y. Miyamoto, W. A. Kaysser и A. Kawasaki, Functionally graded materials: design, processing and applications, New York: Springer Science Business Media, 1999.

[20] M. Naebe и K. Shirvanimoghaddam, „Functionally graded materials: A review of fabrication and properties,“ *Applied Materials Today,* т. 5, pp. 223-245, 2016.

[21] F. Ebrahimi и E. Salari, „Nonlocal thermo-mechanical vibration analysis of functionally graded nanobeams in thermal environment,“ *Acta Astronautica,* т. 113, pp. 29-50, 2015.

[22] F. Ebrahimi и E. Salari, „Thermal buckilng and free vibration analysis of size dependent Timoshenko FG nanobeams in thermal environments,“ *Composite Structures,* т. 128, pp. 363-380, 2015.

[23] G. Janevski, N. Despenić и I. Pavlović, „Thermal buckling and free vibration of Euler-Bernoulli FG nanobeams based on the higher-order strain gradient theory,“ *Archives of Mechanics,* т. 72, бр. 2, pp. 139-168, 2020.

[24] G. Janevski, I. Pavlović и N. Despenić, „Thermal buckling and free vibration of Timoshenko FG nanobeams based on the higher-order nonlocal strain gradient theory,“ *Journal of Mechanics of Materials and Structures,* т. 15, бр. 1, pp. 107-133, 2020.

[25] D. Rašković, Teorija oscilacija, Beograd: Naučna knjiga, 1965.

[26] G. L. She, Y. R. Ren, F. G. Yuan и W. S. Xiao, „On vibration of porous nanotubes,“ *International Jorunal of Engineering Science,* т. 125, pp. 23-35, 2018.

[27] M. Neek-Amal и F. M. Peters, „Graphene nanoribbons subjected to axial-stress,“ *Physicak review B: Condensed Matter and Materials Physics,* т. 82, p. 085432, 2010.

[28] H. A. Mansoor и M. H. James, „Suction energy for double-stranded DNA inside single-walled carbon nanotubes,“ *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics,* т. 70, pp. 387-400, 2017.

[29] E. Aifantis, „On the role of gradients in the localization of deformation and fracture,“ *International Journal of Engineering Science,* т. 30, pp. 1279-1299, 1992.

[30] E. Taati, „On buckling and post-buckling behavior of functionally graded micro-beams in thermal environment,“ *International Journal of Engineering Science,* т. 128, pp. 63-78, 2018.

[31] F. Ebrahimi и M. R. Barati, „A nonlocal higher-order refined magneto-electro-viscoelastic beam model for dynamic analysis of smart nanostructures,“ *International Journal of Engineering Science,* т. 107, pp. 189-196, 2016.

[32] L. Li, X. Li и Y. Hu, „Free vibration analysis of nonlocal strain gradient beams made of functionally graded material,“ *International Journal of Engineering Science,* т. 102, pp. 77-92, 2016.

[33] H. B. Khaniki и S. Hosseini-Hashemi, „Dynamic transverse vibration characteristics of nonuniform nonlocal strain gradient beams using the generalized differential quadrature method,“ *European Physical Journal Plus,* т. 132, p. 500, 2017.

[34] M. H. Jalaei, A. Ghornanpour Arani и H. Nhuyen-Xuan, „Investigation of thermal and magnetic field effects on dynamic instability of FG Timoshenko nanobeam employing nonlocal strain gradient theory,“ *International Journal of Mehcanical Sciences,* Том. %1 од %2161-162, p. 105043, 2019.

[35] L. Lu, X. Guo и J. Zhao, „Size-depndent vibration analysis of nanobeams based on the nonlocal strain gradient theory,“ *International Journal of Engineering Science,* т. 116, pp. 12-24, 2017.

[36] M. R. Barati и A. Zenkour, „A general bi-Helmholtz nonlocal strain-gradient elasticity for wave propagation in nanoporous graded double-nanobeam systems on elastic substrate,“ *Composite Structures,* т. 168, pp. 885-892, 2017.

