



УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ГРАЂЕВИНСКО-АРХИТЕКТОНСКИ ФАКУЛТЕТ



Злата Д. Тошић

**ДИЗАЈН И ОПТИМИЗАЦИЈА
БЕТОНСКИХ ЉУСКИ СЛОБОДНЕ
ФОРМЕ У СВРХУ МОДУЛАРНЕ
ПРЕФАБРИКАЦИЈЕ**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2024.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING AND
ARCHITECTURE



Zlata D. Tošić

**DESIGN AND OPTIMIZATION OF FREE-
FORM SHELL STRUCTURES FOR
MODULAR CONCRETE
PREFABRICATION**

DOCTORAL DISSERTATION

Niš, 2024.

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

Др Драган Костић, редовни професор

Универзитет у Нишу, Грађевинско-архитектонски факултет

Чланови комисије:

Др Марко Јовановић, доцент

Универзитет у Новом Саду, Факултет техничних наука

Др Вук Милошевић, ванредни професор

Универзитет у Нишу, Грађевинско-архитектонски факултет

Датум одбране: _____

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Др Драган Костић, редовни професор Универзитет у Нишу, Грађевинско-архитектонски факултет
Наслов:	Дизајн и оптимизација бетонских љуски слободне форме у сврху модуларне префабрикације
Резиме:	У овој докторској дисертацији развијене су две стратегије дизајна модуларних бетонских љуски са фокусом на технологију префабрикације. Истраживање обухвата четири синхронизована радна пакета са корацима дефинисаним кроз <i>пре-рационализацију</i> и нови <i>хибридни приступ</i>. Главне развијене геометријске методе укључују дизајн модуларних љуски са планарним панелима без геометријске торзије. Ту спадају: оригинални алгоритми за генерисање кружних мрежа (АКМ), дискретних верзија површи као што су Дупинови циклиди, Каналне и Монжова и пројектовање Коенигсових мрежа, које је истражено кроз Кристофелову дуалност и две карактеристичне трансформације: Мебијусову и пројективну. Прва студија случаја показала је успешност хибридног приступа са АКМ методом у конструкцији модуларне љуске, смањујући деформације и оптимизујући материјал. У другој студији је имплементован дизајн минималне површи, такође, са АКМ методом, осигуравајући ефикасност бетонске љуске и адаптабилност и скалабилност модула. Трећа студија истражила је оптимизацију Дупинових циклида, показујући предности у материјалној ефикасности и монтажи. Закључено је да имплементација дефинисаних геометријских метода и префабрикационо оријентисаних стратегија доводи до значајних побољшања у ефикасности конструкције и контроле локалне геометрије модула, омогућавајући шире и слободније приступе дизајну за пројектанте.
Научна област:	Архитектура
Научна дисциплина:	Пројектовање конструкција архитектонских објеката
Кључне речи:	Префабриковано-бетонске љуске, геометрија у архитектури, дизајн љуски слободне форме, мрежне љуске, двоструко закривљени површински системи љуски
УДК:	624.074.43(043.3)
CERIF класификација:	T240: Архитектура, уређење ентеријера
Тип лиценце Креативне заједнице:	CC BY-NC-ND

Лектор за српски језик	Теодора Бојовић Красић
---------------------------	------------------------

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Dr. Dragan Kostić, Full Professor University of Niš, Faculty of Civil Engineering and Architecture
Title:	Design and optimization of the free-form shell structures for modular concrete prefabrication
Abstract:	In this doctoral dissertation, two design strategies for modular concrete shells focused on prefabrication technology have been developed. The research encompasses four synchronized work packages, with steps defined through <i>pre-rationalization</i> and a novel <i>hybrid</i> approach. The main geometric methods developed include the design of modular shells with planar panels with no geometric torsion. These methods comprise original algorithms for generating circular meshes (AKM), discrete versions of surfaces such as Dupin cyclides, canal surfaces, and Monge surfaces, as well as the design of Koenigs nets explored through Christoffel duality and two characteristic transformations: Möbius and projective. The first case study demonstrated the success of the hybrid approach with the AKM method in constructing a modular shell, reducing deformations and optimizing material usage. In the second study, the design of minimal surfaces was implemented with the AKM method, ensuring the efficiency of the concrete shell and the adaptability and scalability of the modules. The third study investigated the optimization of Dupin cyclides, highlighting benefits in material efficiency and assembly. It is concluded that the implementation of defined geometric methods and prefabrication-oriented design strategies leads to significant improvements in construction efficiency and control over the local geometry of modules, allowing broader and more flexible design approaches for designers.
Scientific Field:	Architecture
Scientific Discipline:	Design of constructions for architectural buildings
Key words:	Prefabricated concrete shells, architectural geometry, design of free-form shells, grid shells, doubly-curved shell structures
UDC:	624.074.43(043.3)
CERIF Classification:	T240: Architecture, interior design
Creative Commons License Type:	CC BY-NC-ND

Захвалност

Мом ментору проф. др Драгану Костићу на подршци и раном утицају током мог високог образовања својим предметом „Конструктивни системи у архитектури” на моје интересовање за пројектовање просторних конструктивних система.

Једнаку захвалност дугујем проф. др Данијелу Лордику на поверењу да постанем члан његове истраживачке групе на Универзитету у Дрездену, критичком сагледавању мог истраживања и неизмерној подршци при процесу израде ове дисертације. За више од четири године сарадње са проф. Лордиком сам имала прилике да упознам многе садашње сараднике, радим на инспиративним пројектима и постанем део великих престижних истраживачких заједница.

Ванредном проф. др Марку Јовановићу се захваљујем на конструктивним критикама, корисним саветима и дискусијама током израде докторске дисертације који су умногоме утицали на њен коначни квалитет.

Професорки др Соњи Красић која је препознала моју посвећеност студијама и жељу за истраживањем, увела ме у област примењене геометрије у архитектури, пружала велику подршку и давала корисне савете. Три године сарадње са проф. Красић су ми помогле да научим много о предавачком приступу на факултету, истрајности и дисциплини током процеса истраживања.

Колегама др Ахмеду Елшафеи и Алију Абделмагиду на размени идеја, стручном саветовању и помоћи у одређеним обласима диференцијалне геометрије који се могу огледати у доприносима ове дисертације. Колеги Егору Иваниуку на сарадњи и изградњи два прототипа као део заједничког пројекта који чине један од доприноса ове тезе. Колеги Мартину Ајхенауеру на помоћи у дефинисању прорачуна модуларних љуски приказаних у студијама случаја.

Такође, пријатељима и колегама који су моје време током студирања и рада својом подршком и разговорима учинили лакшим и лепшим: Сањи Миловановић, Милици Младеновић, Јовани Петкоски, Александру Богојевићу, Ани Цурк, Миљани Топић, Тамари Стефановић, Катарини Давидовић, Ирени Стаменков, Милијани Танасковић, Милошу Милићу, Ани Станојевић, Николи Јанковић, Исидори Ђорђевић, Јовани Томић, Настасији Костић, Лариси Иваноној, Александру Мелхеру, Дарији

Дордини као и другима који нису поменути, а на директан или индиректан начин су учествовали у изради ове дисертације. Свима наведенима, а и онима који то нису, од срца захваљујем.

Највећу захвалност дугујем члановима уже и шире породице, посебно мајци Драгани, оцу Драгану и сестри Марији, за неизмерно разумевање, пожртвованост и подршку коју су ми пружили током школовања и рада. Мом партнеру Мајклу захваљујем посебно на неисцрпним разговорима, саветима, разумевању и подршци у сваком смислу током периода израде тезе.

У Нишу, новембра 2024.

Овај рад посвећујем својим родитељима и сестри који су ме пратили кроз цео процес истраживања и писања, имали разумевања и били највећа подршка. Хвала вам!

Садржај

1	Увод.....	1
1.1	Мотив за истраживање	2
1.2	Предмет и проблем истраживања	4
1.3	Циљ и хипотезе истраживања.....	5
1.4	Методе истраживања	6
1.5	Структура докторске дисертације	7
1.6	Бетонске љуске.....	8
1.6.1	Конструктивни системи љуски.....	8
1.6.2	Проблеми и изазови конструкција бетонских љуски.....	13
1.7	Савремена решења за проблеме конструкција бетонских љуски	17
1.8	Префабрикација бетонских љуски	21
1.8.1	Савремене технологије префабрикације	25
1.8.2	Упознавање са материјалом и системом префабрикације АЦЦЦ пројекта	28
1.8.3	Модули за префабрикацију љуски	34
2	Преглед литературе и теоријске основе метода.....	38
2.1	Методе пројектовања љуски слободне форме	38
2.1.1	Конструктивно оријентисане методе и примена	41
2.1.2	Геометријски оријентисане методе	44
2.1.3	Комбинација конструктивних и геометријских услова – комбиноване методе	55
2.1.4	Рекапитулација прегледа литературе.....	59
2.2	Теоријске основе дискретних мрежних система	61
2.2.1	Кружне мреже	62
2.2.2	Коничне мреже.....	66

2.2.3	Коебе мреже	69
2.2.4	Кристофелова дуалност, Кoenигсове и изотермичке мреже	75
2.2.5	Мебијусова и пројективна трансформација	80
2.2.6	Класе површи Дупинови циклиди, Каналне и Монжова површ ...	83
2.2.7	Методe и алати мултифункционална оптимизације.....	87
2.2.8	Префабрикацијски и конструктивни бенефити дискретних мрежа различитих офсета	90
3	Префабриковано-оријентисан дизајн.....	92
3.1	Две развијене стратегије дизајна – комбиновани приступ	94
3.2	Развијене геометријске методе за конструкцију дискретних површи: радни пакет 2	97
3.2.1	Геометријска и конструктивна анализа почетног дизајна: радни пакет 2.1 хибридног приступа	98
3.2.2	Алгоритам кружне мреже: радни пакет 2.2.....	101
3.2.3	Алгоритам Дупинових циклида и Каналних површи: радни пакет 2.2.....	108
3.2.4	Алгоритам Монжове површ: радни пакет 2.2	113
3.2.5	Алгоритам Кoenигсових (дуалних) мрежа: радни пакет 2.2	127
3.2.6	Провера геометрије модула генерисане мреже: радни пакет 2.3	142
3.3	Конструктивна анализа љуске: радни пакет 3	144
3.3.1	Дефиниција статичког система: радни пакет 3.1	145
3.3.2	Анализа на глобалном и локалном нивоу: радни пакет 3.2.....	147
3.3.3	Испитивање домена параметара: радни пакет 3.3	149
3.4	Мултикритеријумска оптимизација љуске: радни пакет 4.....	150
3.4.1	Имплементација методе оптимизације: радни пакет 4.1	151
3.4.2	Евалуација резултата: радни пакет 4.2	153
4	Приказ резултата.....	154

4.1	Студија случаја 1 – Листови детелине.....	155
4.2	Студија случаја 2 - Минималне површи „Павиљони“	167
4.3	Студија случаја 3 - Морска шкољка.....	176
5	Резиме налаза, дискусија и закључак.....	190
5.1	Резиме налаза	190
5.2	Ограничења	192
5.3	Будући правци	193
5.4	Теоријски и практични значај.....	193
5.5	Дискусија	194
5.6	Закључак	198
6	Литература.....	201

Списак скраћеница

АКМ	Алгоритам кружне мреже
АЦДЦ	Адаптивне бетонске модуларне конструкције (енгл. Adaptive Concrete Diamond Constructions 27 ACDC)
БВ	метода Бокса-Вилсона
ДГ	Диференцијална геометрија
ДДГ	Дискретна диференцијална геометрија
ДУП	домен улазних параметара
ГХ	Грасхопер (Grasshopper)
Енгл	Енглески
КД	Кристофелова дуалност
КМ	Коебе мрежа
МКЕ	Метод коначних елемената
МТ	Мебијусова трансформација
Нем.	Немачки
НУРБС	не-универзална рационална основна крива (енгл. Non-Uniform Rational B-Spline – NURBS)
ПК	планарни четвороугао (енгл. Planar quad – PQ)
ПТ	Пројективна трансформација
РП	радни пакет
СП	Стереографска пројекција

ТНА	Решеткаста мрежна анализа (енгл. Thrust Network Analysis – TNA)
ФДМ	Метода густине силе (енгл. Force Density Method – FDM)

Списак симбола

a, b, c, d	Улазни параметри Мебијусове трансформације
$a_{1,2,3,4} \ b_{1,2,3,4},$ $c_{1,2,3,4} \ d_{1,2,3,4}$	Улазни параметри за пројективну трансформацију
k_1, k_2	Вектори главних праваца кривина површи
K	Гаусова кривина
N	Конформална параметризација сфере
t	Изабрани домен параметријске криве
u, v	Домени параметризоване површи
U_n	Искоришћеност попречног пресека модула
X	Параметризација мреже
X^*	Трансфомисана мрежа
$\Psi(z)$	Холоморфна функција

Списак слика

Слика 1-1. Приказ поделе љуски по геометријској закривљености Гаусове кривине: а) Позитивно; б) Негативно; в) Једноструко закривљене геометрије.....	9
Слика 1-2. а) Подела површи на два ортогонална главна правца кривина α , β са пресечном тачком А; б) Диференцијално мали елемент љуске издвојен на делу а) са напонским стањима у пресеку, назначеном средњом линијом и посматраним делом пресека; в) Попречни део пресека са одвојеном средњом линијом и посматраним подужним пресеком	10
Слика 1-3. а) Приказ позитивног смера дејства сила у средњој равни љуске; б) Приказ момената савијања, торзије и трансферзалних сила	11
Слика 1-4. Графички приказ резултата анализе армиранобетонске љуске МКЕ помоћу софтверског пакета FEMAP са NX Nastran са означеним вредностима дистрибуције Фон Мисовог напона у МПа (лево) и вредностима деформација у метрима (десно) (Tošić et al., 2019)	12
Слика 1-5. Центар Хејдара Алијева – Заха Хадид (лево) (Baan et al., 2013); тржни центар Емпориа – Вингардхс (десно)(Söderström, 2013).....	16
Слика 1-6. Шема приказа актуелних проблема у пољу бетонских љуски, различитих области решења и унапређења као и њихових међусобних односа са црвено маркираним темама које су део овог рада.....	17
Слика 1-7. Покривна љуска јавног тоалета у Тскхалтубо, Георгија 1956. са детаљем попречног пресека конструкције и основе (Danieli, 2017).....	21
Слика 1-8. Приказ шеме монтаже „зубном техником” у хоризонталном пресеку (Danieli, 2017)	22
Слика 1-9. Основа и пресек КНИТ зложбене дворане (Motro & Maurin, 2011).....	23
Слика 1-10. ЦАСТонЦАСТ систем (Enrique et al., 2016) (лево) са послганим модулима и састављена конструкција бетонске љуске од приказаних модула (десно)	25
Слика 1-11. 3Д модел флексибилног калупа (лево) (Schipper et al., 2015), и структура танке љуске састављена од модула (десно) (Peters et al., 2017)	26

- Слика 1-12. Двоструко закривљени модули произведени 3Д штампаним бетоном; 3Д штампа (лево) (S. Lim et al., 2016), 3Д штампа на флексибилном калупу (середина) (J. H. Lim et al., 2020), и комбинација 3Д штампе и ливења бетона (десно) (Borg Costanzi et al., 2018).....27
- Слика 1-13. а) 3Д штампач за бетонске модуле б) Роботска рука29
- Слика 1-14. Кораци производње дискретизованог елемента иду од 1 до 5: ивица модула за штампање, постављање испуне, ојачање текстилном мрежом, други слој ивице и други слој испуне (Ivaniuk, Friedrich Eichenauer, et al., 2022)30
- Слика 1-15. а) 3Д штампа спољне ивице модула и б) млазница са електричним мотором који покреће флексибилне мистрије за штампу различитог попречног пресека ивица модула30
- Слика 1-16. Шематски приказ процеса штампе, положаја млазнице и мистрије, за угао од 45° са две могућности путање штампања; а) стаза штампања са осом ротације у пресеку оса унутрашње ивице; б) оса ротације близу пресека унутрашње линије ивица.....32
- Слика 1-17. Детаљан приказ два модула са свим подацима и елементима потребним за њихову штампу и позиционирање веза; стрелице на испрекиданој кривој указују на смер штампе бетона; плава боја означава празан део модула који је непопуњен материјалом; црвена боја означава потенцијалну зону нагомилавања материјала; сива боја су завртњеве за везе, црна боја означава позиције млазнице;33
- Слика 1-18. а) Демонстратор КонДит 1.0 (Ivaniuk, Friedrich Eichenauer, et al., 2022); б) Демонстратор АЦДЦ Лук (Ivaniuk et al., 2024).....34
- Слика 1-19. Приказ различитих врста типологије поделе љуске у зависности од геометријских карактеристика дискретног елемента (модула), међусобних веза у мрежи и положаја чворова; а) мрежа четвороуглова; б) мрежа шестоуглова; в) мрежа троуглова; г) мешовита мрежа.....36
- Слика 1-20. а) Шематски приказ локалних геометријских карактеристика 3Д штампаног модула; б) веза два модула са страницом ивице у равни.....37
- Слика 2-1. Првобитна подела на траке у правцу геодезијских кривих (лево); Други правац поделе управан на дејство правца сила са смичућом шемом

- (средина); Карактеристике различитих страница једног модула (десно): а) екстрадос равно засечен, б) правоизводне странице управне на дејство оптерећења, ц) закривљени интрадос рељефасте структуре, д) регистрациони зарези, е) равне контактне странице паралелене примарном правцу дејства сила (van Mele et al., 2016)42
- Слика 2-2. Процес од дизајна до префабрикације и монтаже моста (i-v); а) Процеса 3Д штампе модула; б) монтаже и с) готовог павиљона (Bhooshan et al., 2022)43
- Слика 2-3. Приказ префабрикације бетонских модула 3Д штампом и калупом од песка као и коначног демонстратора ДЕ:Стрес (енгл. DE:Stress) (Battagilia et al., 2020)43
- Слика 2-4. Хексастоне павиљон од 3Д штампаних модула на сајму компактних конструкција у северној Европи у Нојминстеру, Шлезвиг Холштајн (лево), детаљ споја елемената (десно) (Vertico, 2023)44
- Слика 2-5. а) Произвољна геометрија са системом коњугованих кривих А и Б. Тангентне система кривих А, које се чине систем кривих Б, дају тангентне правоизводне површи (зелено); б) и в) два примера коњугованих система кривих (реконструкција модела по (Pottmann Helmund et al., 2007))45
- Слика 2-6. а) Цртеж који показује процес налажења главних праваца кривина за произвољну површ, где је показано да се кривина (k_1 , k_2) израчунава као обрнуто пропорционална вредност радијуса круга ($1/r_1$, $1/r_2$); б) Уцртани правци главних кривина као криве на површи; в) Градиент величина k_1 и k_2 како би се пронашли потенцијални сингуларитети (беле тачке).....46
- Слика 2-7. Приказ мреже главних праваца кривина на глаткој површи са два правца тракастих елемената које чине њене нормале, где се на детаљу поред виде развијене верзије истих у равни (лево); Исти сценарио са дискретном верзијом мреже које представљају ПК мрежу (дискретна верзија трака развијене верзије у равни) (десно); Како нема деформације (увртања) обе варијанте (глатке и дискретне) траке су развојне површи, оне немају геометријску торзију. Ово важи за сваку траку и оба правца обе мреже.47

- Слика 2-8. Приказ параметризације а) троосног елипсоида; б) елиптичког параболоида и ц) једнограног ротационог хиперболоида са њиховим параметризацијама преко мрежа главних кривина48
- Слика 2-9. Приказ праваца главних кривина (плаво и црвено) за дату површ (лево); подела на модуле који се могу произвести истим калупима (са одређеним степеном флесибилитета) према степену закривљености модула приказано по бојама (средина); дизајн деформисан изометријски према (Jiang et al., 2020) где групе модула остају у истој категорији уколико се користи флексибилни калуп (десно);49
- Слика 2-10. Приказ процеса оптимизације од почетне мреже површи до коначне методом Боуазиза преко две фазе: пројекција сваке од полигона до планарности а затим налажења средње вредности грешке; У овом случају је задат само један услов, па тако мрежа конвергује до квадрa (Bouaziz et al., 2012); ..50
- Слика 2-11. Добијена кружна мрежа (доле лево) преко почетне поделе у правцу главних праваца кривина (горе десно) (Liu, 2008)52
- Слика 2-12. Задате две пресечне криве (лево горе) и њихова пресликана Гаусова слика са конструкцијом пресечних кружница кроз изабране тачке две криве (лево доле); Пример двоструко закривљене површи која се може добити овом методом (десно) (Tellier, Douthe, et al., 2019)53
- Слика 2-13. Прва пројекција Коебе мреже S' и њене дуалне M , Енеперова површ; Прва пројекција Коебе мреже $S'1$ и њене дуалне $M1$ која представља Бонетову површ (Pottmann & Liu, 2007).....53
- Слика 2-14. Различити примери дискретних минималних периодичних површи насталих од Коебе мреже а) Симетрична и несиметрична Шварцова P површ; б) Неовисова површ; с) Симетрична и несиметрична Шрекова кула; d) Шонова и-6 површ; е) Симетрични и несиметрична верзија катеноида (приближно); f) Куболд гранични рам (Sechelmann, 2007)54
- Слика 2-15. Пример дизајна дискретне минималне површи крећући се од ортогоналне мреже S' која се прсликава на параболоид тако да су њене ивице тангентне на њега (Коебе мрежа S), а Кристофеловом дуалношћу се добија дискретна минимална површ M (Pottmann Helmund et al., 2007).....54

- Слика 2-16. Четвороугаона мрежа а) пре и б) након оптимизације методом Шифнера (Schiftner & Balzer, 2010) и упоређење са ц) сегментацијом коничном мрежом Лиа; степен закривљености панела је приказаним графиконом. 56
- Слика 2-17. Приказ решења Танга а) начин на који корисник моделује и манипулише форму контролним тачкама почетне мреже одакле се иницијализује почетна подела методом Лиа (Liu, 2008) ; б) приказ намене објекта након оптимизације; с) магнитуде сила притиска и затезања у ивицама мреже 57
- Слика 2-18. Приказ редоследа корака методе Пелиса а) иницијана подела на троугаону мрежу у стању равнотеже, б) приказ главних праваца кривина и напона који се не поклапају; с) стање њиховог поклапања након оптимизације и модификације форме; d) модификација поделе на четвороуглове е) приказ степена планарности коначне мреже (Pellis & Pottmann, 2018) 57
- Слика 2-19. а) Почетна кружна мрежа M са офсетованом M^d ; б) Дискретна Гаусова слика S две мреже M и M^d , пресликана на јединичну сферу S^* (скица реплике из (Pottmann Helmund et al., 2007))..... 63
- Слика 2-20. Приказ два система нормала који се јављају код циркуларних мрежних система 63
- Слика 2-21. а) Полигон са офсетом компланарних суседних дискретних нормала са разлитим дужинама са одговарајућом Гаусовом сликом; б) полигон са офсетом некомпланарних дискретних нормала једнаких дужина са одговарајућом Гаусовом сликом 65
- Слика 2-22. Конструкција просторне кружне мреже и њене паралелне које чине мрежну љуску (горе лево) са штапастиим елементима без геометријске торзије (детал доле лево) и провера услова њене Гаусове слике (десно) (Тошић et al., 2020) 65
- Слика 2-23. Објашњење појма тангентног конуса; а) Друга пројекција примера произвољне линије CA кроз центар сфере, њених тангентних линија AB_1 и AB_2 са идентичним троугловима CAB_1 и CAB_2 ; б) Перспектива сфере са ротирајућим троуглом CAB_1 који даје конус (зелено) као и полуправе Ar и добијене равни његовог базиса P 67

- Слика 2-24. а) Гаусова слика кружне мреже са дискретним нормалама из тачака (плаве) и други систем нормала из центра кружница на сфери (црвене); б) Равни између суседних нормала у тачкама кружне мреже до пресека са равнима коничне мреже $P_{1,2,3,4}$ дају беле тачке; в) Тангентни конуси (зелено) чији су базиси кружнице кружне мреже са добијеним висинама (црно); г) Конична мрежа (љубичасто) чије се тачке налазе на врховима конуса а нормале панела се поклапају са дискретним нормалама из тачака кружне мреже (а црвено)67
- Слика 2-25. а) Произвољна кружна мрежа M_1 са својом Гаусовом сликом M_1^* ; б) На основу Гаусове мреже M_1^* конструисана је Гаусова мрежа коничне мреже M_1^* са њеним офсетом M_2^* за задату дистанцу, која такође чини Гаусову слику коничне мрежу и са паралелним панелима, на основу њих су конструисане обе коничне мреже у простору, почетна M_2 и њен офсет M_2' (доле)68
- Слика 2-26. а) Пример Коебе мреже M_1 са ивицама тангентним на јединичну сферу и уписаним кружницама; б) Издвојена четири полигона мреже M_1 са задатом величином офсета d и њеном паралелном мрежом M_2 70
- Слика 2-27. Примери два офсета а) и б) Коебе мреже са задатим различитим векторима трансформације 70
- Слика 2-28. Приказ Коебе мреже са два система кружница; Први чине уписане кружнице полигона (беле), а друге се налазе у тангентним тачкама ивица полигона са сфером четири заједничне ивице једне тачке мреже 71
- Слика 2-29. Објашњен услов ортогоналност мреже тангентних кружница Коебе мреже 72
- Слика 2-30. а) Подела почетне x, y равни на мрежу квадрата; б) примена инверзије у равни..... 72
- Слика 2-31. Приказ параметризације сфере преко два прамена равни које се секу у ортогоналним правима L_1 и L_2 . а) Први случај када обе праве тангирају сферу у тачки северног пола сфере; б) Други случај када ни један од прамена равни не тангира сферу већ су на задатој висини a или $1/a$ од центра сфере O 74

Слика 2-32. а) Раван подељена на квадрате x, y правца; б) трансформација комплексном функцијом типа Мебијус	74
Слика 2-33. а) Инверзија у равни x, y мреже, б) конструисана Коебе мрежа преко добијене инверзне стереографске пројекције, в) детаљ конструкције Коебе мреже преко кружница на сфери.....	75
Слика 2-34. а) Коебе мрежа S са својом дуалном дискретном минималном површи M ; б) Два дуална четвороугла са супротним смером страница и паралелним одговарајућим дијагоналама са примером уписаног и описане кружнице (Tošić et al., 2020)	76
Слика 2-35. Кружна мрежа S_1 са регуларном дуалном мрежом M_1 (лево); Произвољна мрежа S_2 где се поступком конструкције дуалне добије M_2 чије се тачке не поклапају (десно) (Z. Tošić et al., 2019).....	76
Слика 2-36. а) Подела равни x, y правца са кружном мрежом преко дијагонала квадрата, б) одржана планарност преко кружница инверзијом и инверзном стереографском пројекцијом што чини да је мрежа Коенигсова.....	77
Слика 2-37. Приказ својстава дискретне минималне површи и доказа на локалном нивоу четири ПК која полазе из исте тачке; Раван која полази из заједничке тачке са нормалом N мора да садржи спољашње тачке $f(x_n)$, док су пројекције крајњих тачака ивица полигона које се сустичу у $f(y_n)$ наизменично једнако удаљене од равни изнад и испод ње за h . Уз то, додаје се услов да пројекције тачака $f^*(y_n)$ на раван P морају припадати истој кружници (обрађена слика из (A. I. Bobenko, 2008)).....	78
Слика 2-38. Шема односа различитих типова дуалних мрежа.....	79
Слика 2-39. Шема приказа начина конструкције дуалних мрежа које прихватају Кристофелову дуалност	83
Слика 2-40. а) Конструкција Дупинових циклида преко скупа сфера са центром на елипси; б) Дупинов циклид елиптично-хиперболичког типа; в) Дупинов циклид параболичког типа.....	85
Слика 2-41. а) Принцип конструкције Каналне површи преко сфера променљивог радијуса; б) Кружнице управне на задату просторну криву	85

Слика 2-42. Дефиниција Монжове површи преко две задате генератрисе и директрисе где се корекцијом Френетових равни конструише се ПК мрежа.....	86
Слика 3-1. Шема радних пакета (РП) њихових односа и размене информација.....	92
Слика 3-2. Шема развијене комбиноване методе са корацима од дизајна до префабрикације конструкције љуски слободне форме за случај пре-рационализације.....	95
Слика 3-3. Шема развијене комбиноване методе са корацима од дизајна до префабрикације конструкције љуски слободне форме за случај хибридног приступа.....	96
Слика 3-4. Шема радног пакета 2 са подпакетима	97
Слика 3-5. Слика шеме свих алгоритама генерисања дискретних мрежа развијених у радном пакету 2.2 са њиховом применом у две стратегије	98
Слика 3-6. Пример конструкције љуске а) главни правац закривљености и б) главни правци сила нису близу в) потенцијалне почетне криве за генерисање кружне мреже	99
Слика 3-7. Пример конструкције љуске а) главни правци кривина и б) главни правци сила в) потенцијалне почетне криве за конструкцију кружне мреже.....	100
Слика 3-8. а) Генерисање ПК система кружне мреже помоћу две пресечне криве М са офсетованом крижном мрежом M^d и б) детаљ везе четири полигона са свим контактним страницама у равни; в) процес генерисања сваког четвороугла преко три полазне тачке и њима дефинисане кружнице; г) дискретна Гаусова слика добијене кружне мреже на јединичној сфери са означеним Гаусовом сликом одговарајућег модула на примеру а) (прерађена слика по (Tošić et al., 2022))	101
Слика 3-9. Приказ компоненте у Грасхоперу за генерисање ПК мреже; а) генерисана мрежа са три почетне пресечне криве које формирају закрпе 1 (наранџаста), 2 и 3; б) Гаусова мрежа на јединичној сфери добијена преко праваца вектора дискретних нормала закрпе 1; в) направљена Грасхопер компонента са приказом свих улазних и излазних параметара за корисника	104

- Слика 3-10. а) Трансформација кружне мреже M у коничну $M1$ са њеним офсетом $M1'$; б) Приказ Гаусове све три мреже редом M^* , $M1^*$, $M1'^*$ и дискретним нормалама коничне мреже из тачака полигона105
- Слика 3-11. а) поглед одозго и б) поглед у перспективи на кружни мрежни систем генерисан из задатих кривих; две произвољне (зелена и црвена) и четири изведене (плаве) (Tošić et al., 2022).....105
- Слика 3-12. а) Почетне позиције задатих кривих (плаве) са генерисаном кружном мрежом, модули који не подлежу условима производње (означени црвено); б) Модификоване криве (црвене) са резултујућом кружном мрежом са одговарајућим модулима; в) Почетна мрежа и модификована мрежа су преклопљене са назначеном модификацијом кривих (Tošić et al., 2022)106
- Слика 3-13. а) Генерисана кружна мрежа из примера анализираног на слици 3-6 где се правци главне кривине и напона не преклапају; б) генерисани ПК кружни мрежасти систем из система кривих приказаних на слици 3-7, где су правци главне кривине и напона близу107
- Слика 3-14. Два примера почетне конструкције једног система лукова (наранџасти) у простору помоћу три тачке (наранџасте) које се увек налазе на три кружнице у простору (плаве).....109
- Слика 3-15. Шематски приказ алгорита са улазним подацима (levo) и фазама (поља означена бројевима) које су неопходне за усвајање коначне геометрије модула111
- Слика 3-16. Приказ улазних геометријских и излазних података као и међукорака алгорита на два примера: задате криве, дефинисане тачке на кривима и назначен први ред модула у конструкцији.....111
- Слика 3-17. Приказ оба примера љуске са генерисаним коначним модулима преко праваца дискретних нормали.....112
- Слика 3-18. Дефинисане фазе конструкције дискретне верзије каналних површи са: а) задатом просторном кривом, центрима сфера и њиховим променљивим пречницима; б) дефинисаног првог правца кривих у равни који представљају пречнике сфера; в) пронађених тачака на задатим

кружницама и конструкцијом коначних модула са равним страницама преко дискретних нормала.....	112
Слика 3-19. а) Конструкција дискретне верзије Монжове површи алгоритмом базираним на једнакој дужини страница мреже у равни планарне криве (C_1) б) Приказан детаљ процеса конструкције панела на основу кога је конструисан алгоритам за генерисану мрежу.....	115
Слика 3-20. а) Конструкција офсета дискретне верзије Монжове површи за решење 1а са назначеном профилном C_1 и просторном кривом C_2 ; б) Приказан детаљ процеса конструкције офсета са константном дистанцом између два слоја панела тзв. “face offset”	116
Слика 3-21. Шема редоследа операција приликом конструкције кружне мреже и њене трансформације у коничну.....	116
Слика 3-22. а) Призак конструкције мреже по принципу Монжове површи коришћењем кружне мреже; б) Дефинисање детаља конструкције једног панела помоћу кружнице.....	117
Слика 3-23. Приказ шеме конструкције дискретних нормала кружне мреже; дискретне нормале (љубичасте) су дефинисане у првом профилном раму (црвен) да би се принципом полигона у равни (зелено) добила нормала наредног профилног рама за сваку тачку припадајућег рама	118
Слика 3-24. а) Коригована Гаусова слика кружне мреже са приказом првог реда полигона, његовим коригованим (црвене) нормалама N^* ; б) Издвојен детаљ корекције дискретне нормале у трећој тачки полигона тако да она и даље припада профилној равни P_2 тј. пресечном кругу сфере и те равни C_2	119
Слика 3-25. Приказ конструисане коничне мреже коришћењем нормале кружница и дискретне нормале у тачкама кружне мреже, које су истовремено нормале полигона добијене коничне мреже.....	120
Слика 3-26. а) Приказ решења 1ц генерисања дискретне Монжове површи коришћењем паралелних полилинија задате криве C_2 ; б) Детаљ конструкције паралелних сегмената полилиније, где су сви сегменти између две профилне равни P_1 и P_2 паралелни	121

- Слика 3-27. Пример затворене профилне криве C_1 где је примењено треће решење са паралелним полилинијама121
- Слика 3-28. а) Приказ трећег решења генерисања офсета дискретне Монжове површи M коришћењем паралелних полилинија задате криве C_2 ; б) Детаљ офсета паралелних сегмената полилиније 1-2 и почетних нормала N , где су сви сегменти између две профилне равни P_1 и P_2 паралелни како би се добила мрежа M^* 122
- Слика 3-29. а) Приказ процеса корекције профилних равни P , преко конструкције панела у равни суседним линијама L , у првој фази (црно) и након тога другој фази L^* (лила); б) Детаљ конструкције линија L у равни после прве фазе (црно) корекције са углом α између прве и последње линије и након друге фазе (лила) где је угао између суседних линија L^* константан α^* 124
- Слика 3-30. а) Позиционирање профилне криве C_1 у ортогоналне равни P криве C_2 као и развојна трака S сачињена повезивањем сегмената криве C_1 ; б) Приказ задате профилне криве у њеној равни, као и омогућеног улазног параметра ротације за угао β за различите варијанте Монжа125
- Слика 3-31. Приказ коначне Монжове мреже са планарним панелима и задатим кривима (пава и црвена), где се може добити различити дизајн применом угла β 125
- Слика 3-32. а) Приказ офсета дискретне Монжове мреже на примеру сложене криве “чвора” и профиле у равни; б) Пример офсета ивице за величину d у профилној равни где су обележене дистанце између одговарајућих сегмената полилиније; в) Пример офсета тачака са константном дистанцом d' између тачака сегмената126
- Слика 3-33. Шема могућих стратегија конструкције ПК мрежа у равнотежи преко Кристофелове дуалности, Коебе мрежа и пратећих трансформација128
- Слика 3-34. Процес конструкције нивоа I преко инверзије и инверзне стереографске пројекције: а) Квадратна мрежа у x , у правцу б) Инверзија кружница у равни в) Инверзна стереографска пројекција на сферу за конструисање Коебе мреже г) Примена Кристофелове дуалности на Коебе мрежу за добијање дискретне Енеперове минималне површи д) Друга варијанта

- инверзије са почетном координатом $(-1,0,0)$ у равни $\mathbb{H}$) Добијена Коебе мрежа е) Добијена Енеперова површ 129
- Слика 3-35. Процес конструкције нивоа I преко мапе типа Мебијус и инверзне стереографске пројекције: а) Квадратна мрежа у x, y правцу б) Мебијус пресликавање кружница у равни в) Инверзна стереографска пројекција на сферу за конструисање Коебе мреже г) Примена Кристофелове дуалности на Коебе мрежу за добијање дискретне минималне површи д) Друга варијанта инверзије са почетном параметром $a=-7$ $\mathbb{H}$) Добијена Коебе мрежа е) Добијена друга верзија површ 130
- Слика 3-36. Процес конструкције нивоа I преко ортогоналних паменова равни: а) Први случај праменова равни кроз северни пол; б) Конструисање Коебе мреже в) Примена Кристофелове дуалности на Коебе мрежу за добијање дискретне минималне површи г) Узет исечак за симетричан дизајн мреже д) Коебе мрежа за другу вредност домена $\mathbb{H}$) Добијена дискретна минимална површ е) Исечак мреже за другу варијанту симетричног дизајна 131
- Слика 3-37. Процес конструкције нивоа I преко ортогоналних паменова равни: а) Други случај праменова равни; б) Конструисање Коебе мреже в) Примена Кристофелове дуалности на Коебе мрежу за добијање дискретне Бонетове површи г) Узет исечак дизајн мреже д) Коебе мрежа за другу вредност домена $\mathbb{H}$) Добијена дискретна Бонетова површ е) Исечак мреже за другу варијанту 132
- Слика 3-38. а) Пример Бонетове минималне површи са б) детаљем конструктивне провере њених својстава 133
- Слика 3-39. Конструкција различитих варијанти изотермичких мрежа почевши од а) Енеперове површ б) примена Мебијусове трансформације са детаљем провере кружне и Коенигсове мреже, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена Мебијусове трансформације 134
- Слика 3-40. Конструкција различитих варијанти изотермичких мрежа почевши од а) дискретне минималне површи добијене функцијом типа Мебијус б) примена Мебијусове трансформације са детаљем провере кружне и

Коенигсове мреже, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена Мебијусове трансформације	135
Слика 3-41. Конструкција различитих варијанти изотермичких мрежа почевши од а) дискретне минималне површи добијене праменом равни случај 1 б) примена Мебијусове трансформације са детаљем провере кружне и Коенигсове мреже, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена Мебијусове трансформације	136
Слика 3-42. Конструкција различитих варијанти изотермичких мрежа почевши од а) дискретне Бонетове површи добијене праменом равни случај 2 б) примена Мебијусове трансформације са детаљем провере кружне и Коенигсове мреже, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена Мебијусове трансформације	137
Слика 3-43. Конструкција различитих варијанти Коенигсових мрежа нивоа III почевши од а) изотермичке мреже са Слика 3-39г, б) примена пројективне трансформације, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена пројективне трансформације	138
Слика 3-44. Конструкција различитих варијанти Коенигсових мрежа нивоа III почевши од а) дискретне минималне површи са Слика 3-40а, б) примена пројективне трансформације, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена пројективне трансформације	140
Слика 3-45. Конструкција различитих варијанти Коенигсових мрежа нивоа III почевши од а) изотермичке мреже са Слика 3-41г, б) примена пројективне трансформације, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена пројективне трансформације	140
Слика 3-46. Конструкција различитих варијанти Коенигсових мрежа нивоа III почевши од а) изотермичке мреже са Слика 3-42б, б) примена пројективне трансформације, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена пројективне трансформације	141
Слика 3-47. Приказ два типа генератрисе и директрисе за генерисање Монжове површи	142

- Слика 3-48. а) Први пример параметризованог дизајна са задатом почетном кривом и тестирањем четири позиције модула; б) Модификован дизајн помоћу полазне криве са обележеним модулима који не стају на дефинисану платформу за штампање (црвени)143
- Слика 3-49. Слика шеме радног пакета 3 који означава конструктивну анализу144
- Слика 3-50. Шема РПЗ.1 са преузетим информацијама из РП1 и РП2 и неопходним корацима145
- Слика 3-51. а) Модули љуске; б) Дефинисана ивица и део испуне модула са дебљином; в) ивица модула са испуном само на делу унутрашњости; г) Само ивица модула без испуне.....149
- Слика 3-52. Слика шеме радног пакета 4 где се обавља мултифункционална оптимизација150
- Слика 4-1. а) Приказ главних праваца кривина, б) главних праваца напона љуске156
- Слика 4-2. Решења кружне мреже са различитим комбинацијама параметара: а) кривина кривих -1, ротација од почетне криве -3, број подела 10; б) кривина кривих 0, ротација од почетне криве 0, број подела 10; в) кривина кривих +1, ротација од почетне криве +3, број подела 12; г) кривина кривих +1, ротација од почетне криве +3, број подела 8; испод сваког примера је дефинисана величина платформе за штампу са црвено означеним модулима који не стају на платформу и повезаним са решењима делова латица157
- Слика 4-3. Приказ варијације форме љуске променом различитих улазних параметара: а) промена угла кривих у њиховим равнима -3 до +3; б) промена кривине полазних кривих -1 на +1158
- Слика 4-4. График који приказује резултате оба одговора за максимални нормални напон (кN) и оператор облика (m) за 5 различитих комбинација тежина одговора као резултат методе оптимизације БВ161
- Слика 4-5. Модели свих 5 понуђених решења са суперпонованим почетним обликом као референцом (сива љуска) где боје представљају референтно решење одговора у графикону и табели; Појединачни елемент на врху слике

представља дискретни елемент са означеним свим страницама (a, b, c, d) и угловима (α , β , γ , δ)	161
Слика 4-6. Коначан дискретни облик конструкције (сива) са одсеченим деловима (светло сива).....	162
Слика 4-7. а) Почетна бетонска модуларна конструкција љуске; б) Завршна бетонска модуларна конструкција љуске (лево) детаљи у деловима модула (десно)	162
Слика 4-8. а) Искоришћење попречног пресека ивице и испуне у процентима код коначног, б) почетног модела	164
Слика 4-9. Планарност модула почетне љуске	165
Слика 4-10. а) Поступак штампања са најмањим углом (45°) завршне конструкције и б) почетне конструкције (25°) са различитим положајима млазнице и глетерице.....	166
Слика 4-11. а) Геометријска торзија почетне љуске, б) коначне љуске.....	166
Слика 4-12. Рендер друге верзије љуске са делимично стакленом испуном за осветљење, мањом тежину и употребом бетона (рендер Мартин Ајхенауер)	167
Слика 4-13. а) Анализа полазног дизајна љуске слободне форме са правцима главних кривина и б) напона	168
Слика 4-14. Одређени правци шест задатих кривих за конструкцију кружне мреже...	169
Слика 4-15. Генерисање кружне мреже равних четвороуглова помоћу две полазне криве једног сегмента љуске слободне форме са детаљем који демонстрира чвор без геомеријске торзије	170
Слика 4-16. Приказ два решења из процеса оптимизације Галапагоса са улазним параметром форме	171
Слика 4-17. Приказ оптерећења љуске примењена током прорачуна.....	172
Слика 4-18. Приказ искоришћености попречног пресека елемената ивице и испуне љуске у перспективи и основи са мерном скалом	174
Слика 4-19. Коначна модуларна љуска са четири истакнута типа модула	175

Слика 4-20. Шема два система ортогоналних Аполонијевих кружница конструисаних са инверзијом са центром у две граничне тачке А и Б	177
Слика 4-21. Дизајн кругова у основи са обележеним почетним параметрима у оба х,у правца и маркираном почетном основом	178
Слика 4-22. Формирање 3Д модела мрежног система преко параметризације у 2Д моделу, висине централне тачке и израчунатих параметара на главним луковима преко датог једног система (плавих)	178
Слика 4-23. Приказ различитих могућих архитектонских решења мењањем пропорција између глобалних улазних параметара (распон у оба правца и максимална висина)	180
Слика 4-24. Приказ четири различита решења љуски са карактеристикама модула. Различите нијансе боја приказују различите пропорције модула.....	181
Слика 4-25. Оптерећења узета у обзир током прорачуна модуларне љуске.....	183
Слика 4-26. Коначна модуларизација љуске са спецификацијом главних геометријских параметара мадула за префабрикацију	184
Слика 4-27. а) Деформације са дебљинама унутрашње зоне модула; б) максимални главни напони в) Искоришћеност попречног пресека модула г) фон Мисов напон.....	186
Слика 4-28. а) Прва фаза градње модуларне љуске постављањем шест редова лукова са обе стране; б) Друга фаза монтаже садржи четрнаест реда са обе стране отвора	187
Слика 4-29. Приказ модела коначне љуске са издвојена два типа модула и њиховим елементима	188
Слика 4-30. Поглед из унутрашњости љуске са стакленим панелима на један од улаза у правцу већег распона	188
Слика 5-1. Шема комбинације осталих развијених метода и алгоритама са Мебијусовом и Пројективном трансформацијом, где се формирају дефинисани нивои мрежа у зависности од геометријских критеријума	196
Слика 5-2. а) Пример сложеног дизајна ПК кружне мреже добијеног АКМ са основом; б) Имплементација МТ како би се задржао ниво II.....	197

Списак табела

Табела 4-1. Опис главних карактеристика задате бетонске љуске прве студије случаја са примењеним методама геометријске стратегије и алгоритма модуларизације, као и прорачуна.....	155
Табела 4-2. Пример прва 4 теста са 5 улазних промењивих и два израчуната одговора за РСМ оптимизацију.....	159
Табела 4-3. Резултати 5 најбоље показаних комбинација тежине одговора са предложеним улазним промењивама и израчунатим одговорима.....	160
Табела 4-4. Геометријски параметри за израду модула за свих 5 могућих решења у зависности од различитих тежина одговора	161
Табела 4-5. Резултати конструктивних и геометријских својстава почетне и коначне конструкције.....	163
Табела 4-6. Опис главних карактеристика задате бетонске љуске друге студије случаја са примењеним методама геометријске стратегије и алгоритма модуларизације, као и прорачуна.....	167
Табела 4-7. Геометријска и конструктивна својства обе варијанте љуски	172
Табела 4-8. Геометријска и конструктивна својства коначног решења	174
Табела 4-9. Опис главних карактеристика задате бетонске љуске треће студије случаја са примењеним методама геометријске стратегије и алгоритма модуларизације, као и прорачуна.....	176
Табела 4-10. Геометријске карактеристике скупа модула који припадају различитим решењима љуски.....	182
Табела 4-11. Главне геометријске и конструктивне карактеристике модула и коначне љуске за префабрикацију	187

1 УВОД

Бетонске љуске представљају један од значајнијих конструктивних система у архитектури и грађевинарству, јер поседују карактеристике које су од велике важности за обе области. Захваљујући својој закривљеној геометрији и армираном бетону могу савладати велике распоне са веома мало материјала, због чега се убрајају у лаке и, самим тим, ефикасне конструктивне системе. Као такви, користе се у изградњи објеката многих намена као што су: стадиони, изложбене и производне хале, спортске дворане, музеји, аеродроми и др. Исто тако, тродимензионални геометријски спектар омогућава, уз поједина конструктивна ограничења, посебан архитектонски израз.

Међутим, многе карактеристике традиционалне изградње бетонских љуски се косе са савременим тенденцијама у грађевинској индустрији, због чега су оне све мање у фокусу пројектаната. Наиме, иако материјал као што је бетон омогућава обликовање у било коју форму ливењем на лицу места, изградња оплате која је за то потребна захтева значајна финансијска средства и остаје у виду отпада и не може се поново употребити (G. Tang & Pedreschi, 2020). Ова карактеристика има веома лош утицај на животну средину. Исто тако, за обликовање оплате у пројектовану геометрију постоји веома захтеван и дуг процес изградње њене потконструкције у виду адекватних привремених система потпоре и подупирача. Они су потребни како би се осигурало да конструкција задржи свој облик, док не добије способност носивости након очвршћавања бетона. Сложеност овог процеса и захтевна геометрија љуске представљају проблеме у прецизности и брзини градње као последица захтевног мануелног рада.

Исто тако, традиционална градња бетонских љуски подразумева уграђивање бетона и постављање арматуре. Обликовање и консолидација бетона у конструкцијама љуске може представљати велики изазов. Закривљене површи отежавају постизање доследног постављања бетона и збијања, што може довести до неправилности, ваздушних џепова или шупљина које угрожавају интегритет структуре. Самим тим, постизање прецизних геометријских толеранција конструкције у бетонским љускама може бити захтевно. Мала одступања или грешке током изградње могу се акумулирати и довести до значајних грешака у геометрији, утичући на укупан облик, поравнање и стабилност конструкције. Поред тога, начин постављања арматуре, њено прилагођавање закривљеној геометрији, затим пројектовање и извођење планова армирања доприносе вероватноћи да дође до великих одступања од пројектоване форме. Овај процес, такође, захтева посебно едуковану радну снагу.

Уколико се превазиђу сви изазови током процеса изградње, у периоду експлоатације, љуске су посебно изложене утицајима спољашње средине и могу захтевати редовно одржавање и поправке. Хидроизолација, поправка пукотина и површински премази су неопходни за очување издржљивости и дуговечности бетонских љуски. Из тог разлога, бетонске љуске представљају конструкције са великим потенцијалом за развој и имплементацију.

1.1 Мотив за истраживање

Након свих сагледаних неопходних фаза изградње може се закључити да изградња бетонских двоструко закривљених љуски укључује веће трошкове у поређењу са изградњом конвенционалних бетонских конструкција. Прилагођена оплата, специјализована радна снага и прецизни захтеви конструкције доприносе повећању трошкова.

Ипак, на основу својих својстава и сталног развоја технологије, бетон је један од најчешће коришћених материјала у грађевинској индустрији (Huang et al., 2020). На основу анализе тржишта (Sheng & Khamidi, 2018) и тренутних демографских и економских кретања, долази се до закључка да је потребно развити процесе који подразумевају јефтинију, брзу, локацијски независну и флексибилно прилагодљиву изградњу стамбених и индустријских објеката (Welpе & Grundke, 2017).

За решавање ових проблема и побољшање ефикасности целог процеса у другим областима као што су машинство, ауто и авио индустрија, уведена је *аутоматизација процеса и префабрикација елемената*. Кључна карактеристика овог приступа је избор процеса *префабрикације* и начин *модуларизације* који омогућавају напредак на свим поменутих пољима: *прецизност, већу контролу процеса, брзину, ефикасност у количини уложеног времена и средстава*.

По сличном моделу долази до помака и у грађевинском сектору где би аутоматизација требало да обухвата све процесе од пројектовања до изградње објекта, а префабрикација елемената повећала контролу и брзину изградње. Традиционалан начин префабрикације је већ утврђен у грађевинском сектору, међутим, једна од његових мана у конструктивним системима те врсте је типологија префабрикованих елемената која је захтевала велики степен репетитивности. Стога, процес префабрикације није био могућ код објеката који имају јединствену форму и велики број различитих елемената.

Међутим, након успешног развоја технологије производње, машина и материјала, омогућени су алати са великим степеном аутоматизације и могућностима за префабрикацију *индивидуалних конструктивних елемената* који, склопљени у целину, чине један конструктивни систем са јединственом формом (Mark et al., 2021a). Овако развијен систем даје могућност за развој и истраживање форми љуски чији се модули могу префабриковати новим технологијама.

Како би се спровео процес префабрикације, потребно је увести линијску синхронизовану производњу индивидуалних елемената. Овакав процес подразумева дефинисање мањих модула од којих је могуће „саставити” целу бетонску љуску. Ова процедура подсећа на спајање слагалица, што је аналогно уклапању јединствених модула бетонске љуске и имплицира могућност да сваки елемент буде другачији и уклапа се у дефинисан домен процеса производње о коме ће касније бити више речи. Дефинисан домен произилази из услова префабрикације и изабране технологије. Ти услови могу бити: *максимална величина модула, његова планарност и облик*. Они представљају главне критеријуме процеса дизајна модуларних љуски која је главна тема дисертације.

1.2 Предмет и проблем истраживања

У овом раду се посматра сложена проблематика слободних форми (*енгл. free-form*) што значи да она може бити слободно моделована, где је, пре свега, важно задржати карактеристику двоструко закривљене геометрије. Како говоримо о слободним и двоструко закривљеним формама као веома сложеним геометријама, потребан је посебан приступ методологији дизајна за модуларне конструкције љуски прилагођен изабраној технологији префабрикације. Управо овај проблем представља главни предмет овог рада. Међутим, да би се створила адекватна методологија модуларног дизајна која интегрише савремене технологије, потребно је установити нови приступ дизајну.

Први методолошки кораци ка тој промени су начињени у процесу од стране истраживача у области који су формирали приступ под називом *префабриковано-оријентисани дизајн* (Yuan et al., 2018). Он означава метод пројектовања конструкције где је у фокусу омогућавање примене дефинисане технологије префабрикације елемента. Овај процес се дешава на нивоу целог производа (у нашем случају објекта/конструкције) као и јединичног префабрикованог елемента, модула. Модул изабране конструкције је у функцији оба параметра префабрикације и монтаже. Када су у питању конструкције љуски слободне форме, један од најзахтевнијих и најважнијих процеса је како доћи до префабрикованог елемента – *модула*, где је процесу дизајна модуларних љуски посвећена велика пажња у истраживању.

У овој области преглед литературе открива следеће актуелне проблеме:

1. Недостатак интерактивних алата за пројектовање различитих класа површи и мрежа;
2. Ограничена разноврсност форми мрежних љуски за пројектовање при примени пре-рационализације;
3. Проблеми са контролом локалне геометрије модула за префабрикацију при примени пост-рационализације, и
4. Недостатак конструктивне евалуације модуларних бетонских љуски пројектованих помоћу дефинисаних класа површи.

На основу ових проблема дефинисани су циљ и хипотеза у наставку.

1.3 Циљ и хипотезе истраживања

Базирано на поменутиим проблемима у области префабриковано-оријентисаног дизајна бетонских љуски, дефинисан је следећи циљ: *Интеграција оригиналних метода дизајна и конструктивна оптимизација модуларне бетонске љуске за процес префабрикације, омогућавањем контроле локалне геометрије модула и пројектантима шири и слободнији приступ дизајну*. Циљ је развој различитих стратегија које могу имати два различита фокуса; дефинисан почетни дизајн (*хибридни приступ*) или недефинисан почетни дизајн (*приступ пре-рационализације*) како би биле прилагођене различитим пројектним циљевима. Такође, у свакој од њих је потребно уврстити утицај статичких критеријума конструкције, који не подразумева једнолично стање напона (само затезање/само притисак) како би се проширио спектар дизајна двоструко закривљених површи. Синтеза свих ових процеса би требало да буде формулисана у облику методолошке стратегије (*енгл. workflow-a*) са јасно дефинисаним корацима и међусобним односима. Сви приступи би требало да буду формирани у виду дигиталног алата са циљем тестирања на различитим студијама случаја. На основу постављеног циља дефинисана је следећа тврдња коју би требало доказати.

Хипотеза гласи: „Интеграција напредних геометријских метода и префабриковано-оријентисаних стратегија пројектовања коришћењем технологије префабрикације бетона, доводи до значајних побољшања у конструктивним параметрима и оптимизацији материјала бетонске љуске.”

Како би се резултати могли евалуирати, биће посматрани следећи конструктивни параметри: максималан напон (искоришћеност попречног пресека), максимална деформација и количина бетона у љуски (маса). Успешност геометријских метода се формулише, још, и испуњењем услова локалне геометрије модула која мора да задовољи услове префабрикације.

Ова хипотеза претпоставља да је развојем иновативних геометријских метода у овом раду, као што су: *Алгоритам кружне мреже (АКМ), алгоритми за дискретне верзије класа површи Дупинових циклуда, Каналних, Монжове површи и Кoenигсових мрежа*, у оквиру методологије префабриковано-оријентисаног дизајна двоструко закривљених површи, могуће постићи знатно побољшање конструктивних перформанси префабрикованих бетонских љуски и поједноставити процес изградње.

Предложено истраживање има дефинисане следеће потциљеве:

1. Формирање нових геометријских решења кроз интерактивне алате за дизајн разноврсних типова модуларних љуски, чији модули задовољавају усвојене критеријуме префабрикације.
2. Проширење поља дизајна расположивих форми за пројектовање конструкција, док је у исто време контрола над локалном геометријом индивидуалних модула постигнута (услов скалабилности и адаптабилности).
3. Анализа утицаја стратегија префабриковано-оријентисаног дизајна, укључујући нови *хибридни приступ* и коришћења *пре-рационализације* за побољшање ефикасности конструкција бетонских љуски.
4. Процена конструктивне ефикасности и оптимизација материјала остварена применом развијених оригиналних геометријских метода у пројектовању модуларних бетонских љуски.
5. Кроз свеобухватне емпиријске студије, укључујући студије случаја, симулације и компаративне анализе, ово истраживање настоји да пружи емпиријске доказе који подржавају хипотезу и доприносе унапређењу знања у областима рачунарског дизајна и аутоматизације процеса од дизајна до префабрикације конструкција бетонских љуски.
6. Развијање свести и приближавање пројектанта интердисциплинарном начину размишљања, пре свега у области пре-рационализације дизајна.
7. Развијени алати би требало да помогну у увиђању бенефита и омогуће интуитивну имплементацију префабриковано-оријентисаног дизајна.

Како би се ови потциљеви испунили, потребно је изабрати адекватне методе истраживања.

1.4 Методе истраживања

Пре свега, како се ради о дизајну слободних површи, извршена је њихова *анализа* из области дискретне диференцијалне геометрије. Након тога, неопходно је упознати се са условима префабрикације који дефинишу критеријуме модула. За дате услове врши се *синтеза* доступних геометријских метода *моделовања* како би се креирали различити алгоритми за генерисање модуларних површи. Поред *методе моделовања* конструктивном геометријом, примењују се и *аналитичке методе моделовања*, где су поједине мреже и операције експлицитно параметризоване, једначинама. Коришћена је

и *пре-рационализација* дизајна у случају када дизајн љуске није унапред дефинисан. Друга развијена метода је *хибридна*, где је дизајн љуске унапред дефинисана форма. За прорачун конструкција љуски је коришћена *нумеричка метода* у оквиру *методе коначних елемената (МКЕ)*. *Мултикритеријумска анализа* улазних геометријских параметара је извршена како би се пронашло оптимално решење за конструктиван одговор љуске са сложеним напрезањем. *Експерименталном* методом су испитане три студије случаја како би се верификовали предвиђени резултати.

1.5 Структура докторске дисертације

Докторска дисертација се састоји из укупно шест поглавља. У наставку првог се упознајемо са главним конструктивним својствима бетонских љуски, њиховим проблемима и изазовима као и савременим решењима из различитих области који раде на побољшању процеса одрживе градње бетонских љуски. Затим је дат преглед традиционалних система префабрикације са примерима објеката као и осврт на савремене технологије префабрикације. Највише је пажње посвећено технологији префабрикације за коју је рађен дизајн бетонских љуски која је део АЦДЦ пројекта. На крају првог поглавља дефинисан је појам модула за префабрикацију у оквиру бетонских љуски слободне форме. Дефиниција модула директно одређује локалне критеријуме сегментације љуски и, самим тим, адекватне геометријске методе.

У првом делу другог поглавља се дефинишу познате методологије пројектовања и сегментације савремених слободних форми модуларних љуски као и њихова подела на групе. Дат је преглед досадашњих истраживања за сваку од три групе. У другом делу другог поглавља је посебна пажња посвећена теорији из дискретне диференцијалне геометрије мрежа са различитим типовима офсета¹. Ова теорија је од велике важности обзиром на то да се развој доприноса у овом раду базира на њима.

Треће поглавље се састоји од четири радна пакета (РП) који заједно чине развијену стратегију префабриковано-оријентисаног дизајна. Први радни пакет је већ обрађен у првом поглављу и тиче се *Анализа система префабрикације (РП1)*. Остали су: *Геометријски приступ дизајну (РП2)*, *Конструктивна анализа (РП3)* и *Мултифункционална оптимизација (РП4)*. Посебна пажња је посвећена РП2, у коме се

¹ Офсетовање мреже значи задавање дебљине мреже у правцима њених дискретних нормала.

налазе сви развијени алгоритми у области *пре-рационализације* и *хибридног приступа* дизајну модуларних бетонских љуски слободне форме.

Четврто поглавље приказује три студије случаја где је извршена евалуација и приказ различитих развијених алгоритама и стратегија дизајна. На њима је показана примена четири радна пакета преко две могуће стратегије. Прве две представљају примену стратегије *хибридног приступа*, док је трећа по принципу *пре-рационализације*.

Пето поглавље представља закључак и дискусију где се: врши резиме резултата, говори о њиховим ограничењима, будућим правцима истраживања, теоријском и практичном значају доприноса, врши дискусија и даје коначан закључак.

Шесто поглавље садржи преглед коришћене литературе.

1.6 Бетонске љуске

Како је у уводу поменута ефикасност и значај бетонских љуски у грађевинској индустрији и архитектури, ово поглавље ближе одређује њихова својства које ове тврдње оправдавају. Најпре ће бити говора о њиховом конструктивном систему како би се дефинисала главна својства из којих следи ефикасност.

Последњи део овог поглавља ближе одређује све недостатке традиционалног типа изградње које су наведене у претходном поглављу, како би се разумели кораци и смернице које су потребне за њихово унапређење.

1.6.1 Конструктивни системи љуски

Љуске представљају просторно-површински конструктивни систем, где су две димензије у правцу њиховог распона (у основи) пропорционално веће од треће димензије, дебљине. Од плоча се разликују својом закривљеном геометријом која омогућава премошћавање великог распона без додатних конструктивних елемената између ослонаца као и релативно малом дебљином. Ове карактеристике их чине једним од најефективнијих конструктивних система у грађевинарству (Farshad, 1992): *ефикасност у одговору при оптерећењу, висок степен крутости и структуралног интегритета, велика носивост у односу на тежину, мала дебљина у односу на остале две димензије у правцу распона, велики распони.*

Прва уочљива карактеристика коју можемо да анализирамо је њихова геометријска закривљеност која је дефинисана преко величине Гаусове кривине (1-1).

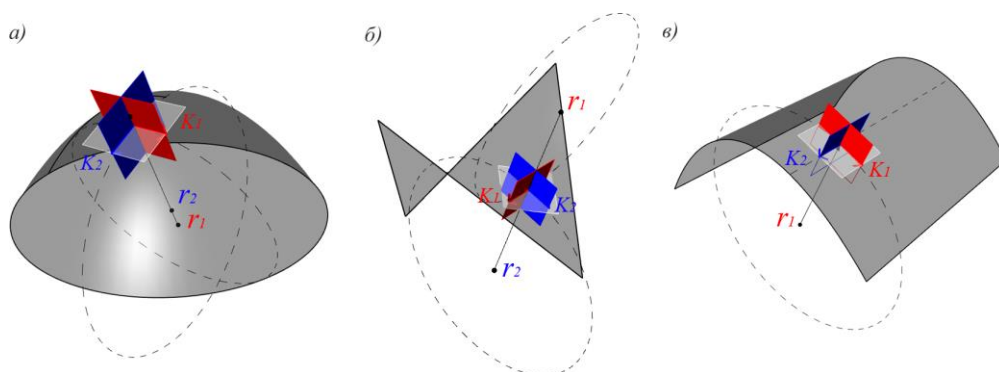
Она је одређена у правцима главних кривина k_1 и k_2 (1-2). Ове величине су одређене следећим једначинама:

$$K = k_1 k_2 \quad (1-1)$$

$$k_1 = \frac{1}{r_1} ; \quad k_2 = \frac{1}{r_2} \quad (1-2)$$

У зависности од знака добијене Гаусове кривине, љуске могу бити:

- Позитивно закривљене/ Елиптичне/ Синкластичне (неразвојне) $K > 0$ (Слика 1-1а)
- Негативно закривљене/ Хиперболичне/ Антикластичне (неразвојне) $K < 0$ (Слика 1-1б)
- Једноструко закривљене/ Параболичне (правоизводне/ развојне правоизводне) $K = 0$ (Слика 1-1в)



Слика 1-1. Приказ поделе љуски по геометријској закривљености Гаусове кривине: а) Позитивно; б) Негативно; в) Једноструко закривљене геометрије

У зависности од начина комбинације и пројектовања различитих геометријских површи и њихових међусобних комбинација, као део танкозидно просторно-површинских система љуски², оне се могу поделити на:

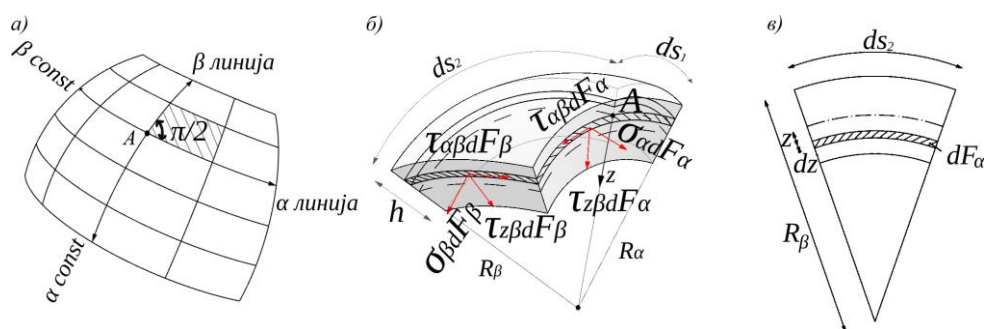
- Танкозидне љуске према форми: *глатке, наборане и таласасте*
- Танкозидне љуске према кривини: *једносмерне и двосмерне кривине* (Radivojević & Kostić, 2011)

² Танкозидни системи су они код којих је једна димензија, у овом случају дебљина знатно мања (можемо рећи занемарљива) у односу на друге две ширину и дужину (распоне) љуске.

У овом раду ће бити фокус на *глатким двосмерно закривљеним љускама*. То су љуске где је Гаусова кривина у свакој тачки различита од нуле и где се прати приближно глатка геометрија без набора или таласа у форми. Такве су прва два приказана примера (Слика 1-1а и б).

Важно је поменути типове оптерећења које би требало узети у обзир приликом прорачуна просторно-површинских система љуски. Доминантна су стална оптерећења од сопствене тежине саме конструкције и њених завршних слојева и изолација, затим корисна од снега и ветра, која могу бити и асиметрична. Могу се јавити и изузетна оптерећења од: температурних промена, слегања темеља, оптерећења током процеса изградње, затим и динамичка од сеизмике и удара.

Дефинисано оптерећење у љусци директно утиче на одговор љуске, па самим тим и пресечним силама у њој које се могу јавити. На слици (Слика 1-2а) је приказан део љуске у виду површи сфере са поделом на главне правце кривина α и β преко које се могу дефинисати све тачке на површи.

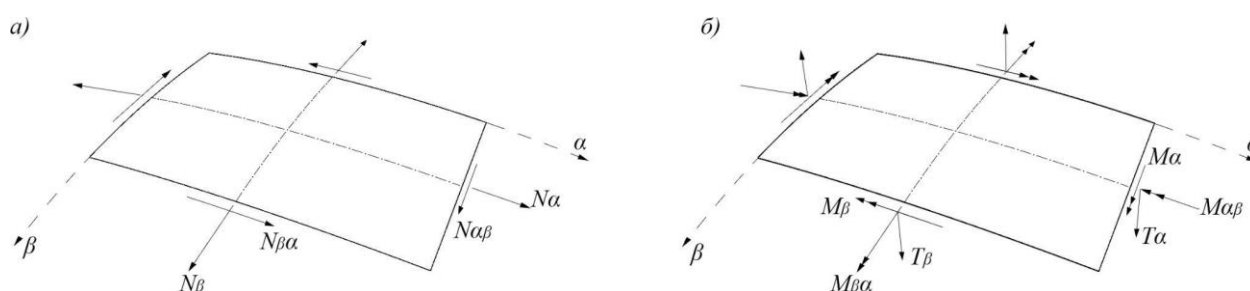


Слика 1-2. а) Подела површи на два ортогонална главна правца кривина α , β са пресечном тачком А; б) Диференцијално мали елемент љуске издвојен на делу а) са напонским стањима у пресеку, назначеном средњом линијом и посматраним делом пресека; в) Попречни део пресека са одвојеном средњом линијом и посматраним подужним пресеком

Пресечна тачка А је изабрана за лоцирање диференцијално малог елемента љуске (Слика 1-2б) где су дефинисане све могуће пресечне силе за два могућа пресека α -const и β -const: нормална сила (N_{α} , N_{β}), момент савијања (M_{α} , M_{β}), смичуће силе ($N_{\alpha\beta}$, $N_{\beta\alpha}$), торзиони моменти ($M_{\alpha\beta}$, $M_{\beta\alpha}$), трансверзалне силе (T_{α} , T_{β}). Оне су све одређене преко нормалних (σ_{α} , σ_{β}) и компонента смичућих напона у попречним пресецима ($\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha z}$, $\tau_{\beta\alpha}$, $\tau_{\beta z}$) за део пресека приказан на слици (Слика 1-2в). Испрекидана линија на слици (Слика 1-2б и Слика 1-2в) представља средњу површ љуске, коју чине тачке које су једнако удаљене од горње и доње површи попречног пресека љуске и где се приказане силе и рачунају (Најдин, 1984).

Основне претпоставке за прорачун просторно-површинских система љуски је да је трећа димензија занемарљиве дебљине у односу на друге две, подразумева изотропност материјала као и да су померања тачака услед деформације мала у односу на дебљину љуске. Претпоставке које прате *танке љуске* о којима је овде реч су следеће: *vlakna upravna na sredњу површ љуске остају права и након деформације без промене своје дужине; и нормални напони у површима паралелним средњој површи занемарају се у поређењу са осталим напонима* (Hajdin, 1984).

Како би се поједноставио процес анализе армирано бетонских љуски, увођењем додатних претпоставки су се развиле различите теорије прорачуна за ове системе. Тако постаји **мембранска теорија** прорачуна тзв. безмоментно напрезање љуске. Само име наговештава да се у овом случају све силе занемарују осим нормалних сила у равни љуске (Слика 1-3а). Остале силе момената савијања, торзије и трансферзалних (Слика 1-3б) савршена мембрана не прихвата ако нема отпорност на савијање. Она, такође, не може да прими силе притиска како би дошло до избочавања мембране. У том случају се примењују љуске са малом дебљином, при чијем напрезању би се јавиле само мембранске силе, као нпр. код шаторастих конструкција.

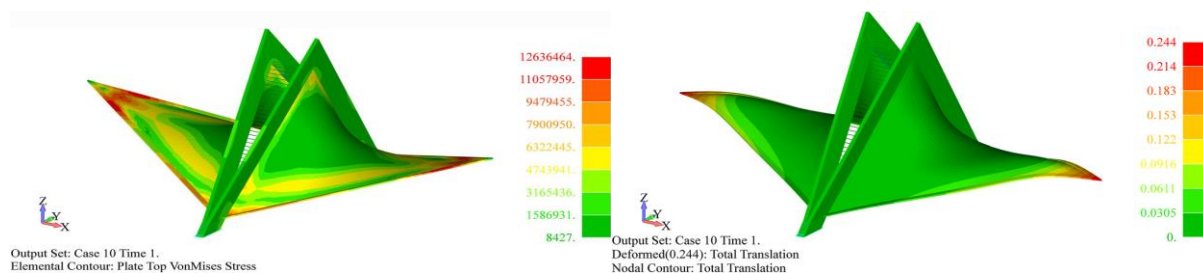


Слика 1-3. а) Приказ позитивног смера дејства сила у средњој равни љуске; б) Приказ момената савијања, торзије и трансферзалних сила

Како би се ова теорија прорачуна могла користити, морају да важе следеће претпоставке: *дебљина љуске мора бити мала, тако да је поменут однос h/r у поређењу са јединицом занемарљив, средња површ љуске мора бити глатка, оптерећење љуске мора бити благо променљиво и без скокова, гранични услови ослањања морају бити у правцу тангенти на површ (правац резултанте и ослонаца)*. Примена ове методе се налази у многим уџбеницима на примерима класичних геометријских тела као што су: део сфере, цилиндри, конуси, једнограни хиперболоид, хиперболички параболоид (Farnsworth, 1999; Farshad, 1992; Hajdin, 1984; Zdravković, 2016).

У великом броју случајева се љуска на ослонцима или са дијафрагмама везује крутим везама, па самим тим долази до појаве момената савијања и до кршења претходно поменутих претпоставки мембранске теорије. У том случају могу се користити друге теорије попут *методе сила* (енгл. *the force method*) или *метода померања* (енгл. *the displacement method*). Са друге стране, постоје и методе апроксимације (Farnsworth, 1999) које нису базиране на решавању једначина равнотеже, већ на нумерчким методама прорачуна.

До сада је било говора о класичним методама прорачуна, међутим, у овом раду као и у савременој пракси користе нумричке методе за прорачун конструкција љуски, углавном на бази методе коначних елемената (МКЕ) (Turner et al., 1956). С обзиром на то да се ради о сложеној геометрији, уводе се адекватни случајеви оптерећења и гранични услови након кога програм спроводи прорачун. Добијени резултати су углавном приказани графички на самој конструкцији у виду интезитета пресечних сила, деформација, правца главних напона дуж површи љуске и тражене екстремне вредности (Слика 1-4).



Слика 1-4. Графички приказ резултата анализе армиранобетонске љуске МКЕ помоћу софтверског пакета FEMAP са NX Nastran са означеним вредностима дистрибуције Фон Мисовог напона у МПа (лево) и вредностима деформација у метрима (десно) (Tošić et al., 2019)

Иако врло ефикасни конструктивни системи, конструкције бетонских љуски прате проблеми који су последица главних карактеристика традиционалног система изградње бетоном и закривљене геометрије љуски.

1.6.2 Проблеми и изазови конструкција бетонских љуски

Ово поглавље анализира проблеме и главне изазове код конструкција бетонских љуски. Разумевање помаже да схватимо на који начин они утичу на опадање учесталости изградње ових конструкција након прве половине 20. века. У том случају, требало би детаљније анализирати њихове главне карактеристике које су до сада поменуте: конструктивне и геометријске, као и оне које нису, начин изградње, одржавања и уочити њихове недостатке.

Најпре је важно да се осврнемо на процес традиционалне изградње ових конструкција. Оплата која је потребна за обликовање геометрије, као подлога за ливење бетона је проблематична из више разлога. Први, пре свега, је количина материјала која је употребљена током градње која се касније не може поново искористити, па самим тим спада у отпад. Ово негативно утиче на одрживост животне средине као великог проблема данашњице. Друга је велика цена радне снаге и материјала који су потребни за њену израду. Време је, такође, важан фактор, с обзиром на то да је потребан већи број радних сати како би се поставила скела и обликовала оплата у жељену геометрију. Осим претходних разлога и велики степен прецизности приликом израде оплате је потребан како би се остварила жељена геометрија од које директно зависи носивост конструкције. Слично важи и за процес постављања арматуре, где су прецизност, цена радне снаге и време главни утицајни фактори. Након тога, ливење бетона мора бити врло прецизно и то углавном са променљивом дебљином попречног пресека. Додатно време одузима последња фаза, сушење бетона. Уколико није постигнута предвиђена геометрија или се бетон није потпуно осушио, може доћи до колапса љуске приликом уклањања скеле.

Опадање потребе за конструкцијама бетонских љуски 60-их је објашњено као последица развоја покрета Баухауса који је обележио сасвим други естетски правац. Међутим, како је сам процес традиционалне изградње љуски сложен, јасно је да је форма често и сама по себи ограничавајући фактор за било које време. Ту не игра улогу само и количина оплате, њена геометрија и време рада, већ и конструктивне перформансе на које би требало мислити, као што је показано у претходим поглављима.

Уколико посматрамо конструкције љуски са аспекта физике зграда, оне нису биле на задовољајућем нивоу с обзиром на концепт великог простора који би требало загрејати и одржити температуру. Слојеви крова нису као на стандардним зградама и кућама, где се поставља термоизолација која заузима велику површину. Оваква пракса

је била логичан избор, како би се величина сталног оптерећења свела на минимум. Велики простор и закривљена форма крова представља проблем код процеса смештаја инсталација за функционисање једне зграде. Исто тако, код одређивања функције простора јављају се мртви углови који не могу бити искоришћени, јер су премали и неудобни за кретање људи код веома закривљених форми. Такође, потреба за инсолацијом је довела до пројектовања великих стаклених површина, што је доприносило неефикасности задржавања топлоте и, самим тим, већом енергијом потребном за грејање. Ово је последица немогућности интеграције стакла код монолитних бетонских љуски, како због компликација у прорачуну, тако и приликом извођења радова са веома сложеним детаљима. И поред свих наведених недостатака, бетонске љуске понекад могу бити повољније од других лаких конструкција ако узмемо у обзир заштиту од буке и капацитет складиштења топлоте (Cassinello et al., 2010). Неки од тих проблема решени су употребом стакла на фасади са бољим термичким карактеристикама, затим употребом мрежних љуски од челика, где су сви панели стаклени и посебним слојевитим панелима који су нови на тржишту, као и напредним системима грејања.

На основу поглавља о конструктивним особинама бетонских љуски јасно је да начин прорачуна ових конструкција није тривијалан и да је потребно сагледати сваки случај засебно. Као што је показано, геометрија је у директној зависности са статичким одговором конструкције и њеним мембранским понашањем. Јасно је да је на тај начин простор за дизајн форме ограничен, уколико је циљ њихова статичка ефективност и оптимална употреба материјала. У раду Касинелла (Cassinello et al., 2010) се помиње да је сам Кандела (Candela) сматрао да се конструкције љуски не исплате за распоне веће од 30м. Ова изјава се, наравно, мора узети у контексту данашњице, где је распон сигурно већи и зависи од употребљеног материјала, система и технологије израде љуски. Ипак се може закључити да је потребно радити на овим системима и даље како би били ефикаснији за веће распоне. Штавише, чињеница да не постоји утврђен кодекс (норматив) прорачуна отежава присуп инжењерима који су на том задатку. Ово има за последицу да су потребни стручњаци када су ове врсте конструкција у питању, са искуством које подразумева интердисциплинарно знање у областима геометрије, статике, естетике и архитектуре. То значи да је учесталост изградње ових објеката директно зависна од интересовања уске струке за њих.

Већ је поменут један значајан и веома познат негативан утицај грађевинске индустрије, изградње објеката од бетона на животну средину и, пре свега, емисију угљен-диоксида. Сектор зградарства и грађевинарства је одговоран за 39% емисије угљен-диоксида (CO₂) у 2018. години, од чега је 11% резултат производње грађевинских материјала и производа као што су челик, цемент и стакло. Повећање је условљено порастом површине потребне за становање по човеку и уз то већи број становника. Поред тога, обимни грађевински радови на градилишту стварају сталне саобраћајне колапсе, емисијом угљен-диоксида лоше утиче на животну средину. И поред смањења негативног утицаја на животну средину, дошло је до пораста потражње израде бетонских љуски (United Nations Environment Programme, 2019). Поред развоја савремених материјала, требало би градити брже, са мање отпада (углавном изазвано великом количином оплате потребне за бетон), са више контроле над процесом и већом прецизношћу изградње.

Током 1960-их и 1970-их у архитектури почиње да се примењује интердисциплинарни принцип пројектовања. Овај принцип дизајна обухвата анализу конструкције и форме истовремено, а уз примену компјутерске технологије постављени су темељи *рачунарског дизајна*.

Ова промена је донела значајне предности у архитектури. Дигитални дизајн омогућио је архитектама да побољшају структурну ефикасност коришћењем мање материјала, док истовремено омогућавају изградњу већих и амбициознијих конструкција. Други велики напредак био је у процесу формулације и размене података, поједностављивању токова рада на пројекту, смањењу захтева за радном снагом и повећању нивоа детаља у пројектовању и изградњи.

Истовремено, област структурне анализе се развијала, нудећи нове, ефикасне и брзе нумеричке методе као што је метода коначних елемената (МКЕ) 1960-их (Zienkiewicz et al., 2005) и технике проналажења форме (енгл. form-finding) (Adriaenssens et al., 2014). Ово је појачало апетите архитеката за сложеност у дизајну бетонских љуски, мотивишући их да истраже пуни потенцијал ове новооткривене рачунарске способности.

Исто тако, напредак у производњи и технологији материјала направио је револуцију у грађевинској индустрији, не само побољшавајући ефикасност, већ и промовишући одржива решења. Упркос овом напретку, дизајнирање нестандартних

морфологија и даље је изазов. Технике моделовања као што су неуниформне рационалне Б-сплине (енгл. Non-Uniform Rational B-Splines – NURBS) (Piegl, 1989) је омогућио потпуну слободу форме коју красе неки од најпознатијих објеката као што су Центар Хејдара Алијева – Заха Хадид (Zaha Hadid) (Слика 1-5 лево) и тржни центар Емпориа од стране бироа Вингардхс (Emporia / Wingårdh) (Слика 1-5 десно).



Слика 1-5. Центар Хејдара Алијева – Заха Хадид (лево) (Baan et al., 2013); тржни центар Емпориа – Вингардхс (десно)(Söderström, 2013)

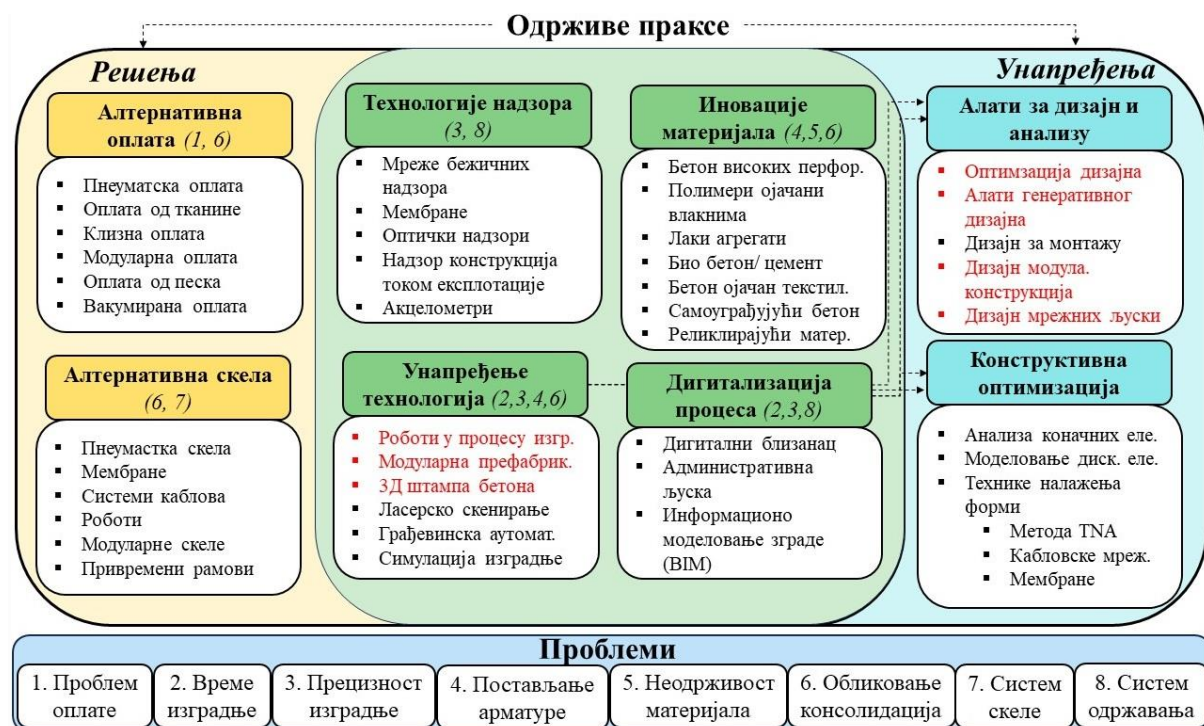
Иако је омогућено моделовање сложених облика, изградња ових конструкција подразумева огромну количину ресурса, јер њихов дизајн није у складу са могућностима доступне технологије. Као последица развијени су различити приступи дизајну и моделовању слободних површи са различитим фокусима на оптимизацију геометрије за процесе производње, као и конструктивних карактеристика конструкције.

Уколико анализирамо наведене проблеме, закључује се да ово решење потпуно мења утицај технологије на наведене негативне факторе: скеле, брзине градње, временаведеног на градилишту, количине радне снаге и степен прецизности. Модулараност, такође, подразумева употребу елемената различитог карактера, где се уводи могућност светлосних отвора, као и других слојева који би унапредили изолационе карактеристике зграде. Када је у питању ограничење у геометрији, оно узима други облик, где је циљ овог рада да то унапреди и понуди нова ефикасна решења за имплементацију ове технологије.

У наредном делу, решења за наведене проблеме су категоризована по различитим областима и циљевима у зависности од типа проблема који решавају.

1.7 Савремена решења за проблеме конструкција бетонских љуски

Након упознавања са проблемима, у овом поглављу се сагледавају истраживања и понуђена решења у области конструкција љуски, како би се одржало њихово постојање и градња. Напредак је постигнут на више поља у зависности од фокуса и области истраживања. Области се могу поделити на оне које директно решавају наведене проблеме, **решења**: *алтернативна оплата и скела*; затим она која следе из потребе за применом развијених система нових технологија у другим областима и омогућавају **унапређење** у неком сегменту бетонских љуски: *алати за дизајн и анализу, конструктивна оптимизација* и неке које се убрајају у обе групе: *иновација материјала, нове технологије надзора, унапређење технологија градње и дигитализација процеса*. (Слика 1-6). Циљ шеме је да прикаже начин развоја различитих области истраживања, са наглашеном корелацијом између понуђених решења за конкретан проблем, унапређења технологија или нових методологија градње и пројектовања. У пракси, како би се спровела идеја унапређења одрживости бетонских љуски, пројекти се баве истраживањем више области истовремено (*одрживе праксе*).



Слика 1-6. Шема приказа актуелних проблема у пољу бетонских љуски, различитих области решења и унапређења као и њихових међусобних односа са црвено маркираним темама које су део овог рада

Прва група истраживачких области је развијена као директан одговор на задати проблем оплате, неопходног изливања бетона и постављања арматуре као и скеле. Тако се у последњих пар деценија поједини пројекти баве *алтернативним системима оплате*. По истраживању Лиа постоје *традиционалне, флексибилне и рециклиране оплате* (W. Li et al., 2022) које нуде различита решења у зависности од циља. Ово укључује употребу флексибилних и прилагодљивих материјала за оплату, као што је оплата од тканине као привремених калупа за ливење бетона (Popescu et al., 2021). Са друге стране, за решење пнеуматске оплате користи се ваздушни притисак како би се она надула и створио облик жељене структуре љуске. Када се бетон излије и очврсне, притисак се ослобађа, а оплата се уклања (Kromoser & Huber, 2016). Клизна оплата је метода у којој се систем оплате постепено креће дуж конструкције током постављања бетона (Diaconu & Brindasu, 2015). Постоје истраживања где се користи оплата од песка код стандардних бетонских елемената (Kovaleva et al., 2022). На сличан начин је рађено истраживање на коришћењу вакумиране оплате (Huijben, 2016). Без икакве интервенције у дизајну и употреби одређених површи (нпр. минималних површи – мембрана, конструкција на надувавање (*енгл. Inflatable structures*) ови системи се не би могли употребити у пракси.

Истовремено се радило на истраживању *алтернативних система скела* које су у директној вези са претходним проблемом. Решења подразумевају модуларну префабрикацију бетонских љуски, како би се монтажни елементи могли додавати један по један јасно дефинисаним редоследом. Таква су предложена решења *скела са кабловима* за које су причвршћени модули како би се поставили на место у конструкцији (Deuss et al., 2014). Каблови обезбеђују неопходну подршку за оплату, истовремено омогућавајући флексибилност у прилагођавању облика љуске током изградње. Истраживачки пројекти на Универзитету у Штутгарту се баве пројектовањем модуларних љуски од дрвених елемената где се у процесу монтаже користе роботи (Shah et al., 2022). На сличан начин на Универзитету у Принстону је саграђена модуларна конструкција од стаклених блокова помоћу два робота, где је њихова улога и у привременој потпори конструкције у процесу монтаже (Beghini et al., 2020; Bruun et al., 2021). За примену ових метода је потребно *развити* методе које се тичу посебног статичког прорачуна, модуларизације, конструкције веза и префабрикације како би он био омогућен. У то се убрајају методе *унапређења* процеса (Слика 1-6).

Први међу њима је област *иновација нових материјала*, која је директан одговор на велики проблем лошег утицаја цемента на животну средину (Слика 1-6). Фокус на одрживости довео је до развоја бетонских мешавина које укључују рециклиране агрегате. Поред тога, употреба додатних цементних материјала, као што су летећи пепео или шљака, као делимичне замене за цемент, смањује емисију угљеника и побољшава одрживост бетона (Maier & Durham, 2012; Patel & Shah, 2013). Затим се радило на унапређењу конструкције и перформанси бетонских љуски. Ово укључује развој бетона високих перформанси (ХПЦ) (Patel & Shah, 2013), полимера ојачаних влакнима (ФРП) (Rajak et al., 2019) и лаких агрегата који нуде побољшану снагу, издржљивост и лакоћу конструкције.

Напредак у технологијама градње и аутоматизацији допринео је ефикаснијој и прецизнијој изградњи бетонских конструкција. Концепти као што су производња употребом робота, 3Д штампе (Ivaniuk, Friedrich Eichenauer, et al., 2022) су истражене како би се поједноставио процес изградње, добила већа контрола над процесом и смањили радно интензивни задаци. Процеси префабрикације и модуларне конструкције (Mark et al., 2021a), затим 3Д скенирање елемената у сврху побољшања прецизности производње и монтаже (Ivaniuk, Ivanova, et al., 2022), симулациони софтвери и виртуелна реалност (Zhao & Lucas, 2015) за процес градње на градилишту (Nikolic et al., 2009) су одговорни за већу контролу над процесом и предвиђање исхода, побољшање квалитета префабрикације, монтаже и повећања безбедности током процеса градње.

Дигитализација је, такође, нашла свој велики допринос у грађевинском сектору, са једне стране решавајући проблем контроле, прецизности, времена као и одржавања. Поред већ добро познатих програмских пакета за Информационо моделовање зграде (*енгл. Building Information Modeling – BIM*) (Azhar, 2011), индустрија 4.0 (Xu et al., 2018) је покрет који идеју развија даље са циљем конструкције тзв. *Дигиталног близанца* (*енгл. Digital twin*) (Gerhard et al., 2020) објекта и сваког елемента у њему како би се његов век могао пратити у реалном времену са свим подацима о актуелним променама. Актуелна су и истраживања софтверског пакета под називом Административна љуска (*енгл. Administrative Shell*) (Grangel-Gonzalez et al., 2016) који имају додатна својства услуга које подразумевају и сагледавање, предвиђање и оптимизацију утицаја планираних конструкција током њеног животног циклуса на животну средину (Wolf et al., 2021).

Последњој групи припадају праксе које су се развиле као потреба подршке нових напредних процеса који би требало да буду интегрисани као нови принципи одрживе градње. Тако су се у оквиру области рачунарског дизајна развили нови *алати за дигитално пројектовање и анализу* (Слика 1-6) са различитим циљевима. Ови алати омогућавају архитектама и инжењерима да креирају прецизне 3Д моделе, симулирају понашање конструкције и оптимизују параметре дизајна. У контексту конструкција љуски они се могу поделити у две групе: приступи фокусирани на *геометрију* и приступи фокусирани на *конструктивну анализу*.

У прву групу се убрајају алати који интегришу сазнања из области *геометрије* за креирање различитих алгоритама који се нуде као решење за одређени геометријски проблем у процесу пројектовања. Са развојем идеје префабрикације љуски у различитим геометријским облицима (*мрежне љуске, просторни системи, површински системи модула*), развила се потреба интеграције области дискретизације слободних површи базираних на методама из дискретне и диференцијалне геометрије у процес пројектовања.

Када су у питању нови алати са нагласком на конструктивне карактеристике љуски, они су базирани на развоју различитих алгоритама за прорачун и оптимизацију форме љуски ради побољшања њених статичких перформанси. Ту се убрајају већ поменуте технике налажења форме (енгл. *form-finding*): анализе мрежних љуски на притисак (енгл. *Truss Network Analysis – TNA*) (Block & Ochsendorf, 2007), кабловске мреже на затезање (енгл. *Force Density Method – FDM*) (Schek, 1974), динамичке релаксације (Collins & Cosgrove, 2019) и др.

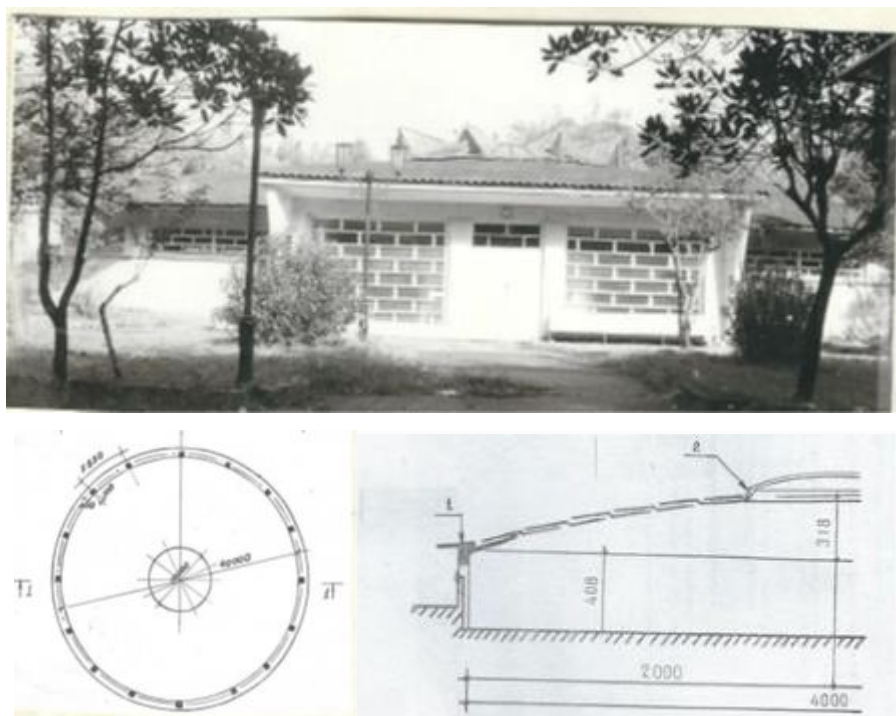
Као што је поменуто, различите области развоја су у међусобној вези и, самим тим, уколико се бавимо изучавањем једне од њих (нпр. дизајном) где се налази наш допринос, потребно је дефинисати услове осталих повезаних области у контексту (тип префабрикације, технологија материјала и др.) како би резултати истраживања били применљиви за задати концепт одрживе праксе.

Но, пре него што се осврнемо на методе дизајна, у следећем поглављу неопходно је рећи нешто о префабрикацији бетонских љуски са аспекта њиховог развоја, технологије и савремених решења.

1.8 Префабрикација бетонских љуски

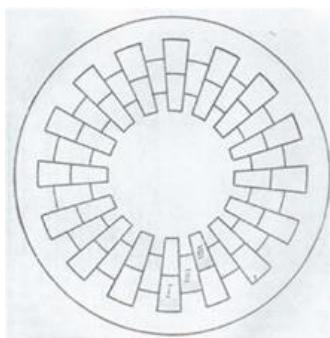
У овом поглављу говори се о систему префабрикације бетонских љуски као решење одрживе и економичније градње. Како ова идеја није новијег датума, најпре је представљена анализа изведених објеката. Циљ је стећи увид у њихову геометрију, карактеристике технологије, модуле као и извући препоруке за даље пројектовање ових система. Принцип љуске од префабрикованих елемената се базира на одређивању правца поделе (облика модула) и две зоне, испуне, која је тања, и ребра, које је дебље. Он зависи од начина преношења сила као и форме љуске. У пракси постоје два принципа: константна дебљина плоче са промењивим попречним пресеком ребара од $L/100$ - $L/450$ и константна висина ребара од $L/200$ док је испуна дебља уз обод љуске 3 до 4 пута дебља од оне у средини која износи $d_1=2-5\text{cm}$ (Radivojević & Kostić, 2011).

Пренапрегнуте бетонске конструкције су развијене и унапређене током друге половине 20. века. Најстарија међу њима је покривна конструкција јавног тоалета пречника 40m (Слика 1-7) у Тскхалтубо, Грузија (Tskhaltubo, Georgia) 1956. Елементи су постављени у виду степеница константне дебљине без потпорне оплате. У средини постоји отвор 10m у функцији лантерне и вентилације (Danieli, 2017).