[37] I. Pavlović, R. Pavlović и G. Janevski, „Dynamic stability and instability of nanobeams based on the higher-order nonlocal strain gradient theory,“ *Quarterly Jorunal of Mehcanics and Applied Mathematics,* т. 71, pp. 137-153, 2019.

[38] I. Pavlović, R. Pavlović и G. Janevski, „Mathematical modeling and stochastic stability analysis of viscoelastic nanobeams using higher-order nonlocal strain gradient theory,“ *Archives of Mechanics,* т. 71, pp. 137-153, 2019.

[39] M. Şimşek и H. H. Yurtucu, „Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on nonlocal Timoshenko beam theory,“ *Composite Structures,* т. 97, pp. 378-386, 2013.

[40] T. S. Touloukian, Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials, New York: Elements, Macmillan, 1967.

[41] Y. Fu, J. Wang и Y. Mao, „Nonlinear analysis of buckling, free vibration and dynamic stability for the piezoelectric, functonally graded beams in thermal environment,“ *Applied Mathematical Modeling,* т. 36, pp. 4324-4340, 2012.

[42] M. H. Alsheri и J. M. Hill, „Suction energy for double-stranded DNA inside single-walled carbon nanotubes,“ *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics,* т. 70, бр. 4, pp. 387-400, 2017.

[43] H. Thai, „A nonlocal beam theory for bending, buckling and vibration of nanobeams,“ *International Journal of Engineering Science,* т. 52, pp. 56-64, 2012.

[44] O. Rahmani и O. Padram, „Analysis and modeling the size effect on vibration of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory,“ *International Journal of Engineering Science,* т. 77, pp. 137-153, 2014.

[45] J. Shi, H. Zhang, Q. Wang, Z. Duan, L. Xu, F. Guo, Y. Xie и Z. Chen, „Biomimetic rigid cryogels with aligned micro-sized tubular structures,“ *Chemical Engineering Journal,* т. 427, p. 131903, 2022.

[46] M. Maghimaa, S. Sagadevan, E. Boojhana, I. Fatimah, J. Anita Lett, S. Moharana, S. Garg и M. A. Al-Anber, „Enhancing biocompatibility and functionality: Carbon nanotube-polymer nanocomposites for improved biomedical applications,“ *Journal of Drug Delivery Science and Technology,* т. 99, p. 105958, 2024.

[47] L. R. dr Andrade, L. N. Andrade, J. O. Bahu, V. O. Concha, A. T. Machado, D. S. Pires, R. Santos, T. F. Cardoso, J. C. Cardoso, R. L. Albuquerque-Junior, P. Severino и E. B. Souto, „Biomedical applications of carbon nanotubes: A systematic review of data and clinical trials,“ *Journal of Drug Delivery Science and Technology,* т. 99, p. 105932, 2024.

[48] W. Liu, X. Wang, B. Dong, Y. Liu и D. Wei, „Enzymatic cascade reactors on carbon nanotube transistor detecting trace prostate cancer biomarker,“ *Biosensors and Bioelectronics,* т. 263, p. 116603, 2024.

[49] S. Qu, C. Wang, X. Guo, Z. Zheng, B. Chen и S. Jiang, „Detection of lymphoma biomarker ferritin using functionalized carbon nanotube platform,“ *Alexandria Engineering Journal,* т. 104, pp. 621-626, 2024.

[50] S. Iijima, „Helical microtubules of graphitic carbon,“ *Nature,* т. 354, pp. 56-58, 1991.

[51] L. Bian и M. Gao, „Thermal environment and strain energy related micro-model for properties,“ *Materials Science & Engineering B,* т. 244, pp. 72-80, 2019.

[52] A. Ali, S. S. Koloor, A. H. Alshehri и A. Arockiarajan, „Carbon nanotube characteristics and enhancement effects on the mechanical features of polymer-based materials and structures - A review,“ *Journal of Materials Research and Technology,* т. 24, pp. 6495-6521, 2023.