Слика 1-7. Покривна љуска јавног тоалета у Тскхалтубо, Грузија 1956. са детаљем попречног пресека конструкције и основе (Danieli, 2017)

Још пар објеката је саграђено у сличном префабрикованом конструктивном систему са варијацијама у распонима: Хала спортова у Тбилисију (Tbilisi) распона 30m, спортска Палата у Тбилисију распона 76m, конструкција резервоара горива распона 40m. Интересантно је да су ове конструкције све куполасте форме што и објашњава принцип радијалне организације монтаже префабрикованих елемената без потребе за потпорном оплатом. На једном од примера је коришћена метода монтаже која је названа „зубна техника” (Danieli, 2017) управо због облика префабрикованих елемената као и њиховог положаја у љусци, који је омогућио да се избегну компликовани профили као и дупли слој љуске (Слика 1-8).



Слика 1-8. Приказ шеме монтаже „зубном техником” у хоризонталном пресеку (Danieli, 2017)

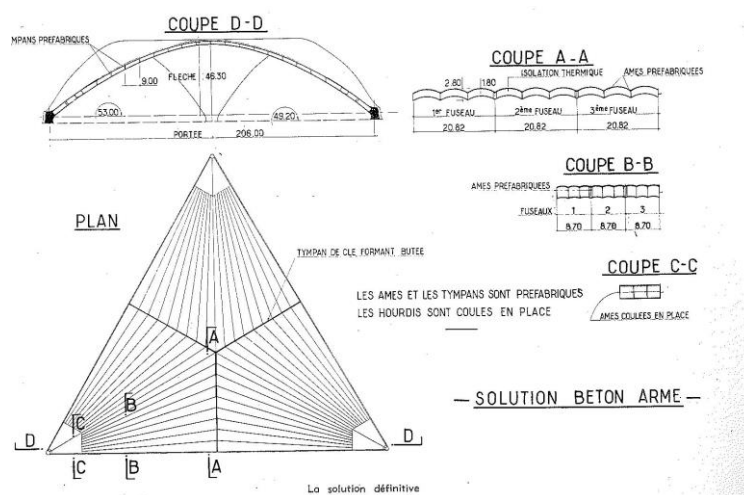
Приликом дизајна љуске, важно је обратити пажњу на пропорцију распона и висине, као код љуске за резервоар горива у Георгији, која је претрпела деформације због некавалитетних веза током монтаже. Плитке љуске су посебно осетљиве на померања, што може довести до нелинеарних деформација. Иако је њихова геометрија наизглед једноставна, она значајно утиче на пренос сила и ефикасност конструкције и захтева посебну пажњу.

Од префабрикованих бетонских љуски важно је поменути један од објеката Палате спортова у Риму саграђену за Олимпијске игре 1960 тзв. Палацето архитекте Нервија. Љуска је сферног облика саграђена у систему мрежних љуски од танких фeroцементних монтажних елемената дебљине 25mm које представљају оплату за армирана ребра висине 30cm и ширине 20cm. Сама љуска је распона 60m док су спољашњи ослонци стубова 81.2m (Radivojević & Kostić, 2011).

Прва префабрикована љуска негативне Гаусове закривљености у виду четири хиперболичка параболоида (хипара) димензија основе 18×6m подигнуте су у Черногорску Краснојарског краја (Русија) 1961. године. Тада су бетонске љуске углавном рађене у монолитној варијанти. Само у СССР-у су се чешће градиле танке

префабриковане љуске, јер је цена изградње од монолитног армираног бетона била скупља од префабрикованог бетона за разлику од остатка света (Krivoshapko & Mamieva, 2014).

Пренапрегнуте бетонске конструкције су развијене и унапређене током 60-их година. Једно од напредних решења је победничко решење конкурса за изложбену дворану КНИТ (CNIT) у Паризу, конструктивног система љуске, основе једнакостраничног троугла странице 218m (Слика 1-9). Љуска је изведена префабрикованим таласастим елементима дебљине 6,5cm са вертикалним ојачањима дебљине 6cm који су монтирани на лицу места са системом затега у ослонцима, како би се спречило прскање бетона (G. Tang, 2015).



Слика 1-9. Основа и пресек КНИТ зложбене дворане (Motro & Maurin, 2011)

Сиднејска опера је један од најпознатијих објеката с префабрикованим бетонским љускама облика сферних троугаоних исечака. Њена кровна конструкција састоји се од префабрикованих бетонских панела ослоњених на бетонска ребра. Првобитни дизајн није имао дефинисану геометрију љуске и предвиђао је параболе подржане бетонским ребрима, али је због високих трошкова оплате на лицу места и недостатка понављања у геометрији дизајн пролазио кроз бројне измене (Jones, 2006). Средином 1961. године усвојен је сферни облик пречника 75.2m, омогућивши изливање лукова различите дужине из истог калупа и поједностављујући изградњу. Кров је на крају састављен од 2.194 префабрикована бетонска модула тежине до 15 тона (Kerr et al., 1993). Дебљина спољашњег слоја љуске око 6,35cm, док су ребра Т и У попречног пресека (Porter, 2013).

Још неки примери анализе димензија попречног пресека префабрикованих љуски су: Тржишна хала Сиди Бел Абис у Алжиру распона 20x42m испуне 4cm и ребра 27,5cm,

затим Црикус у Кијеву распона 42,3m са ребром 24cm и љуска у Донеску (СССР) распона око 37m са ребром 27cm (Radivojević & Kostić, 2011).

Након анализа ових неколико објеката и на основу прегледа литературе, постоје смернице које би требало узети у обзир приликом пројектовања монтажних бетонских љуски:

- За љуске као континуалне системе, препоручује се да везе између модула буду круте како би се својства префабрикованих љуски што више приближила монолитним.
- Користити што мањи број различитих префабрикованих елемената.
- Попречни пресек ребара зависи од распона и форме љуске, са висином од 24-30 cm и испуном од 2,5-6,5 cm за распоне од 37-76 m. Изузетак је КНИТ љуска са таласастим елементима распона 218 m. Анализиране куполасте љуске подељене су радијално у трапезасте модуле или по дијагоналама у ромбоидне модуле док сложеније форме нису рађене.
- Пажљиво размотрити геометрију модула јер она утиче на ефикасност префабрикације, транспорта и монтаже, као што показује пример Сиднејске опере.

Карактеристике технологије префабрикације су у овом периоду веома сличне у свим примерима. Главна карактеристика је да су елементи префабриковани у фабрикама бетона, затим транспортовани на градилиште и монтирани исто тако великим системом скела. Међутим, као што и саме препоруке наговештавају, ограничења у геомерији су још већа како се користи исти начин изградње и оплата, са циљем што мањег броја различитих елемената, где економски и фактор одрживости играју велику улогу. Код куполастих форми или склопова истих исечака принцип поделе елемената се понавља, што отвара питање поделе сложенијих форми као и увођења различитих типова модула као и класа површи.

Како би се ови проблеми решили, неопходан је развој технологије, механизације, материјала и грађевинских процеса, који би развили кључне концепте. У наставку ће бити речи о савременим решењима и могућностима технологија које су омогућиле нове начине размишљања о префабрикацији.

1.8.1 Савремене технологије префабрикације

Успех развоја технологије изградње модуларних бетонских љуски директно зависи од ефикасности процеса префабрикације модула. Једна од главних предности нових процеса префабрикације и дигитализације у односу на стандардне је могућност веће брзине са високим степеном аутоматизације и прецизности процеса. Технологије се могу груписати према онима која користе: оплату, адаптивну оплату и адитивне.

Прву групу технологија чине они који користе оплату. За конструкције са геометријом која се понавља, модули се могу лити у конвенционалним калупима (Vicenzino et al., 2005). Другу групу технологија је предложио Тенг (Teng, 2001), у којој се конструкција љуске може формирати од челичних модуларних јединица, које се након тога пуне бетоном. Ове две технологије, међутим, тешко да се могу користити за сложеније геометрије, у којима модули морају имати јединствене облике.

У случајевима када је геометрија сваког модула заиста јединствена, може се применити једна од аутоматизованих метода производње оплате, као што је ЦНЦ глодање или сечење жицом. Недостаци ових метода су стварање великих количина отпада и времена у случају сложене геометрије модула. Проблем отпада могао би се решити коришћењем воска за израду оплате, која се може користити у више наврата (Oesterle S. et al., 2010). Употреба вакуумске оплате (Huijben, 2016) је још један приступ за производњу калупа за виšekратну употребу без отпада.

ЦАСТонЦАСТ је метода за производњу бетонских модула љуски развијена у ЕТХ Цириху (Enrique et al., 2016). Код ове методе, модули се производе наслагани један на други, тако да један модул дефинише облик другог модула који се налази изнад њега, чиме се елиминише потреба за сложеном оплатом (Слика 1-10).

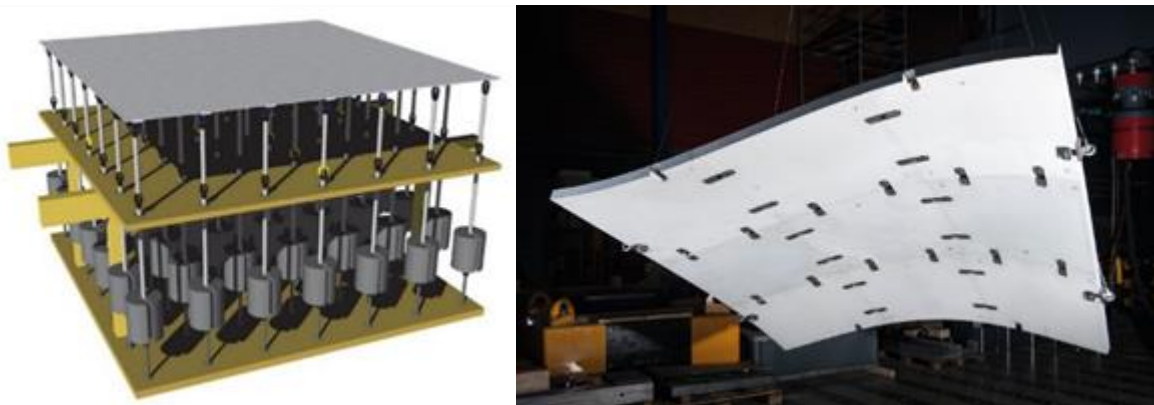


Слика 1-10. ЦАСТонЦАСТ систем (Enrique et al., 2016) (лево) са посланим модулима и састављена конструкција бетонске љуске од приказаних модула (десно)

Конструкција коришћењем модула који се могу slagати један на други ограничава глобалну геометрију љуске, зависи од датог угла закривљености и у неким случајевима мора користи променљив попречни пресек, који можда статички није оптималан.

Подесива оплата је једна од технолошки најнапреднијих метода израде закривљених модула за конструкције љуски (Hickert & Knaack, 2016; Raun et al., 2010), чији је пример приказан на слици (Слика 1-11). Најчешће се таква оплата састоји од вертикалних греда које се могу померати у вертикалном правцу да би се савијала флексибилна површина која лежи на врху греда. Кретање греда се обично покреће помоћу мотора, али се то може урадити и помоћу роботске руке (PETERS et al., 2017). У већини решења подесиве оплате, облик модула се контролише помоћу флексибилне површине само са једне стране, али постоје и прототипови са двостраном контролом (Bell et al., 2014), где се бетон може излити унутра, као нпр. у конвенционалном калупу.

Употреба адаптивне оплате је обећавајући приступ производњи модула за конструкцију софистицираних, двоструко закривљених љуски (Слика 1-11 десно). Међутим, адаптивна оплата је сложена и стога тешка за производњу и употребу. Ова метода је раније коришћена, међутим, углавном у истраживачким пројектима. Од недавно постоје и произвођачи ових уређаја, што чини ову технологију доступнијом грађевинској индустрији.

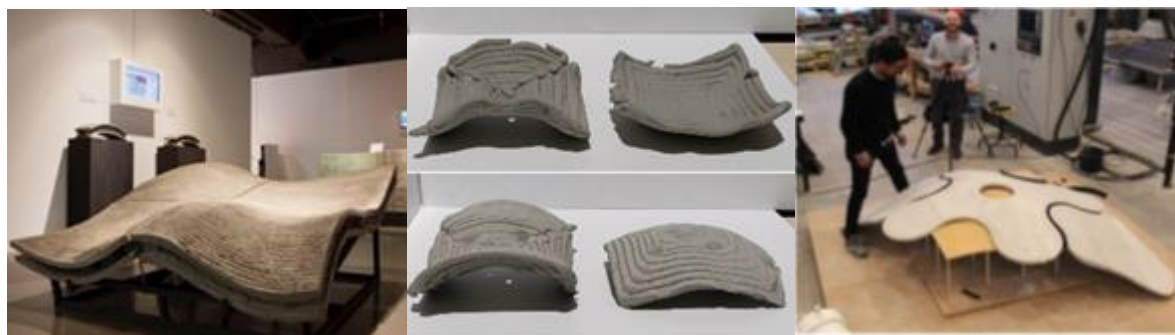


Слика 1-11. 3Д модел флексибилног калупа (лево) (Schipper et al., 2015), и структура танке љуске састављена од модула (десно) (Peters et al., 2017)

У наредну групу се убрајају приступи адитивних технологија (енгл. additive manufacturing), које не користе класичан калуп за обликовање већ позиционирањем материјала на платформу дефинишу облик модула. Тако су недавно спроведене студије о коришћењу технологије 3Д штампе бетона за креирање модула конструкција љуски. У

истраживању Лима (S. Lim et al., 2016) двоструко закривљени елементи су произведени коришћењем ове технологије (Слика 1-12 лево). Такође је испитивана могућност комбиновања подесиве оплате и 3Д штампе бетона (Слика 1-12 средина) (J. H. Lim et al., 2020). У ова два поменута истраживачка рада штампа се вршила екструзијом финих бетонских филамената, што је давало адекватну тачност, али је процес трајао релативно дуго.

У студији Борга (Borg Costanzi et al., 2018), 3Д штампане су само спољне ивице елемената, што је значајно смањило трајање процеса (Слика 1-12 десно). После штампања, унутрашњи делови елемената су испуњени свежим бетоном. И 3Д штампа и ливење бетона изведени су на ЦНЦ глоданој оплати; такође је предложена употреба овог приступа у комбинацији са подесивом оплатом.



Слика 1-12. Двоструко закривљени модули произведени 3Д штампаним бетоном; 3Д штампа (лево) (S. Lim et al., 2016), 3Д штампа на флексибилном калупу (средина) (J. H. Lim et al., 2020), и комбинација 3Д штампе и ливења бетона (десно) (Borg Costanzi et al., 2018)

Многе истраживачке заједнице се баве решавањем проблема негативног утицаја бетона на животну средину, од којих је једна мрежа научних пројеката под називом СПП³ 2187 (чији је аутор члан). Циљ је префабриковано-оријентисана модуларизација са индивидуалним, скалабилним и прилагодљивим модулима, чијим ће се састављањем добити структура јединствене форме, према мотоу: „Индивидуалност на макро нивоу – сличност на микро нивоу” (Mark et al., 2021b). Један од пројеката у мрежи се бави развијањем методе префабрикације бетонских модула за конструкције љуски. Обзиром да се истраживање у овом раду базира на развоју метода дизајна за овај тип технологије, у наредном поглављу је она детаљно анализирана.

³ SPP 2187 – Приоритетни програм 2187 – Адаптивне модуларне конструкције континуираних производних процеса: прецизна и брза изградња, финансирана од стране DFG (Deutsche Forschungsgemeinschaft – Немачка истраживачка фондација).

1.8.2 Упознавање са материјалом и системом префабрикације АЦДЦ пројекта

Процес префабрикације за који су у највећој мери развијене методе дизајна и модуларизације љуске су део пројекта под називом „Адаптабилне бетонске модуларне конструкције” (енгл. *Adaptive Concrete Diamond Constructions*⁴ — ACDC). Како је ова технологија формирана од стране Института за материјале и конструкције, у складу са циљевима пројекта и овог рада, њен принцип је детаљно описанм.

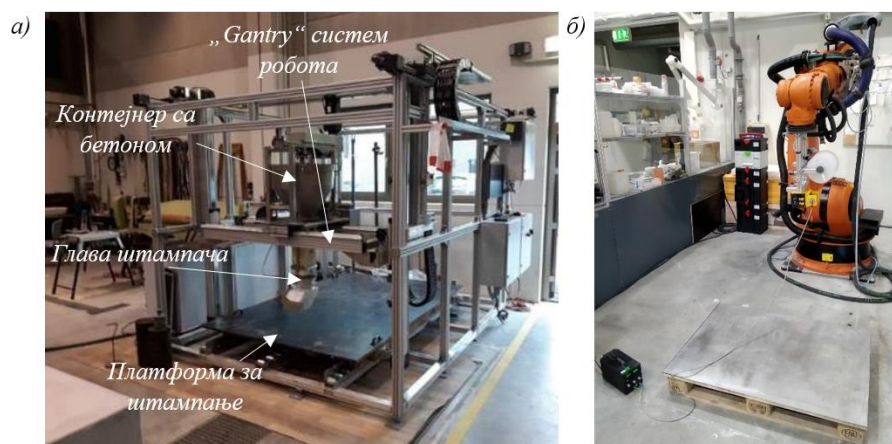
У складу са циљевима овог рада који подразумевају префабрикацију модуларних елемената љуске без коришћења оплате, како би се избегли трошкови и компликације традиционалног система изградње, користе се предности технологија 3Д штампе бетона која омогућава производњу индивидуалних елемената. Након префабрикације, модуле би требало транспортовати и монтирати на лицу места у целу конструкцију љуске што чини овај процес изградње бржим. Већа контрола процеса и прецизнија градња се постиже кроз дигитализацију, аутоматизацију и континуални процес префабрикације, омогућен савременим технологијама и софтверима. Развој технологије материјала и њене примене у 3Д штампи је оно што омогућава њену јединствану примену у модуларној изградњи система љуски.

Наиме, познато је да 3Д штампа бетоном омогућава производњу најразличитијих облика и форми, не само у модуларној градњи, већ и шире. Међутим, иновације система примењеног овде се огледају у примени композита на бази цемента ојачаним полиетарским влакнима (Soltan & Li, 2018) који играју улогу арматуре у конструкцији. Како су карактеристике овог материјала утврђене (Ivaniuk, Ivanova, et al., 2022) омогућавају префабрикацију рамовских конструкција модула у љусци, са циљем уштеде материјала и као резултат лакше конструкције. Један од циљева модуларизације, са становишта конструктивне ефикасности, је максимално искоришћење попречног пресека. Развијен систем префабрикације омогућава диференцијацију у производњи и материјалу ивице модула, која би требало да буде већих димензија, док тањи унутрашњи

⁴ Пројекат „Адаптабилне бетонске модуларне конструкције” (енгл. *Adaptive Concrete Diamond Constructions*) је део SPP 2187 – Приоритетни програм 2187 – Адаптивне модуларне конструкције континуираних производних процеса: прецизна и брза изградња, финансирана од стране DFG (*Deutsche Forschungsgemeinschaft* – Немачка истраживачка фондација).

део испуне обезбеђује просторну стабилност елемента и преноси смичуће силе. Као резултат, модул љуске је подељен на две зоне.

Ивична зона (рам), која се заправо добија 3Д штампом екструдером, представља контуру модула. Његове димензије су дефинисане прорачуном конструкције, и оне одређују попречни пресек млазнице, као и број слојева штампе. Постоје две врсте материјала који се користе у зависности од позиције у модулу. Ивица модула је 3Д штампана са композитом високе дуктилности на бази цемента који има способност брзог очвршћавања (*енгл. printable strain-hardening cement-based composite – у наставку PSHCC*) (V. C. Li et al., 2020; Ogura et al., 2018). Избор PSHCC-а као материјала за ивице обезбеђује не само велику носивост и стабилности, већ и отпорност на локалне напоне произведене током транспорта и монтаже, као што је удар или процес суве уградње веза бушилицом. На основу тога, предвиђено је „повољно понашање” конструкције љуске при деформисању, у случају непланираног локалног или глобалног преоптерећења приликом прерасподеле напона у алтернативним случајевима оптерећења. Друга издвојена зона је испуна са мањим попречним пресеком и покрива унутрашњи део модула од самоупраћујућег бетона (*енгл. self-compacting concrete – у наставку SCC*) ојачаног текстилном мрежом употребом текстилне мреже, коришћењем угљеничних предива импрегнисаних минералима, јер оваква арматура омогућава танкозидна, самим тим лака, али и потпуно аутоматизована решења, са стратешким постављањем материјала.

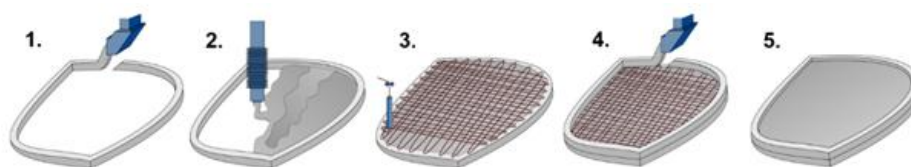


Слика 1-13. а) 3Д штампач за бетонске модуле б) Роботска рука

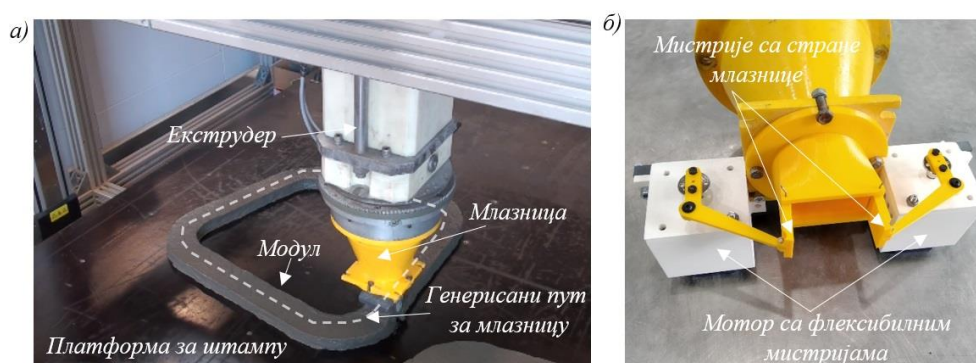
Технологија која се користи за процес штампе ивичне зоне модула подразумева портални 3Д штампач за бетон (Слика 1-13а) који има површину платформе за штампање од 1,4m x 1,0m и максималну висину штампе од 1,2m, што, у зависности од

величине модуле, омогућава изградњу конструкција љуски већих димензија. За ојачање испуна модула карбонским текстилним мрежама користи се роботска рука марке *Кука* (Mechtcherine et al., 2020) максималног радијуса од 2,7m (Слика 1-13б).

Производња има пет корака који су илустровани на слици. Први је екструдовање првог слоја ивице модула (Слика 1-14 корак 1). Други корак је пуњење унутрашњег дела модула бетоном, који се може пумпати, прскати или сипати, у зависности од врсте бетона који се користи и расположиве механизације (Слика 1-14 корак 2). Трећи корак је ојачање карбонском текстилном мрежом, која има високу чврстоћу на зетазање и издржљивост (Lieboldt & Mechtcherine, 2013; Mechtcherine et al., 2020). Четврти и пети корак представљају други слој ивице и испуне (Слика 1-14 корак 4 и 5). Позиционирање штампача је контролисано његовим софтвером, потпуно аутоматизовано, а путања кретања се може генерисати на основу димензија модула дискретизоване љуске (Слика 1-15а).



Слика 1-14. Кораци производње дискретизованог елемента иду од 1 до 5: ивица модула за штампање, постављање испуне, ојачање текстилном мрежом, други слој ивице и други слој испуне (Ivaniuk, Friedrich Eichenauer, et al., 2022)



Слика 1-15. а) 3Д штампа спољне ивице модула и б) млазница са електричним мотором који покреће флексибилне мистрије за штампу различитог попречног пресека ивица модула

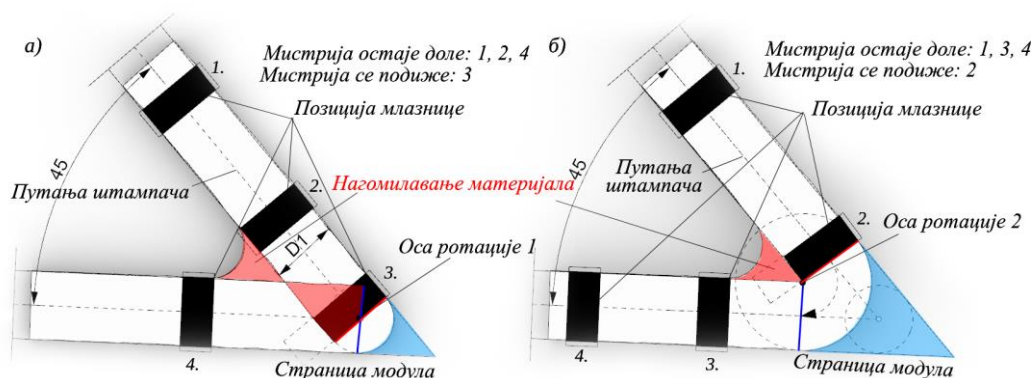
Такође, карбонско ојачање бетона карактерише висока хемијска отпорност. Због тога се бетонски покривач може смањити на неколико милиметара, што омогућава производњу веома танких конструкција. Унутар модула, текстилна мрежа служи не само као ојачање, већ и пружа додатну везу између спољне ивице и испуне. Димензије млазнице која дефинише облик и величину попречног пресека ивичне зоне модула, у

првом и четвртом кораку, произилазе из попречног пресека ивичне зоне модула, који је одређен у процесу прорачуна конструкције. Елементи млазнице су мистрије на бочним странама за прецизнију дефиницију трапезастог попречног пресека са моторима који дефинишу различите нагибе по страници модула (Слика 1-156).

Након штампања модула, монтажа се може извршити на лицу места коришћењем скела и дизалица (крана). Циљ је имати директну везу између модула, што значи да њихове контактне површи морају бити равни. Уколико то није случај и суседне нормале нису компланарне, добија се правоизводна површ. Како се ова површ може конструисати кретањем праве у простору, мистрија млазнице због своје дебљине може формирати само раван. Ово ограничење, наиме, искључује правоизводну површ као везу између модула и доводи до једног од најизазовнијих услова у дискретизацији геометрије слободне форме, а то је поменути услов дискретне мреже *без геометријске торзије* (Pottmann Helmund et al., 2007). С обзиром на то да се штампа бетоном врши наношењем материјала на равну платформу, неопходан геометријски услов је и *планарност модула*. Како би се додатно смањила количина материјала у конструкцији, развијена технологија омогућава префабрикацију модула без испуне, уколико се потребна стабилност може постићи само ивичном зоном и то код модула са мањом стопом оптерећења. У том случају се изостављају кораци производње 2 и 5, где се ојачање текстилом у кораку 3 примењује само на ивичну зону. Овако дефинисани кораци префабрикације омогућавају интегрисање стакла у омотач љуске и на тај начин природно осветљење унутрашњости објекта. Код студија случаја у поглављу 4 су приказани процеси примене, интегрисања и предности конструкција који имају и модуле без испуне.

Поред већ поменутих геометријских услова (*планарност, величина модула и контактне странице у равни*) углови између ивица модула не могу бити оштри и морају имати одређени радијус кривине, који зависи од ширине млазнице и њеног попречног пресека. Најмањи радијус се може постићи окретањем млазнице око своје осе, без њеног померања по x и y оси. Овај радијус, међутим, ствара области акумулације материјала, где се материјал истискује два пута на истом месту (Слика 1-16а). Уколико је пак та акумулација занемарљива, приликом штампања са најмањим радијусом, унутрашњу мистрију млазнице треба подићи у хоризонтални положај и спустити тек када се већ екструдирани бетон не може оштетити (Слика 1-16а положај 3 до 4). Удвостручавањем радијуса кривине између страница, илити када је радијус једнак ширини млазнице,

избегава се штампа материјала на истом месту два пута (Слика 1-16б). Овај услов заправо дефинише домен *облика модула*.



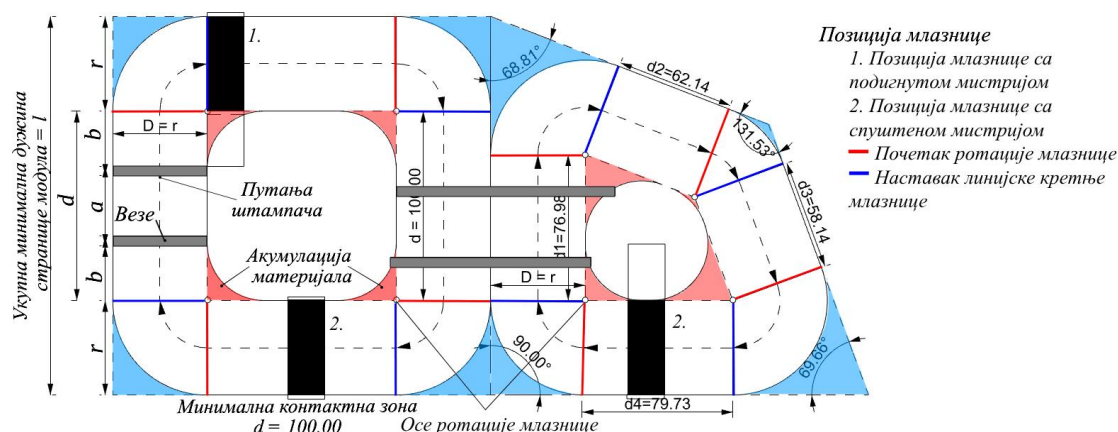
Слика 1-16. Шематски приказ процеса штампе, положаја млазнице и мистрије, за угао од 45° са две могућности путање штампања; а) стаза штампања са осом ротације у пресеку оса унутрашње ивице; б) оса ротације близу пресека унутрашње линије ивице

Јасно је зашто модули не могу бити већи од платформе за штампу, али не би требало да буду ни премали. Оптимални однос величине модула у конструкцији допушта могућност штампања свих модула једне љуске истог или сличних димензија попречног пресека, како би се обезбедила могућност директног контакта између њих и коришћење истих/сличних димензија млазнице за штампу. Овај услов представља услов *скалабилности* – домен величине. Сумирањем неколико величина од којих је минимална дужина странице (l) на основу које се може добити њена пројектована дужина, то су: радијус кривине (r), одстојање позиције веза између модула и почетка линијског дела ивице (b), минималног растојања између елемената за конструисање везе (a) и броја веза по страници (n). На крају се може добити оквирна формула:

$$l = 2r + 2b + (n - 1)a \quad (1-3)$$

Ове величине зависе, пре свега, од типова веза, њихове конструкције и позиције по прорачуну, као и прорачуну попречног пресека модула који дефинише минимални радијус кривине. У овом систему су за везе коришћени челични елементи у облику завртњева који пролазе кроз оба попречна пресека управно на контактну зону два модула. Без обзира на одабрану конструкцију веза, већа контактна површина (зона) између модула обезбеђује бољи пренос сила. На приказаном примеру (Слика 1-17 модул лево) су углови између ивица 90° и тиме дају максималну контактну површину по страници. Што је угао између страница мањи (Слика 1-17 модул десно) како би се постигао минималан радијус, контактна површина страница које чине тај угао постаје

мања. То је један од разлога због чега се у процесу сегментације тежи ортогоналности између ивица модула.



Слика 1-17. Детаљан приказ два модула са свим подацима и елементима потребним за њихову штампу и позиционирање веза; стрелице на испрекиданој кривој указују на смер шампе бетона; плава боја означава празан део модула који је непопуњен материјалом; црвена боја означава потенцијалну зону нагомилавања материјала; сива боја су завртњеви за везе, црна боја означава позиције млазнице;

Такође, код модула са десне стране се може видети да је област акумулације већа (црвено на Слика 1-17) као и непопуњена зона модула (плаво) и да млазница нема позицију спуштене мистрије током процеса штампе. Оба примера су приказана са свим елементарним подацима потребним за процес штампе као што су: *осе ротације млазнице, путања штампе, положај почетка и завршетка ротације млазнице, положај млазнице са подигнутом и спуштеном мистријом* како не би оштетила већ изливен материјал. Уколико се деси да су ова два модула суседна у конструкцији, јасно је да ће позиције веза одређивати мања контактна дужина заједничке странице.

На основу ове технологије произведена су два демонстратора⁵ која приказују развој концепта префабрикације на једноставним примерима дизајна. Први, назван КонДит 1.0, представља дизајн полиhedра делтоидног икоситетраедра (Слика 1-18а). У овој фази пројекта било је важно да модули буду исте геометрије ради контроле квалитета производње. Префабрикација испуне бетоном није била имплементирана, што је видљиво на модулима. Други демонстратор, АЦДЦ Лук, има четири различита типа модула са и без испуне (Слика 1-18б). Детаљи о процесима дизајна, прорачуна и развоја технологије префабрикације и материјала могу се видети у наведеним радовима (Ivaniuk, Friedrich Eichenauer, et al., 2022a, (Ivaniuk et al., 2024).

⁵ Изграђени прототипи, углавном, конструкција мањих димензија које експериментално доказују развијене принципе пројектовања и методе префабрикације.



а)



б)

Слика 1-18. а) Демонстратор КонДит 1.0 (Ivaniuk, Friedrich Eichenauer, et al., 2022); б) Демонстратор АЦЦЦ Лук (Ivaniuk et al., 2024)

Иако су ови резултати пројекта интересантни и приказују потенцијал технологије, ови примери не представљају добро сложеност проблема пројектовања двоструко закривљених модуларних бетонских љуски. Разлог за то су строга ограничења у раној фази развоја новог принципа префабрикације. У овом раду ће бити развијен дизајн двоструко закривљених модуларних љуски које подразумевају сва наведена ограничења технологије, али без додатних ограничења. На тај начин се може показати потенцијал технологије која је у развоју, као и спектар форми који се помоћу овог система може постићи.

У наредном потпоглављу биће дефинисан модул и његове карактеристике, што ће појаснити утицај префабрикацијских услова на принципе дизајна и модуларизације. Такође ће бити објашњене последице тих услова на одабир геометријских метода за развој модула.

1.8.3 Модули за префабрикацију љуски

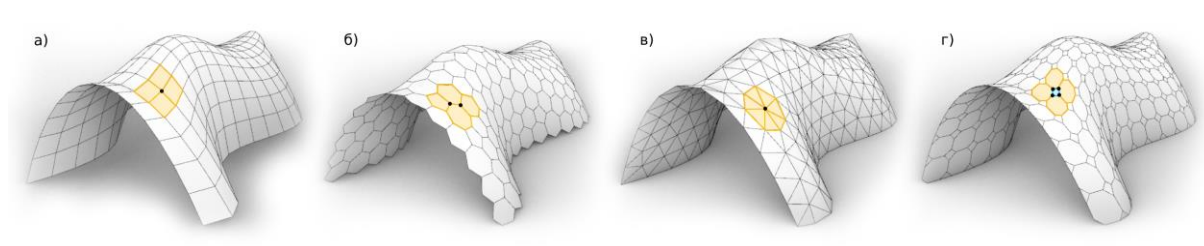
С обзиром на динамичност процеса префабрикације као и поменуто индивидуализацију модула, његова дефиниција се променила у односу на стандарно виђење. Научници се слажу да модуле и сада карактеришу стандардизација и замењивост као члана већег система (Lindemann & Maurer, n.d.). Међутим, модул не мора нужно представљати атомску јединицу, већ може значити скуп компоненти које се могу заменити као модуларни скуп за монтажу. За разлику од модуларне префабрикације у периоду 40-их, дигитални дизајн и производња сада омогућавају параметризацију

облика модула (индивидуализацију) за бољу прилагодљивост система уз очување параметра величине у планирању и извођењу.

Модуларизација је активност декомпоновања (сегментације) техничког система према различитим захтевима на модуле и разраде њихових стандардизованих веза и правила склапања (монтаже) (Baldwin & Clark, 2000). Дакле, модуларизација укључује стандардизацију подсистема у шему или „каталог” модула и њихову дозвољену повезаност. У архитектури и грађевинарству преовлађује секциона модуларност, која је, углавном, подређена приступачним алатима за конструкцију модула. Програмери ових алата обично имају за циљ да креирају модуларне системе који покривају потребан обим флексибилних (прилагодљивих) варијанти производа, док користе најмањи могући број модула (Lindemann & Maurer, 2006.). Прилагођавање шема модуларних система за реалне (пројектне) дизајне назива се *масовна производња по мери* (енгл. *mass customisation*) (Cao et al., 2021). Сваки коначни дизајн генерисан масовном производњом по мери се заснива на апстрактној модуларизацији која логички своди низ решења на скуп исцрпно дефинисаних модула и њихових веза. Због тога је кључ модуларизације параметризација модула која омогућава *скалабилност* и *адаптабилност* у оквиру дозвољених граница могућности префабрикације – домена. *Скалабилност* означава да су димензије елемената у свим правцима променљиве и да се могу подесити и оптимизовати унутар одређеног обима дефинисаног кроз параметре. *Адаптабилност* означава да се геометрија модула и спојева у конструкцији може прилагодити могућностима процеса производње.

Независно од задате технологије, с обзиром на геометрију конструктивног система љуске, јасно је да резултат сегментације за префабрикацију мора да буде површински елемент са две доминантне димензије. Одлучујући параметар у склопу кога се може тражити решење је типологија поделе љуске. Она одређује, пре свега, основне геометријске карактеристике површинског елемента као што су: број страница у елементу и као последицу, број веза у једном чвору, што може бити значајније за конструкције просторних мрежних љуски. Поред основних карактеристика, типологија одређује даље припадајући доминантан облик површинског елемента, који је углавном у вези са угловима између страница и/или пропорције истих (Слика 1-19). Тако да резултујући површински елементи могу бити по облику: четвороуглови (Слика 1-19а), шестоуглови (Слика 1-19б), троуглови (Слика 1-19в), квадрати, правоугаоници, мешани патерни (Слика 1-19г). Избор геометријске типологије при подели би требало

дефинисати у складу са префабрикацијским условима и конструктивним карактеристикама љуске.



Слика 1-19. Приказ различитих врста типологије поделе љуске у зависности од геометријских карактеристика дискретног елемента (модула), међусобних веза у мрежи и положаја чворова; а) мрежа четвороуглова; б) мрежа шестоуглова; в) мрежа троуглова; г) мешовита мрежа

Сагледавши принципе технологије и префабрикације АЦДЦ пројекта, најважније геометријске карактеристике су планарност модула како би се они могли штампати на равнот платформи. Друга је одсуство геометријске торзије, како мистрије имају задату ширину и константан угао приликом штампе једне стране модула. Уколико узмемо ове главне критеријуме у обзир, у погледу геометријских основних својстава површи слободне форме и техничких предности као што је смањен број ивица, подела површи на четвороуглове се показала као повољна.

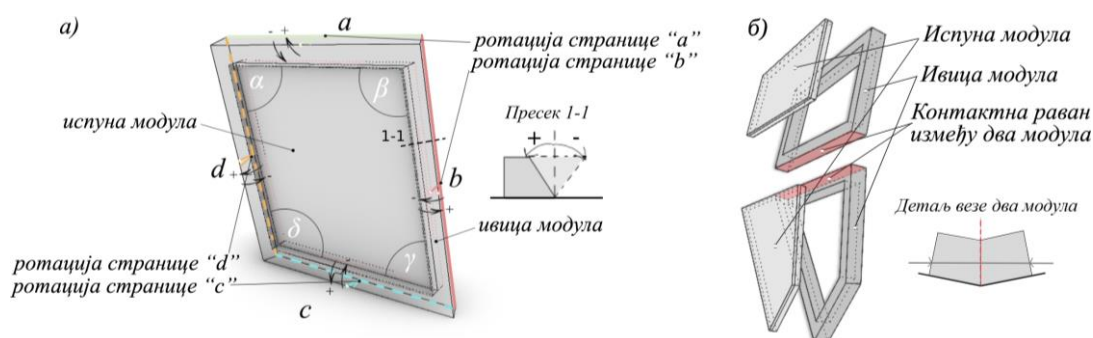
Главна геометријска карактеристика било које глатке површи слободне форме је систем два главна правца закривљености који у дискретној верзији индукује поделу на планарне четвороуглове (planar quads – PQ), у наставку под називом ПК мрежа (Pottmann Helmund et al., 2007). Површ дискретизована у ова два правца, такође, задовољава услове планарности модула и одсуства геометријске торзије (Pottmann Helmund et al., 2007). Овај део ће бити подробније анализиран у наредном поглављу.

Други важан систем оваквих кривих генеришу главни правци напрезања у конструкцијама са, такође, два доминантна правца (плоче, љуске). Ове две главне карактеристике су узете у обзир и искоришћене приликом дефинисања типологије поделе љуске, као и за префабрикацију. Анализом приказаном на слици (Слика 1-19) може се увидети да таква подела обезбеђује сутицање четири ивице модула, што директно одговара поменутим карактеристикама геометрије и конструкције љуски.

Након тога следе критеријуми који су у вези са конкретном технологијом која је представљена у пројекту АЦДЦ. У то се убрајају: домен величине модула, облик, димензије ивица и углови између њих, ограничени су платформом за производњу која је у већини случајева овде примењене технологије износила 1,4m x 1m x 1,2m, са

могућношћу повећања дужине. Важне информације о геометрији модула за процес производње су назначене на слици (Слика 1-20) а): *дужина ивица, унутрашњи углови модула и нагиб ивица (између модула)*. Црвено маркирана контактна страница између два модула је место посматрања геометријске торзије, која мора остати у равни (Слика 1-20). Овде се могу означавати и информације у вези са положајем веза на страницама модула за уграђивање завртњева под дефинисаним углом, који је управан на црвено маркирану контактну раван (Слика 1-20б детаљ).

Када је у питању материјализација елемента, ту спада величина попречног пресека и дебљина испуне, где се оне коначно усвајају након конструктивне анализе конструкције. A, b, c, d представљају дужине ивица, док су $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ углови између страница. Нагиб ивица је дефинисан везом са следећим модулом, у зависности од закривљености површи. Величина угла нагиба θ° означава ивицу која је вертикална на платформи за штампање. Позитиван предзнак означава да страница модула излази из вертикале од центра попречног пресека (ка унутра), а негативан да иде ка центру попречног пресека (ка споља) (Слика 1-20а пресек 1-1). Величина платформе за штампање диктира величину модула. Осим величине модула, остала ограничења услова производње се морају тестирати на појединачним примерима, са циљем константног развоја технологије.



Слика 1-20. а) Шематски приказ локалних геометријских карактеристика 3Д штампаног модула; б) веза два модула са страницом ивице у равни

Ова анализа локалних геометријских услова за префабрикацију модула је кључни корак у префабрикационо-оријентисаном дизајну. То укључује детаљно упознавање са технологијом и неопходним геометријским карактеристикама планарних модула без геометријске торзије. Анализа литературе и теоријске основе коришћених метода засноване су на ова два критеријума.

2 ПРЕГЛЕД ЛИТЕРАТУРЕ И ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ МЕТОДА

Циљ овог поглавља је упознавање са методолошким приступима у пројектовању љуски слободних форми. Главни фокус су истраживања и методе дизајна и сегментације двоструко закривљених система површи које теже једном или оба критеријума: *дискретних елемената у равни (1) са одсуством геометријске торзије (2)*.

Процес је приказан кроз две фазе у два потпоглавља. Прво потпоглавље је преглед литературе где су анализиране и категорисане методе које се користе у процесу, са различитим фокусима за решавање актуелних проблема. Завршава се прегледом метода и анализом њиховог међуодноса, што представља водећу идеју за методолошки развој у тези. Друго потпоглавље је фокусирано на теоријске основе метода из дискретне диференцијалне геометрије, са дефиницијом појмова и њихове примене. Ови принципи су основа за научни допринос у овом раду.

2.1 Методе пројектовања љуски слободне форме

Пре него што се почне са прегледом литературе, требало би приказати категоризацију метода у зависности од њиховог фокуса. Важно је напоменути да су програми и први алати за моделовање веома прецизних слободних површи развијени током 60-их година и тиме већ омогућили манипулацију великом разноликошћу форми. Ипак, након упознавања са свим неопходним факторима изградње и особинама конструкција љуски, закључује се да је естетика само један од фактора евалуације у

њиховом пројектовању. Као одговор на овај задатак, разматрајући сва могућа решења, могу се издвојити следеће категорије методолошких приступа:

1. **Дизајн без рационализације** – овакав дизајн карактерише пројектовање форме без посебног приступа утицајним факторима конструктивног одговора конструкције, начина производње или префабрикације. Након иницијалног дизајна, ради на мањим модификацијама конструктивних детаља, међутим, углавном је приоритет пројекта идеја дизајна.
2. **Рационализован дизајн** – код ове методологије ради се на модификацији дизајна према дефинисаним факторима. У зависности од времена модификације приступи се деле на:
 - а. Пост-рационализацију* – Ова метода укључује модификацију већ дефинисане геометрије почетног дизајна како би се уклопио у ограничења процеса производње и материјала. Методе које се убрајају у ову групу су углавном у вези са различитим алгоритмима за оптимизацију решења из области рачунарских наука (Dimčić, 2011; Schwinn & Menges, 2015).
 - б. Пре-рационализацију* – Овај метод приступа дизајну узима у обзир производњу, технологију и материјале као интегралне улазне податке од самог почетка процеса дизајна. Њени корени се могу пратити до модернистичких покрета раног XX века које су заговарали архитекте као што су; Ле Корбизје, Валтер Гропијус и школа Баухаус (Isaacs, 1991; Le Corbusier, 1986). Средином 20. века, градитељи као што су Фреи Ото, Феликс Кандела и Јорг Шлајх наставили су овај тренд, користећи различите алате да би успоставили коначне облике својих љуски (Otto, 2015; Schlaich, 1940).

По позиционирању полазног дизајна у односу на задате категорије, у зависности од приоритета, карактеристика пројекта, као и анализе различитих метода у претходним поглављима, дефинисали смо следеће приступе рада које пројектант може да спроведе почев од процеса дизајна до префабрикације:

1. Приступ „Одоздо према горе” (*Bottom-up approach*)
2. Приступ „Одозго према доле” (*Top down approach*)

Ово су два потпуно супротна приступа која се могу користити када је у питању пројектовање и модуларизација конструкција љуски слободне форме. Код првог се креће од локалних геометријских услова модула где се прво формирају елементи а онда њиховим повезивањем добија целовита структура. Услови за дефинисање локалне геометрије би требало да произилазе из карактеристика производње. Различити параметри се могу примењивати где естетика конструкције, такође, може да игра улогу. На основу свих ових посматраних чиниоца, након дефинисања модула и њихових могућих параметризација, потребно је установити систем њиховог повезивања у структуру. На основу ових правила, као последњи корак се добија коначна конструкција љуске. Овај приступ се назива „одоздо на горе” (*Bottom up approach*). Појављује се и у другим научним областима, где је његова дефиниција у вези са фокусом на проблем. Овде је приоритет постављен на локални ниво, модул. Сагледавајући карактеристике првог приступа, у нашем случају, он омогућава боље решавање геометријских услова производње модула, где се у зависности од коришћене методе повезивања елемената могу добити различита решења за коначан модел конструкције. На основу тога, можемо протумачити да ову стратегију карактеришу принципи *пре-рационализације*.

Други правац као почетни корак одређује већ дефинисани коначан дизајн љуске, који се мора модуларизовати и најчешће оптимизовати да би задовољио све критеријуме. У овом случају, приоритет је глобални параметар архитектонског дизајна, што значи да се користи метода „одозго на доле” (*Top down approach*). Овде пак највећи изазов представља процес сегментације који би требало одредити како би се дошло до модула. Као резултат, мора се наћи компромисно решење између глобалне геометрије конструкције и структурних и геометријских својстава елемената, како је циљ задржати почетну форму љуске па, самим тим, говоримо о методама које припадају *пост-рационализацији*.

Прва два („Top-down”, „Bottom-up”) могућа приступа су поменута и коришћена у другим сферама науке, као и на појединим местима у архитектури. Познато је да је приступ „Top-down” праћен у школи дизајна Екол де Бо Ар (*École des Beaux-Arts*), где се учило да дизајн архитектуре треба да почне са општим планом и да се обрађује постепеним усавршавањем (Mitchell et al., 1988). Такође, преглед појединих савремених пројеката и њихова категоризација у односу на прва два приступа се може видети у овом мастер раду (Henriksson & Hult, 2015). Овај приступ је веома користан у пракси са строго дефинисаним архитектонским пројектима (Harding, 2015).