[53] Q. Jin и Y. Ren, „Review on mechanics of fluid-conveying nanotubes,“ *International Journal of Engineering Science,* т. 195, p. 104007, 2024.

[54] J. Zhang и J. Zhou, „Buckling of boron nanotubes under axial compression: Insights from molecular mechanics and continuum mechanics," *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* т. 127, p. 114520, 2021.

[55] E. Madenci, Y. O. Özkılıç, A. Bahrami, C. Aksoylu, M. R. Asyraf, I. Y. Hakeem, A. N. Beskopylny, S. A. Stel'makh, E. M. Shcherban и S. Fayed, „Experimental investigation and analytical verification of buckling of functionally graded carbon nanotube-reinforced sandwich beams," *Heliyon,* т. 10, бр. 8, p. e28288, 2024.

[56] Y. B. Fu и R. W. Ogden, Nonlinear Elasticity: Theory and Applications, Cambridge University, 2001.

[57] Y. Ghugal и R. Shimpi, „A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated beams," *Jorunal of Reinforced Plastics and Composites,* т. 20, pp. 255-272, 2001.

[58] E. Carrera и M. Petrolo, „On the effectiveness of higher-order terms in refined beam theories," *Jorunal of Applied Mechanics,* т. 78, p. 021013, 2011.

[59] K. Washizu, Introduction to Elasticity, Bejing: Peking University Press, 2001.

[60] N. Shafiei и G. L. She, „On vibration of functionally graded nano-tubes in the thermal environment," *International Journal of Engineering Science,* т. 133, pp. 84-98, 2018.

[61] H. Liu, L. Zheng и H. Tang, „Nonlinar vibration and instability of functionally graded nanopipes with initial imperfetion conveying fluid," *Applied Mathematical Modeling,* т. 76, pp. 133-150, 2019.

[62] J. Deng, Y. Liu, Z. Zhang и W. Liu, „Size-dependent vibration and stability of multi-span viscoelastic functionally graded material nanopipes conveying fluid using hybrid method," *Composite Structures,* т. 179, pp. 590-600, 2017.

[63] Q. Jin, Y. Ren, H. Jiang и L. Li, „A higher-order size-dependent beam model for nonlinear mechanics of fluid-conveying FG nanotubes incorporating surface energy," *Composite Structures,* т. 269, p. 114022, 2021.

[64] N. Despenić, G. Janevski и I. Pavlović, „Vibrations of nonuniform bidirectional functionally graded nanotubes based on the refined beam theory in a thermal environment," *Journal of Mechanics of Materials and Structures,* т. 18, бр. 1, pp. 59-74, 2023.

[65] M. I. Sajid, U. Jamshaid, T. Jamshaid, N. Zafar, H. Fessi и A. Elaissari, „Carbon nanotubes from synthesis to in vivo biomedical applications,“ *International Journal of Pharmaceutics,* т. 501, бр. 1-2, pp. 278-299, 2016.

[66] A. Wakasugi, M. Asakawa, M. Kogiso, T. Shimizu, M. Sato и Y. Maitani, „Organic nanotubes for drug loading and cellular delivery,“ *International Journal of Pharmaceutics,* т. 413, бр. 1-2, pp. 271-278, 2011.

[67] A. R. Setoodeh и S. Afrahim, „Nonlinear dynamic analysis of FG micro-pipes conveying fluid based on strain gradient theory,“ *Composite Structures,* т. 116, бр. 1, pp. 128-135, 2014.

[68] H. Askari и E. Esmailzadeh, „Forced vibration of fluid conveying carbon nanotubes considering thermal effect and nonlinear foundations,“ *Composites Part B: Engineering,* т. 113, pp. 31-43, 2017.

[69] Q. Jin и Y. Ren, „Nonlinear size-dependent bending and forced vibration of internal flow-inducing pre- and post-buckled FG nanotubes,“ *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* т. 104, p. 106044, 2022.