Исто тако, јасно се увиђају три правца који се разликују по својим приоритетима, проблемима које решавају, као и методама на којима су базирана:

а) **Методе са фокусом на конструкцију:** У овој групи приступа форма љуске се добија као решење механичког проблема. Такве су, на пример, методе инспирисане физичким моделима мембрана, кабловских мрежа и рачунарске технике налажења форме (*енгл. form-finding*).

б) **Методе са фокусом на геометрију:** Као што и само име наводи, у ову групу се убрајају приступи где су геометријске карактеристике у фокусу решења. Овде се користе геометријске методе за конструкцију морфолошких решења.

в) **Комбиноване методе:** Ове методе су углавном новијег датума и развиле су се као потреба за решавањем проблема механичких карактеристика љуски као и, истовремено, геометријских особина елемената од којих су саграђени.

Сада се може прећи на преглед литературе који је подељен према поменутиим фокусима, које могу имати њихове имплементиране методе: *конструктивно оријентисане методе*, *геометријски оријентисане методе* и *комбиноване методе*. Ово је урађено како би се на лакши начин сличне методе могле упоредити. У наредна три потпоглавља истакнуте методе из ове три групе су анализиране засебно са аспекта начина функционисања, употребе, главних предности и недостатака.

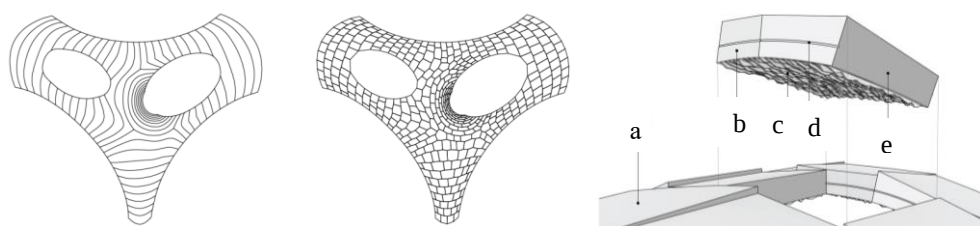
2.1.1 Конструктивно оријентисане методе и примена

Иако овај приступ није главни допринос овог рада, у овом делу ће бити дат основни преглед метода које се баве искључиво конструктивном оптимизацијом љуски. Ове основе су неопходне како би се разумела њихова улога код метода које припадају трећој групи. Прва међу њима је метода густине силе (*енгл. force density method – FDM*), исто позната као Стутгарски директни приступ, чији се алгоритам заснива на налажењу просторне мрежне љуске на затезање у равнотежи. Ова метода служи за симулацију „висећих модела” које су раније инжењери физички правили, пренапрегнутих кабловских система, мембарана са задатим ослоном, конструкцијама генерисаним великим притиском од воде или ваздуха. Као и већина сличних метода, базира се на налажењу равнотеже у чвору за задато оптерећење (Adriaenssens et al., 2014).

Наредна метода се бави налажењем форме искључиво самонесећих конструкција на притисак, или масивних система љуски. То има смисла код система код којих

сопствена тежина и стално оптерећење преовладава. Такође, ова метода обухвата посебно системе који нису ојачани арматуром или било којим материјалом који прихвата затезање, како и није ни потребан. Ова метода се назива Решеткаста мрежна анализа (енгл. Thrust Network Analysis – TNA) и заснива се на принципима графичке статике, где су дијаграм сила и штапова реципрочни и где се за задати дијаграм сила може наћи равнотежа сваког чвора у конструкцији (Block & Ochsendorf, 2007). Ове две методе су база на којој се надограђује доста радова на пољу модуларних мрежни љуски слободне форме на притисак. Прва међу њима је група Блока (Block) која се интензивно бавила развојем ове методе за различите примене и проширила на конструкције изграђене од разних материјала. Један од првих радова из 2007. говори управо о њеном коришћењу у комбинацији са линеарном оптимизацијом за дизајн љуски и мрежних љуски на притисак (Block & Ochsendorf, 2007).

По сличном принципу развијају дизајн за масивну љуску под притиском, названу Армадиљо свод (енгл. Armadillo Vault) на коме имплементирају сличне технике налажења форме као и сегментације. У овом случају се подела вршила прво на траке мануелно у правцима геодезијских кривих по добијеној површи и оптимизовано у управном правцу дејства сила (Слика 2-1 лево), затим је вршена подела у управном правцу како би се добили модули (Слика 2-1 средина). Разлика у овим модулима је та што је један део страница сечен у равни, други пар је правоизводна површ, екстрадос је засечен равно, док је интрадос ⁶део закривљене површи украшена рељефом (Слика 2-1 десно) (van Mele et al., 2016).

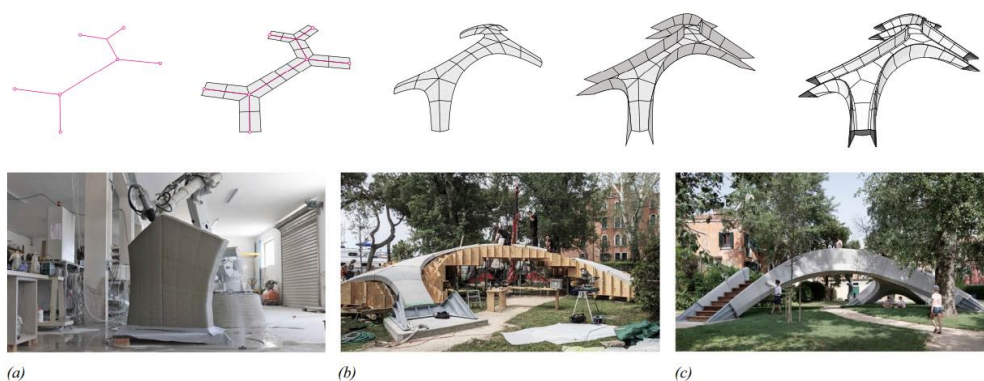


Слика 2-1. Првобитна подела на траке у правцу геодезијских кривих (лево); Други правац поделе управан на дејство правца сила са смичућом шемом (средина); Карактеристике различитих страница једног модула (десно): а) екстрадос равно засечен, б) правоизводне странице управне на дејство оптерећења, ц) закривљени интрадос рељефасте структуре, д) регистрациони зарези, е) равне контактне странице паралелене примарном правцу дејства сила (van Mele et al., 2016)

Још један пример се може издвојити као интересантан, а то је конструкција модуларног двоструко закривљеног пешачког моста процесом 3Д шампе. Ово решење

⁶ Интрадос је унутрашња површина љуске а екстрадос спољашња површина љуске.

је добило више награда и сматра се једним добрим примером префабриковано-оријентисаног одрживог дизајна. Конструкција се зове Стриатус (Striatus) која је производ велике сарадње између различитих компанија и Блок истраживачке групе. Наиме, већ представљеном методом ТНА налажења форме је направљен мост са пет ослонца распона 16x12m и волуменозним 3Д штампаним модулима који су наређани један „поред другог” (Слика 2-2).



Слика 2-2. Процес од дизајна до префабрикације и монтаже моста (i-v); а) Процеса 3Д штампе модула; б) монтаже и с) готовог павиљона (Bhooshan et al., 2022)

Многи други детаљи се могу наћи овде (Block Reseach Group et al., 2022), међутим, оно што је интересно нагласити за ово истраживање је да су модули волуменозни и да се ослањају један на други контактом без потреба за додатном везом, с обзиром да преноси само силе притиска. Такође, ово значи да није потребна никаква арматура у материјалу (Bhooshan et al., 2022).

Наредни пример је, такође, форма по принципу љуске на притисак. ДЕ:Стрес (De:Stress). Дизајнирала га је *Батагилиа+Милер* (енгл. *Battaglia+Miller*) и произвела методом Принт-Каст бетона (енгл. *Print-Cast Concrete*), која комбинује роботско 3Д штампање и ливење екструзијом (Слика 2-3). Павиљон љуске коју чине 110 панела по мери са „закључаном везом” које преносе само силе притиска. Дизајн љуске укључивао је конструктивну анализу интегрисану у алгоритме за проналажење форме која ради на притисак (Battaglia et al., 2020).



Слика 2-3. Приказ префабрикације бетонских модула 3Д штампом и калупом од песка као и коначног демонстратора ДЕ:Стрес (енгл. *DE:Stress*) (Battaglia et al., 2020)

Павиљон по имену Хекастоне (Hexastone) који је, такође, базиран на двоструко закривљеној љуски на притисак са 3Д штампаним модулима од бетона (Слика 2-4). Разлика је овде што модули нису волуменозни већ планарни шестоуглови. Павиљон је сачињен од 102 модула који се протежу око 4,5m у пречнику. Тим који стоји иза овог павиљона користио је рачунарски процес проналажења облика заснован на структурним симулацијама да би генерисао структуру љуске на притисак. У објављеном раду се не говори о детаљима методе за налажење форме, као ни како су решили проблем планаризације модула (Vertico, 2023).



Слика 2-4. Хекастоне павиљон од 3Д штампаних модула на сајму компактних конструкција у северној Европи у Нојминстеру, Шлезвиг Холиштајн (лево), детаљ споја елемената (десно) (Vertico, 2023)

Након прегледа метода које се фокусирају на конструктивне карактеристике љуски, принципе налажења форми, уобичајне системе поделе и њихове примене на конкретним пројектима, у наредном поглављу ће бити дефинисане развијене методе које се баве геометријским приступима. Ово поглавље ће детаљно објаснити нове технике за геометријски дизајн љуски.

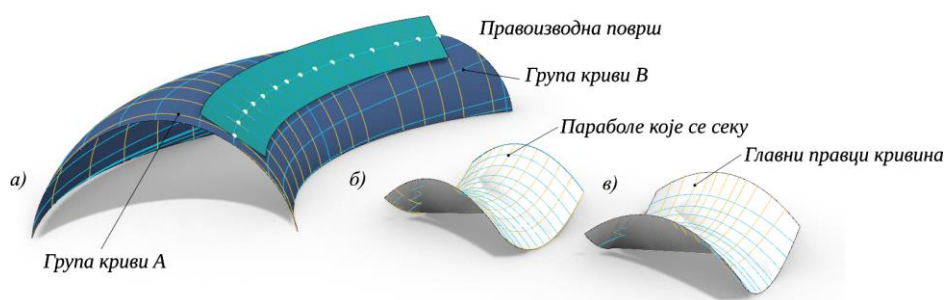
2.1.2 Геометријски оријентисане методе

Постоји велики спектар геометријских метода које се користе за дизајн слободних површи. Избор методе зависи од циља и главних ограничења у пројектовању геометрије. Фокус у овом случају је на методама које се баве дизајном модуларних љуски и метода за поделу слободних површи. То значи да је приоритет истраживања анализа праваца по којима се површ дели. Ови правци представљају карактеристичне мреже на површима (*енгл. surface networks*). Резултати поделе дају модуле чије геометријске карактеристике се евалуирају за критеријуме посматране технологије производње. У зависности од тих критеријума различите мреже се могу користити за поделу. За очекивати је да специфичне мреже – правци поделе дају боље резултате као и да су у вези са модулима са повољнијим геометријским карактеристикама производње. Како бисмо разумели које су то мреже и какве повољне карактеристике имају њихови

модули, као и одакле оне долазе, следећи сегмент је посвећен главним геометријским карактеристикама слободних површи.

2.1.2.1 Геометријске карактеристике слободних површи

Када је реч о слободним површима, мисли се на површи које се не би могле дефинисати математичким записом нити конструисати по дефинисаним правилима. Како би се најближе описале, потребно је истражити њихове главне карактеристике. Област диференцијалне геометрије бави методама које истражују ове површи и описују њихове параметре који их могу представљати. Мрежа кривих која се налази на слободним површима (Pottmann & Wallner, 2008) се сматра једним од најважнијих података који се могу користити за њихово истраживање и параметризацију. Међутим, важно је знати који од ових система кривих нам могу дати најважније одговоре. Две мреже на површи представљају једне од најважнијих. Прве се убрајају у *коњуговане мреже* на површи. Оне су значајне јер њиховом поделом се могу добити планарни панели (енгл. planar quad – PQ). Коњуговани систем кривих се састоји од два одговарајућа система кривих које дефинише следећи однос: „Уколико се изабере систем кривих на површи назван А, други систем Б настаје повезивањем тачака у којима тангенте првог система кривих А чине правоизводне површи” (Слика 2-5) (Pottmann Helmund et al., 2007). Као резултат се добија правоизводна тангентна површ почетне слободне површи. Међутим, мора се водити рачуна који систем кривих се бира, јер у зависности од случаја, могу постојати више система кривих са овим карактеристикама, где нису све подобне за анализу површи и њену параметризацију.

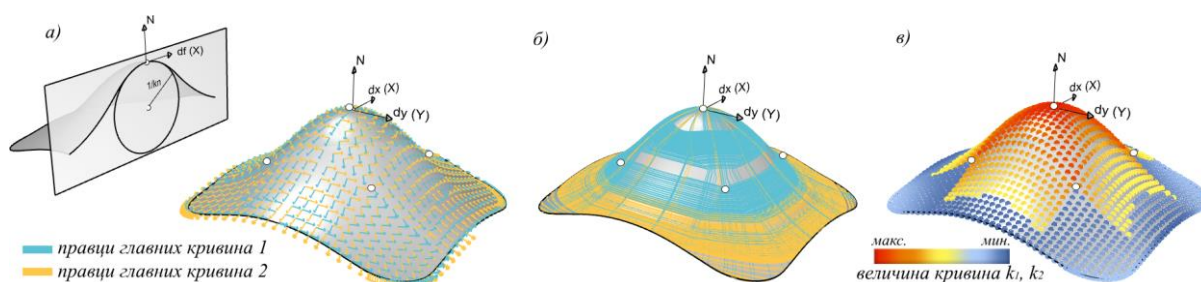


Слика 2-5. а) Произволна геометрија са системом коњугованих кривих А и Б. Тангенте система кривих А, које се чине систем кривих Б, дају тангентне правоизводне површи (зелено); б) и в) два примера коњугованих система кривих (реконструкција модела по (Pottmann Helmund et al., 2007))

Наиме, у случају коњуговане мреже постоји посебан проблем код површи са негативном Гаусовом кривином. Слика 2-5 показује два могућа решења б) и в) коњугованог система мреже кривих. Први представља пресек вертикалних равни и

хиперболичког параболоида (ХП), где се као резултат добијају управне парболе у два правца. Може се брзо утврдити да се овај систем не може користити као темељ за генерисање планарних четвороуглова, јер генерисане суседне тангенте, у овом случају, не припадају истој равни (Pottmann Helmund et al., 2007).

Уколико се на површи нађе таква коњугована мрежа где се тангенте пресечних тачака секу под правим углом оне представљају посебну врсту под називом мрежа *главних праваца кривина*. Када се говори о слободним површима, оне су најважнија карактеристика за дефинисање њихових геометријских особина и параметара. Оне се могу израчунати за сваку тачку на површи и то тако што се у изабраној тачки срачунава правац највеће и најмање кривине, где су они по правилу ортогонални и називају се k_1 и k_2 . Први корак у овом процесу је постављање тангентне равни на површ у тој тачки. Затим кроз нормалу на дату раван поставити пресечне управне равни и срачунати пресечне криве тих равни и дате површи. Кривина резултујућих кривих се даље срачунава налажењем радијуса кружнице кривине у испитиваној тачки. Тангенте криве са најмањим и највећим радијусом, који има инверзну функцију, биће у правцу главних кривина површи за испитивану тачку (Слика 2-6а).

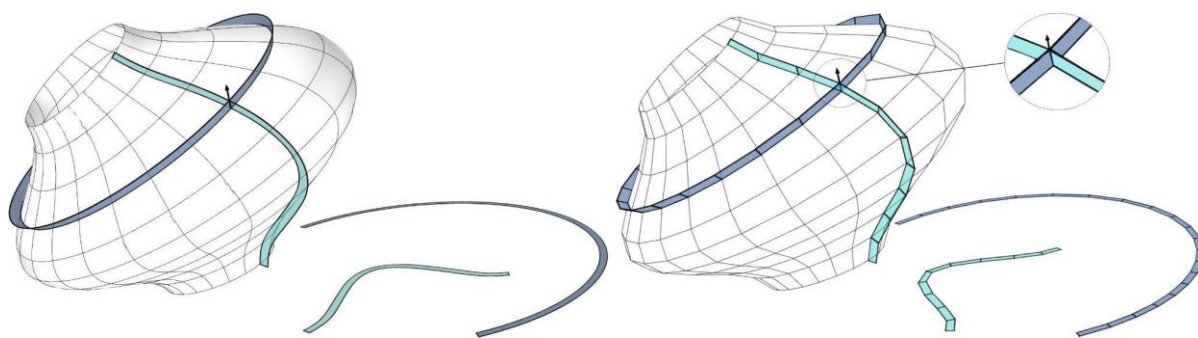


Слика 2-6. а) Цртеж који показује процес налажења главних праваца кривина за произвољну површ, где је показано да се кривина (k_1, k_2) израчунава као обрнуто пропорционална вредност радијуса круга ($1/r_1, 1/r_2$); б) Уцртани правци главних кривина као криве на површи; в) Градиент величина k_1 и k_2 како би се пронашли потенцијални сингуларитети (беле тачке)

Уколико се крећемо у правцу вектора X (Слика 2-6б) за dx по површи и одредимо истим поступком главне правце кривина у наредној тачки, па затим са новим вектором то поновимо, и тако до краја нацртане површи; спајањем добијених тачака добићемо једну криву на површи. Та крива представља главни правац кривина u правца. Исти поступак се може поновити за управни вектор Y како би добили правац главних кривина v . Када се овај процес уради за сваку задату тачку добија се *мрежа главних праваца кривих* површи (Слика 2-6б). Још једна информација је веома значајна за анализу површи а то су места сингуларитета. Она су најпроблематичнија места површи, јер су

геометријски непредвидљива и јављају се на местима где су оба правца главне кривине нула, или где се постоји више праваца који се укрштају. На слици (Слика 2-6в) су ове величине приказане палетом боја, где се могу издвојити оштри прелази (из негативног у позитивне величине ~ 0), који се такође поклапају са правцима вектора (Слика 2-6а) пресецима кривих (Слика 2-6б).

Осим што као подврста коњуговане мреже дели површ на равне четвороуглове, друга важна особина је да се правци тангенти секу под правим углом што чини мрежу чворова, такође, статички повољнијом. Исто тако, уколико се задрже закривљени штапови мреже, елементи чворова могу бити идентични приликом префабрикације. Предности су, исто тако, мањи број ивица у конструкцији, самим тим мања употреба материјала као и четири странице које се сучељавају у чвору. Из тог разлога су ове мреже предмет многих истраживања код анализе поделе слободних површи. Још једна позната геометријска карактеристика главних праваца кривина из диференцијалне геометрије је да траке које се конструишу од нормала на површ у тачкама тих кривих дају развојну површ. Ово је веома повољно својство за ефикасан процес производње, јер се те траке могу једноставно развити у равни. Као последица, дискретизовану верзију тих трака чине [ПК мрежа](#) (Pottmann Helmund et al., 2007). Наиме, у том случају нормале суседних тачака полигона мреже су компланарне.



Слика 2-7. Приказ мреже главних праваца кривина на глаткој површи са два правца тракастих елемента које чине њене нормале, где се на детаљу поред виде развијене верзије истих у равни (лево); Исти сценарио са дискретном верзијом мреже које представљају ПК мрежу (дискретна верзија трака развијене верзије у равни) (десно); Како нема деформације (увртања) обе варијанте (глатке и дискретне) траке су развојне површи, оне немају геометријску торзију. Ово важи за сваку траку и оба правца обе мреже

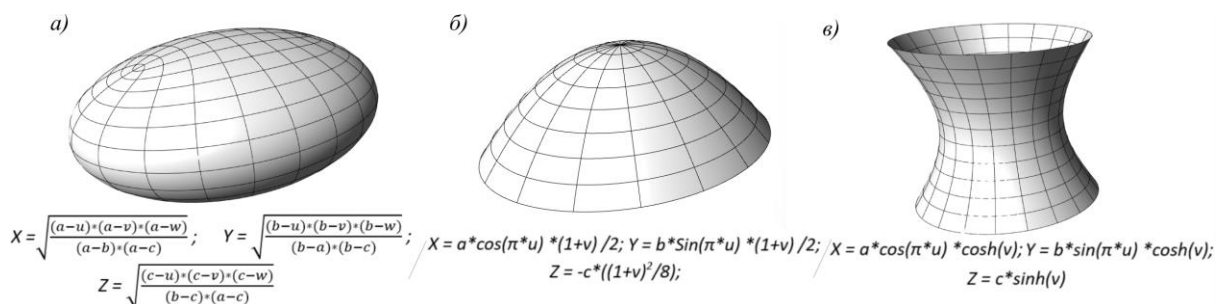
На слици (Слика 2-7) су приказана два примера. Један са мрежом главних кривина (лево) и тракама формираним као правоизводне површи од суседних нормала, које су потпуно развојне. Поред (десно) стоји њена дискретна ПК мрежа где је трака састављена од ПК преко суседних нормала. То значи да, уколико је потребно изградити

штапне елементе правоугаоног попречног пресека, њихов пресек би био континуалан и без увртања. Ова особина се зове *нула геометријске торзије* или *одсуство геометријске торзије* (Слика 2-7 детаљ лево). Ова два параметра планарности и нула геометријске торзије у конструкцијама слободне форме је могуће постићи коришћењем процеса рационализације дизајна.

Из наведених разлога, ове две мреже површи су предмет интересовања истраживачке заједнице у области сегментације слободних форми. Као што се види са слике, самом анализом задате површи се не долази до адекватних праваца за њену поделу, јер геометрија модула не би била изводљива за префабрикацију. Како ово не представља тривијалан проблем, наредно поглавље анализира детаљније методе које подразумевају могућа решења, њихово генерисање као и неке од алтернативних метода дизајна.

2.1.2.2 Преглед савремених метода сегментације и дизајна

Прва група метода која је анализирана се убраја у поље диференцијалне геометрије. Ова група метода је фокусирана на анализу и параметризацију различитих типова мрежа на специфичним површима (Abdelmagid et al., 2022). Те мреже се називају типови параметризације површи и јављају се у облику аналитичких функција. У класичном смислу, то су често полиноми нижег степена: хиперболоиди, елипсоиди и хиперболички или елиптични параболоиди, или тригонометријске или хиперболичке функције.

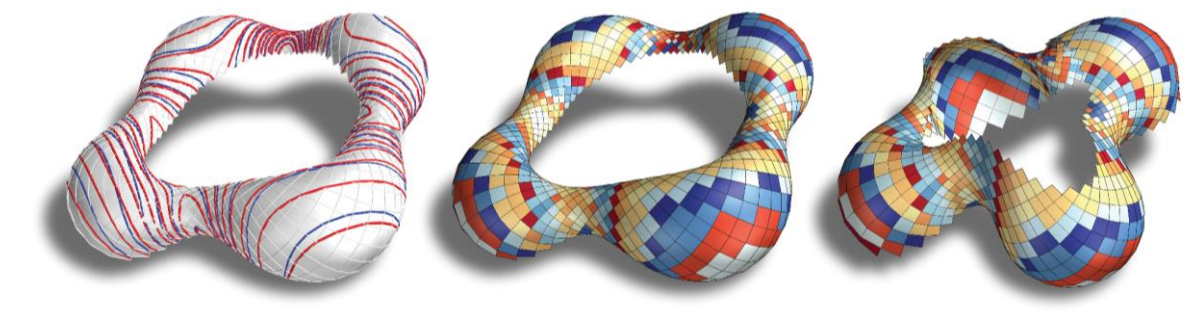


Слика 2-8. Приказ параметризације а) троосног елипсоида; б) елиптичког параболоида и в) једнограног ротационог хиперболоида са њиховим параметризацијама преко мрежа главних кривина

Такође, то могу бити и сложеније површи као што су Дупинови циклиди, Каналне површи, Монжова површ. Неке од њих су параметризоване преко мреже главних праваца кривина, тако да се употребом једначина за координате тачака (x, y, z) директно могу добити површи са том поделом (Слика 2-8) и самим тим све поменуте предности

префабрикације. Недостатак ових метода је недоступност алата за њихово коришћење, сложеност математичких процеса које их подразумевају као и ограниченост у геометрији која их дефинише.

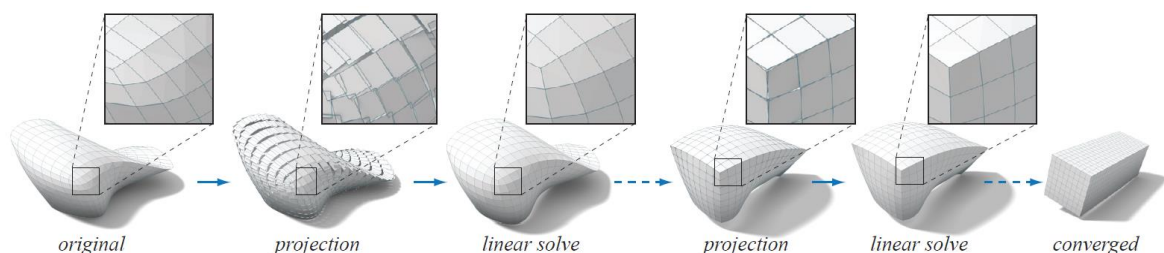
Наредна група је слична првој јер се ослања на повољне карактеристике површи и њених мрежа из теорије дискретне диференцијалне геометрије (ДДГ), за пројектовање двоструко закривљених форми. Класа површи линеарне-Вајнгартове и Вајнгартенове површи (Weingarten, 1861) (*енгл. Liner-Weingarten and Weingarten surfaces*) је такође истраживана где се издвајају радови Пелиса и Тељиера (*енгл. Pellis & Tellier*) (Tellier et al., 2023). Прва врста је од значаја због карактеристика коњуговане мреже преко које могу бити параметризоване, где се могу добити ПК мрежа, док истовремено чине конструкције љуске код којих се јављају само нормалне силе притиска или затезања (*енгл. funicular structures*). Друге су пак дате као предлог за пројектовање површи слободних форми са кривинама модула које се понављају, где се број калупа, који имају неку флексибилност, за префбрикацију може смањити на квадратни корен од N , уколико је N број модула (Слика 2-9) (Pellis et al., 2020). Његов сличан рад касније се бави апроксимацијом задатих површи преко Вајнгартенових мрежа методом нумеричке оптимизације (Pellis et al., 2021). Монтагне даје предлог за дизајн геодезијским мрежама користећи Вос мреже (*енгл. Voss nets*) која представља класу дискретних површи (сачињених од панела). Употреба дискретних Вос површи обезбеђује равне летвице за елементе конструкције једноставно спојене и истовремено обложене равним панелима. Ова повољна конструктивна својства произилазе из коњуговане мреже геодетских кривих на глаткој површи. У овом случају су понуђене две методе генерисања дизајна овим мрежама, прва представља њихове трансформације, а друга директну методу генерисања мреже (Montagne et al., 2021).



Слика 2-9. Приказ праваца главних кривина (плаво и црвено) за дату површ (лево); подела на модуле који се могу произвести истим калупима (са одређеним степеном флексибилитета) према степену закривљености модула приказано по бојама (средина); дизајн деформисан изометријски према (Jiang et al., 2020) где групе модула остају у истој категорији уколико се користи флексибилни калуп (десно);

Следећа група метода која се користи за постизање [ПК мреже](#) као и других повољних геометријских карактеристика модула љуски слободних форми користи алгоритме за оптимизацију. Боуазиз (енгл. Bouaziz) и др. (Bouaziz et al., 2012) користе алгоритам за оптимизацију увођењем различитих параметара који дефинишу локалне геометријске услове модула. Тиме се њихов алгоритам базира на два корака преко пројекције тачака мреже за испуњење сваког од задатих услова, а затим се тражи нова позиција тачака мреже преко успостављања средње вредности тзв. „грешке” (растојања тачака пре и после пројекције за сваки постављен услов). Грешка се минимизира методом најмањих квадрата (енгл. *least-square function*) што представља једну од основних метода машинског учења. Проблем код оваквих метода оптимизације је да успешност њихових резултата може имати одређене грешке у зависности од почетне задате форме, односно, најважније од почетног правца поделе (почетне мреже).

Исто тако, у зависности од задатих локалних услова, коначна ПК мрежа може имати велика одступања, па чак бити тотално различите форме од почетне (Слика 2-10). Рад Поранеа (енгл. Poranne) се надовезује на тај проблем и уводи методу *АСАП* (енгл. *As-Similar-As-Possible*), где се сама метода оптимизације базира на сличним принципима претходне, међутим, уводи и параметар одстојања резултујуће мреже од задате. Они, такође, закључују да је успешност почетне поделе кључна за квалитет резултата. У том смислу користе коњуговане мреже као почетне на површи (Poranne et al., 2013). Денг се позабавио управо проблемом налажења оптимума за више геометријских критеријума увођењем тзв. „јаких” и „слабих” геометријских ограничења током пројектовања. Тиме се дају приоритети условима које модули морају да испуне и који нису приоритет ради побољшања перформанси нумеричке оптимизације (Deng et al., 2015).



Слика 2-10. Приказ процеса оптимизације од почетне мреже површи до коначне методом Боуазиза преко две фазе: пројекција сваке од полигона до планарности а затим налажења средње вредности грешке; У овом случају је задат само један услов, па тако мрежа конвергује до квадрата (Bouaziz et al., 2012);

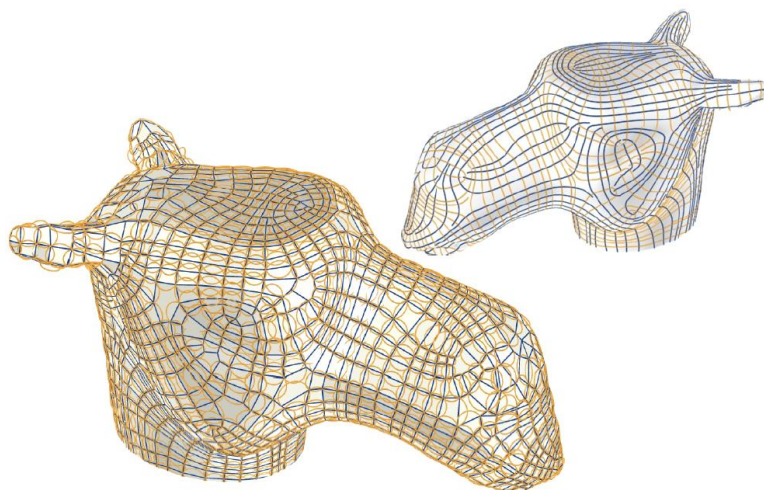
Иако не припада решењима ПК мрежа, Телџер приказује интересантну алтернативу чворова без геометријске торзије и у равни саћасте поделе, где се они могу

покривати троугаоним панелима. У овом случају се сустичу три елемента у сваком чвору. Овде је фокус на оптимизацији врста веза у чворовима за производњу којих има две. Метода поделе се врши на задатој геометрији првенствено поделом површи на шестоуглове, где се сви правци ивица поклапају са главним правцем кривина (два угла сваког шестоугла су 180°), а затим се нумеричком оптимизацијом долази до решења за задату толеранцију (Tellier, Zerhouni, et al., 2019). Рад се проширује касније на имплементацију ове методе преко више типова задатих патерна на површи (Tellier et al., 2021).

У области ДДГ су дискретне верзије слободних форми љуски детаљно обрађене, посебно оне са планарним панелима као дискретним верзијама главних праваца кривина. Разлика у односу на претходно поменуте методе је слобода у дизајну која не подразумева одређену морфологију дефинисане класе површи. Оснивачи правца архитектонске геометрије као примене математичких принципа из ДДГ за дизајн и оптимизацију дискретних слободних површи су Лиу, Потман, Бобенко и др (A. Bobenko & Suris, 2008; Liu et al., 2006; Pottmann Helmund et al., 2007). Лиу је видео везу између специјалне кружне и коничне мреже слободних површи као веома корисне за примену у архитектури. Наиме, ове две мреже представљају *дискретну верзију главних праваца кривина дате површи* и самим тим деле све њихове карактеристике поменуте у претходном поглављу (Pottmann & Wallner, 2008). Значај ове везе двеју типа мрежа са главним правцима кривина нуде шири спекар метода за њихову оптимизацију и генерисање. Кружне мреже, као што само име каже, чине полигони око којих се може описати круг, док су коничне дуалне у односу на кружне и обрнуто. У књизи *Архитектонска геометрија* Потмана су особине ових мрежа, као и остали корисни делови примене метода из ДДГ корисне за архитектонско пројектовање дидактички представљене.

Лиу је први представио алгоритам за добијање кружне мреже од задате површи. У овом случају се задаје груба контролна мрежа са мањим бројем полигона где се комбинује алгоритам пертурбације ПК мреже са четвороструким алгоритмом за поделе као што је Катмул-Кларк (Catmull-Clark) (Catmull & Clark, 1978) на наизменични начин: дата ПК мрежа се дели једном, а затим примењује ПК пертурбацију да би добијени панели били планарни. Ова два корака се понављају како би генерисали хијерархијски низ ПК мреже. За добијање кружне мреже, као почетна подела се узимају главни правци кривина, како они представљају њену дискретну верзију (Слика 2-11) (Liu, 2008; Liu et

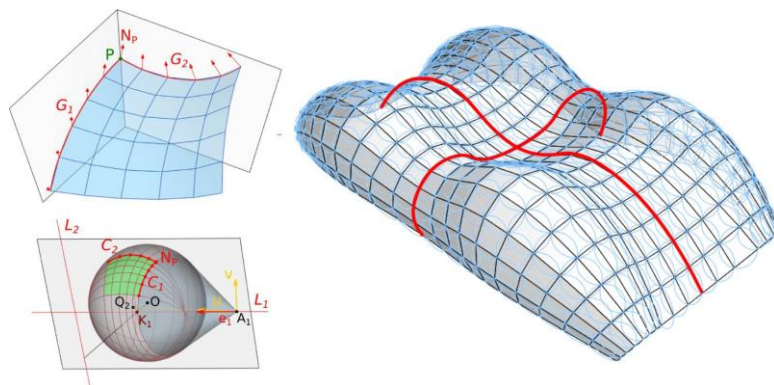
al., 2006; Pottmann et al., 2007). Како су коничне мреже дуалне у односу на кружне, оне се могу директно конструисати из претходних. Истовремено је Бобенко предложио методе за конструисање минималних површи помоћу шеме кружница (А. I. Bobenko et al., 2006) као и других доступних класа површи (А. I. Bobenko, 2008).



Слика 2-11. Добијена кружна мрежа (доле лево) преко почетне поделе у правцу главних праваца кривина (горе десно) (Liu, 2008)

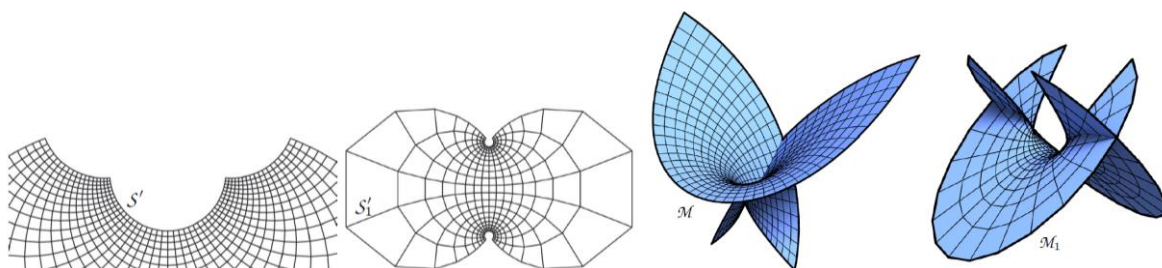
Као веома повољне за конструисање и оптимизацију коничне и кружне мреже су истраживане и другим методама. Један пример је рад и теза Менслија која се базира на конструкцији дискретне верзије различитих класа површи (*Монжова површи*, *Каналне површи*, *Дупинови циклиди*), али исто тако групација као што су површи са једним правцем главних кривина у равни и др (Mesnil, 2017; Mesnil et al., 2015, 2018). Фокус рада је параметризација површи преко дискретне мреже главних кривина које за резултат дају равне панеле као и још неке додатне карактеристике које су важне за производњу, као што је један правац кривина у равни. Коришћене су методе из ДДГ као што су поставке о *кружним* и *коничним* мрежама (Pottmann Helmund et al., 2007). Доуте користи дуалност изорадиалних кружних мрежа (мреже са константним радијусом) са Чебишевим мрежама (енгл. *Tchebycheff networks*) како би конструисао еластичне мреже љуске које могу бити покривене панелима у равни задавањем две почетне криве од којих је једна у равни, а друга може бити у простору (Douthé et al., 2017). Са друге стране Тељер користи две пресечне криве у равни за генерисање кружне мреже, где се конструира дискретна верзија слободних површи са главним правцима кривих у равни

(Tellier, Douthe, et al., 2019). Овом приликом он се служи Гаусовом сликом⁷ нормала ових кривих које представљају кружницу на сфери (Слика 2-12).



Слика 2-12. Задате две пресечне криве (лево горе) и њихова пресликана Гаусова слика са конструкцијом пресечних кружница кроз изабране тачке две криве (лево доле); Пример двоструко закривљене површи која се може добити овом методом (десно) (Tellier, Douthe, et al., 2019)

Последња група метода које имају фокус на геометријски приступ је конструкција дуалних мрежа, познатих као Коенигсове мреже. Ова дуалност, названа Кристофелова, биће посебно објашњена у теоријским основама (потпоглавље 2.3). Ако су дуалне мреже истовремено и кружне, зову се изотермичке мреже (А. I. Bobenko & Suris, 2009) што представља дискретну верзију главних праваца кривина. Поред повољних геометријских својстава, изотермичке мреже имају и конструктивне предности, што ће бити разјашњено у наредном потпоглављу. Због ових својстава, корисне су у дизајну модуларних љуски.

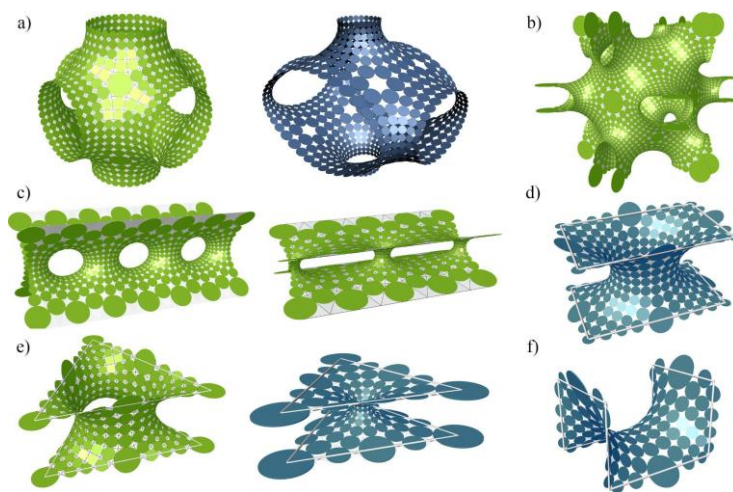


Слика 2-13. Прва пројекција Коебе мреже S' и њене дуалне M , Енеперова површ; Прва пројекција Коебе мреже $S'1$ и њене дуалне $M1$ која представља Бонетову површ (Pottmann & Liu, 2007)

Ипак, њихова примена у архитектонској геометрији је ретка. Први примери су приказани у раду Потмана (Pottmann & Liu, 2007), где су конструисане Енеперова и Бонетова површ. Ове мреже су изотермичке и представљају дискретне верзије минималне површи (А. Bobenko & Pinkall, 1996). Конструкција почиње од одређивања

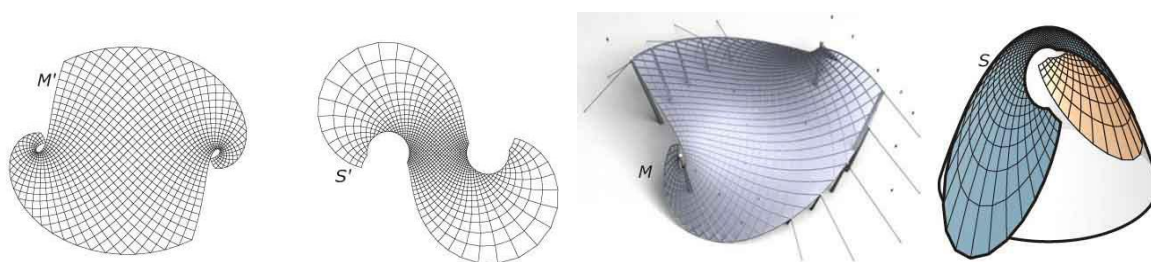
⁷ Пресликавањем нормала једне површи на јединичну сферу (радијус једнак 1) и повезивањем тачака површи или мреже на исти начин добија мрежа на сфери која је зове Гаусова слика.

конформалне мапе у равни или ортогоналне мреже кружница S' и S'^I (Слика 2-13). Затим се применом инверзне стереографске пројекције мреже пресликавају на сферу. Применом Кристофелове дуалности конструишу се мреже M и M_1 (Слика 2-13).



Слика 2-14. Различити примери дискретних минималних периодичних површи насталих од Коебе мреже
а) Симетрична и несиметрична Шварцова П површи; б) Неовисова површи; в) Симетрична и несиметрична Шрекова кула; д) Шонова и-6 површи; е) Симетрични и несиметрична верзија катеноида (приближно); ф) Куболд гранични рам (Sechelmann, 2007)

Сехелман (Sechelmann, 2007) изучава још примера изотермичких мрежа типа периодичних минималних површи. Једане од примера су добро позната: Шварцова П површ, дискретни катеноид и хеликоид, као и примери на слици (Слика 2-14) који све се убрајају у дискретне периодичне минималне површи.



Слика 2-15. Пример дизајна дискретне минималне површи крећући се од ортогоналне мреже S' која се пресликава на параболоид тако да су њене ивице тангентне на њега (Коебе мрежа S), а Кристофеловом дуалношћу се добија дискретна минимална површ M (Pottmann Helmund et al., 2007)

У раду Велимировић (Velimirovic et al., 2008) се говори о потенцијалима периодичних минималних површи у архитектури, где се може приметити да оне могу конструисати врло занимљиве морфолошке просторне структуре. Такође, као што је поменуто у претходним поглављима, оне подразумевају мембрански одговор конструкције, где њиховој периодичности одговара модуларни принцип производње. Последњи пример дуалне мреже је приказан у раду Потмана (Pottmann Helmund et al.,

2007). Овде се конформална мапа са сфере пројективном трансформацијом пресликала на параболоид, а затим се добила Коенигсова мрежа Кристофеловом дуалношћу (Слика 2-15).

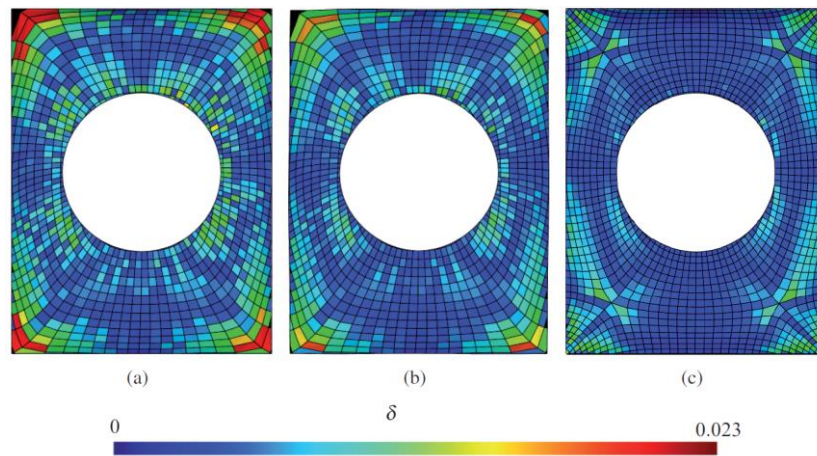
Као што је приказано, у области дискретне диференцијалне геометрије много се радило на изучавању ових мрежа, али нису развијени принципи за њихову примену у архитектури. Ово је препознато као проблем у прегледу литературе. Пре тога, потребно је посветити пажњу последњој групи у прегледу литературе која обухвата комбиноване методе.

2.1.3 Комбинација конструктивних и геометријских услова – комбиноване методе

Уколико сагледамо композицију самих модула у љускама у функцији оптималне диспозиције материјала и њене искоришћености, потребна је селективна дискретизација на локалном нивоу љуске заснована на правцима главних напрезања. То представља оптимално решење код мрежних љуски где су елементи у виду штапова (*енгл. grid shells*). У случају префабрикованих површинских елемената, могуће је формирати модуле са попречним пресецима већим код ивица модула, док је испуна мање дебљине. Ово је логичан закључак како је највише материјала потребно тамо где се највећи напони јављају. Испуна модула је тања и неопходна за прихватање насталих смичућих напона, локална савијања и просторне стабилности елемената четвороуглова. У делу (Rogers & Schief, 2003) је показано да у многим случајевима (као што су конструкције под равномерним нормалним оптерећењима) главни правци кривина могу бити веома близу главним правцима напона, тако да кружне мреже обезбеђују релевантну конфигурацију за структурне перформансе љуске (Pottmann & Liu, 2007). То исто важи и за посебне класе интеграбилних површи тзв. О-површи где се убрајају: дупинови циклиди, површи са константном Гаусовом и средњом кривином, минималне и каналне површи. Интеграбилне класе површи су важне јер често доводе до решења која су аналитички обрадива, омогућавајући прецизне математичке описе и увиде, као што је прорачун мембранског напрезања љуске (Rogers & Schief, 2003). Из тог разлога, има смисла посветити овим класама површи посебну пажњу при пројектовању конструкција љуски.

На мало другачији начин, следећој групи метода припадају приступи са фокусом како на геометријске, тако и на конструктивне перформансе слободних ПК мрежа у стању равнотеже. Као једна од првих идеја, Шифтнер (Schiftner) (Schiftner & Balzer,

2010) користи правце главних напона као улазни параметар за почетну поделу љуске које покушава да „преклопи” са правцима коњуговане мреже површи како би добио „скоро” ПК (Слика 2-16) које додатно оптимизује користећи алгоритме базиране на методама Лиа (Liu) и Задравећа (Zadrevac) (Liu, 2008; Zadrevac et al., 2010).

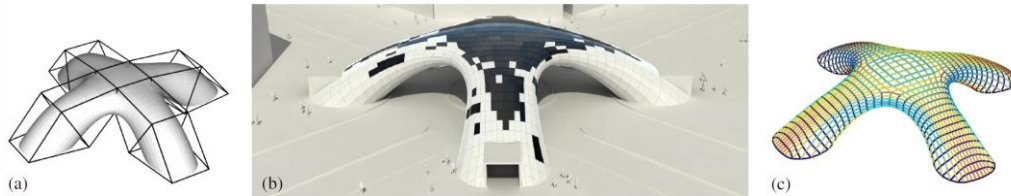


Слика 2-16. Четвороугаона мрежа а) пре и б) након оптимизације методом Шифнера (Schifner & Balzer, 2010) и упоређење са ц) сегментацијом коничном мрежом Лиа; степен закривљености панела је приказаним графиконом

Воуга (Vouga) (Vouga et al., 2012) је један од првих аутора који истовремено узима у обзир проблем планарности елемената и ефикасности самоносиве конструкције, користећи алгоритам нелинеарне оптимизације. Како резултат оптимизације зависи умногоме од почетне поделе, и овде се креће од поделе главним правцима кривина како би се задовољили геометријски и статички услови. Они, такође, дају препоруке о посебним ПК мрежама из теорије дискретне диференцијалне геометрије које су саме по себи самоносиве: Коегинове и Коебе мреже (A. Bobenko & Suris, 2008).

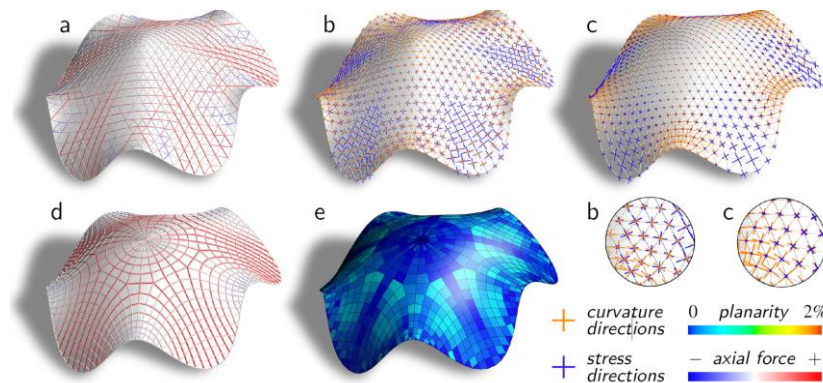
Истраживање Танга (C. Tang et al., 2014) иде корак даље, где се алгоритам оптимизације фокусира и не само на просторне мрежне љуске без момената савијања (само нормалне силе у штаповима), већ и локалну геометрију елемената за услове производње. Преко задате геометрије користи се различита комбинација једначина које представљају тзв. „јаке” или „слабе” услове ограничења за мрежу и налази оптимум (Слика 2-17). Међу њима се налазе услов кружних и коничних мрежа. Поред разлика у рачунарској ефикасности од других метода, у поменутом истраживању је посвећена пажња облицима модула на ободу конструкције. Овај проблем је решен омогућавањем поделе модула на половине (троуглове) како се модули на ослонцима не би секли произвољно. Наредни рад се надовезује на Тангову методу истраживањем

интерактивног дизајна за потребе производње, не само за поделе као што су ПК, већ и на топологију шестоуглова као и једнакоугаоничних троуглова, тзв. Лобелове мреже (Lobel, 1993). Овај рад даје добре смернице за коришћење *Еволут-а* (*EvoluteTools*), алата за моделовање као додатка софтверском пакету Рајно (*Rhinoceros – Rhino*), развијеног од стране ове истраживачке групе где су ови алгоритми примењени.



Слика 2-17. Приказ решења Танга а) начин на који корисник моделује и манипулише форму контролним тачкама почетне мреже одакле се иницијализује почетна подела методом Лиу (Liu, 2008) ; б) приказ намене објекта након оптимизације; с) магнитуде сила притиска и затезања у ивицама мреже

Следећа два рада су развила алгоритме за поравњање главних праваца кривина и напона у љусци као поменути концепт просторне мреже која има штапове оптерећене на притисак или затезање. Тиме су показали велику уштеду материјала јер је сама конструкција лакша, док се коришћењем праваца главних кривина добијају скоро равни панели. У раду Килијана (Kilian) се као почетни дизајн задаје крива на којој су ослонац и отвори у основи (Kilian M. et al., 2017), а у раду Пелиса (Pellis) се ова метода усавршава за могућност задате целе форме са ПК без геометријске торзије (Слика 2-18) (Pellis & Pottmann, 2018).



Слика 2-18. Приказ редоследа корака методе Пелиса а) иницијана подела на троугаону мрежу у стању равнотеже, б) приказ главних праваца кривина и напона који се не поклапају; с) стање њиховог поклапања након оптимизације и модификације форме; д) модификација поделе на четвороуглове е) приказ степена планарности коначне мреже (Pellis & Pottmann, 2018)

Како ова проблематика подразумева критеријуме различитог типа, логично је да су се развиле методе које се баве мултикритеријумском оптимизацијом. Једна од познатијих која је примењена за развој префабрикованог-оријентисаног дизајна

двоструко закривљених модуларних конструкција је *моделовање засновано на агентима (Agent-based modeling and simulation – AMBS)* од стране Швина (Schwinn) и Менгенса (Menges) (Schwinn & Menges, 2015). АБМС функционише тако што симулира акције и интеракције аутономних агената у датом окружењу, омогућавајући истраживање различитих сценарија и разумевање динамике сложеног система.

Ова метода пружа приступ моделовању сложених система, фокусирајући се на интеракције и понашања појединачних агената да би се разумело колективно понашање система као целине. Неопходна својства за конструкцију се уводе у АБМС метод дефинисањем агената који представљају различите елементе и ентитете укључене у процес изградње, програмирајући њихове интеракције и понашања да одражавају својства из стварног света и ограничења процеса изградње (Stieler et al., 2022). У наведеном раду, развој форме љуске изложбене хале Ландесгартеншау (*Landesgartenschau*) укључивао је, осим ове методе, принципе биомиметичког дизајна и интеграцију ограничења материјала, производње и конструкције, како би се постигла иновативна и експресивна архитектура. На тај начин, почев од задате форме, су успостављени панели у равни као и равне странице панела, како је то један од главних услова префабрикације.

Методе које, такође, припадају овој групи су генетски и еволуциони алгоритми (*енгл. Genetic and Evolutionary algorithms – GA i EA*). Димчић у својој тези користи ГА као метод оптимизације за конструктивни дизајн мрежастих љуски, са циљем проналажења најефикаснијих и естетски прихватљивих решења итеративним генерисањем, селектовањем и комбиновањем скупова случајних решења на основу критеријума фитнеса. Он има фокус на Вороној топологију, величине ћелија, као и глобалне конструктивне карактеристике мрежне љуске.

Са друге стране, иако препознаје проблем закривљених панела и геометријске торзије у процесу фабрикације, као и процесу прорачуна Вон Мисевог напона, где је оријентација попречног пресека кључна, не бави се решавањем тих проблема, како ова типологија није погодна за то. Такође, увиђа проблем овакве примене ГА где, уколико је један од критеријума планарност панела, алгоритам има тенденцију да решава проблем већим бројем поделе на местима већих кривина, што резултира веома малим или великим панелима (лоша скалабилност). Тиме закључује да је потребна већа

контрола на локалном нивоу софистициранијим геометријским условима, какви су дати у претходном поглављу (Dimčić, 2011).

Овим се завршава преглед постојећих метода и техника дизајна и оптимизације модуларних љуски. У наредном потпоглављу се врши рекапитулација приказаног истраживања, која служи као полазна теза за развој доприноса у овом раду.

2.1.4 Рекапитулација прегледа литературе

Да бисмо дефинисали наредне кораке у овом истраживању, потребно је сагледати главне проблеме у дизајну модуларних љуски. Иако методе пост-рационализације делују примамљиво за архитекте, њихов учинак зависи од улазних података. Није могуће очекивати исти квалитет резултата за сваку површ. Корисници морају разумети како ове методе функционишу да би проценили њихову успешност и знали како да експериментишу са њима. У специфичним пројектима, где је потребна адаптација алгоритама, неопходна су детаљна знања о напредним методама.

Многе методе не гарантују потпуну испуњеност геометријских услова, већ нуде оптимална решења за дату геометрију. Развијени су алати, попут додатка EvoluteTools за програм [Рајно](#), који омогућавају брзо тестирање и помажу у процесу оптимизације и сегментације мрежа слободних површи.

Са друге стране, методе *пре-рационализације* се баве истраживањем геометријских склопова и класа које у себи имају интегрисане мреже повољне за специфичне префабрикацијске и конструктивне услове. Самим тим, у зависности од посматране методе, оне могу бити више или мање ограничавајуће у глобалном смислу форме. У односу на тај услов, обрнуто пропорционално је углавном контрола и прецизност геометрије њених елемената. Па тако, уколико се користе методе из ДГ које дају прецизну параметризацију површи, оне гарантују максималну контролу и непромењеност геометријских карактеристика модула. Средње ограничавајуће, али са исто тако веома великом тачношћу, која сасвим задовољава грађевинске толеранције, могу бити методе конструкције различитих типова мрежа као што су поменуте *Коебе* и *Коенигове* мреже, које у себи имају додатне конструктивне предности. У најмање ограничавајуће се убрајају методе конструкције мрежа (*кружних, коничних*) које као улазни податак дозвољавају задавање неке геометрије (*полазних кривих, тачака, површи*).

Када су у питању конструктивне карактеристике, може се приметити да овде доминирају методе за налажење форме (*ТНА, метода густина сила*) које су ипак ограничене на једнозначне типове оптерећења притиска или затезања. Са друге стране, дуалне мреже су једине из чијих геометријских особина произилазе и повољна конструктивна својства. Иако је велики број метода и сакупљеног истраживања приказан, ови геометријски принципи још увек нису присутни у виду повољних алата за дизајн. Штавише, поједине методе нису посматране са аспекта примене у архитектури уз поједине изузетке у виду пар предложених примера.

У овом истраживању, главни фокус је контрола на локалном нивоу како би се обезбедили адекватни модули за процес префабрикације са високим степеном прецизности. Због тога је логичан правац истраживања развој метода прерационализације. Ипак, знамо да ове методе могу бити ограничене у смислу форме и доступног дизајна. Главни задатак истраживања је развој метода и интерактивних алата који омогућавају експериментисање са архитектонском формом, проширујући поље дизајна.

На основу задатих услова технологије фокус је на планарности модула и нултој геометријској торзији. Самим тим, на основу прегледа литературе је јасно да све истраживане мреже морају произићи из главних праваца кривина. Међу њима су посебно интересантне мреже са различитим системима [офсета](#) (кружне, коничне и Коебе) које могу имати велику примену у префабрикованим бетонским љускама. Теорије ових мрежа ће бити основа за развој алгоритама са више геометријских параметара, омогућавајући већу слободу у дизајну.

Такође, истраживање ће се бавити класама површи и њиховој дискретизацији у правцима главних кривина као што су Дупинови циклиди, Монжове површи и каналне површи, које нуде разноликост архитектонских форми. Специјалне мреже као што су Кoenigsове, које омогућавају Кристофелову дуалност, биће истражене са становишта дизајна. Циљ је синтеза теорија у алате за дизајн који ће дати нову димензију архитектонске примене.

Методе пост-рационализације биће тестиране и примењене на студијама случаја у оквиру већ дефинисаних система геометрије, као пример оригиналног *хибридног* методолошког приступа. Пажња ће бити усмерена на комбиновање метода пре-

рационализације које контролишу геометријске карактеристике са локалном контролом скалабилности и адаптабилности за префабрикацију.

Иако је фокус на геометрији, конструкција мора испунити конструктивне услове за изградњу. У циљу постизања ефикасних статичких перформанси, примениће се процес мултифункционалне оптимизације, како би се пронашла оптимална параметризована мрежа са најбољим статичким одговором. У том смислу, развијене стратегије дизајна се убрајају у трећу групу комбинованих метода.

Недостатак конструктивне евалуације модуларних бетонских љуски за дефинисане класе површи је важан сегмент пре-рационализације, који треба да покаже не само геометријске предности већ и конструктивну ефикасност. Овај рад ће анализирати улазне параметре и њихов утицај на геометрију и локалне особине модула, као и на одговор посматраних конструктивних параметара.

Да би се постигли постављени потциљеви, прво је потребно упознати се са теоријским основама коришћених метода, које су објашњене у наставку.

2.2 Теоријске основе дискретних мрежних система

У овом потпоглављу су ближе одређене теоријске основе и принципи конструисања дискретних мрежа чији модули задовољавају префабрикацијске услове: планарност модула и одсуство геометријске торзије. Познато је да дискретне мреже главних праваца кривина имају ово својство, па су оне главни фокус овог рада. Уколико се бавимо њиховом конструкцијом у дискретној форми требало би упознати се наведеним дискретним мрежним системима:

- Кружни мрежни систем
- Конични мрежни систем
- Коебе мрежни систем

Ова подела произилази из различитих карактеристика офсета када су у питању ове дискретне мреже и њени елементи: *тачка, равни, ивица*,. Овде ће бити анализиране њихове главне карактеристика, начин употребе, као и конструктивне и геометријске предности.

Након тога следи објашњење методе Кристофелове дуалности која произилази из Коебе и Коенигсових мрежа и има специјалне конструктивне бенефите. Како је један од

подцињева проширење поља дизајна ових мрежа биће представљене две трансформације које задржавају својства мрежа и омогућавају већу варијацију њихове форме.

Такође, класе површи Монжове, Дупинових циклида и Каналне површи ће бити дефинисане у виду њихових главних праваца кривина. Ове основе су неопходне како би формирала оригинална конструкција дискретне верзије посматране мреже за дизајн.

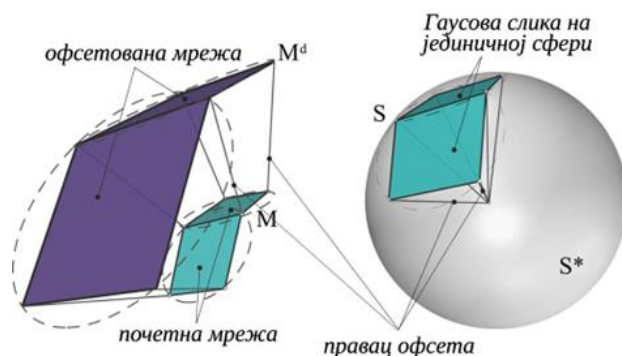
Теорске основе ових мрежа служе како би се формирали нови алгоритми и алати за дизајн модуларних љуски. Међутим, након што имамо дизајн, у процесу конструктивне евалуације користе се методе мултифункционалне оптимизације како би се дошло до решења које има најповољнији статички одговор. Ови алати и методе су дефинисане укратко на крају поглавља.

2.2.1 Кружне мреже

Мрежа чији четвороуглови конструишу описану кружницу око њихових темена, назива се кружна мрежа. Као што је поменуто, оваква кружна мрежа може се сматрати дискретном верзијом мреже главних праваца кривина. Самим тим, дискретизација површи слободне форме у правцу главних кривина аутоматски може да конвергира у кружну мрежу, чему сведоче многи примери из претходног поглавља. Такође, кружне мреже су посебно прикладне за дискретизовану апроксимацију површи, јер мрежа главних кривина представља основне карактеристике форме површи (Pottmann, 2013). Као што показују нека анализирана истраживања, други начин како може да се имплементира је њеном директном конструкцијом. За то је потребно знати услове које она мора да испуњава.

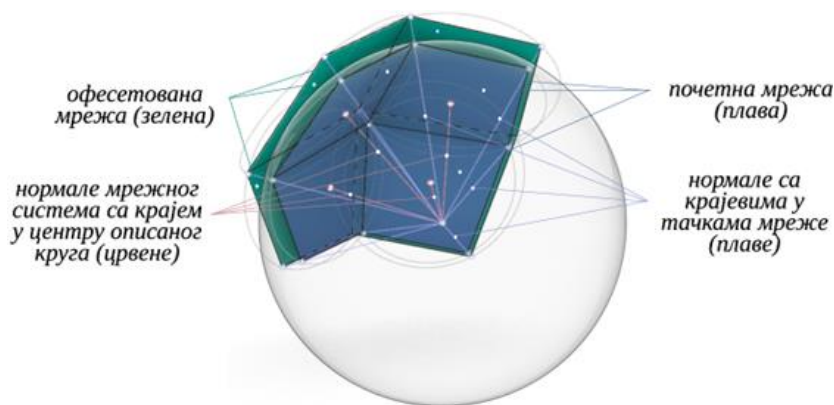
Први услов је већ поменут: темена четвороуглова се морају наћи на кружници. То значи да сваки четвороугао има описану кружницу и, самим тим, израчунавање темена се може заснивати на пресецима кругова у простору, где се сваки од четири суседне кружнице пресецају у једној тачки. Овде се изузима случај да је било која од четири полигона у истој равни како је то тривијално решење. Други услов је директно у вези са начином [офсеговања](#) кружних мрежа, а трећи за правац дискретних нормала. Офсеговањем (задавањем дебљине d) кружне мреже добија се паралелна мрежа са **константним размаком d између тачака** двеју мрежа (Pottmann Helmund et al., 2007). Зато се често каже да ове мреже имају *офсет тачака*, јер се његова димензија базира на

њиховом растојању. Генерисање паралелне мреже и контактне равни модула може се обавити коришћењем посебне [Гаусове слике](#) S на јединичној сфери ($r = 1$) која представља разлику двеју мрежа (M^d и M) (Слика 2-19).



Слика 2-19. а) Почетна кружна мрежа M са офсетованом M^d ; б) Дискретна Гаусова слика S две мреже M и M^d , преликана на јединичну сферу S^* (скица реплике из (Pottmann Helmund et al., 2007))

Вектори мреже S су вектори између одговарајућих тачака кружне мреже M и офсетоване мреже M^d . За генерисање Гаусове слике вектори су скалирани дељењем са величином офсета (d) и премештањем почетка вектора сваке тачке у центар јединичне сфере. То значи да сви врхови површи S морају да леже на јединичној сфери S^* . Вектори који повезују одговарајуће темена M и M^d дефинишу дискретне нормале⁸ у теменима почетне мреже M .



Слика 2-20. Приказ два система нормала који се јављају код циркуларних мрежних система

Паралелна конструисана мрежа је, такође, кружна. Правац офсетавања је условљен правцем дискретних нормала мреже. Оне (нормале) морају да испуне услов да приликом конструисања Гаусове слике, полигони који чине слику морају такође бити кружна мрежа. Уколико све тачке Гаусове слике леже на сфери и око добијеног полигона

⁸ Дискретне нормале мреже у свакој тачки се конструишу као средње вредности вектора нормала равни планарних полигона који припадају тој тачки (у овом случају увек четири полигона по тачки).

се може описати кружница, следи да полигон мора бити у равни с обзиром на то да пресек равни и сфере јесте кружница.

Код кружних мрежа постоје два система нормала која се могу видети са слике. Један систем чине тачке четвороуглова и центар сфере, а други чине тачке центра описане кружнице и центра сфере (Слика 2-20). Из овог разлога су циркуларни мрежни системи јако повољни за параметризацију и оптимизацију у пољу слободних површи. Овде је потребно уочити један пакадокс који чине два узрочно-последична услова.

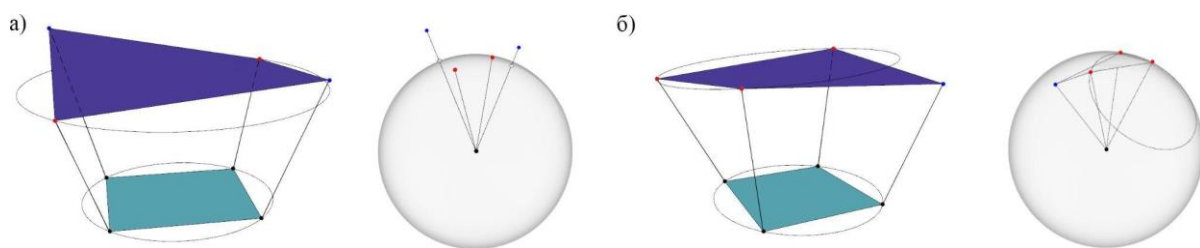
Наиме, за конструисање Гаусове слике потребне су дискретне нормале, међутим, како би се добиле дискретне нормале оне морају да испуне наведене услове Гаусове слике. У овом случају поставља се питање: „Како да проверимо да ли Гаусова слика испуњава услов кружне мреже, ако он дефинише правац дискретних нормала?” У овом раду је то решено првобитном претпоставком правца нормала, који може бити вектор средње вредности четири контактна полигона за њихову заједничку тачку. Тако добијене нормале су коришћене за конструкцију Гаусове слике. Њени критеријуми су проверени где постоје две могућности. Прва могућност је да су услови испуњени тако да се претпостављене дискретне нормале задржавају. Друга могућност је да се нормале морају кориговати за испуњавање услова Гаусове слике, а затим и цела конструисана кружна мрежа (са њом и други систем нормала описаних кружница).

Један од највећих проблема у производњи и, пре свега, префабрикацији модуларних љуски слободне форме представља геометријска торзија⁹ која се јавља код ових типова површи. Она се испољава приликом задавања дебљине површи (популарно „offset”), с обзиром на то да би љуска требало да има и трећу димензију. Наиме, у том тренутку се површ генерише у правцу нормале у одређеној тачки на површи. Проблем се јавља јер две суседне нормале, по правилу, не припадају истој равни код слободних површи. Уколико се између њих генерише површ, добиће се као резултат правоизводна површ. Због тога се приликом сегментације љуске на модуле, без икакве интервенције, добијају „уврнуте странице” модула које је тешко префабриковати. Другим речима: „Ако се мрежа офсетује за дебљину љуске тако да се равни симетрије попречног пресека четири елемента, који се спајају у једној тачки, не секу у једној линији, тај чвор има геометријску торзију” (Pottmann Helmund et al., 2007). Лако је замислити како овај

⁹ Геометријска торзија је искључиво геометријска карактеристика једне мреже где уколико су суседне [дискретне нормале](#) те мреже компланарне (припадају истој равни) она је једнака нули.

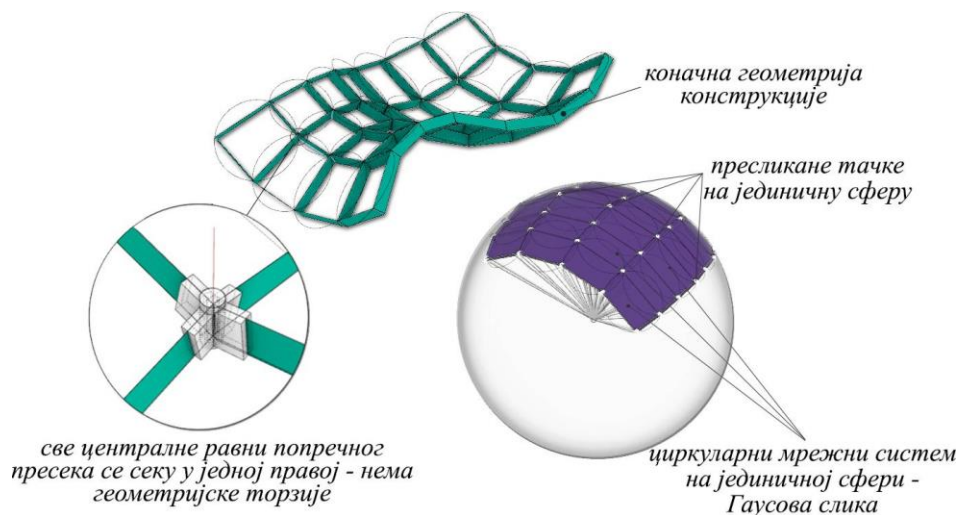
проблем може бити велики у случају модуларизације бетонске љуске где се, без процеса оптимизације, добијају *уврнути* спојеви између модула, који утичу на квалитет и дизајн веза, пренос сила између елемената и прецизности у производњи.

Већ је речено да је овај проблем решив помоћу развијања паралелног кружног мрежног система који такође гарантује чворове без геометријске торзије, с обзиром на то да су одговарајуће странице полигона паралелне и дефинишу раван у којој се модули конструкције могу спојити. Алтернативе следећа два случаја доказују правило. Ако суседне нормале нису компланарне, али су исте дужине, Гаусова слика неће формирати кружни полигон (Слика 2-21а).



Слика 2-21. а) Полигон са офсетом компланарних суседних дискретних нормала са различитим дужинама са одговарајућом Гаусовом сликом; б) полигон са офсетом некомпланарних дискретних нормала једнаких дужина са одговарајућом Гаусовом сликом

Друга могућност је да јесу компланарне али не исте дужине, у том случају се крајеви нормала које не припадају центру сфере не налазе на њој па Гаусова слика и не постоји (Слика 2-21б). Стога, уколико оба услова важе, суседне нормале морају бити компланарне, што чини дефиницију нула геометријске торзије.



Слика 2-22. Конструкција просторне кружне мреже и њене паралелне које чине мрежну љуску (горе лево) са штапастим елементима без геометријске торзије (детал доле лево) и провера услова њене Гаусове слике (десно) (Tošić et al., 2020)

Слика 2-22 показује конструкцију кружне и њене паралелне мреже преко двоструко закривљене мрежне љуске (горе лево). Правци нормала су проверени преко Гаусове слике (Слика 2-22 десно), где се види да она, такође, испуњава услов кружне мреже. Самим тим, правци нормала се поклапају са претпостављеним нормалама, где се офсетом конструишу чворови без геометријске торзије – равни симетрије четири штапа у чвору се секу у једној линији која представља дискретну нормалу у посматраној тачки (Слика 2-22 детаљ доле десно). У наставку следи објашњење коничних мрежа.

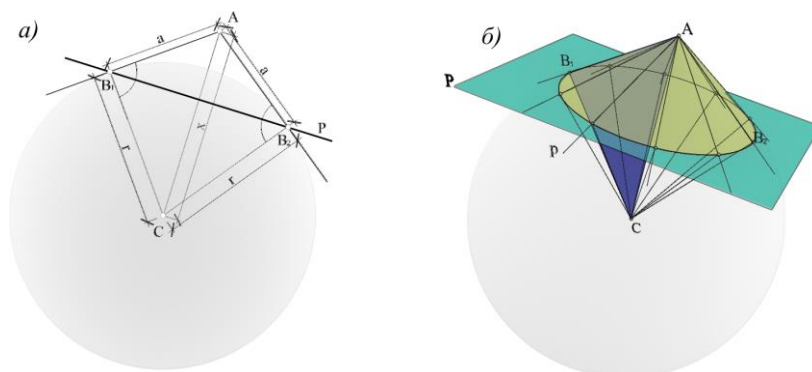
2.2.2 Коничне мреже

Као што је већ наговештено, коничне мреже су дуалне у односу на кружне. То значи да је могуће из кружне директно добити и коничну. Ова појава потиче из чињенице да конична мрежа, такође, представља дискретну верзију главних праваца кривина површи (Pottmann et al., 2007). Пре него погледамо како је то могуће, поставља се питање, уколико је то тако, зашто нам је потребна конична мрежа?

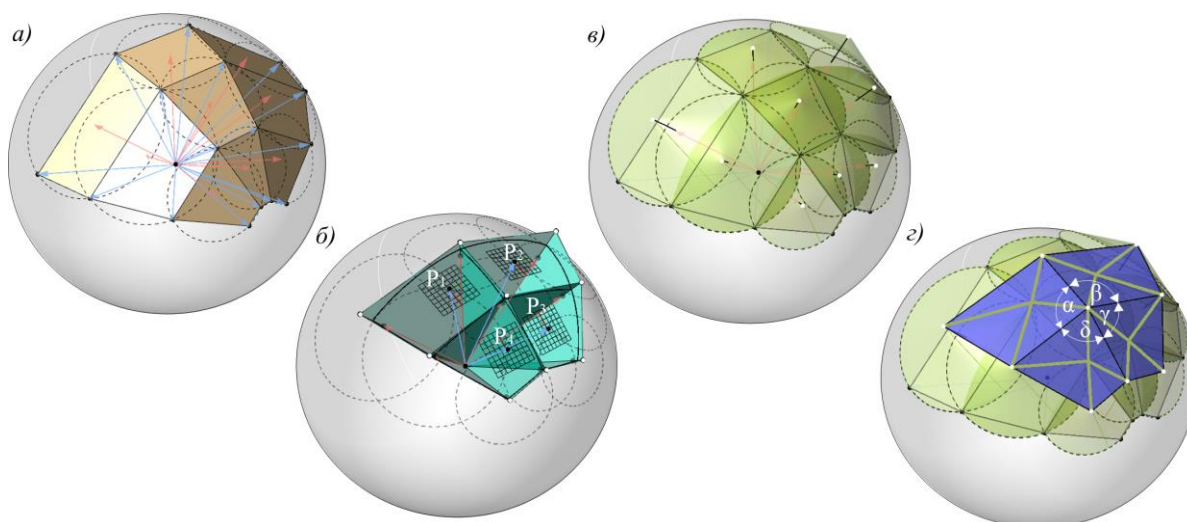
Конична мрежа нам нуди један други тип офсета у дискретној форми која представља *константну дистанцу између панела* дискретне мреже. То значи да су панели двеју паралелних мрежа паралелни, а та дистанца је, као и у претходном случају задата величином офсета d . Такође важи правило да уколико је почетна мрежа конична, исти је случај и са њеном паралелном. Ови односи различитих типова офсета се лепо могу видети и дефинисани су преко њихових односа са јединичном сфером. Познато је да је [Гаусова слика](#) коничних и кружних мрежа иста, с том разликом да добијене [дискретне нормале](#) коничне мреже представљају нормале *панела*, а не дискретне нормале тачака. Као резултат, може се закључити да је први услов да равни у којима се налазе панели коничних мрежа морају бити тангентне на јединичну сферу и то у тачкама кружне мреже на сфери. Други услов гласи да четири панела коничне мреже која припадају једној тачки имају тангентни конус. Зашто је то тако показује слика (Слика 2-23).

Наиме, уколико се узме произвољна линија из центра сфере CA (Слика 2-23а) дужине x , конструише се полуправа Ap која пролази кроз тачку A и тангира сферу у тачки B_1 . У том случају, дуж CB_1 мора бити константне дужине r (радијус сфере) и нормалан на полуправу Ap . Како су дужине x и r константне и угао CB_1A увек 90° , значи да и дужина линије AB_1 мора бити константна и, самим тим, представља изводницу конуса из тачке A . Она даје сва могућа решења тангентних равни сфере која пролазе кроз тачку

A (Слика 2-23б). Како једна раван може бити дефинисана нормалом CB и тачком A јасно је да она мора да прође кроз једну од тачака базиса конуса који се конструише пресеком равни P која садржи све тачке B ротирајућег троугла CBA око AC (Слика 2-23б).



Слика 2-23. Објашњење појма тангентног конуса; а) Друга пројекција примера произвољне линије CA кроз центар сфере, њених тангентних линија AB_1 и AB_2 са идентичним троугловима CAB_1 и CAB_2 ; б) Перспектива сфере са ротирајућим троуглом CAB_1 који даје конус (зелено) као и полуправе Ap и добијене равни његовог базиса P

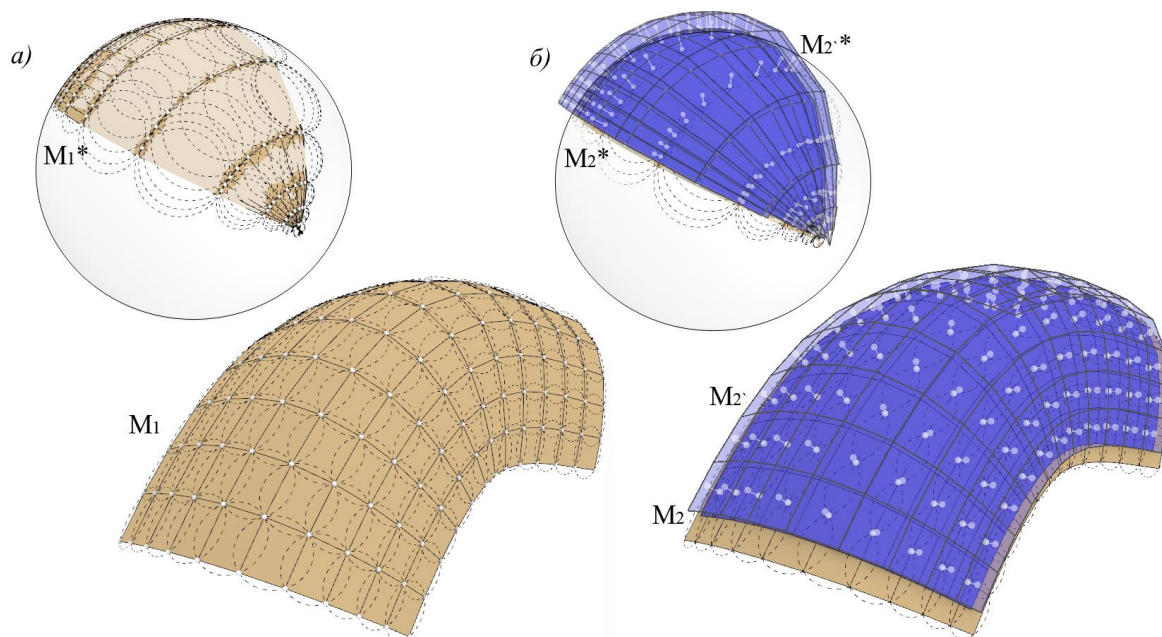


Слика 2-24. а) Гаусова слика кружне мреже са дискретним нормалама из тачака (плаве) и други систем нормала из центра кружница на сфери (црвене); б) Равни између суседних нормала у тачкама кружне мреже до пресека са равнима коничне мреже $P_{1,2,3,4}$ дају беле тачке; в) Тангентни конуси (зелено) чији су базиси кружнице кружне мреже са добијеним висинама (црно); г) Конична мрежа (љубичасто) чије се тачке налазе на врховима конуса а нормале панела се поклапају са дискретним нормалама из тачака кружне мреже (а црвено)

Враћајући се на однос кружне и коничне мреже, требало би уочити да базис конуса представља кружнице полигона Гаусове слике кружне мреже а дуж CB њене нормале полигона. Слика 2-24 показује детаљније тај однос и неопходне кораке за конструкцију коничне мреже. Наиме, почињемо од Гаусове слике произвољне кружне мреже са оба система нормала (Слика 2-24а праве и црвене). Базе конуса су већ познате, где се из претходног може закључити да уколико равни коничне мреже тангирају сферу

у тачкама које се налазе на базису, пресек четири базиса дефинише тачно те тачке по полигону $P_{1,2,3,4}$ (Слика 2-24б). Нормале равни су преузете од плавих нормала кружне мреже. Знамо да се тачке коничне мреже морају наћи на врху тангентног конуса и зато је потребно наћи њихову висину. Пресеком црвених нормала равнима $P_{1,2,3,4}$ се они директно конструишу (Слика 2-24в беле тачке). Спајањем тих тачака се конструишу полигони конусне мреже (Слика 2-24г).

Како смо из претходног доказа закључили да се тачка у којој полигон коничне мреже тангира, сферу мора наћи на базису, а тачка кроз коју пролазе четири контактна полигона је на врху конуса, сви полигони морају тангирати конус по њиховим изводницама (Слика 2-24д зелене линије). Услов који се, такође, може добити као последица овог је да је сума супротних углова иста $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ (Слика 2-24г). Даља објашњења у вези са овим условом се могу видети овде (Pottmann, 2013).



Слика 2-25. а) Произвољна кружна мрежа M_1 са својом Гаусовом сликом M_1^* ; б) На основу Гаусове мреже M_1^* конструирана је Гаусова мрежа коничне мреже M_2^* са њеним офсетом M_2' за задату дистанцу, која такође чини Гаусову слику коничне мреже и са паралелним панелима, на основу њих су конструиране обе коничне мреже у простору, почетна M_2 и њен офсет M_2' (доле)

На слици (Слика 2-25а) дат је један пример кружне мреже M_1 са њеном Гаусовом сликом M_1^* . На описан начин је конструирана Гаусова слика коничне мреже M_2^* преко кружне M_1^* (Слика 2-25б). Уз то је додат офсет коничне мреже M_2' за задату дистанцу. Њене тачке се налазе на продужетку висина конуса, док су полигони M_2^* и M_2' паралелни. Одатле произилази услов константне дистанце између панела d за разлику кружне мреже, где се то јавља између тачака. Како би се од Гаусове слике коничне мреже

добила мрежа у простору M_2 коришћено је правило дуалитета. Наиме, из одговарајућих тачака кружне мреже су постављене равни полигона коничне мреже преко већ познатих нормала из M_2^* , а како би се добиле тачке полигона те равни се пресецају са правцима висина конуса (као и Слика 2-25б).

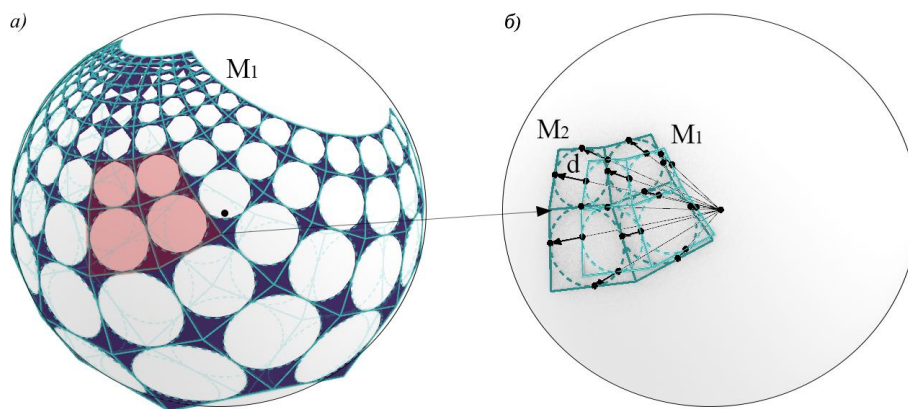
Такође је конструисана паралелна мрежа M_2' офсетовањем у правцу нормала равни полигона и налажењем истог пресека висина конуса са тим офсетованим равнима. Код коришћења конструктивне геометрије за ову процедуру, главна провера да ли је конструкција успешно обављена је да се сви пресеци истих тачака поклапају. У овом случају то значи да пресек четири контактне равни полигона чине једну тачку која се, такође, налази на врху тангентног конуса.

Поред ова два типа офсета и дискретних мрежа, постоји још једна врста која може бити веома интересантна, али и тотално другачије природе од коничне и кружне. О томе се говори у наставку.

2.2.3 Коебе мреже

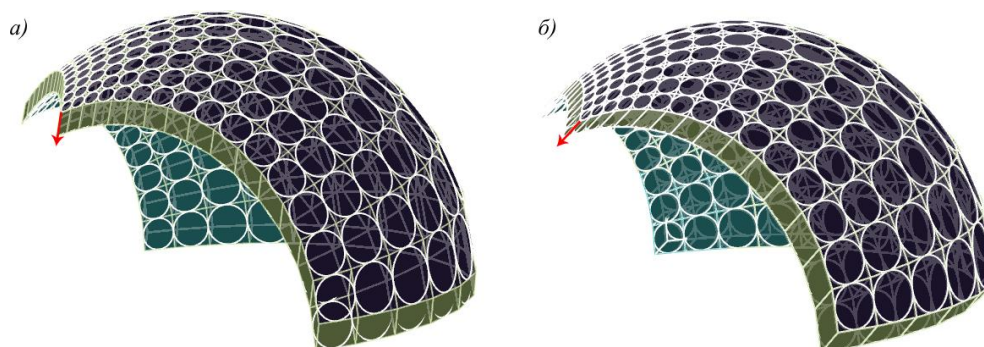
До сада су приказани случајеви офсета тачака и панела тако да је последњи који остаје тзв. *офсет ивица*. Наиме, то значи да су *ивице паралелне и*, самим тим, *константног растојања*. Исто као и у случају кружне и коничне мреже, и овде се ова особина најбоље показује на примеру јединичне сфере. Њу дефинише два услова: *да су ивице сваког полигона дискретне мреже тангентне на сферу у једној тачки, и да се те тачке налазе на уписаној кружници сваког полигона* (Pottmann & Liu, 2007). Ова чињеница је лако доказива уколико замислимо четири тангентне ивице сфере које припадају једној равни, где је пресек те равни и сфере мора бити уписана кружница датог полигона. С обзиром да полигони имају уписану кружницу они морају бити у равни и уколико су офсеоване ивице паралелне не постоји геометријска торзија. Како ова мрежа задовољава два кључна услова префабрикације, оне су од великог интереса за дизајн модуларних бетонских љуски у овом раду.

Овакве мреже на сфери имају посебно име и зову се *Коебе мреже* (Pottmann Helmund et al., 2007). На слици (Слика 2-26а) је пример једне такве мреже M_1 , где се може видети да су њене ивице (зелене) тангентне на сферу и с обзиром на то да су компланарне (ПК), чине равни које пресецају сферу на кружнице (испрекидано зелене), које су уписане у дате полигоне (љубичасти).



Слика 2-26. а) Пример Коебе мреже M_1 са ивицама тангентним на јединичну сферу и уписаним кружницама; б) Издвојена четири полигона мреже M_1 са задатом величином офсета d и њеном паралелном мрежом M_2

На детаљу поред (Слика 2-26б) су изабрана четири полигона из мреже и приказано је на који начин се постиже офсет ових мрежа. У овом случају се спајају тангентне тачке ивица на сферу (црне) са центром сфере. У правцу тих вектора за задату дистанцу d померају дате ивице и конструишу паралелне ивице, где се њиховим пресецањем конструише офсетована мрежа M_2 (Слика 2-26б). Међутим, како се паралелност линија задржава трансформацијом као што је транслација, могуће је, такође, померити мрежу у неком правцу како се она не би пресекала са својом почетном M_1 и на тај начин добити једно од решења офсетоване мреже. То значи да за овај тип мреже можемо имати више решења офсета за једну задату дистанцу, за разлику од претходних.

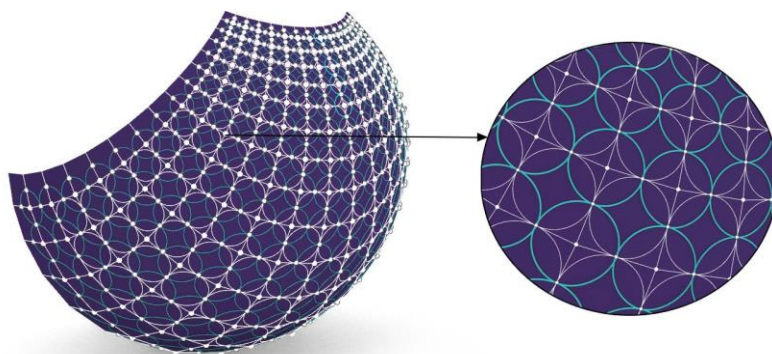


Слика 2-27. Примери два офсета а) и б) Коебе мреже са задатим различитим векторима транслације

Пример транслације се може видети на примеру слике Слика 2-27а и Слика 2-27б, где су изабрани вектори различити и решења могућа све док се две паралелне мреже не секу. Поред тога што се обе конструкције могу саградити од греда исте задате висине, како се офсетована мрежа конструише транслацијом, обе су идентичне. Самим тим и панели од којих их можемо саградити могу бити исти за обе мреже. Особине као што су

равни панели као и одсуство геометријске торзије су и овде случај, како се ради о [ПК мрежи](#) као и офсету паралелних ивица.

Иако има своје повољности, за разлику од кружне и коничне, Коебе мрежа не представља добру репрезентацију сегментације задате слободне површи. То се јасно може видети из примера пост-рационализације у књизи Потмана где аутори дефинишу да је овај процес оптимизације могућ, али је естетски веома неповољан (Pottmann Helmund et al., 2007). Самим тим се поставља питање како се оне онда могу конструисати. Како би то дефинисали важно је уочити још један услов који намећу два поменута главна својства Коебе мреже. Овде се ради о тзв. *ортогоналној вези кружница*, што значи да је потребно да постоји други одговарајући систем кружница које пролазе кроз тангентне тачке четири ивице мреже које се сустичу у једној тачки (Слика 2-28). Баш ове кружнице формирају тангентни конус за Коебе мрежу.



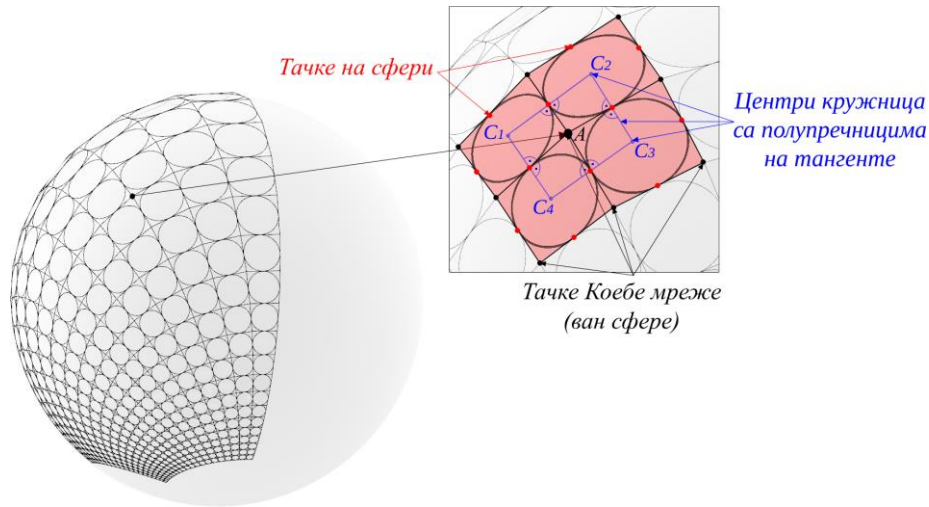
Слика 2-28. Приказ Коебе мреже са два система кружница; Први чине уписане кружнице полигона (беле), а друге се налазе у тангентним тачкама ивица полигона са сфером четири заједничне ивице једне тачке мреже

Услов ортогоналности следи из односа тангенти кружница на сферу из тачке А и радијуса уписаних кружница (Слика 2-29). Ове тангенте представљају у исто време ивице полигона које морају бити под правим углом у односу на радијусе конструисане из центара C_1, C_2, C_3, C_4 сваке од четири кружнице. Самим тим ови радијуси чине четири ивице које повезују центре кружница где се може уочити њихова ортогоналност.

У раду Потмана (Pottmann & Liu, 2007) као и Бобенка (A. I. Bobenko, 2008) се говори о могућности конструкције ортогоналних шема бесконачно малих тангентних кружница користећи *конформална пресликавања*¹⁰. Конформална пресликавања пресликавају бесконачно мале кружнице у бесконачно мале кружнице. Идеја да се ове

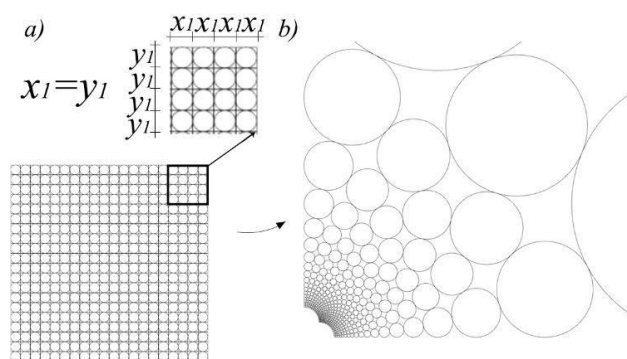
¹⁰ Конформална трансформација је трансформација која задржава углове између кривих.

кружнице замене коначним кружницама је сасвим природна и води до *шеме кружница* (видети (А. I. Bobenko, 2008)). Детаљнији докази се могу наћи овде (Schramm, 1997; Springborn, 2003).



Слика 2-29. Објашњен услов ортогоналност мреже тангентних кружница Коебе мреже

За овај процес би, најпре, требало поделити x, y раван. Важно је нагласити да, како би се добили квадрати са уписаним кружницама у задатој мрежи, она се мора поделити на сегменте једнаке дужине у оба правца (Слика 2-30). Затим се могу вршити конформална пресликавања која задржавају овај патерн као и углове у мрежи, а мења изглед шеме. Након тога се добијена шема пресликава на сферу инверзном стереографском пројекцијом, која је исто конформална, како би се добиле кружнице Коебе мреже. Управо овај начин конструкције ће бити коришћене у овом раду.



Слика 2-30. а) Подела почетне x, y равни на мрежу квадрата; б) примена инверзије у равни

Прва међу мапама пресликавања равни је *инверзија* (Needham, 1997). Она пресликава праве у кружнице и кружнице у кружнице. Инверзија може бити дефинисана овако: Ако је P тачка у равни са координатама (x, y) , инверзија те тачке у односу на круг

са центром у тачки $O(0,0,0)$ и радијусом R даје нову тачку P' са координатама (x',y') која је дефинисана следећом једначином:

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \quad (2-1)$$

Поред инверзије, познато је да су различите *холоморфне функције*, такође, конформална пресликавања у равни. Ове функције су дефинисане на комплексној равни и комплексно су диференцијабилне у свакој од тачака субдомена, тако да се за задати домен и његову поделу лако могу добити њене пресликане тачке (Ahlfors, 1979). Као резултат могу се креирати различити патерни кружница у равни који се, затим, помоћу инверзне стереографске пројекције могу пресликати на сферу.