[70] N. Despenić, G. Janevski и Ž. Stamenković, „Vibrations of fluid-conveying nonuniform bi-directional functionally graded nanotubes based on the refined beam theory in a thermal environment,“ *Meccanica,* т. 58, p. 1217–1231, 2023.

[71] V. Rushidi, H. R. Mirdamadi и E. Shirani, „A novel model for vibration of nanotubes conveying nanoflow,“ *Computational Material Science,* т. 51, pp. 347-357, 2012.

[72] A. S. Sayyad и Y. M. Ghugal, „Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature,“ *Composite Structures,* т. 171, pp. 486-504, 2017.

Биографија

Никола Деспенић, рођен 18.01.1991. године у Нишу.

Основну школу **„Бранко Миљковић“ у Нишу** завршава 2006. године са одличним успехом.

Машинску техничку школу „15. мај“, уписује 2006. године, коју завршава 2010. године са одличним успехом, као ученик генерације. У том периоду учествује на регионалном и републичком такмичењу моделирања машинских конструкција.

Основне академске студије на Машинском факултету у Нишу уписује 2010. године. Године 2013. завршава основне академске студије на студијском програму Машинско инжењерство са просечном оценом 9,58 и тиме стиче диплому *Инжењер машинства* на усмерењу Мехатроника и управљање.

Мастер академске студије на Машинском факултету у Нишу уписује 2013. године, исте завршава 2016. године одбраном Мастер рада под називом *„Лабораторијски прототип мехатроничког редизајна клипног механизма“* са оценом 10 и стиче диплому *Мастер инжењер машинства*. У току мастер студија остварује просечну оцену 9,22.

Докторске академске студије на Машинском факултету у Нишу уписује 2016. године на усмерењу Теоријска и примењена механика.

Од прве годину докторских академских студија ангажован је у прегледу графичких радова на предметима Механика 1 – Статика и Отпорност материјала. На другој години докторских студија ангажован у извођењу вежби на предметима: Механика 1 – Статика и Отпорност Материјала, Механика 2 – Кинематика, Механика 3 – Динамика и Техничка физика.

Учесник на „Машинијади“ 2015. године на предмету Механика флуида, где је заузео друго место.

Био је стипендиста **Министарства пресвете, науке и технолошког развоја Републике Србије** у школским 2011/2012, 2012/2013 и 2013/2014. На докториским студијама био је стипендиста докторанд Министарства пресвете, науке и технолошког развоја Републике Србије до 2018 године**.** Године 2018. бива прикључен пројекту

Министарства пресвете, науке и технолошког развоја Републике Србије под називом „Динамичка стабилност и нестабилност механичких система под дејством стохастичких поремећаја“ чији је руководилац био проф. др Ратко Павловић. Од децембра 2019. године запослен је као асистент на Катедри за механику.

Изјава 1.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом:

„Осцилације композитних наноструктура применом теорија вишег реда“

која је одбрањена на Машинском факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 07.10.2024.

Потпис аутора дисертације:

Деспенић Никола

Изјава 2.

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

„Осцилације композитних наноструктура применом теорија вишег реда“

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 07.10.2024.

Потпис аутора дисертације:

Деспенић Никола

Изјава 3:

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

„Осцилације композитних наноструктура применом теорија вишег реда“

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**

2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**

[✓ 3.] Ауторство – некомерцијално – без прераде **(CC BY-NC-ND)**

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**

5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**

6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**[4]

У Нишу, 07.10.2024.

Потпис аутора дисертације:

Деспенић Никола

---

[4] Аутор дисертације обавезан је да изабере и означи (заокружи) само једну од шест понуђених лиценци; опис лиценци дат је у наставку текста.

Типови лиценци Креативне заједнице[5]

1. Ауторство (CC BY)

Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. Уодносу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце, и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

---

[5] Више о лиценцама Креативне заједнице на адреси: **http://creativecommons.org.rs/?page_id=74CC**. Овај текст НИЈЕ саставни део изјава аутора!

Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце, и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.