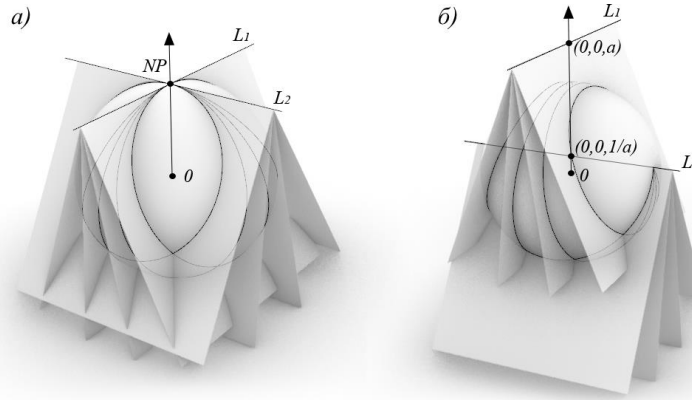
Наредне две специјалне холоморфне функције које ће овде бити примењене представљају конформалну параметризацију¹¹ директно на сфери. Геометријски посматрано, ово је постигнуто преко пресека сфере са два прамена равни из две управне пресечне праве L_1 и L_2 (Слика 2-31). Постоје две врсте конструкција равни које се могу користити. У првом случају су обе праве кроз које пролазе равни тангентне на сферу (јед. (2-2) (Слика 2-31а), док у другом обе имају променљиву позицију која може да се налази дуж вертикалне осе сфере која пролази кроз центар. Параметар a (јед. (2-3) је тај који одређује висину пресечне праве и креће се од 0 до 1, а њена реципрочна вредност $(1/a)$ позицију пресечне праве другог скупа равни (Слика 2-31б) (Eisenhart, 1909). И у овом случају, кораци домена (величине поделе корака) у оба смера морају бити исти како би се добили квадрати у параметријском простору.

На пример, уколико је домен u иде од 0 до 10 и делимо га са 10, величина корака је 1. У том случају, уколико домен v иде од 5 до 25, њега морамо поделити на 20 како би корак у другом правцу остао 1 итд.

$$N = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \quad (2-2)$$

$$N^* = \left(\frac{\sqrt{1-a^2} \sin(u)}{\cosh(v) + a \cos(u)}, \frac{-\sqrt{1-a^2} \sinh(v)}{\cosh(v) + a \cos(u)}, \frac{\cos(u) + a \cosh(v)}{\cosh(v) + a \cos(u)} \right) \quad (2-3)$$

¹¹ Конформална параметризација површи је метод представљања површи где се чувају углови између тангенцијалних вектора, тако да су углови између кривих на површи исти као углови између њихових слика у параметарском простору.



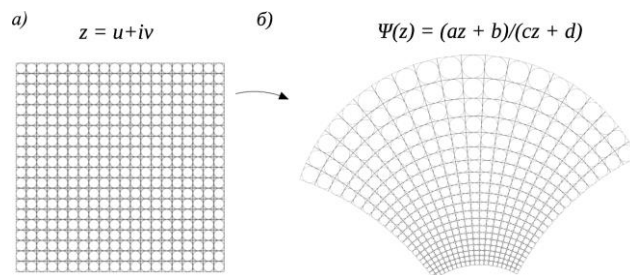
Слика 2-31. Приказ параметризације сфере преко два прамена равни које се секу у ортогоналним правима L_1 и L_2 . а) Први случај када обе праве тангирају сферу у тачки северног пола сфере; б) Други случај када ни један од прамењача равни не тангира сферу већ су на задатој висини a или $1/a$ од центра сфере 0

Као што је поменуто, било која задата холоморфна функција се може користити за пресликавање почетне x, y равни кружница у другу, па је тако овде узета за пример функција *типа Мебијус*. Ова мапа функционише другачије од претходне две, где се у овом случају почетна раван x, y правца (Слика 2-32а) пресликава у конформалну мапу у равни, слично процесу инверзије у равни. Њена једначина гласи:

$$\Psi(z) = (az + b)/(cz + d) \quad (2-4); \quad \text{где је:} \quad z = u + iv \quad (2-5)$$

комплексна вариабла са реалним бројевима u и v . Функција $\Psi(z)$ пресликава тачке комплексне равни у друге тачке комплексне равни, док параметри a, b, c и d креирају другачије понашање функције и, самим тим, се користе за конструисање различитих патерна у равни (Слика 2-32б) (X. Li et al., 2024). Исто правило поделе домена у u и v правцу важи и за овај тип мапе како бисмо добили квадрате. На основу једначина (2-6) конструишу се пресликане кружнице патерна са једначинама њихових координата x и y .

$$x = \frac{adu + b(d + cu) + ac(u^2 + v^2)}{d^2 + 2cdu + c^2(u^2 + v^2)}; \quad y = \frac{-bcv + adv}{d^2 + 2cdu + c^2(u^2 + v^2)} \quad (2-6)$$

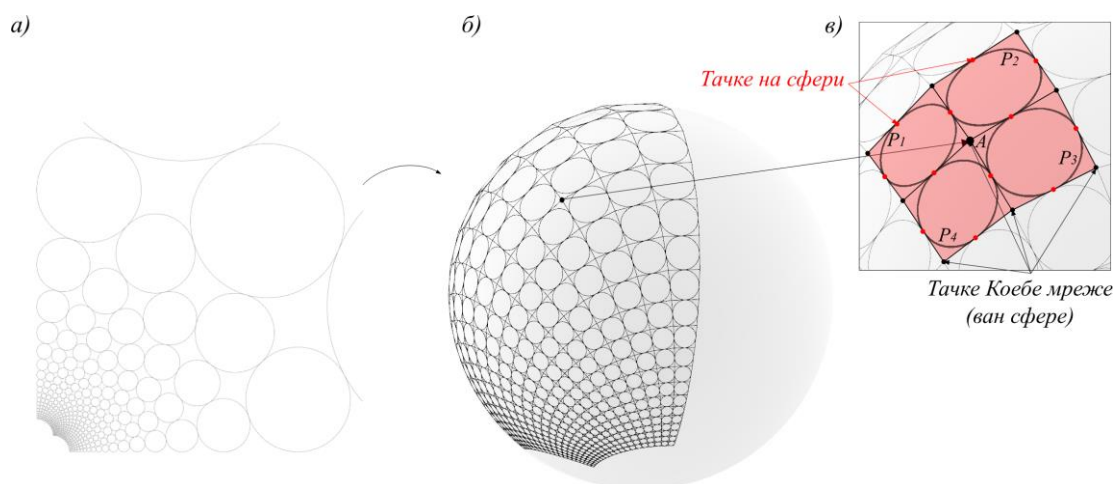


Слика 2-32. а) Раван подељена на квадрате x, y правца; б) трансформација комплексном функцијом типа Мебијус

Процесом инверзне стереографске пројекције (Welke, 1997) се конструише конформално пресликавање на сфери преко ортогоналних кружница у равни, у случају инверзије и функције типа Мебијус (друге две су директно на сфери). Она је одређена формулом:

$$x' = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad y' = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad z' = \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \quad (2-7)$$

где су x и y почетне координате мреже у равни а x' , y' , z' координате у простору које се налазе на сфери. Како би се конструисала Коебе мрежа, потребно је пресећи равни четири контактних кружница (P_1, P_2, P_3, P_4) да би се добиле све њене тачке. То се може видети на примеру тачке A (Слика 2-33).



Слика 2-33. а) Инверзија у равни x, y мреже, б) конструисана Коебе мрежа преко добијене инверзне стереографске пројекције, в) детаљ конструкције Коебе мреже преко кружница на сфери

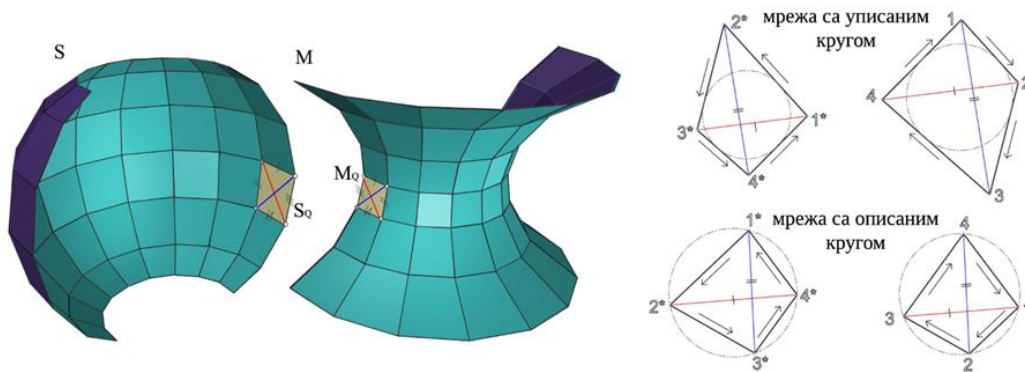
Иако Коебе мреже имају повољне карактеристике за префабрикацију, оне се налазе на сфери која није најзанимљивија двоструко закривљена површ за пројектовање. Изучавање ових мрежа омогућава пројектовање других површи, што је обрађено у следећем поглављу.

2.2.4 Кристофелова дуалност, Коенигсове и изотермичке мреже

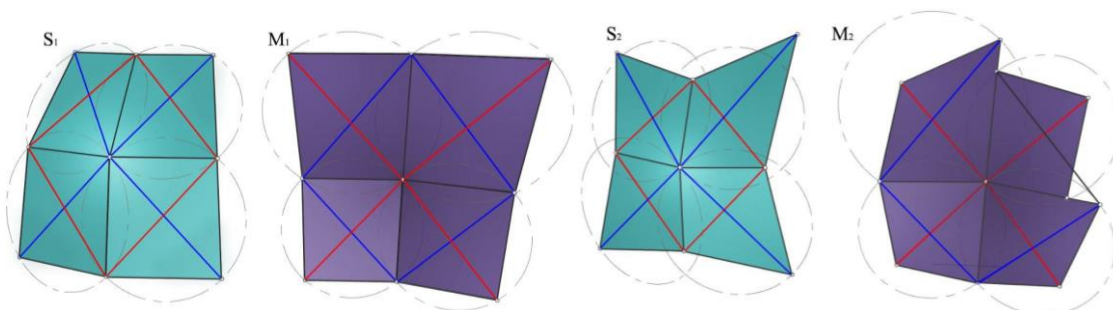
У овом потпоглављу ће бити објашњена теорија дуалних мрежа, њихов значај и конструкција. Како би говорили о дуалним мрежама, најпре би требало објаснити шта је Кристофелова дуалност.

Кристофелова дуалност представља дуалност две мреже где њихови полигони имају супротну оријентацију ивица полигона и као последицу једнакост супротних

дијагонала (Pottmann Helmund et al., 2007). Овај поступак се може посматрати као трансформација једне мреже у другу и друге у прву, уколико поновимо поступак. Начин конструисања мреже се може видети на слици (Слика 2-34а), где се полази од мреже S , а конструише мрежа M која представља њену дуалну. Како би се објаснио начин трансформације, на слици (Слика 2-34а) је на само једном од четвороуглова који припада групи од четири полигона на којима се заснива правило, показана примена ове методе као начин тестирања реципрочне везе. Може се видети са слике да се реципрочни полигони конструишу почев од обрнутог смера цртања страница полигона са супротним паралелним дијагоналама. Иако се овај поступак може применити на сваки полигон засебно, прави тест је поклапање овог правила са групом од четири полигона. Уколико се све тачке реципрочног полигона не поклапају како је већ дефинисано првим полигоном, трансформација се не може применити. Тада једно од решења може бити трансформација почетног полигона како би се добио реципрочни са поклопљеним тачкама које су дефинисане као једна тачка (Слика 2-35).



Слика 2-34. а) Коебе мрежа S са својом дуалном дискретном минималном површи M ; б) Два дуална четвороугла са супротним смером страница и паралелним одговарајућим дијагоналама са примером уписаног и описане кружнице (Тошић et al., 2020)

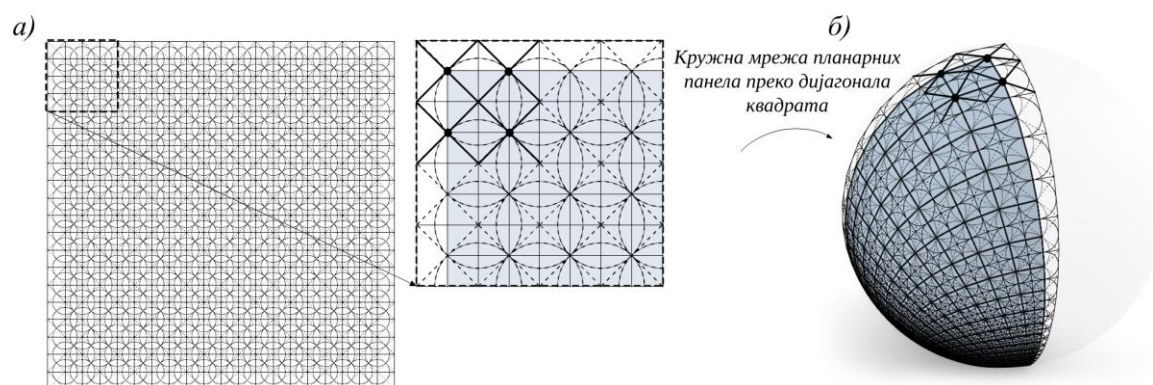


Слика 2-35. Кружна мрежа S_1 са регуларном дуалном мрежом M_1 (лево); Произвољна мрежа S_2 где се поступком конструкције дуалне добије M_2 чије се тачке не поклапају (десно) (Z. Тошић et al., 2019)

Један од значаја ове методе у дискретној диференцијалној геометрији је тај да она директно, без процеса оптимизације, повезује геометријске карактеристике површи са

статичким карактеристикама њене конструкције у простору. Наиме, *дијагоналне мреже* ова два система (основни од кога се креће и реципрочни) су међусобно дуалне, *реципрочно паралелне*, а у статичком систему представљају *реципрочни дијаграм сила* у графичкој статисти (Pottmann Helmund et al., 2007), чију смо конструкцију видели из анализе ТНА методе (Block & Ochsendorf, 2007). На слици (Слика 2-35а) су то црвене и плаве дијагоналне мреже S_1 и M_1 , где се види како се исти штапови који код прве мреже чине полигон (*дијаграм форме*), код друге мреже се спајају у чвор (*дијаграм сила*). Тада постојање реципрочне мреже M_1 имплицира да постоји систем спољашњих сила такав да је резултујући систем у статичкој равнотежи (*спољашње силе примењене на ободу следе из реципрочног дијаграма*). Самим тим, уколико једна дијагонална мрежа има своју дуалну, закључак је да су обе у равнотежи сила (Pottmann Helmund et al., 2007)

Са геометријске стране, јасно је да ово још једна могућност и за конструкцију мрежа са поменутим офсетима које су обрађене у претходним поглављима. То су, пре свега, *кружне* (описане кружнице) и *Коебе* мреже (уписане кружнице) које задовољавају услове префабрикације јер поседују планарне панеле без геометријске торзије. Међутим, поставља се питање како се оне могу искористити и на којим примерима применити.

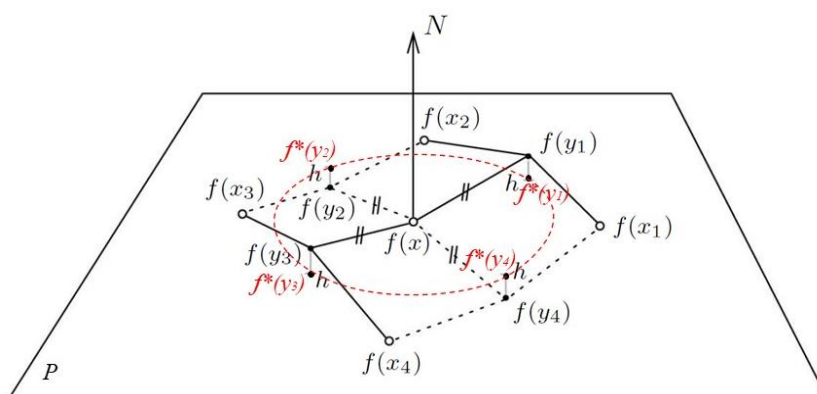


Слика 2-36. а) Подела равни x,y правца са кружном мрежом преко дијагонала квадрата, б) одржана планарност преко кружница инверзијом и инверзном стереографском пројекцијом што чини да је мрежа Кoenigsова

Кристофелова дуалност се не може применити на било којој мрежи, већ само на оној која има могућност за дуалност ове врсте. Те мреже се називају *Кoenigsове мреже*. Њих дефинише геометријска карактеристика да су тачке добијене пресеком дијагонала полигона, који се сустичу у једној тачки, компланарне (Слика 2-36). Оно што је посебно интересно је да су две подврсте Кoenigsових мрежа управо кружне са уписаним и описаним кружницама, поменуте редом: *кружне* – *изотермичке* и *Коебе* мреже (А. I. Bobenko & Suris, 2009).

Ово је лако доказиво уколико се погледа претходни пример конструкције Коебе мреже преко инверзије и инверзне стереографске пројекције. Наиме, почетна мрежа x, y правца има описане кружнице које се могу добити преко дијагонала квадрата (Слика 2-36а). На исти начин као и уписане кружнице, оне су задржане током конформалних пресликавања (Слика 2-36б). Самим тим, како полигони имају описане кружнице задржава се њихова планарност.

Када су у питању *изотермичке мреже*, оне су дефинисане као Коенигсове које имају описане кружнице око темена полигона са конформалном параметризацијом (А. I. Bobenko & Suris, 2009). Уколико се подсетимо све теорије до сада, то значи да су изотермичке мреже заправо дискретне верзије главних праваца кривина тзв. кружне мреже са додатним својством планарности полигона конструисаних дијагоналама те кружне мреже. Ово опет иде у прилог задатом услову префабрикације модула – планарности модула и одсуство геометријске торзије. Анализом приказаног примера Коебе мреже може се доћи до лаког закључка да је она заправо и изотермичка мрежа (Слика 2-36). То показују почетни квадрати који, осим уписане кружнице, могу имати и описану кружницу која се задржава приликом процеса пресликавања.



Слика 2-37. Приказ својстава дискретне минималне површи и доказа на локалном нивоу четири ПК која полазе из исте тачке; Раван која полази из заједничке тачке са нормалом N мора да садржи спољашње тачке $f(x_n)$, док су пројекције крајњих тачака ивица полигона које се сустичу у $f(y_n)$ наизменично једнако удаљене од равни изнад и испод ње за h . Уз то, додаје се услов да пројекције тачака $f^*(y_n)$ на раван P морају припадати истој кружници (обрађена слика из (А. I. Bobenko, 2008))

Као један од типова изотермичких мрежа које ће овде бити коришћене, наведене су *дискретне минималних површи* (дужи назив – дискретна S -изотермичка површ). Дата површ назива се дискретна минимална површ према дефиницији Бобенка, који каже да: „Уколико се ради о дискретној минималној површи, четири тачке које произилазе из супротних крајева линија које деле једну тачку ($f(y_n)$), морају бити једнако удаљене од

средње равни те тачке (h). Због услова пропорције страница, њихове пројекције на средњу раван ($f^*(y_n)$) такође морају чинити једну кружницу” (Слика 2-37) (А. I. Bobenko, 2008).

Да би дискретна изотермичка површ била и минимална површ, мора бити задовољен услов да Коебе мрежа представља њену Гаусову слику. Детаљнија теорема 5.5 и докази се могу видети у раду Бобенка (А. I. Bobenko, 2008). То значи да, полазећи од Коебе мреже, можемо директно добити дискретну минималну површ преко поступка Кристофелове дуалности (А. I. Bobenko, 2008; Pottmann Helmund et al., 2007). У овом раду ће примена Кристофелове дуалности бити одређена методом моделовања, конструктивном геометријом, као што је приказано овде (Слика 2-34).

Из наведеног следи да конструисањем различитих Коебе мрежа и применом Кристофелове дуалности можемо добити различите варијанте дискретне минималне површи. Примери ових конструкција су наведене у прегледу литературе где се може видети конструкција Бонетове и Енпереве површи у раду Потмана (Pottmann & Liu, 2007) као и периодичне минималне површи у раду Сехелмана (Sechelmann, 2007). Са друге стране, нису дефинисани параметри моделовања нити алати у варијације форме приликом дизајна љуски.

На основу детаљне анализе из овог потпоглавља, може се констатовати да су могућности дизајна са дуалним мрежама много веће него што је представљено у досадашњим истраживањима. Ако уклонимо својство минималне површи, добијамо ширу класу изотермичких мрежа. Ако уклонимо својство кружне мреже (ортогоналности) код изотермичких површи, добијамо још ширу класу у коју спадају Коенигсове мреже (Слика 2-38).



Слика 2-38. Шема односа различитих типова дуалних мрежа

Ова чињеница нам пружа велике могућности за проширење дизајна мрежа које задовољавају Кристофелу дуалност. Ова градација је могућа увођењем трансформација које задржавају одређена својства, док се друга губе. Наредно потпоглавље говори о томе.

2.2.5 Мебијусова и пројективна трансформација

У овом раду ће бити имплементирана два типа трансформација, како би се проширио спектар форми за дизајн модуларних љуски. Ово је могуће постићи имплементацијом трансформација и различитом комбинацијом њихових улазних параметара. Из прегледа литературе се може видети само неколицина истраживања која су ову идеју имплементирала на сличан начин у области дизајна двоструко закривљених мрежа љуски (Mesnil et al., 2015, 2018), (Abdelmagid et al., 2023; Mansouri et al., 2023; Тошић et al., 2023). Употреба трансформације је, углавном, у вези са неким својством која она задржава, док се форма мрежне љуске мења. У овом случају, главни критеријум за њихову употребу је да оне не угрожавају карактеристику дуалности мреже, да мрежа остане Коенигсова. Такве су две трансформације: Мебијусова и пројективна трансформација. У овом потпоглављу ће бити дефинисана њихова најважнија својства, као и начин њихове имплементације.

Како бисмо били прецизнији, Мебијусова трансформација (МТ) задржава својство поменутих *изотермичких мрежа* које припадају кружним Коенигсовим. Ово је јасно назначено у раду Бобенка (А. I. Bobenko et al., 2006). Ова појава произилази из чињенице да Мебијусова трансформација задржава конформалну параметризацију површи као и сфере и кружнице, што представља главно својство изотермичких мрежа (А. I. Bobenko, 2008). Мебијусове трансформације, као конформне мапе, чувају ову ортогоналност односа између кривих и кружница, што их чини погодним за задржавање својстава изотермичких површи током трансформације.

Уколико је својство изотермичке мреже задржано, значи да је могуће применити Кристофелову дуалност након Мебијусове трансформације и добити дуалну мрежу почетној. То не би требало помешати са чињеницом да Кристофелова дуалност није имуна на Мебијусову. То значи да уколико применимо МТ на почетну мрежу и њену дуалну, оне су и даље изотермичке али *нису више дуалне једна другој*. На ову чињеницу подсећа Бобекно у свом раду где се може видети и доказ (А. I. Bobenko et al., 2006). Ово иде директно у прилог улози МТ у овом раду, јер то значи да можемо добити више варијанти форми које следе из једне почетне. Ова примена ће бити јасније у трећем поглављу где је приказана имплементација алгорита.

Када је дефинисана значајност и улога у овом раду, можемо да се окренемо дефиницији Мебијусове трансформације. Наиме, Мебијусова трансформација

представља spoj: *инверзије, скалирања и транслације* и, самим тим, преноси линије у кружнице, равни у сфери и кружнице у кружнице (Bender & Goldman, 1975). Такође, веома важно је нагласити да је Мебијусова трансформација конформална (задржава углове између пресечних кружница). У том случају, она се може користити као средство трансформације кружних мрежа, без ремећења кружница као и њиховог међусобног односа.

Постоји више начина за конструкцију Мебијусове трансформације, међутим, ради погодности примене, она се овде користи као Лоренцова трансформација¹². Детаљнија интерпретација геометријског решења се може видети у раду Абделмагида (Abdelmagid et al., 2023). Захваљујући овој конструкцији, Мебијусова трансформација је дата помоћу матрице 5×5 , са k, l, m, n целим бројевима и улазним параметрима a, b, c, d помоћу којих се могу варирати резултујуће добијене форме (2-8).

$$\mu = A^k(\mathbf{a}) \cdot B^l(\mathbf{b}) \cdot C^m(\mathbf{c}) \cdot D^n(\mathbf{d}) \quad (2-8)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1-d^2}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{1-d^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} \end{pmatrix}$$

Са друге стране, за пројектовну трансформацију (ПТ) је познато да задржава својство дуалне, Коенигсове мреже (A. I. Bobenko & Suris, 2009; Pottmann Helmund et al., 2007). Важно је нагласити да то не значи да она задржава својство изотермичких мрежа. Штавише, уколико се на изотермичку мрежу примени ПТ, она остаје Коенигсова, али губи својство кружне мреже и, самим тим, ортогоналности. Исто тако, губљењем кружне мреже губи се својство нуле геометријске торзије, док су панели у равни задржани. Из тог разлога је кључно применити ПТ након процеса офсета, како би и странице модула остале у равни. То је јасније уколико знамо да ПТ задржава својство планарности

¹² У овом контексту, Лоренцове трансформације су трансформације у Минковском простору (четвородимензионалном простору-времену) који укључује једну временску и три просторне димензије.

(пресликава раван у раван) али не и углова између кривих у мрежи. Прва карактеристика је неопходна за Коенигсову мрежу, док је друга кључна, додатна, за изотермичку мрежу.

Њена конструкција је параметризована на следећи начин. Размотримо пројектовање сваке тачке кроз координатни почетак простора R^4 , где је четврта димензија пројективни простор кроз који посматрамо тачку. Тачније, свака тачка је дата хомогеним координатама $[x : y : z : w]$. Уколико је $w = 1$ враћамо се на три познате координате у тродимензионалном простору. Пројективна трансформација је начин да се пресликају тачке у овом простору једна у другу на специфичан начин. Можемо замислити да је то као специјална врста „растежања или скупљања” тачака, где се свака тачка (x, y, z, w) претвара у нову тачку множењем са одређеном матрицом.

Рецимо да имамо матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

и ову матрицу користимо да пресликамо тачке. Када množимо ову матрицу са тачком (x, y, z, w) , добијамо нове координате које изгледају овако:

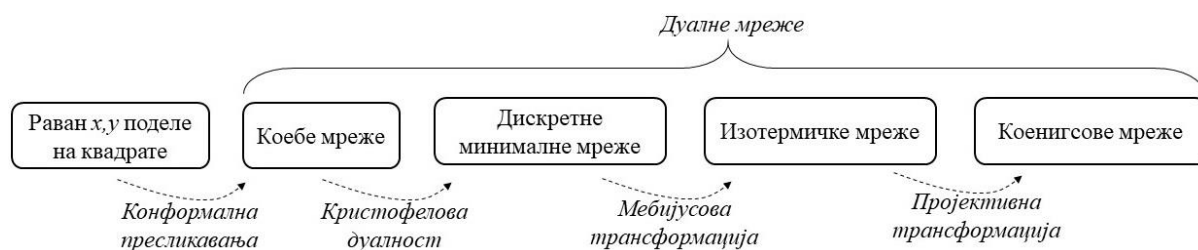
$$\begin{pmatrix} a_1x & a_2y & a_3z & a_4w \\ b_1x & b_2y & b_3z & b_4w \\ c_1x & c_2y & c_3z & c_4w \\ d_1x & d_2y & d_3z & d_4w \end{pmatrix}$$

Ако посматрамо само тродимензионални свет (где је $w=1$), онда нове координате тачке (x, y, z) након трансформације изгледају овако:

$$X^* = \frac{a_1x + a_2y + a_3z + a_4}{d_1x + d_2y + d_3z + d_4}, \frac{b_1x + b_2y + b_3z + b_4}{d_1x + d_2y + d_3z + d_4}, \frac{c_1x + c_2y + c_3z + c_4}{d_1x + d_2y + d_3z + d_4} \quad (2-9)$$

Ова једначина је коришћена за примену пројектовне трансформације у процесу дизајна где су $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4$ улазни параметри за варијацију форме.

Резимирајући последња три потпоглавља приказани су следећи начини конструкције који се могу користити за дизајн љуски дуалним мрежама (Слика 2-39). Ове теоријске основе су коришћене за постављене алате и ширење поља дизајна модуларних љуски Коенигсовим мрежама у потпоглављу 3.2.5.



Слика 2-39. Шема приказа начина конструкције дуалних мрежа које прихватају Кристофелову дуалност

Поред Коенигсових мрежа постоје још три класе површи које су обрађене у форми дискретне верзије главних праваца кривина. О њима се говори у наставку.

2.2.6 Класе површи Дупинови циклиди, Каналне и Монжова површ

У овом потпоглављу представљене су теоријске основе за дизајн дискретних класа површи (мрежа) дефинисаних са бар једним системом раванских кривих. Оне су посебно занимљиве за префабриковано-оријентисан дизајн мрежних љуски, јер је поменута геометријска карактеристика препозната као један од концепта градње мрежних љуски без или са минималном количином скеле (Douthe et al., 2017a; Tellier, Douthe, et al., 2019; Wang et al., 2023). Наиме, носачи конструисани преко равних кривих се могу користити као потконструкција на основу које се дограђују остали елементи.

Исто тако, процес префабрикације код линијских носача је једноставнији јер је елемент у равни, такође нема геометријску торзију, а неки од њих представљају део кружнице, што умногоме олакшава процес префабрикације носача и његову прецизност. У овом случају, једина потребна информација за производњу елемента је радијус кружнице и његова дужина. Уколико су оба правца система кривих равна, додатна предност је што у случају више слојева потконструкције (као нпр. код просторних решетки) могу бити на истој удаљености (имају исти офсет). Ова особина омогућава стандардизацију конструктивних елемената веза (Tellier & Baverel, 2019). Исто тако, конструисане криве нису било које, већ представљају главне правце кривина, где све поменуте геометријске карактеристике планарности, нула геометријске торзије и ортогоналности важе.

Постоји више класа површи са овим карактеристикама у које се убрајају нпр. транслаторне и ротационе. Међутим, како су њихове конструкције тривијалне нису детаљније обрађиване. Као једне од најинтересантнијих за примену у дизајну издвојене су *Дупинови циклиди*, *Каналне површи* и *Монжова површ*. Прва група има оба правца главних кривина у равни, док друге две само једну. Штавише, у случају површи циклида

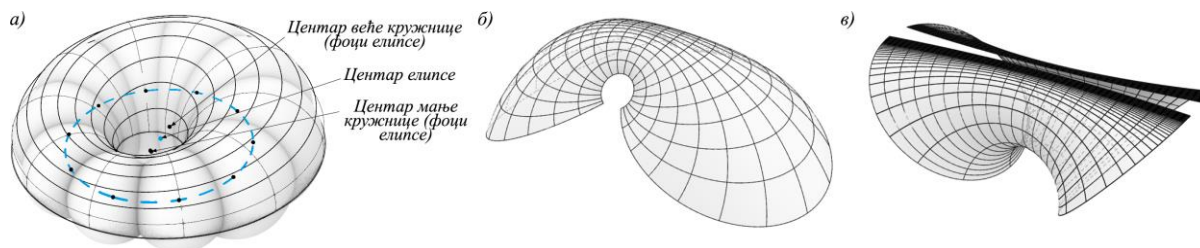
и Монжа један правац кривих су, не само главни правци кривина, већ могу бити и *геодезијске криве* (Chandru et al., 1989; Darboux, 1887; Monge, 1850). То значи да се, уз додатне услове нула геометријске торзије и планарности, нормала саме криве поклапа са нормалом криве на површи, а с обзиром на то да су то криве у равни, и њен офсет припада истој равни. Ова карактеристика је важна за производњу, јер означава да, уколико примењујемо правоугаони попречни пресек дуж целог носача, имамо једну раван симетрије, тј. можемо га произвести да буде прав и само савити у његовој равни.

Када говоримо о 3Д штампи бетона, цео носач можемо одштампати на равной платформи, а уколико користимо модуле, њихове контактне странице, такође, припадају истој равни. Исто тако, код дискретизације кривих на полигоне оне се могу се конструисати од равних трака тангентних на површ (Schling et al., 2018). Када су у питању конструктивне предности, постављање носача у правцима геодезијских кривих на површима које немају геодетску кривину, може помоћи у избегавању превеликих напона и локалних нестабилности (Montagne et al., 2021).

У овом потпоглављу су дефинисана главна својства и проблеми три класе површи за које су развијени алгоритми конструкције у трећем поглављу. Као и код других, фокус је на њиховој дискретизацији преко главних праваца кривина, како они омогућавају неопходне услове префабрикације модула.

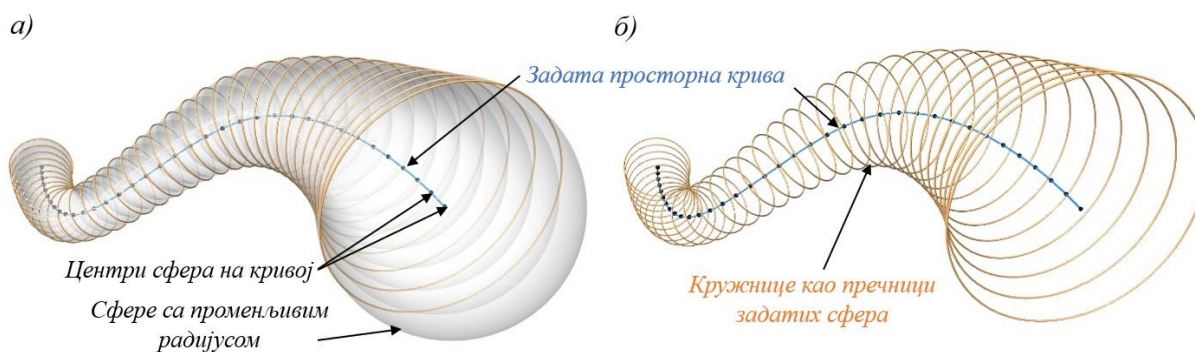
Прва посматрана и најједноставнија класа површи одабрана за дизајн је позната као *Дупинов циклид*. Конструкција ових површи се врши скупом сфера променљивог пречника које се крећу по елипси (Слика 2-40а), *елиптични тип* (Слика 2-40б) или параболи, *параболични тип* (Слика 2-40в). Као последица овакве конструкције сферама, њихова параметријска мрежа главних праваца кривина представља делове кружница чије се тангенте секу под правим углом, што је још једна предност у области префабрикације. На слици (Слика 2-40а) се, такође, може видети мрежа главних кривина и њихова конструкција у зависности од положаја центра веће и мање кружнице и њиховог пречника. Овај модел је добијен дефинисањем елипсе, а затим пронађен њен један и други фокус као центри две кружнице у односу на који су сфере тангентне. За услов када је елипса круг и сва три центра су у истој тачки, тада је циклид посебан случај, торус. Ова веза није случајна, јер се дупинов циклид може добити и применом инверзије на површ торуса која задржава кружнице, али и помера њихове центре. На тај начин конструише се асиметрична конструкција кружница у простору које у својој дискретној

верзији дају мрежу равних четвороуглова. Ова параметризација је дефинисана и у диференцијалној геометрији за сваку координату тачке на површи и задати домен. За детаље ових дефиниција и њихових различитих конструкција, позивам се на следеће референце (Abbena et al., 2017; Chandru et al., 1989; Eisenhart, 1909).



Слика 2-40. а) Конструкција Дупинових циклида преко скупа сфера са центром на елипси; б) Дупинов циклид елиптично-хиперболичног типа; в) Дупинов циклид параболичног типа

Чак и без употребе математичких формула, ограничења у дизајну постоје због саме параметризације. Манипулација формулама је велики изазов како за архитекте, тако и за математичаре, због основних ограничења пројекта, као што су распон конструкције и максимална величина префабрикованих панела. Иако је могуће развити интуицију у раду са овим приступом, реална архитектонска ограничења још увек нису имплементирана. Друго ограничење су могуће форме добијене овом параметризацијом дискретне љуске, где су облици дефинисани типом површи и њеним карактеристикама.

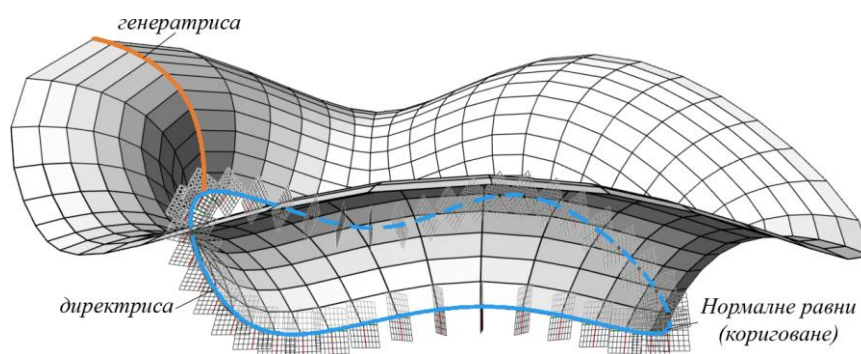


Слика 2-41. а) Принцип конструкције Каналне површи преко сфера променљивог радијуса; б) Кругови као пречници задатих сфера управне на задату просторну криву

Дупинови циклиди се убрајају у специјални случај веће групе површи под називом Каналне површи (Hartmann, 2003; Peternell & Pottmann, 1997). Њихова конструкција се посматра као кретање сфера са променљивим радијусом по задатој кривој – директриси (у равни или простору) где се центри сфера налазе на тој кривој, за разлику од Дупинових циклида где је та крива кружница (Слика 2-41). Уколико су радијуси исти, ради се о цевастој површи (енгл. pipe surface). Каналне површи се убрајају у класу површи са једним правцем главних кривина у равни. Тај правац представљају

управо кружнице сфера које се крећу по директриси. Ово својство ће бити коришћено приликом дефинисања алгорита за конструкцију њихове дискретне мреже.

Последња класа површи у овом поглављу је најсложенија и најинтересантнија за архитекте по слободи коју даје у дизајну. Она се назива *Монжова површ* (Monge, 1850) и дефинисана је од стране француског математичара Гаспарда Монжа. Она спада у групу површи са једним системом главних праваца кривина у равни. Њена конструкција се заснива на задавању две криве: једне профилне која је у равни *генератрисе* и друге просторне која представља *директрису*. Затим профилна крива клизи по просторној у нормалној равни (из Френетовог триједра (Abbena et al., 2017)) у свакој тачки те криве како би се генерисала површ (Слика 2-42). Нормална раван криве у тачки се конструише преко два вектора у тачки: први дефинише нормалу, а други бинормалу.



Слика 2-42. Дефиниција Монжове површи преко две задате генератрисе и директрисе где се корекцијом Френетових равни конструише ПК мрежа

Међутим, проблем се јавља јер свака задата просторна крива има извесну торзију, те приликом анализе односа суседних нормалних равни њеном дужином између скупа поменутих вектора постоји јединствени ротациони угао θ . Како би се добила Монжова површ, главни изазов конструкције површи је одрадити корекцију тог торзионог угла θ ротирањем нормалних равни уназад за тај угао. Ово је познат проблем дефинисан у диференцијалној геометрији (Eisenhart, 1909). Након корекције угла торзије, нормалне равни су тако постављене да је у њима могуће *уцртати* профилну криву. Након овог поступка, добијена површ неће имати геометријску торзију између вектора који чине раван.

Проблем примене ове методе у архитектури лежи у томе што је за пројектанте тешко и непрактично постављати дизајн дефинисањем математичких формула почетних кривих. Друго ограничење је имплементација, која захтева коришћење нумеричке диференцијације из програмерских библиотека за израчунавање ротационог угла θ . Ово

представља посебну област истраживања и може довести до неповољних резултата код сложенијих задатих просторних кривих.

Овим потпоглављем завршавају се теоријске основе дискретних мрежа које се користе у раду. Након генерисања дизајна модуларних љуски, мултифункционална оптимизација помаже у проналажењу одговарајућих улазних параметара за конструктивни одговор љуске. Основе метода које се користе биће објашњене у наредном потпоглављу.

2.2.7 Методе и алати мултифункционална оптимизације

У овом потпоглављу су ближе одређене методе мултифункционалне оптимизације које се користе како би се пронашла оптимална варијанта дизајна за дате услове пројекта. Процес оптимизације се врши како би се добила оптимална конструктивна својства љуске. Детаљније о самом процесу и његовој вези са дизајном модуларних мрежа говори наредно поглавље. Најпре је неопходно рећи нешто о самим методама које ће бити примењене и тестиране.

Прва метода мултифункционалне оптимизације назива се *метода Бокса-Вилсона* – БВ (енгл. *Response surface methodology – RSM*). До сада није пронађен други пример имплементације RSM-а у архитектури, док се један јавља у пољу аеродинамике (Yadav et al., 2017). Како би избор и имплементација ове методе била јасна, потребно је објаснити својства методе БВ-а (Austern et al., 2018). Ова метода представља групу математичких и статистичких техника које дефинишу односе између одговора (резултата који тражимо) и независних промењивих (улазних параметара који утичу на резултат). Најважније је да метода БВ током процеса може да истражује утицај независних промењивих самостално, као и у различитим комбинацијама. Уколико постоје неколико улазних параметара геометрије, као резултат се тражи комбинација која може дати оптималне резултате. Ово је један од главних разлога примене ове методе, како у нашем случају можемо имати различите врсте улазних геометријских параметара који имају независни утицај на излазне параметре. Такође, математички модел је намењен проналажењу међузависности параметара и комбинације њиховог утицаја на излазне параметре за оптимизацију, што, такође, одговара типу проблема. Назив методе у наслову на енглеском потиче од графичког приказа математичког модела. Типична једначина би изгледала овако:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \varepsilon \quad (2-10)$$

где је f непозната функција одговора y и $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ су n независних променљивих. ε је статистичка грешка која представља друге изворе варијабилности које не подразумева функција f . Ово може узети у обзир појаве као што су грешке у мерењу, док у овом случају то могу бити толеранције (прецизност) у производном процесу. Излазни параметар y или одговор у овом случају представљају посматрани конструктивне карактеристике (максималне деформације, напона, масе). Претпоставља се стандардна нормална дистрибуција (средња вредност 0 и варијација 1). У пракси, да би се пронашла функција зависности између вишеструких улазних променљивих и оптималних одговора, мора постојати довољно комбинација тестова како би се могао дефинисати математички модел за предвиђање. Ово захтева израчунавање вредности одговора (y) са различитим комбинацијама улазних променљивих ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$). У зависности од типа траженог одговора, налази се максимум или минимум функције f и развија математички модел који генерише најбољу комбинацију променљивих за наш одговор.

Да би метода дала успешан резултат, неопходно је одредити оптималне домене (опсеге вредности) и тип улазних параметара који могу као резултат дати максималним (или минималним) функције у одређеном интересном пределу, R (Austern et al., 2018). Што је бољи избор улазних параметара модела, већа је шанса да се одреди вредност оптимума (Khuri & Mukhopadhyay, 2010). Винет и Жеданов (Bezerra et al., 2008) детаљно објашњавају карактеристике методе БВ-а.

Друге две методе су базиране на додатку софтверског пакета ГХ за оптимизацију. Први се назива Галапагос (Galapagos) и може се наћи као компонента у ГХ развијена од истог аутора Рутена. Галапагос је базиран на већ поменутом моделу *генетских алгоритама* где се као улазни подаци могу задати више параметара, док је алгоритам фокусиран на одређивање минимума или максимума једног задатог кријеријума (у овом случају квантитативне вредности конструктивних параметара). Укратко, Галапагос покреће оптимизацију насумично постављајући вредности улазних параметара за прву генерацију ($G[0]$). Кроз итеративну петљу, функција прилагођености (*енгл. fitness function*) се израчунава за сваког појединца у $G[n]$. Појединци или преживљавају до следеће генерације или се спајају како би произвели потомство, вођени селекцијом партнера, спајањем и мутацијама.

Процес се наставља све док се не испуне критеријуми за прекид, као што је достизање максималног броја генерација или стагнација. Овај начин дефинисања методе на бази природне селекције, може сачувати решења великог потенцијала кроз генерације. Може се рећи да он имитира процес еволуције на дигиталан начин, тражећи оптимална решења унутар дефинисаног простора (Rutten, 2007). У овом случају, он се користи тако што се улазни параметри дизајна у форми домена нумеричких вредности (енгл. *slider*) са дефинисаним коначним доменима додају као параметри варијације на основу којих се генеришу решења у Галапагосу. Затим се убацује један од параметара критеријума који би требало оптимизовати. Потребно је још задати да ли се тражи функција минимума или максимума и програм стартује са прорачуном. Као резултат се конструише генерисана мрежа на основу различитих комбинација изабраних улазних параметара које Галапагос предлаже као оптималне.

Други додатак за софтверски пакет ГХ који је имплементиран се зове Октопус (енгл. *Ostopus*) развијена од стране Вирлингера (Vierlinger, 2013). За разлику од претходног, Октопус користи *еволутивне алгоритме* за истраживање простора дизајна. Он попуњава почетну генерацију насумичним решењима и итеративно оцењује њихов учинак у односу на више циљева, односно оптимума. Кроз еволуционе процесе као што су спајање и мутација, Октопус усавршава ова решења, са циљем да пронађе Парето фронт, скуп оптималних или скоро оптималних решења где ниједно решење није супериорно у односу на друго у свим циљевима. Корисници могу дефинисати циљеве и ограничења, водећи Октопус ка решењима која ефикасно балансирају конкурентске критеријуме дизајна. За разлику од Галапагоса, дизајниран је да истовремено ради са више оптимума где не постоји њихов максималан број. Међутим, број циљева може утицати на перформансе алгоритма оптимизације, јер се простор за претрагу повећава са сваким додатним циљем. Вирлингер помиње у свом раду да је Октопус коришћен са до пет циљева, док се софтверска архитектура може се прилагодити или заменити другим алгоритмима погоднијим за различит број циљева (Vierlinger, 2013). Из тог разлога, овај алгоритам представља одговарајуће средство за тражење најповољнијих варијанти мрежних љуски.

Сада када смо упознати са свим теоријским основама неопходних метода за рад, последње потпоглавље наглашава префабрикацијске и конструктивне бенефите посматраних дискретних мрежа.

2.2.8 Префабрикацијски и конструктивни бенефити дискретних мрежа различитих офсета

Повољне геометријске карактеристике приказаних мрежа су директно одговорне за њихове добра својства у процесу префабрикације и самим тим и за велико интересовање за њихову употребу. Наиме, када се ради о модуларним конструкцијама и када су оне двоструко закривљене, поставља се питање геометрије модула. Ове мреже својим офсетима омогућавају једноставније процесе производње код модула јединствене геометрије (индивидуалне). Једна од очигледних је њихова планарност као и просечни угао између ивица који је близу правом углу, па се тиме избегавају оштре везе у чворовима. Све ово омогућава боље уклапање елемената као и веза у процесу производње. Исто тако, различите карактеристике паралелних мрежа (офсета) су повезане са различитим дискретним елементима у двоструко закривљеним љускама:

Офсет тачака (кружна мрежа) -> Елементни чворова

Офсет панела (коничне мреже) -> Елементи панела

Офсет ивица (Коебе мреже) -> Елементи штапова

Ова веза зависи директно од константних дистанци између ових геометријских елемената дискретне мреже које омогућавају да се ови елементи произведу са константним величинама, што умногоме олакшава процес производње. Тиме се могу добити чворови који су универзални за целу конструкцију, затим панели који су исте дебљине, као и греде исте висине у мрежној љусци (Pottmann Helmund et al., 2007).

Иако су геометријске карактеристике најинтересантније код ових система, оно што их чини веома успешним у методама за оптимизацију конструкција су и њихове статичке карактеристике и предности. Наиме, главни правци кривина у овим површима представљају и оптималне позиције за чворове веза између грађевинских елемената од којих се граде и рачунају ове конструкције (Pottmann, 2013). У случају мрежних љуски то могу бити чворови у којима се спајају просторни штапови, док се у случају бетонских модуларних љуски то називају тачке спајања четири елемента. Штавише, ове карактеристике директно утичу и на формирање појединачних елемената (*штапова или панела*) као и целе структуре.

Када су панели у питању, као што већ следи из геометријских карактеристика, они могу бити у равни, што олакшава процес производње. Како све ове мреже

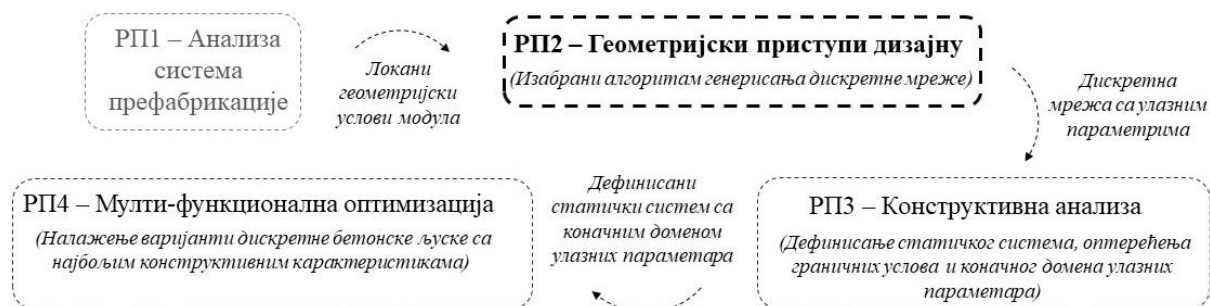
представљају дискретну верзију ортогоналних праваца кривих на површи, коришћењем система поделе у њиховом правцу избегавају се оштри углови између ивица елемената љуске. Један од највећих проблема је поменута [геометријска торзија](#), која може утицати на другачију прераспodelу сила преко већих толеранција у процесу производње и тежег остваривања веза између елемената од оног што је предвиђено прорачуном.

Анализирана метода *Кристофелове дуалности* служи за налажење дуалне мреже која представља реципрочни дијаграм сила полазне мрежне љуске и тиме нуди статички повољну расподелу штапастих елемената за константно једнакоподељено оптерећење. У исто време, ове мреже су параметризоване преко правца главних кривина, тако да, у зависности од примера, могу имати паралелену мрежу: *тачака, ивица или панела*.

Овим завршавамо упознавање са истраживањима и методама дискретних мрежних љуски, које представљају основу за даље истраживање и главни допринос ове тезе. Главни допринос се огледа у развоју оригиналног приступа префабриковано-оријентисаног дизајна, који ће бити детаљно разматран у наредном поглављу.

3 ПРЕФАБРИКОВАНО-ОРИЈЕНТИСАН ДИЗАЈН

Ово поглавље представља синтезу истраживања из претходног поглавља и нових оригиналних сазнања, приказујући главни допринос тезе. Како је један од главних потциљева овог истраживања контрола над локалном геометријом модула, све развијене стратегије потпадају под [префабриковано-оријентисан дизајн](#). Прва два радна пакета имају фокус на геометријске методе и услове, док друга два обезбеђују оптималан одговор конструкције. Из тог разлога овај процес спада у [комбиновани приступ](#). Он се може сагледавати на нивоу четири различита *радна пакета* (РП) (Слика 3-1).



Слика 3-1. Шема радних пакета (РП) њихових односа и размене информација

У [РП1](#) је спровођена анализа система префабрикације бетонских модула за које је потребно конструисати стратегије дизајна. Овај процес је већ одређен у потпоглављу 1.8.2 где је представљена технологија префабрикације 3Д штампаног бетона. Из ове анализе се добијају главне информације о неопходној локалној геометрији модула: *планарност, нула геометријске торзије, величина модула и углови између ивица*. У оквиру РП1 одрађена је анализа процеса префабрикације као и специјалних услова који

диктирају услов *скалабилности* и *адаптабилности*. Ова анализа је неопходна након сваког процеса промене или развоја услова технологије.

На основу дефинисане локалне геометрије модула развијени су различити алгоритми за генерисање дискретних мрежа као део [РП2](#). Он се бави развојем и применом различитих алгоритама насталих као развој дефинисаних геометријских метода (поглавље 2). Као што је претходно назначено, сви алгоритми служе за конструкције различитих мрежа које представљају дискретне верзије главних праваца кривина. То су: *алгоритам кружне мреже (АКМ)*, *алгоритам Кoenигсових мрежа*, *алгоритам Дупинових циклуда*, *алгоритам Каналних површи* и *алгоритам Монжове површи*. Код сваког од ових алгоритама постоје дефинисани улазни параметри дизајна, дефинисани у алатима за њихово коришћење, који се користе у процесу пројектовања. Ове информације се преносе у наредни радни пакет.

Као резултат РП2 добија се *генерисана геометрија* коју би требало материјализовати, одредити граничне услове и оптерећење за конструктивну анализу ([РП3](#)). Она подразумева дефиницију статичког система модуларне љуске, одређивање граничних услова и случајева оптерећења. Дефинисан параметрисан дизајн је потребно испитати на основу преузетих *улазних параметара дизајна* на конструктивне карактеристике. Циљ овог испитивања је искључити варијанте форми које дају неадекватне резултате статичке анализе (*нпр. прекорачени напони или деформације*). Резултат РП3 у форми *коначног домена улазних параметра* као и *дефинисаног статичког система* се преносе у последњи РП4.

Последњи [РП4](#) састоји се од имплементације мулти-функционалне оптимизације у сврху налажења варијанти дизајна (*глобалне форме*) са најбољим конструктивним карактеристикама конструкције.

Приказан процес префабриковано-оријентисаног дизајна са четири различита радна пакета је развијен у облику две стратегије. Оне се тичу методологије приступа дизајну и начина комбиновања техника за дизајн модуларних љуски слободне форме у складу са изабраним системом префабрикације. У том смислу, дефинисана су два могућа правца: *пре-рационализација* и *нови – хибридни принцип*. О њима говори наредно потпоглавље.

3.1 Две развијене стратегије дизајна – комбиновани приступ

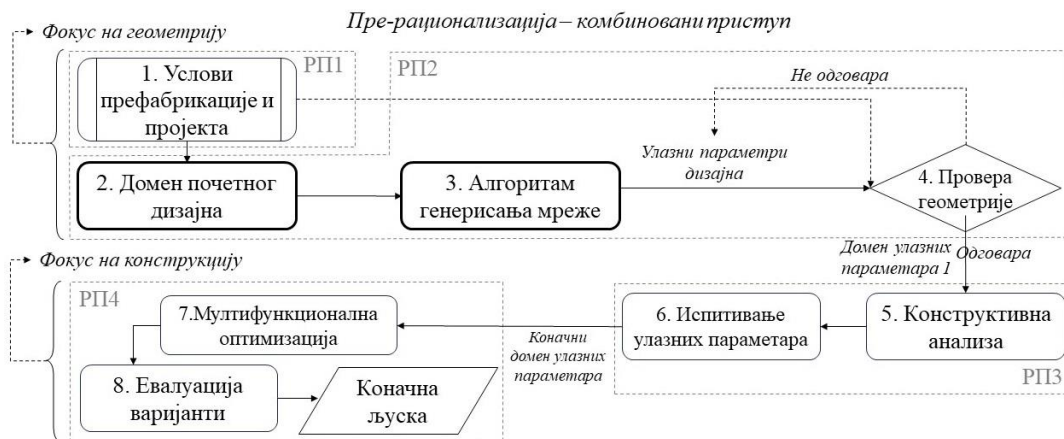
Двоструко закривљене бетонске љуске ретко се користе због сложености њихове градње и геометрије, која захтева аналитичку методологију од дизајна до префабрикације. Овај проблем тражи развој геометријских метода и посебних стратегија дизајна. Главни изазов је усаглашавање геометрије са начином префабрикације, узимајући у обзир флексибилност и ограничења производног процеса. Пројектанти морају применити систематски приступ због сложене геометрије која нуди много могућих решења. У овом делу ће бити дефинисан поступак развијене *комбиноване методе* у случају геометријске *хибридне стратегије* и *пре-рационализације*. Ове стратегије су развијене како би се ближе дефинисали кораци приликом примене радних пакета. Да се подсетимо, један од главних закључака на крају поглавља 2 је да се конструкције љуски не могу третирати само према *геометријском* или само према *конструктивном* критеријуму, већ да је неопходно узети у обзир оба критеријума. На основу тога је развијен поступак који је овде приказан за два случаја.

Први је већ поменут и представља процес *пре-рационализације*. Примена овог приступа је адекватна уколико не постоје строги критеријуми почетне, задате геометрије. Процес се састоји од осам корака који потпадају у претходно поменуте радне пакете (Слика 3-2). Први корак представља први радни пакет анализе услова префабрикације као и пројекта. Стандардни услови пројекта као што су: намена објекта, функција, распони, неопходна квадратура, естетика могу да учествују у дефиницији *домена почетног дизајна* (корак 2). Овај појам означава све класе мрежа или површи које могу да дођу у обзир као решење модуларне бетонске љуске. Како би се дошло до домена почетног дизајна, потребно је испитивати геометријске карактеристике на локалном нивоу модула (елемента за префабрикацију). У случају овог рада, речено је да су то дискретне верзије мрежа главних праваца кривина. На основу расположивих и развијених алгоритама могу се испитивати различите форме и могућности дизајна са њима. Након што се један од њих изабере, уз помоћ развијених алата се генерише мрежна љуска (корак 3).

Геометрија модула се проверава на услове префабрикације како би се дефинисао домен улазних параметара 1 (ДУП1) (корак 4). Конструктивна анализа је пети корак где се обављају све активности у вези са прорачуном конструкције љуске дефинисане у РП3. Затим се за ДУП1 испитује конструктиван одговор љуске (корак 7) како би дефинисао

коначни домен улазних параметара. Он означава домен величина сваког од параметара који се користи за наредни корак.

Дефинисани статички систем и коначан домен улазних параметара се преноси у процес мултифункционалне оптимизације (корак 7). Након ње се могу добити више варијанти решења, које се евалуирају у оквиру различитих геометријских и конструктивних параметара (корак 8). Као резултат се добија коначна геометрија бетонске љуске.



Слика 3-2. Шема развијене комбиноване методе са корацима од дизајна до префабрикације конструкције љуски слободне форме за случај пре-рационализације

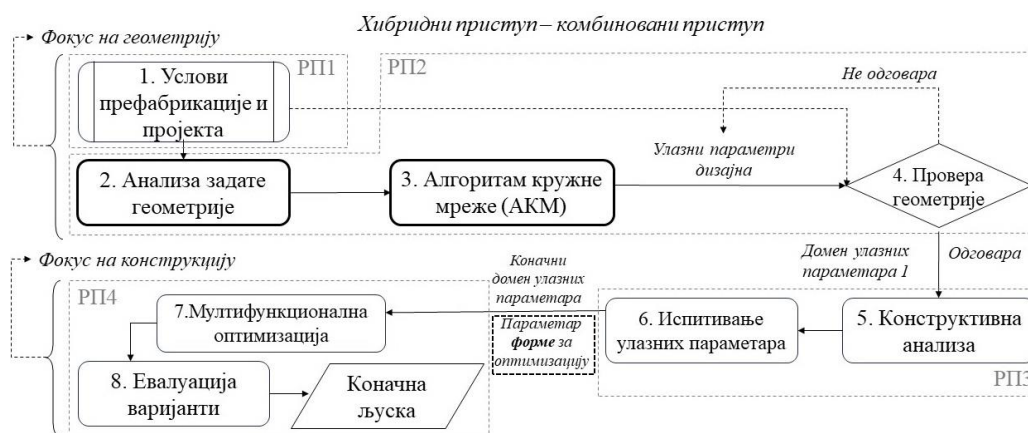
Важно је приметити да се прва четири корака фокусирају на задовољавање геометријских карактеристика модула како би процес префабрикације био могућ, што повећава контролу над локалном геометријом модула. Друга четири корака су усмерена на статички одговор конструкције, са циљем добијања најбоље варијанте модуларне дискретне љуске. Већ је дефинисано да ова два фокуса заједно чине *комбинован приступ* што је и постављено као циљ овог рада. Стратегија пре-рационализације је већ позната у смислу предефинисане геометрије која се користи за дизајн. Међутим, у овом истраживању је додата конструктивна евалуација геометрије како би се омогућила и, у неким случајевима, доказала њена конструктивна ефикасност.

Истражујући различите приступе дизајну, познато је да постоје две супротне стратегије. То су већ наведене *Top-down* (пост-рационализација) и *Bottom-up* (пре-рационализација). Такође је речено да прва има предност јер дозвољава предефинисану геометрију дизајна, док се у случају друге постиже већа контрола над локалном геометријом модула. Како би спојили предности обе стратегије, уводи се група *хибридних приступа*. Идеја је да се овај приступ користи за задату почетну геометрију

(*Top-down* својство), док се користи алгоритам за генерисање мреже који конструише модуле погодне за штампу (*Bottom-up* својство). Потреба за овом комбинацијом приступа постаје кључна, јер су ограничења производње услови који се морају превазићи, али у исто време би било могуће успоставити дизајн са кључним естетским и пројектанским условима.

Хибридни приступ се може применити уколико је већ задата жељена геометрија љуске. На који начин се она онда разликује од методе класичне пост-рационализације? У случају класичне пост-рационализације задатак гласи: *Извршити модуларизацију задате љуске како би се добили модули који се могу префабриковати*. Када је хибридни приступ у питању, задатак је преформулисан у: *Генерисати модуларну љуску која је што ближе задатој форми, где локална геометрија модула одговара условима префабрикације*. Ове нијансе ће бити јасније код примене ове стратегије на прве две студије случаја.

Најпре би требало сагледати кораке хибридне стратегије (Слика 3-3). Он је веома сличан првом, са само пар разлика у почетним корацима и на крају. Наиме, код њега не постоји домен почетног дизајна већ се успоставља *анализа задате геометрије* (корак 2), а затим користи алгоритам генерисања мрежне љуске. За разлику од приступа пре-рационализације, где се може користити сваки од развијених алгоритама, овде је могуће користити само *алгоритам кружне мреже (АКМ)*. Њему је посвећено посебно потпоглавље. Све остале фазе су исте са разликом да у процесу мултифункционалне анализе постоји још један додатни *параметар форме* који се узима у обзир. Он нам говори колико је генерисан дизајн близу почетног и обезбеђује минималну разлику.



Слика 3-3. Шема развијене комбиноване методе са корацима од дизајна до префабрикације конструкције љуски слободне форме за случај хибридног приступа

Овим су дефинисане обе стратегије префабриковано-оријентисаног дизајна које се убрајају у комбиноване методе и дефинишу кораке за имплементацију радних пакета. У наредном делу поглавља је разрађен детаљније сваки од РП, где се најпре креће са најзначајнијим РП2.

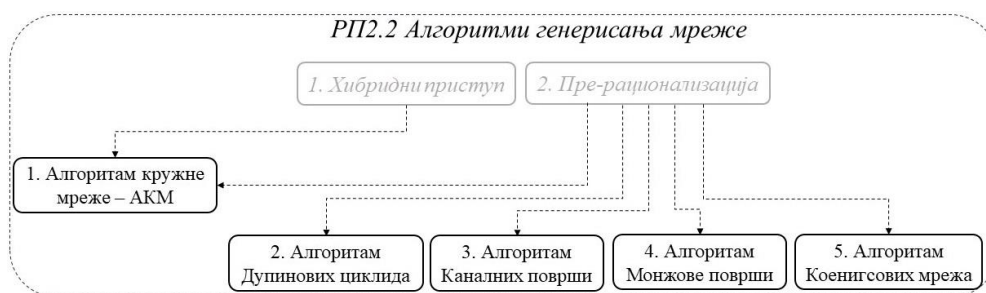
3.2 Развијене геометријске методе за конструкцију дискретних површи: радни пакет 2

У овом поглављу је детаљније одређен радни пакет 2 (РП2) (Слика 3-4). Он се састоји од три потпакета, где су сваки од њих већ приказани као кораци стратегије пре-рационализације или хибридног приступа. Први [РП2.1](#) означава анализу задате геометрије у случају хибридног приступа. Уколико нема стриктно дефинисане почетне форме љуске, примењује се пре-рационализација, где се у том случају дефинише [домен почетног дизајна](#). Овај процес дефинише мреже које се могу користити за процес дизајна на основу услова пројекта и система префабрикације.



Слика 3-4. Шема радног пакета 2 са потпакетима

У оба случаја се користи један дефинисан *алгоритам генерисања мреже* како би се добила модуларна љуска (РП2.2). У случају хибридног приступа могуће је употребити само *алгоритам кружне мреже* ([АКМ](#)), док је код пре-рационализације могућа имплементација, поред првог, и следећих алгоритама: [алгоритам Дупинових циклуда](#), [Каналних површи](#), [Монжове површи](#) и [Кoenigs-ових мрежа](#) (Слика 3-5). Важно је напоменути да сви алгоритми представљају дискретну верзију главних праваца кривина различитих типова мрежа. Ово је методолошки правац који је раније дефинисан због локалних геометријских услова модула за префабрикацију. Разноликост мрежа долази из дефинисаног потциља проширења поља дизајна (доступних фомри) модуларних љуски са високом контролом локалне геометрије модула.



Слика 3-5. Слика шеме свих алгоритама генерисања дискретних мрежа развијених у радном пакету 2.2 са њиховом применом у две стратегије

Како би се генерисале приказане мреже, развијени су алати за параметријски дизајн. Сваки од алгоритама има посебне улазне параметре који дозвољавају манипулацију формом. У радном пакету 2.3 ([РП2.3](#)) они се могу испитивати како би се одредио домен улазних параметара 1 (ДУП1) (Слика 3-4).

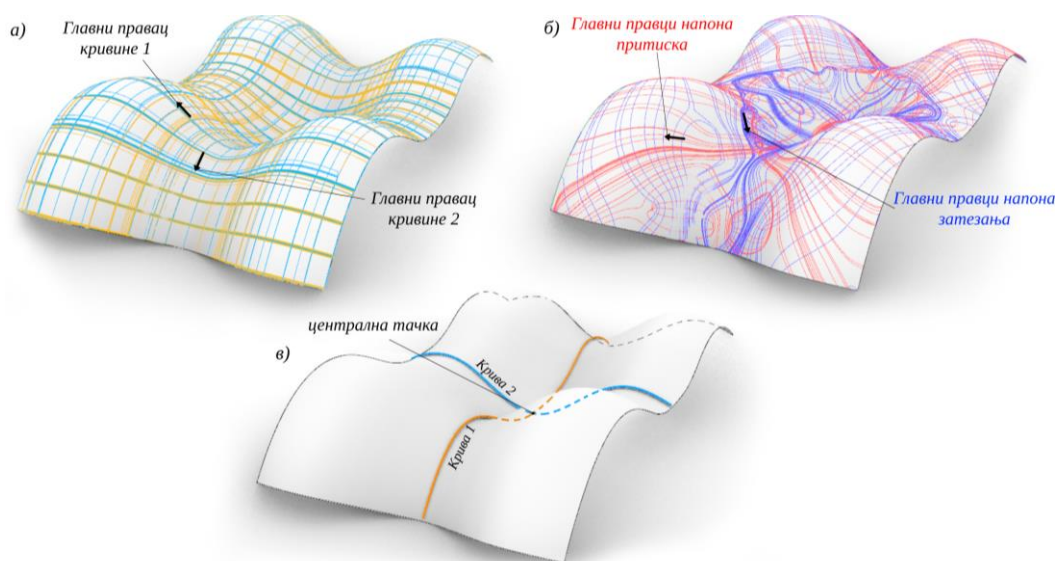
У наставку је дефинисан сваки од ових радних пакета. На првом месту је РП2.1 хибридног приступа у коме се обавља геометријска и конструктивна анализа задатог дизајна.

3.2.1 Геометријска и конструктивна анализа почетног дизајна: радни пакет 2.1 хибридног приступа

Приликом примене хибридног приступа где постоји задати дизајн, две главне групе карактеристика би требало испитати: *геометријске* и *конструктивне карактеристике*. Овај процес углавном има већи значај код приступа као што је *Top down*, али се може применити и код остала два приступа. У већини случајева служи као фактор евалуације почетног дизајна како би се избегла решења која не би могла дати повољне коначне резултате. Овај принцип је већ анализиран код многих метода у поглављу 2. У овом случају ради се о потребним геометријским карактеристикама модула за производњу и статичке ефикасности конструкције.

Почиње се са предложеним дизајном континуалне љуске, где су сви конструктивни елементи потребни за прелиминарни прорачун дефинисани, како би се одредила могућа стратегија сегментације. На основу већ анализираних геометријских карактеристика слободних површи у поглављу 2.1.2.1 познато је да главни правци кривина одређују најповољнију параметризацију слободних површи. Такође, изведен је закључак да је планарност модула једна од најзначајнијих геометријских карактеристика производње чије ивице одређују главни правци кривина. У исто време, из анализираних

метода у поглављу 1.6.1 сазнајемо да ефикасност конструкција љуски зависи од оптималне искоришћености материјала у попречном пресеку на месту највећих сила које нам показују *правци главних напона*. У случају модуларне конструкције, лако је закључити да би позиционирањем ивица модула на место највећих сила могли добити ефекат ребра и били у могућности да тањом испуном оптимизујемо употребу материјала. Из ових разлога као и услова префабрикације важно је утврдити да ли су главни правци закривљености и напона у почетном дизајну близу један другом. Анализирана истраживања из комбинованих метода су се већ бавила овом тематиком (поглавље 2.1.3).

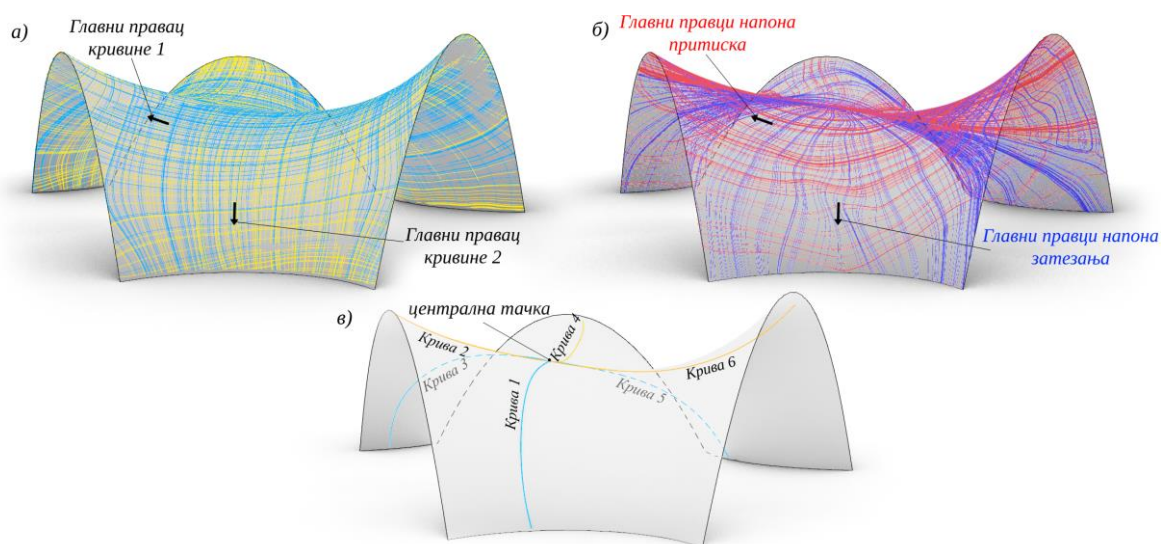


Слика 3-6. Пример конструкције љуске а) главни правац закривљености и б) главни правци сила нису близу в) потенцијалне почетне криве за генерисање кружне мреже

Како би се илустровао поступак анализе приказана су два могућа случаја. На слици (Слика 3-6а и Слика 3-6б) приказан је пример конструкције љуске где се поменута два правца главних кривина и главних напона не поклапају. Не само то, већ се на слици (Слика 3-6б) јасно види хаотична расподела главних напона где би евентуална оптимизација попречног пресека у овим правцима била немогућа. Овакав резултат показује да конструкција има мањи потенцијал за оптимизацију за задат геометријски задатак. То значи да геометрија површи није усаглашена са капацитетом конструкције (*није оптимална*) без обзира на коришћену методологију модуларизације и конструктивне оптимизације *форма прати силу* (Allen & Zelewski, 2009). Ако се пође од исте или сличне геометрије, граничних услова и оптерећења не могу се очекивати драстично другачији резултати. Са друге стране, како ова површ има веома јасне правце главних кривина (Слика 3-6а), они се могу искористити као полазни податак који одређује смерове сегментације површи љуске. Код алгоритма развијеног за генерисање

циркуларне мреже, главни правци кривина дефинишу место пресека и позицију полазних кривих за улазни податак алгоритма (Слика 3-6в).

Ако су правци главних кривина и напона близу један друге (Слика 3-7а и б), почетни избор кривих је одређен на исти начин са великом могућношћу да ивице модула преузму главне напоне у конструкцији љуске. У зависности од симетрије и форме, углавном се на местима сингуларитета пресецају више почетних праваца кривина површи (Слика 3-7в). Након одабира полазних кривих, кружна мрежа се може генерисати коришћењем развијеног алгоритма за кружне мреже. Након тога се може анализирати њена сличност са полазном геометријом, као и спровођење наредних корака.



Слика 3-7. Пример конструкције љуске а) главни правци кривина и б) главни правци сила в) потенцијалне почетне криве за конструкцију кружне мреже

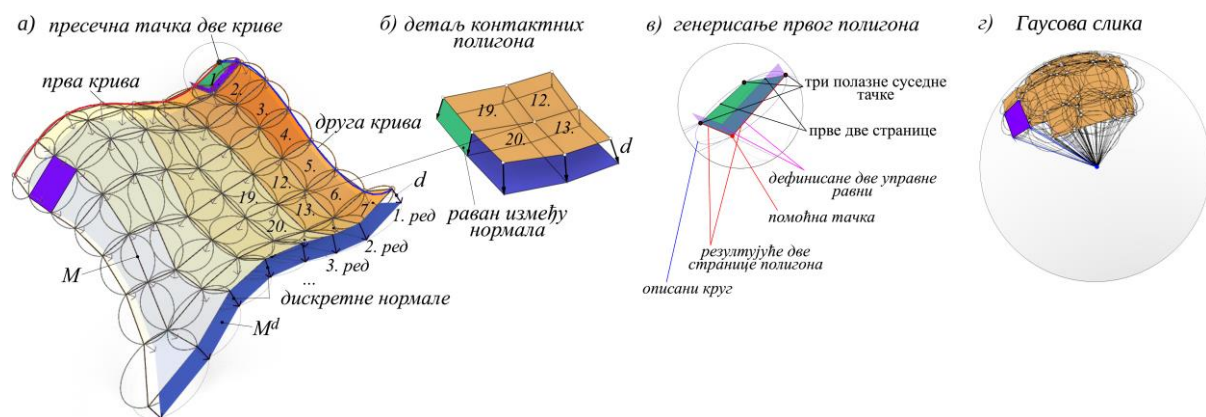
Иако постоје већ развијене методе за проналажење праваца сегментације који се поклапају са правцима главних кривина и давање резултата мреже планарних четвороуглова (ПК), треба разматрати услове под којима је та ситуација испуњена. Стање напона у конструкцији зависи од типа оптерећења, положаја ослонаца и геометрије. Будући да је већина решења базирана на претпоставкама о једнакоподељеном константном оптерећењу и ослонцу дуж целог обода љуске, ова ситуација није учестала у многим пројектима. Циљ поклапања ових праваца је уштеда материјала смањењем попречног пресека и, самим тим, тежине конструкције. Тада се удео сопствене тежине као доминантног оптерећења смањује. У таквом случају, стање напона у конструкцији може бити променљиво, и претпоставке које су поменуте не важе.

У овом раду се одређује најнеповољнија варијанта за задато оптерећење где се убрајају и несиметрична оптерећења.

Након дефинисања другог корака у хибридној стратегији, у наредном потпоглављу дефинише се главни садржај радног пакета 2.2. Овде се убрајају сви развијени алгоритми за генерисање мрежа. Први је назван алгоритам кружне мреже (АКМ).

3.2.2 Алгоритам кружне мреже: радни пакет 2.2

У овом поглављу је детаљно описан алгоритам за генерисање дискретне слободне површи помоћу пресечних кривих (АКМ). Он представља један од алгоритама који се може применити у оквиру РП2.2. Методологија се заснива на геометријским карактеристикама кружних мрежа (поглавље 2.2.1). Подсетимо се да је Теллиер (Tellier, Douthe, et al., 2019) представио генерисање кружне мреже задавањем две криве, где је резултат систем равних кривих, док принцип конструктивне геометрије за кружне мреже истог радијуса користи Доуте (Douthe et al., 2017b). У овом случају, приступ је проширен на просторни систем и недефинисан радијус кружница како би се омогућила већа слобода у пројектовању. Користи се принцип конструктивне геометрије без потребе за додатним процесима оптимизације.



Слика 3-8. а) Генерисање ПК система кружне мреже помоћу две пресечне криве M са офсетованом крижном мрежом M^d и б) детаљ везе четири полигона са свим контактним странама у равни; в) процес генерисања сваког четвороугла преко три полазне тачке и њима дефинисане кружнице; г) дискретна Гаусова слика добијене кружне мреже на јединичној сфери са означеним Гаусовом сликом одговарајућег модула на примеру а) (прерађена слика по (Tošić et al., 2022))

Алгоритам ради на принципу конструисања једног парчета/закрпе (*engl. patch*) дискретне кружне мреже. За примену алгоритма потребно је задати две пресечне слободне криве у простору, подељене на бирани број сегмената (Слика 3-8а прва и друга

крива). Број подела кривих одређује број коначних елемената $m \times n$. Добијене тачке поделе на кривим дају полазне тачке за дискретизацију на почетку сваког реда. Алгоритам почиње на пресеку криве да генерише кружне четвороуглове један по један, пратећи правац једне криве до последње тачке поделе на њој и тиме конструише један ред полигона. У процесу конструисања једног полигона користе се увек три суседне тачке, а тражи се четврта. Наранџасти градијент на слици (Слика 3-8) илуструје напредак од првог четвороугла (зелени на месту пресека почетних кривих) до последњег који је скоро провидан (Слика 3-8а).

За сваки четвороугао три суседне тачке дефинишу *раван полигона* (Слика 3-8в зелена раван), описану кружницу и прве две суседне стране. Поступком се успостављају две равни у крајњим тачкама ивица (Слика 3-8в љубичасте равни), које су ортогоналне на почетне две ивице, као и на раван коју формирају три почетне тачке (Слика 3-8в зелена). Пресек две равни са зеленом равни полигона ствара помоћну тачку (Слика 3-8в црвена тачка). Она се, затим, пројектује на већ дефинисану кружницу по принципу *најближе тачке* (енгл. *closest point*) паралелно правцу полупречника кружнице. Ова тачка на кружници заједно са прве три чини нови *затворен кружни четвороугао* (Слика 3-8в). Добијене тачке су затим фиксиране и користе се за поступак налажења следећег четвороугла, где последње две тачке претходног представљају прве две тачке наредног полигона. Овај поступак се понавља $m \times n$ пута, где су m и n бројеви поделе прве и друге криве (Тошић et al., 2022).

Након генерисања првог слоја кружне мреже (Слика 3-8а M), потребно је дати трећу димензију (*дебљину*) љусци. За коначну геометрију конструкције генерише се *офсетована мрежа* (Слика 3-8а M^d). Знамо да кружну мрежу карактерише константан офсет тачака. У том случају ради се офсетовање тачака за исту дистанцу d коришћењем *дискретних нормала*, чији вектори правца су одређени као средња вредност нормала равни полигона посматране тачке. На тај начин се конструишу компланарне суседне нормале припадајућег четвороугла, што омогућава производњу модула без геометријске торзије (Слика 3-8б). Ово својство се проверава помоћу дискретне Гаусове слике (Слика 3-8г), где се свака од дискретних нормала (Слика 3-8а) премешта у центар јединичне сфере. На тај начин се могу добити тачке пресека нормала припадајућих полигона и јединичне сфере које формирају полигоне дискретне Гаусове слике (Слика 3-8г наранџасти полигони) (Тошић et al., 2022). Уколико су задате једнаке дистанце између

тачака двеју мрежа (почетне и офсетоване) крајеви нормала које се не налазе у центру морају се налазити на јединичној сфери (Слика 3-8г). Доказ је приказан у поглављу 2.2.1.

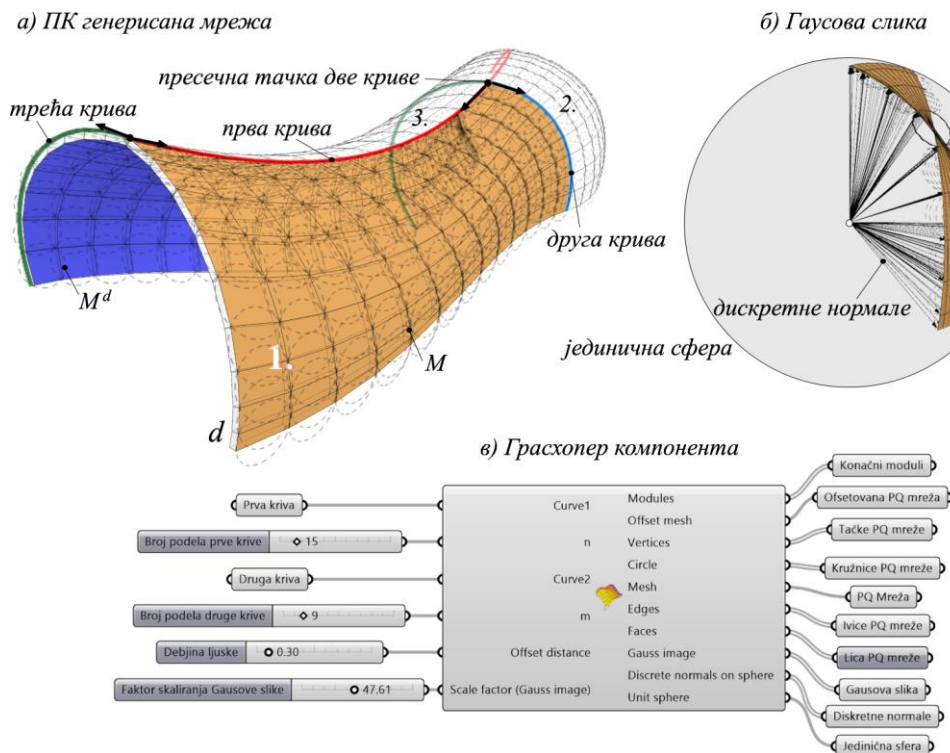
На слици (Слика 3-9а) генерисана је једна просторна конструкција ПК мреже преко задатих просторних кривих (*прва, друга и трећа*). На тај начин генерисане су 3 закрпе које чине једну конструкцију. Прва закрпа (*наранџаста*) је генерисана задавањем прве половине прве криве (*тамно црвена*) и друге (*плаве*), док се друга закрпа конструише комбинацијом друге половине прве и друге криве. Трећа је задата целом дужином прве (*црвене*) и трећом кривом (*зелена*) која се налази на почетку прве. Све криве су произвољно просторне, где је овим поступком показано да су могуће комбинације задавања различитог редоследа, дужина и положаја почетних кривих све док се оне секу у једној тачки, одакле креће генерисана [ПК мрежа](#). Алгоритам тежи ортогоналности и планарности елемената у једном систему који зависи увек од положаја, форме и међусобног односа почетних кривих. Као последица, задавањем различитог положаја полазне пресечне тачке закрпа, добија се другачија коначна форма љуске. Ова карактеристика омогућава велику слободу у дизајну где се различитим варијацијама положаја и избора кривих и осталих улазних параметара обезбеђује широк спектар решења форме. На слици (Слика 3-9б) је приказана Гаусова слика на сфери, чији је радијус једнак изабраној величини дебљине љуске. Како су све тачке полигона на сфери и слика представља кружну мрежу равних полигона, можемо закључити да је за резултат добијена конструкција кружне мреже без геометријске торзије (Тошић et al., 2022).

Цела процедура је параметризована у Грасхоперу (ГХ) за [Рајно](#) 3Д уз помоћ Пајтон (Python) програмског језика који представља компоненту за писање кода у ГХ (Слика 3-9в). Она има већ поменуте улазне податке (Слика 3-9в лева страна компоненте) који морају бити задати: две криве (*Curve1* и *Curve2*), број поделе за обе криве n и m , затим би требало задати жељену дебљину љуске и на крају фактор скалирања Гаусове слике, како би њена анализа била прегледнија.

Прва излазна информација компоненте су коначни модули у виду класе *Brep*¹³, где је сваки модул дат у виду геометрије просторно деформисане кутије са доњом страницом полигона почетне мреже M , горњом страницом полигона офсетоване мреже

¹³ Brep – (енгл. „Boundary Representation”) представља површ или скуп површи у оквиру затворене криве. Углавном се користи за затворен волумен.

M^d и четири контактне странице добијене преко равни које чине правци припадајућих дискретних нормала као што је приказано на слици (Слика 3-8б). Други излазни параметар је мрежни систем офсетоване дискретне љуске, тачке полазне ПК мреже M , систем кружница мреже M , полигони мреже M , затим њене ивице и странице, Гаусова слика са дискретним нормалама са сфером скалираног радијуса (Слика 3-9в десна страна компоненте).

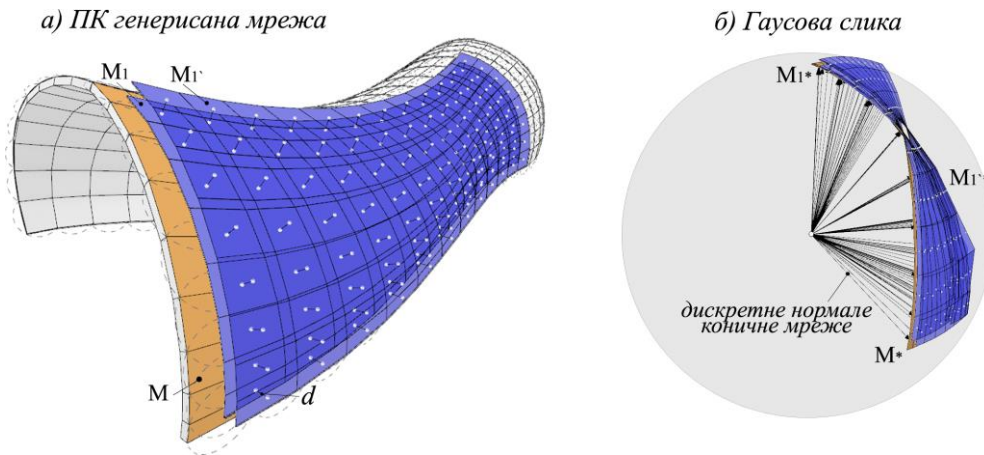


Слика 3-9. Приказ компоненте у Грасхоперу за генерисање ПК мреже; а) генерисана мрежа са три почетне пресечне криве које формирају закрпе 1 (наранџаста), 2 и 3; б) Гаусова мрежа на јединичној сфери добијена преко праваца вектора дискретних нормала закрпе 1; в) направљена Грасхопер компонента са приказом свих улазних и излазних параметара за корисника

У сваком тренутку је могуће променити улазне податке геометрије кривих или број њихове поделе како би се експериментисало у пољу дизајна. Компонента користи функције које су доступне у ГХ. Такође, уколико корисник жели да дода неки од додатних излазних параметара неопходних за конкретан пројекат, могуће је ући у компоненту и додати пратеће параметре. То могу бити и параметри анализе излазне геометрије, где се визуелизацијом може побољшати брзина и прегледност анализе за процес префабрикације.

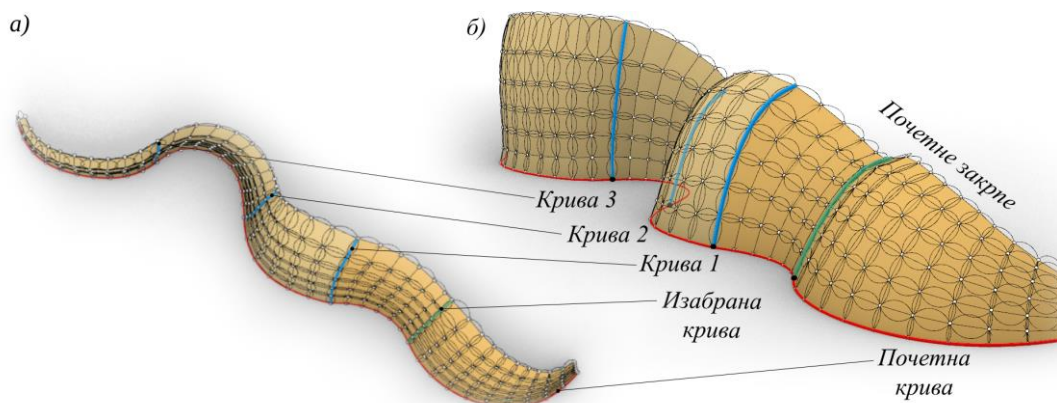
На основу добијене кружне мреже M је могуће конструисати и коничну M_1 са одговарајућим офсетом M_1' (Слика 3-10а). Њихове дискретне нормале се могу видети на јединичној сфери, где је конструисана и Гаусова слика обе мреже са којом проверавамо

њихове карактеристике офсета и планарности (Слика 3-10б). Поступак конструкције је већ дефинисан кроз њихову међусобну дуалност (поглавље 2.2.2). Ова могућност је значајна уколико је неопходно да модул има паралелне странице задате дебелином d која је константна, што је чест случај код површинских елемената (панела).



Слика 3-10. а) Трансформација кружне мреже M у коничну M_1 са њеним офсетом M_1' ; б) Приказ Гаусове све три мреже редом M^* , M_1^* , $M_1''^*$ и дискретним нормалама коначне мреже из тачака полигона

Важно је напоменути да добијени мрежни систем не важи искључиво за криве у равни, што значи да алгоритам може да функционише и за просторне криве. Функција алгоритма иде *одоздо на горе* (енгл. *Bottom up*), што значи да се кружни полигони генеришу и чине дискретну површ без икаквог другог услова за апроксимацију почетне површи. На овај начин се спроводи процес у форми пре-рационализације. Контрола коначног облика иде кроз дизајн и однос почетних кривих.

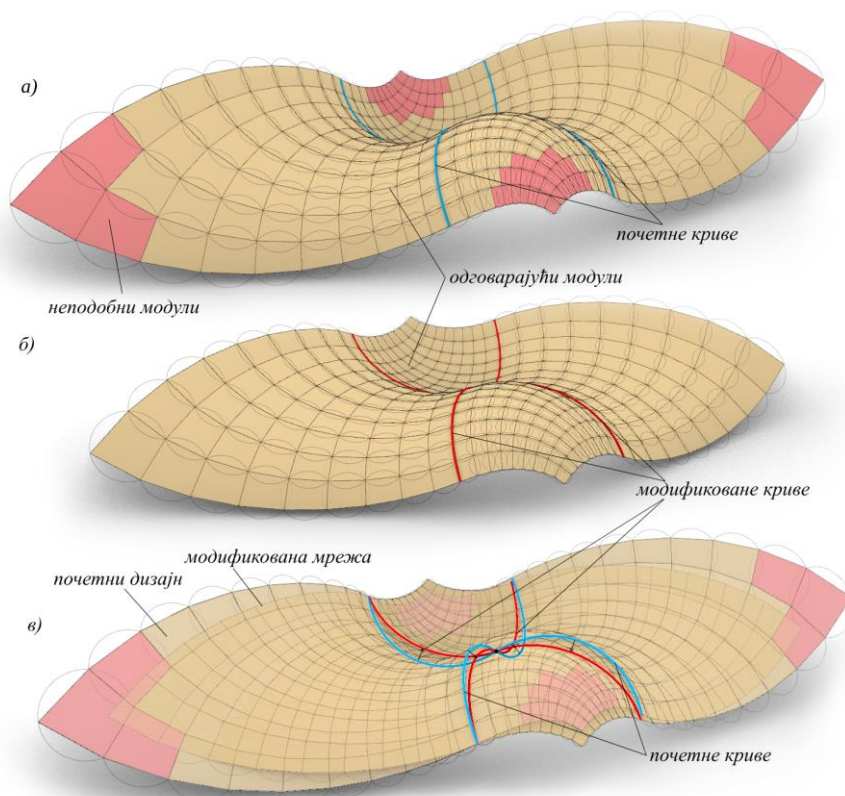


Слика 3-11. а) поглед одозго и б) поглед у перспективи на кружни мрежни систем, генерисан из задатих кривих; две произвољне (зелена и црвена) и четири изведене (плаве) (Tošić et al., 2022)

Дакле, систем се може користити за пресецање више кривих и на тај начин проширити дизајн на више произвољних површи уз нека ограничења. Ово се ради дефинисањем основних (црвених) сегмената криве и једне произвољне криве (зелена)

(Слика 3-11). Почевши од изабране криве и његовог суседног црвеног сегмента, генеришу се прве закрпе (*тамнонаранцасте*). Предстојеће криве (*плаве*) су тада унапред дефинисане на крајевима ових ПК закрпа. Избором различитих сегмената и почетних кривих могу се истражити различите мреже слободне форме (Tošić et al., 2022).

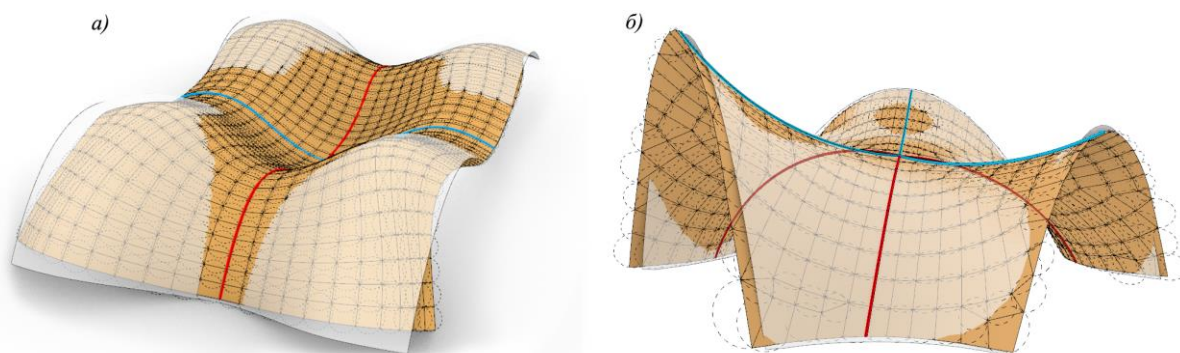
Рачунарска ефикасност овог алгоритма нуди могућност истраживања система резултујуће мреже у реалном времену у софтверском пакету ГХ. Помоћу те визуелизације могу се извршити неопходне анализе геометријских карактеристика модула за дефинисан процес производње. Променом почетних кривих и броја поделе, могуће је добити различита решења ПК мрежа (Слика 3-12). Како је процес параметризован, главни услови производње се могу испитати и могу визуелно приказати модуле који не подлежу задатим условима.



Слика 3-12. а) Почетне позиције задатих кривих (плаве) са генерисаном кружном мрежом, модули који не подлежу условима производње (означени црвено); б) Модификоване криве (црвене) са резултујућом кружном мрежом са одговарајућим модулима; в) Почетна мрежа и модификована мрежа су преклопљене са назначеном модификацијом кривих (Tošić et al., 2022)

Променљиве могу бити сви улазни подаци алгоритма ПК мреже, као што су: положај пресечне тачке, угао између почетних кривих, број поделе сваке криве, степен закривљености кривих и сви остали параметри који одређују форму кривих и њиховог

односа. Ово је приказано на слици (Слика 3-12) једноставним примером две задате пресечне криве (*плаве*) са резултујућом кружном мрежом. Један од услова производње је скалабилност где ограничење, у овом случају, може бити величина модула у распону од 1 m^2 до 15 m^2 . У почетном примеру црвено су означени модули (Слика 3-12а) који су изван задатих граница, где је манипулацијом почетних кривих могуће добити модуле који задовољавају услове (Слика 3-12б). Ово је постигнуто променом угла између кривих у првој пројекцији, смањењем њихове амплитуде закривљености и променом почетног броја поделе (Слика 3-12в). Важно је нагласити да се ове модификације постижу једноставним моделовањем кривих, тј. манипулацијом геометрије, што представља врло интуитиван процес за пројектанта. На овом једноставном примеру је показано како се променом својстава улазних параметара алгоритма може утицати на локалну геометрију модула. Исто се може постићи и мењањем положаја пресечне тачке између кривих. Овај процес се користи за успостављање *домена улазних параметара 1* и *2* као делови РП1.3 и касније са детаљнијом геометријом модула након прорачуна попречног пресека у РП3.3. Резултат ове фазе је дискретна површ слободне форме која представља полазну геометрију за следећи корак материјализације модула и прорачуна конструкције (РП3).



Слика 3-13. а) Генерисана кружна мрежа из примера анализираниог на слици (Слика 3-6) где се правци главне кривине и напона не преклапају: б) генерисани ПК кружни мрежасте систем из система кривих приказаних на слици (Слика 3-7), где су правци главне кривине и напона близу

АКМ се може применити и као део хибридног приступа, уколико је задата почетна површ. У том случају, анализа почетног дизајна дефинише положај пресечних задатих кривих, како је то и показано у претходном поглављу (Слика 3-6в и Слика 3-7в). Поставља се логично питање због чега АКМ у овом случају даје ПК кружну мрежу веома сличну почетној површи. Разлог за то је чињеница да се алгоритам заснива на генерисању *ортогоналне кружне мреже* која представља дискретну верзију праваца главних кривина (поглавље 2.1.2.1) па, самим тим, добијена кружна мрежа даје површ

са тим истим геометријским карактеристикама. Ова карактеристика се јасно уочава на слици (Слика 3-13). Коришћене су задате криве добијене из праваца главних кривина као улазни податак за АКМ. У тачкама пресека кривих су оне подељене и третиране као засебан улазни податак за АКМ где се генеришу ПК закрпе (*плаве и црвене*). Важно је уочити да АКМ генерише закрпе, тако да је код сложенијих површи важно уочити и распознати њихов распоред након анализе.

У оба случаја је почетна површ (*бела*) преклопљена са добијеном мрежом (*наранџаста*), где се примећује да је форма слична, али се не поклапа у потпуности (Слика 3-13). То је управо због *bottom-up* особине овог алгоритма који не ради на репараметризацији саме површи (као у случају анализираних метода пост-рационализације) већ само узима у обзир њене главне улазне параметре: *почетне криве и њихова места пресека* и креира нову мрежу. Како би се постигло боље преклапање између мреже и задате површи, уводи се један од поменутих *параметара форме* који се узима у обзир приликом мултифункционалне оптимизације (РП4). Ипак, главни фокус и предност овог приступа је већа контрола на локалном нивоу дискретног елемента. Самим тим, у фази евалуације добијених варијанти (РП4.2) је прецизност постизања тачне задате геометрије у другом плану, јер се сматра да је визуелна сличност архитектонске идеје постигнута и углавном довољна. Примена АКМ у сврху хибридног приступа је приказана на студијама случаја (поглавље 4.1 и 4.2).

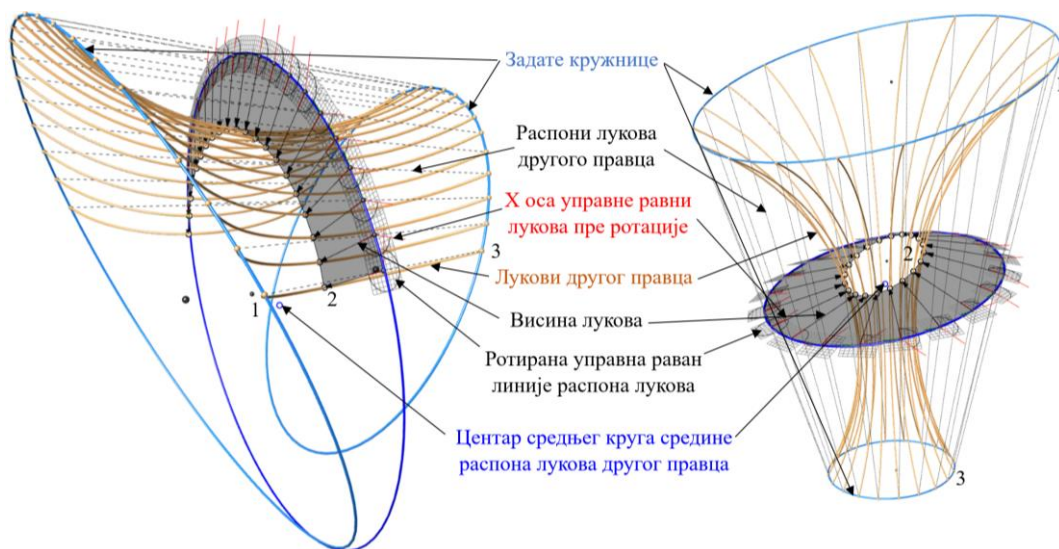
У наредном поглављу се анализирају алгоритми који се могу користити само као део стратегије пре-рационализације. Први међу њима је алгоритам Дупинових циклуда.

3.2.3 Алгоритам Дупинових циклуда и Каналних површи: радни пакет 2.2

Наредна варијанта РП2.2 је алгоритам дискретне верзије Дупиновх циклуда. Њихова дефиниција у диференцијалној геометрији приказана у потпоглављу 2.2.6 представља основу за развој алгоритама њихове параметризације. Ово је постигнуто увођењем модификација за правила конструисања, задржавајући неке од главних њихових карактеристика. У овом потпоглављу је фокус само на циклуде када су у питању оба правца кривих у равни, где је циљ понудити методу која је базирана на интерактивном коришћењу манипулацијом задатих кружница, што даје већу слободу пројектанту.

Наиме, полази се од претпоставке да, уколико је задат један од два система кружница дискретне површи у простору, могуће је наћи места пресека оба система на задатом првом систему који представљају *довољно добру* дискретну верзију главних праваца кривина једне површи. То значи да ова два система дефинишу мрежу површи која не одређује, али је веома близу праваца главних кривина. Исто тако, термин *довољно добре* значи да су особине панела као што су планарност и нула геометријске торзије директно у функцији дефинисаних толеранција у софтверском пакету које могу бити и променљиве.

Из перспективе пројектанта, дефинисање *довољно добрих* особина модула, такође, означава пречицу између геометрије као апстрактног и архитектуре као материјалног. На основу тога, геометријске услове за генерисање дискретне љуске задајемо у зависности од архитектонских услова производње, где ће, у наставку, бити показано на који начин они играју улогу у алгоритму. Након дефинисања полазног положаја, задатак алгоритма је да пронађе тачке пресека између сваке од кривих како би се за резултат добила планарна ПК мрежа без геометријске торзије.



Слика 3-14. Два примера почетне конструкције једног система лукова (наранџасти) у простору помоћу три тачке (наранџасте) које се увек налазе на три кружнице у простору (плаве)

У имплементацији су посматрана два примера (Слика 3-14) где се у оба случаја користи положај две кружнице (Слика 3-14 светлоплави) у простору како би се дефинисао положај првог система лукова. Њихов положај у простору дефинише истовремено и обод конструкције љуске и утиче на решење архитектонске форме. Када се споје изабране тачке једне и друге кружнице (Слика 3-14 *наранџасте*) конструишу се линије које представљају *распон лукова* l . Како би се постигла најбоља контрола над

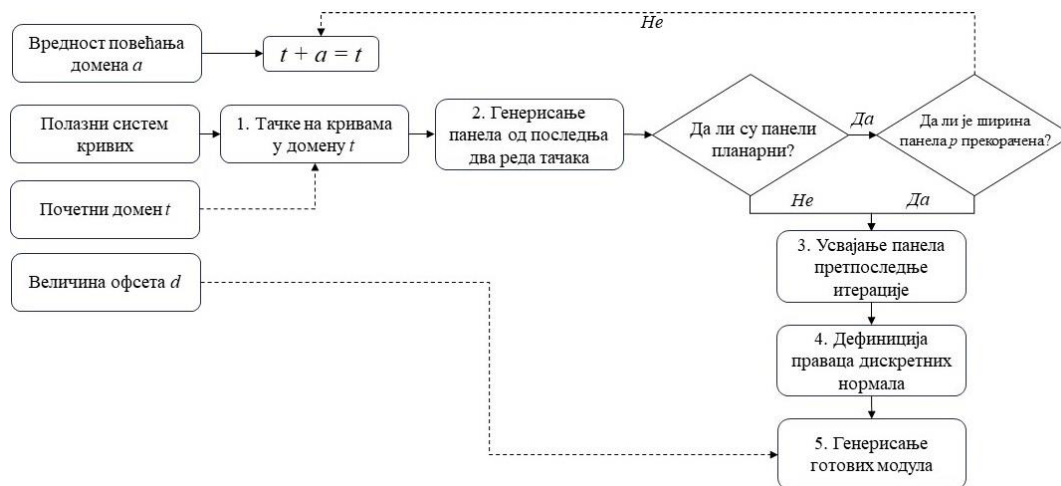
кривинама задатих лукова, потребно је из сваке тачке на средини линије l задати висину лука у правцу управном на линију у тој тачки. Висина сваког лука се задаје у правцу x осе управне равни распона лука (црне стрелице). Међутим, с обзиром на то да свака управна раван распона стоји другачије у простору (Слика 3-14 *црвено*) потребно је сваку x осу заротирати и поставити у правац приближан центру кружнице конструисаног помоћу тачака које представљају средине распона лукова (Слика 3-14 *тамноплаво*). На тај начин, правци висина лукова би требало да се секу у једној тачки која представља центар кружнице у другом правцу система кривих, како би офсетована крива такође била кружница, што је дефиниција Дупинових циклида.

Такође, могуће је експериментисати са положајем задате висине лука у односу на распон, као и користити само један круг као улазни податак, док је други задат аутоматски као симетричан у односу на раван управну на правац распона између два центра лука. У том случају се јасно види пресек праваца распона лукова у једној тачки. Када су одређена три система тачака 1,2 и 3 (Слика 3-14), могу се конструисати коначно и лукови који представљају први систем задатих кривих, приближних једном систему праваца главних кривина Дупинових циклида (Слика 3-14 *наранџасти лукови*).

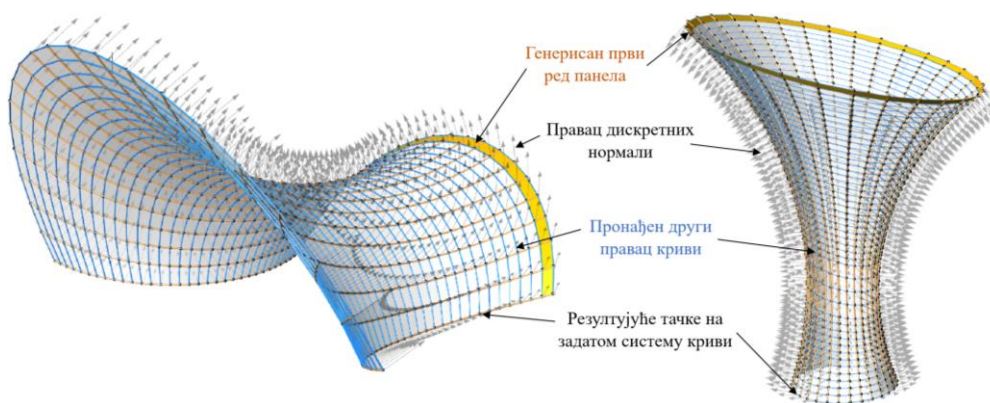
На основу задатог положаја једног правца, потребно је наћи други правац лукова чије се тачке морају наћи на првом. Проблем је даље поједностављен, где је циљ алгорита да нађе само тачке на задатим луковима такве да конструисани панели дискретне љуске буду планарни са задатом толеранцијом и просечном ширином панела. Наиме, сваки од задатих лукова система је параметризован као крива чија дужина своди на домен од 0 до 1. То значи да се почетна тачка налази на вредности домена 0 а последња на вредности 1. Ова репараметризација се користи често у параметријском пројектовању и омогућује, између осталог, генерализацију проблема тражења одговарајућих тачака на луковима.

Алгоритам је дефинисан тако да, у зависности од вредности домена, (Слика 3-15 корак 1) одређује тачке на кружницама и повезује их у панеле једног реда у управном правцу задатог система са тачкама претходне итерације (Слика 3-15 корак 2). Затим се проверава да ли су сви панели планарни за дефинисану вредности толеранције (*нпр.* 0.001 m) и, уколико је услов испуњен, за тренутну вредност домена је ред панела усвојен (Слика 3-15 корак 3), где се наставља са тражењем следеће вредности која испуњава услове. Уколико је једини услов за дефинисање реда панела планарност, у зависности

од задатих кривих може се десити да вредност између два домена буде већа и тиме панели превелики. Ово се углавном дешава на деловима површи који немају велику апсолутну вредност Гаусове кривине (близу нуле). Због тога се уводи и услов максималне димензије панела p како би алгоритам, уколико услов планарности премашује ту величину, прекинуо итерацију и прешао на следећи ред. Алгоритам престаје са радом када прође све итерације до крајњег домена $t=1,0$ и тада су сви редови планарних панела генерисани (Слика 3-15).



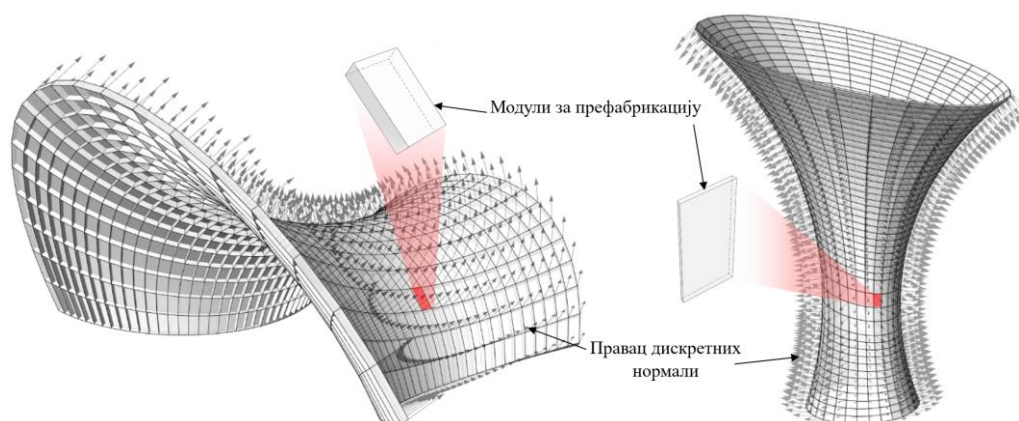
Слика 3-15. Шематски приказ алгоритма са улазним подацима (лево) и фазама (поља означена бројевима) које су неопходне за усвајање коначне геометрије модула



Слика 3-16. Приказ улазних геометријских и излазних података као и међукока алгоритма на два примера: задате криве, дефинисане тачке на кривима и назначен први ред модула у конструкцији

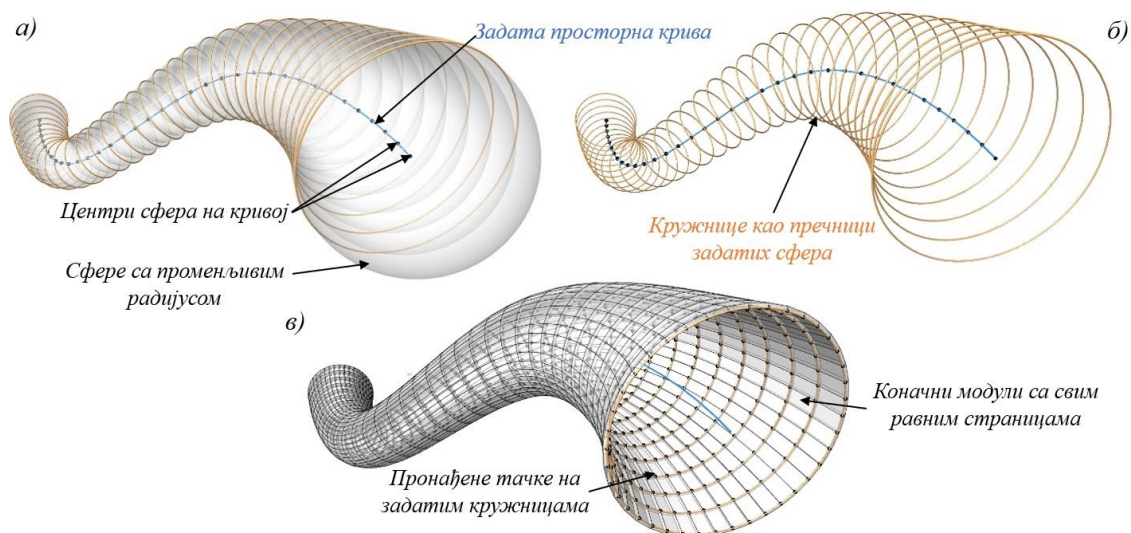
Затим се одређује правац дискретних нормала, где су, у овом случају, оне дефинисане као просечни вектори нормала равни панела који се сустичу у посматраној тачки (Слика 3-16). Добијене тачке на кривима се затим померају у правцима њихових дискретних нормала за задату величину офсета d коју задајемо како би се добили коначни модули који чине љуску (Слика 3-17). У приказаним примерима не долази до

проблема геометријске торзије, међутим, како у овој примени не постоје корекције праваца нормала, тај услов зависи умногоме од задатих кривих као и величине офсета. Овај проблем је детаљније посматран у примени дискретне верзије Монжове површи за дизајн љуске која је приказана у наставку.



Слика 3-17. Приказ оба примера љуске са генерисаним коначним модулима преко праваца дискретних нормали

Алгоритам за дискретне Дупинове циклиде је примењен код студије случаја *Морска шкољка* (поглавље 4.3) где је задат један систем кружница инспирисаним шемом Аполонових шема кружница у равни (Schwerdtfeger Hans, 1980). Овај исти алгоритам је могуће применити на још једном типу под именом *Каналне површи* (енгл. *Canal surfaces*). Објашњење следи у наставку.



Слика 3-18. Дефинисане фазе конструкције дискретне верзије каналних површи са: а) задатом просторном кривом, центрима сфера и њиховим променљивим пречницима; б) дефинисаног првог правца кривих у равни који представљају пречнике сфера; в) пронађених тачака на задатим кружницама и конструкцијом коначних модула са равним страницама преко дискретних нормала

Други пример имплементације сличног алгоритма се може применити за конструкцију класе површи, којој као подгрупа припадају и Дупинови циклиди, под називом Каналне површи. Оне се, такође, убрајају у радни пакет 2.2. На основу сазнања о њиховим својствима, поступак конструкције првог система кривих представља лакши процес. Наиме, потребно је задати просторну криву (Слика 3-18а *плава*) и на њој тачке које представљају центре сфера са задатим радијусом који може бити исти или променљив. Тачке на просторној кривој су задате поделом криве на једнаке делове за задат број n . Уколико је радијус исти за све сфере, као површ се конструише цеваста површ (*енгл. pipe surface*). Исти алгоритам је коришћен као са слике Слика 3-15 где су као почетне криве задати пречници кружница сфери (Слика 3-18б *наранџасте*).

На њима су нађени положаји тачака за сваку од кружница, од којих се увек тачке из последња два реда користе за конструкцију планарних панела. Након тога, исте [дискретне нормале](#) су коришћене за формирање коначних модула за производњу (Слика 3-18в). Може се приметити да Каналне површи имају већи степен слободе у пројектовању форме од Дупинових циклида. Наредни алгоритам представља дискретна верзија Монжове површи која омогућава још већу варијацију форми.

3.2.4 Алгоритам Монжове површ: радни пакет 2.2

У погледу морфологије дизајна и форме Монжова површ је од велике користи јер даје могућности за широку примену. Из тога спада у четврти тип алгоритма у склопу радног пакета 2.2. У случају Монжове површи, развијена су три алгоритма која омогућавају различите конструктивне особине дискретних елемената и њихових офсета. Ради решавања тог проблема, овде се нуди приступ из конструктивне геометрије, где је циљ да се крене од кривих које ће бити моделоване. На тај начин пројектант има много већу интуицију за задати дизајн као и могућност експериментисања резултујућом мрежом. Штавише, коришћењем ове методе анализирана су и понуђена различита решења конструкције мреже која подразумевају различите геометријске предности и, самим тим, различите приоритете производње.

Исто тако, коришћењем методе конструктивне геометрије базиране на толеранцијама производње, ствара се могућност за примену широког спектра сложенијих форми. Исто тако, како могући опус решења не зависи од прецизно дефинисаних математичких принципа већ од дефинисаних параметара префабрикације,

дата је предност и слобода архитектонског изражаја и створена могућност за већу индивидуализацију у склопу посматраног пројекта.

Методологија је дефинисана за параметријско моделовање у програму ГХ, тако да су комплетне геометријске дефиниције елемената за полазне податке алгоритма преузете. Као што је поменуто, диференцирано је више типова случаја у зависности од задатих улазних параметара дизајна. За решавање дискретне Монжове површи је било могуће предложити више алгоритамских решења, где је њихов фокус оријентисан на различите бенефите у префабрикацији конструкција. Они су следећи:

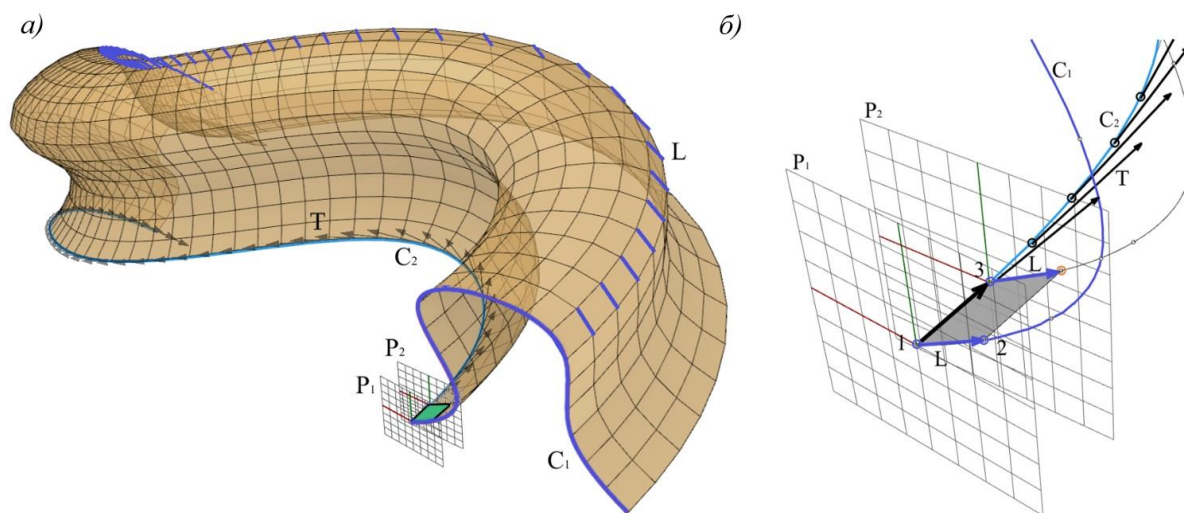
1. Случајеви задате неперидичне (*отворене*) директрисе C_2 :
 - а. Генерисање неперидичне профилне криве C_1 истим дужинама страница L
 - б. Генерисање неперидичне профилне криве C_1 употребом кружне мреже
 - в. Генерисање перидичне профилне криве C_1 употребом паралелних полилинија
2. Случај задате просторне перидичне (*затворене*) директрисе C_2

У наставку сваки од њих је дефинисан детаљно на приказаним примерима.

3.2.4.1 Дискретна верзија Монжове површи случај 1а

На слици (Слика 3-19а) се може видети пример конструкције мреже првим решењем 1а. Као што је назначено у опису горе, потребно је задати две неперидичне криве: једну профилну у равни C_1 и другу просторну C_2 , као и њихов број поделе n и m . Такође је могуће променити положај профилне криве C_1 њеним ротирањем у нормалној равни директрисе C_2 и на тај начин експериментисати разлитим могућностима дизајна. Кључни чиниоци у процесу генерисања мреже су геометријске карактеристике просторне криве: управне равни просторне криве у изабраним тачкама P_1 и P_2 (Слика 3-19а) на основу броја поделе и њихове нормале, које су дефинисане као тангенте криве у истим тачкама T . Ови подаци су лако добијени из компонената које омогућавају компоненте ГХ. На слици (Слика 3-19б) је детаљно приказан процес конструкције сваког панела који се понавља у итеративном процесу. Креће се од три тачке које дефинишу раван панела, где тачка 1 и 3 представљају почетак координатног система управних равни P_1 и P_2 на просторној криви (директриси). Тачка број 2 се налази на профилној криви C_1 одређена према жељеним дужинама сегмената на тој криви који могу бити исте дужине дуж те криве L . Последња тачка 4 се конструише као линија чији вектор правца је одређен пресеком равни панела K и управне равни P_2 просторне криве, док је дужина

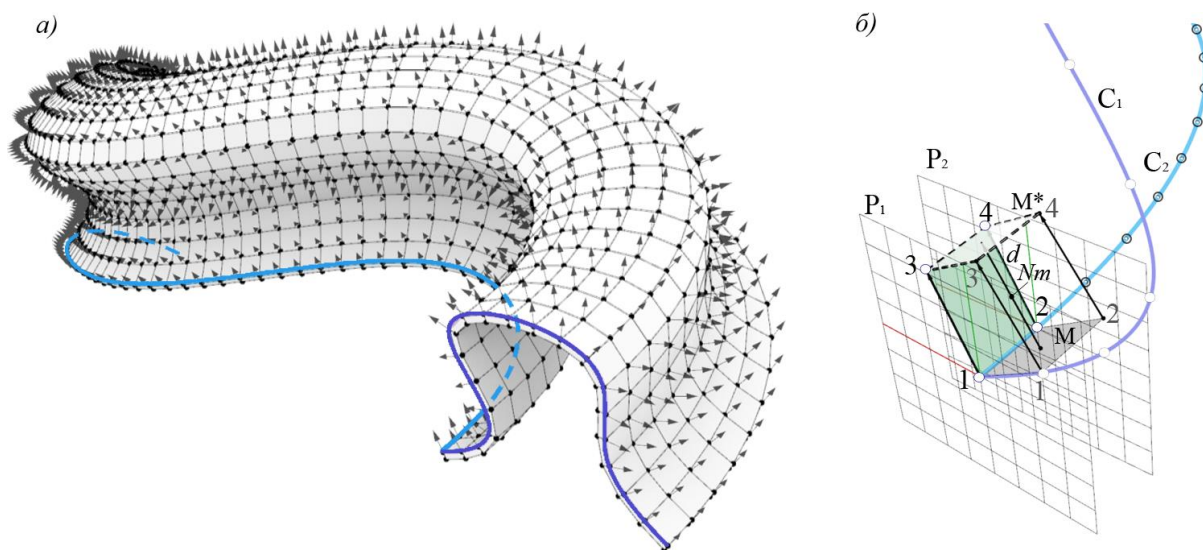
једнака L . Овај поступак се понавља дуж свих сегмената профиле криве како би се формирала прва трака панела, а затим се сегменти у равни P_2 узимају као полазни за следећу итерацију. Оваквих итерација има колико и задате поделе просторне криве m .



Слика 3-19. а) Конструкција дискретне верзије Монжове површи алгоритмом базираним на једнакој дужини страница мреже у равни планарне криве (C_1) б) Приказан детаљ процеса конструкције панела на основу кога је конструисан алгоритам за генерисану мрежу

За офсет мреже знамо да постоје три могућности: *офсет тачака, ивица и панела*. Први је карактеристика кружне мреже (решење 1б), док је други могућ само у специјалном случају Коебе мрежа. Дакле, остаје треће решење као могућност које је и примењено. Знамо да је офсет панела карактеристика коничних мрежа, али је овде могућа јер се ради о случају када су обе задате криве непериодичне. Цела конструкција мреже са панелима је приказана на слици (Слика 3-20а), док се детаљ налази поред (Слика 3-20б). Најпре је одређен правац дискретних нормала задавањем једног почетног правца 1-3 који са тачком 2 чини једну раван (зелена). Тиме је правац друге нормале 2-4 дефинисан пресеком равни $P_{1,2,3,4}$ и P_2 . Поступак се понавља целом дужином суседних профилних кривих $n+1$ пута за један ред, колико има и тачака поделе. Овај корак осигурава нула геометријске торзије, тј. равне контактне странице модула у правцу пружања просторне криве. Други правац је осигуран задржавањем дискретних нормала у профилним P равнима. Када су добијени сви правци нормала две суседне профилне криве, могуће је офсетовати панеле M почетне мреже за задату дистанцу офсета d у правцу нормале на њихову раван Nm . Пресеком те равни и правца четири дискретних нормала које чине панел конструишу се тачке офсетованог панела M^* (Слика 3-20б). Овај поступак се понавља $n \times m$ како би се добила цела офсетована мрежа. Да се

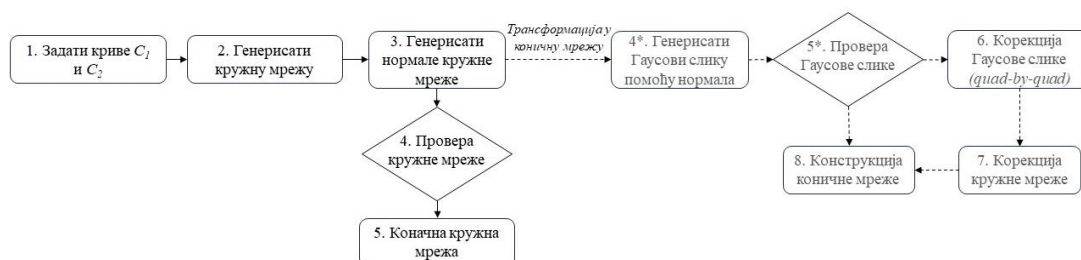
подсетимо, у погледу префабрикације, овај принцип офсета је најповољанији за модуле у виду панела с обзиром на то да безбеђује њихову константну задату дебљину d .



Слика 3-20. а) Конструкција офсета дискретне верзије Монжове површи за решење 1а са назначеном профилем C_1 и просторном кривом C_2 ; б) Приказан детаљ процеса конструкције офсета са константном дистанцом између два слоја панела тзв. „face offset”

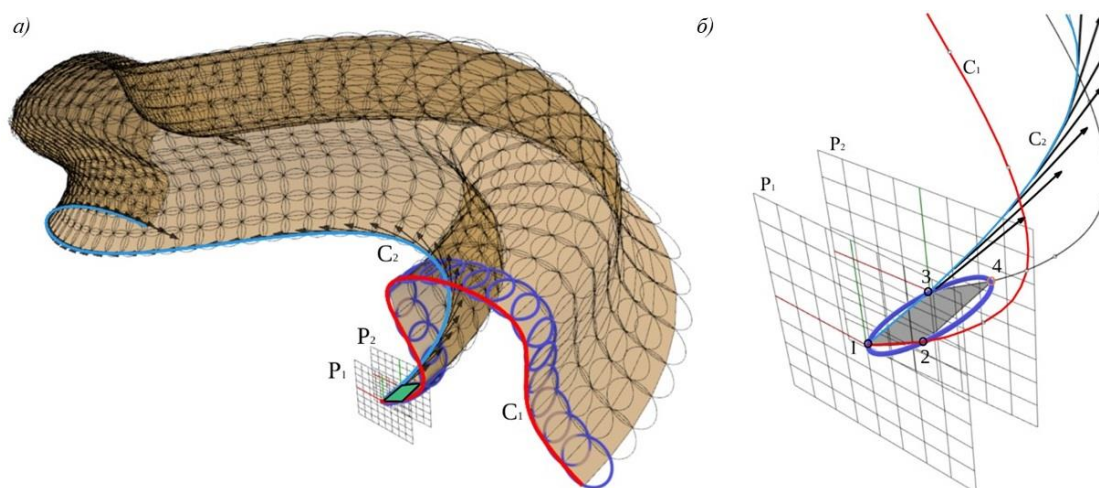
3.2.4.2 Дискретна верзија Монжове површи – случај 1б

Други тип конструисања мреже 1б је омогућен алгоритмом за генерисање кружне мреже. Такође, разлог за увођење различитих варијанти са кружним мрежним системом су различите могућности офсета који се могу развити и бити значајни за различите типове конструктивних елемената префабрикације (чворове или панеле). У поглављу 2.2.2 је показано да постоји директни однос између кружне и коничне мреже где су оне дуалне. Ово је значајно јер коничне мреже имају карактеристику офсета са константном дистанцом између панела мреже, односно паралелне равни доње и горње равни панела. То представља велику корист код коришћења панела као конструктивних елемената, као што је случај у овом раду.



Слика 3-21. Шема редоследа операција приликом конструкције кружне мреже и њене трансформације у коничну

Ради бољег разумевања редоследа поступака који следе у вези са односом *кружне* и *коничне* мреже, као и трансформације једне у другу, они су представљени у шеми на слици (Слика 3-21). Прва три корака заједно са 4 и 5 се користе уколико се врши поступак конструисања само кружне мреже, док су за трансформацију у коничну мрежу потребни наредни означени кораци 4*, 5*, 6, 7 и 8. У наставку је сваки корак дефинисан детаљније као део целине.



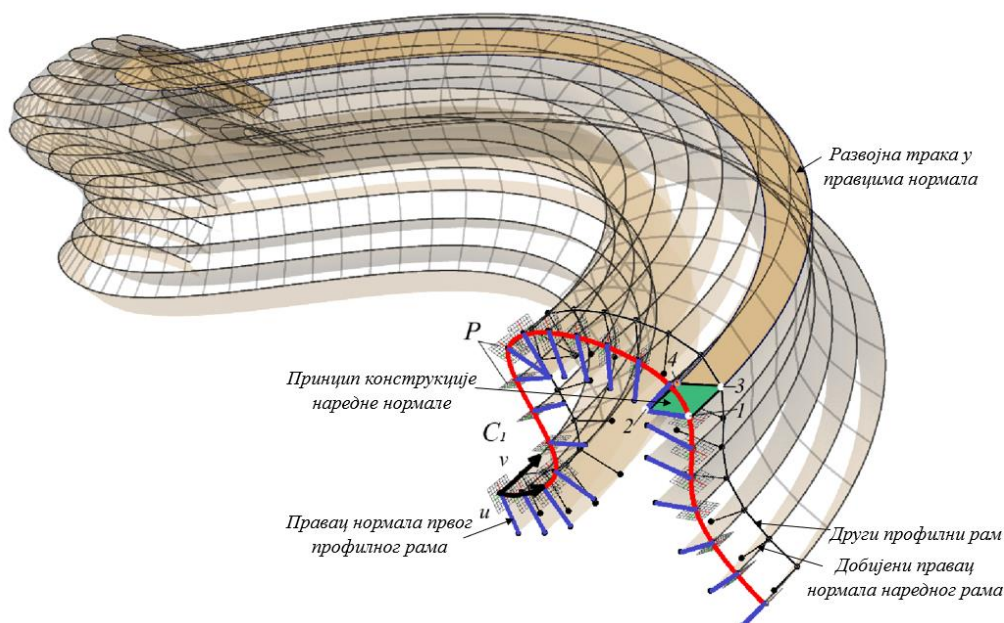
Слика 3-22. а) Призак конструкције мреже по принципу Монжове површи коришћењем кружне мреже;
б) Дефинисање детаља конструкције једног панела помоћу кружнице

За конструкцију кружне мреже, принцип је поновљен из првог решења (полазне две непериодичне криве C_1 у профилној равни и просторној C_2), где је разлика само у начину конструисања панела (Слика 3-22а). У овом случају, три почетне тачке дефинишу кружницу, док је четврта пресек између управне равни P_2 и кружнице (Слика 3-22б). Кључно је да се сваки нови сегмент који чине тачке 3 и 4 налазе увек у управној равни P_2 како би свака од добијених профилних полилинија била у равни и управна на тангенту у тачки просторне криве C_2 . Систем се наставља на исти начин m пута. Затим се за тачке 1 и 2 узимају добијени сегменти последње полилиније. Тај поступак се понавља n пута.

Након конструисања свих панела ($n \times m$), као и у претходном поглављу, потребно је проверити правац дискретних нормала у тачкама конструисањем [Гаусове слике](#) на јединичној сфери. Како би се добила Гаусова слика, потребно је, најпре, одредити правац дискретних нормала – правац офсета мреже.

У случају Монжове површи познато је да систем нормала сваког профилног рама мора бити у дефинисаним ортогоналним равнима просторне криве, што гарантује

њихову компланарност у једном правцу (u правац Слика 3-23). Међутим, други правац (дуж просторне криве v) је потребно осигурати. Стога, врши се конструисање дискретних нормала по истом принципу претходног примера Монжа (случај 1a). Као полазне линије се узимају распони између тачака полилиније првог рама и њеног офсета у правцу у осе управних равни P профилне криве, где тачке имају исто растојање, што представља карактеристику офсета кружне мреже.

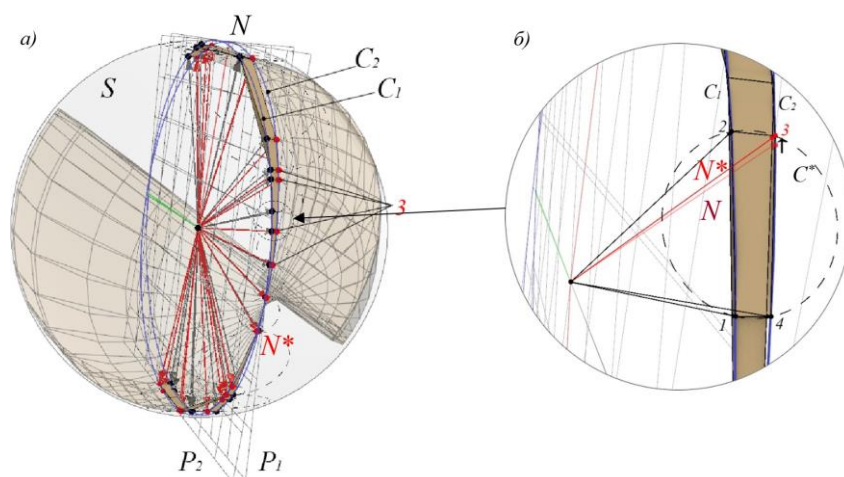


Слика 3-23. Приказ шеме конструкције дискретних нормала кружне мреже; дискретне нормале (љубичасте) су дефинисане у првом профилном раму (црвен) да би се принципом полигона у равни (зелено) добила нормала наредног профилног рама за сваку тачку припадајућег рама

Тако задате почетне нормале (љубичасте Слика 3-23) представљају линије 1-2. Тачке 3 представљају тачке на следећем профилном раму, док се тачке 4 конструишу из услова компланарности (зелени полигон Слика 3-23). Као резултат су генерисане развојне траке у правцу просторне криве, чије странице су планарне, а ивице које представљају дискретне нормале, исте дужине. Крајеви добијених линија представљају офсетовану кружну мрежу, а развојне траке странице модула које задовољавају услов нулте геометријске торзије.

У зависности од почетних задатих кривих и броја подела (n, m) могу се добити непоклапања која проистичу из толеранција изазваних коришћеним програма Рајно и библиотека за дефинисање кода *Рајнокомен* (engl. *Rhinocommen*). Она се највише огледају у задавању различитих вредности офсета, где поменути услови које Гаусова слика мора да испуњава нису увек задовољени. Из тог разлога, потребно је извршити

њену *корекцију* која подразумева правце дискретних нормала и нормала страница кружне мреже и то на следећи начин. Први корак је конструкција Гаусове слике на јединичној сфери, премештањем нормала у њен центар и конструисањем мреже полигона припадајућих нормала. Затим се врши провера да ли су конструисани полигони у равни и да ли свака тачка лежи на кружници, која је добијена пресеком равни полигона и сфере.

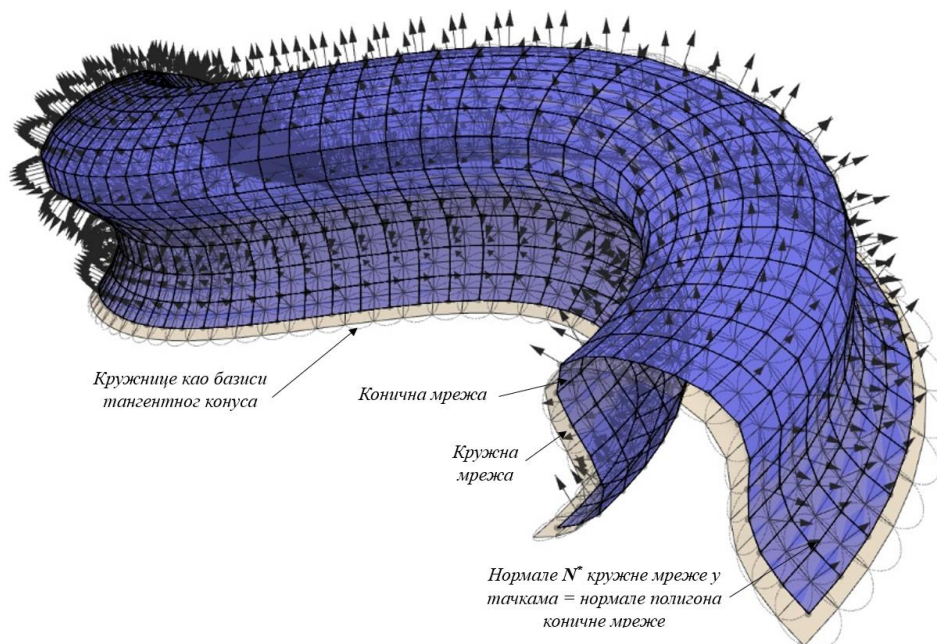


Слика 3-24. а) Коригована Гаусова слика кружне мреже са приказом првог реда полигона, његовим коригованим (црвене) нормалама N^* ; б) Издвојен детаљ корекције дискретне нормале у трећој тачки полигона тако да она и даље припада профилној равни P_2 , тј. пресечном кругу сфере и те равни C_2

Уколико то није случај, користи се сличан „квад-по-квад” (енгл. *quad-by-quad*) процес за корекцију мреже на сфери као и у претходном поглављу. Крећући од првог полигона, ред по ред се врши корекција нормале N које чине полигоне уз задржавања услова компланарности нормала једног профилног рама P_1, P_2 (Слика 3-24а). Пресек сфере и профилних равни је означен кружницама C_1 и C_2 . Узимају се тачке 1, 2 и 4 полигона које чине раван полигона (Слика 3-24б) и налази њен пресек са сфером који даје кружницу тог полигона C^* . Како тачка 3 мора да припада равни P_2 , сфери и кружници полигона C^* , она се конструише пресеком кружнице C^* и кружнице C_2 . Добијена тачка представља, такође, крајњу тачку модификоване нормале N^* . Овај поступак се примењује за сваки полигон, уз вођење рачуна о актуелизацији сваке модификације. Нове дискретне нормале у тачкама N^* , као и нормале полигона се на исти начин („квад-по-квад”) преносе на првобитну мрежу натраг.

Овде је важно напоменути да је корекција кружне мреже јако мала и да, уколико испуњава главне геометријске услове префабрикације (*планарност, константну дистанцу између тачака офсета и нула геометријске торзије*) није потребно

проверавати Гаусову слику и примењивати овај корак. Међутим, овде је овај корак ипак био неопходан због трансформације кружне мреже у *коничну*, где је прецизност Гаусове слике од великог значаја. Преко већ дефинисане процедуре конструкције дуалне мреже, у свакој тачки кружне мреже где се сустичу четири полигона, конструише се један полигон коничне мреже (Слика 3-25). Како би се све тачке контактних полигона и поклапале (P_1, P_2, P_3, P_4), потребно је проверити тачност Гаусове слике и по потреби применити претходни корак корекције кружне мреже.



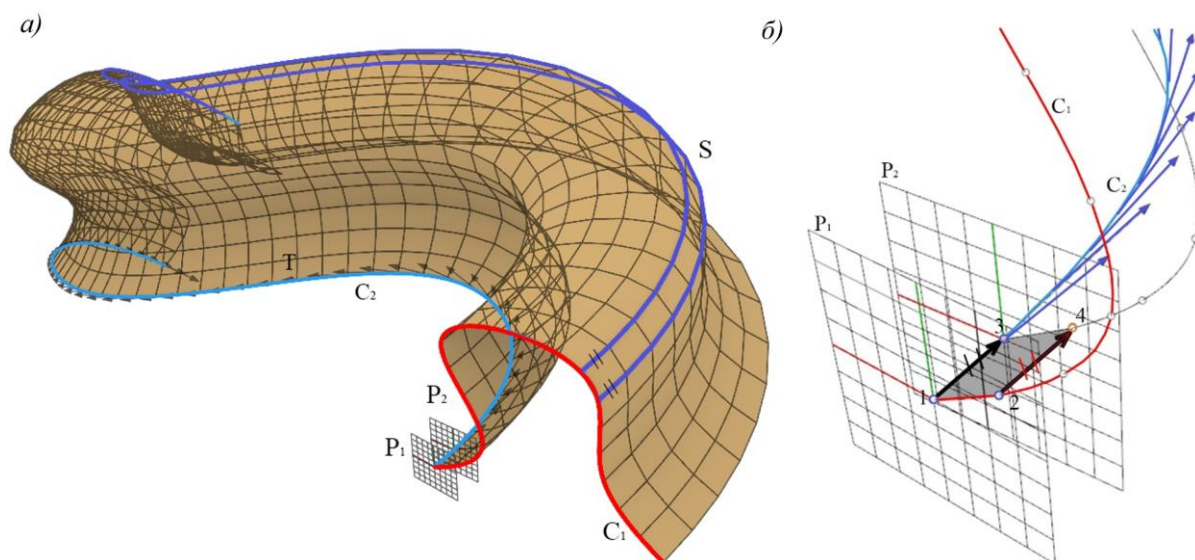
Слика 3-25. Приказ конструисане коничне мреже коришћењем нормале кружница и дискретне нормале у тачкама кружне мреже, које су истовремено нормале полигона добијене коничне мреже

Када је у питању офсетована мрежа у случају 1б, он је примењен као што је дефинисано њиховим карактеристикама дискретних нормала, тј. кружна мрежа има офсет тачака, а конична офсет панела. Самим тим се долази до закључка да је прва повољнија за стандардизацију елемената чворова исте дужине између почетне и офсетоване мреже, а друга за панеле константне задате дебљине.

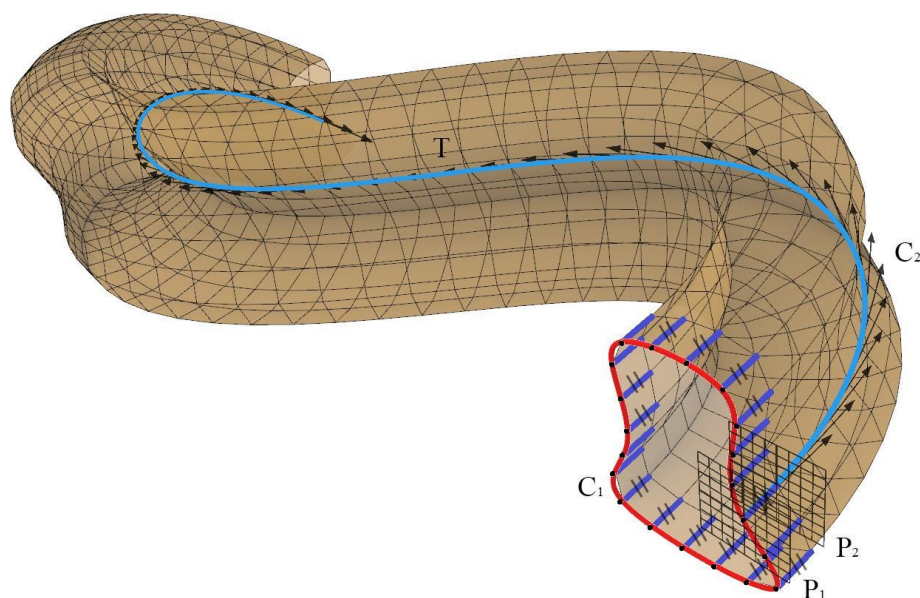
3.2.4.3 Дискретна верзија Монжове површи случај – 1ц

Као што је већ на почетку истакнуто, сва претходна решења се могу употребити у случају када су обе задате криве непериодичне (отворене), међутим, следеће решење 1ц важи за задати случај и када је [генератриса](#) периодична (затворена). Разлика у односу на претходне јесте у увођењу корака који конструишу просторне *паралелне полилиније*. Ово је, такође, једна од главних карактеристика Монжове површи. Наиме, полази се од

задате просторне криве C_2 где се њеном поделом на n делова конструише полилинија S (Слика 3-26а). Систем две паралелне полилиније карактерише константна дистанца између офсетованих сегмената полилинија, што је примењено за принцип конструкције. Смер офсета је одређен тачкама на профилној кривој (задате њеном поделом на m делова) као почетак сваке просторне офсетоване полилиније.



Слика 3-26. а) Приказ решења 1ц генерисања дискретне Монжове површи коришћењем паралелних полилинија задате криве C_2 ; б) Детаљ конструкције паралелних сегмената полилиније, где су сви сегменти између две профилне равни P_1 и P_2 паралелни

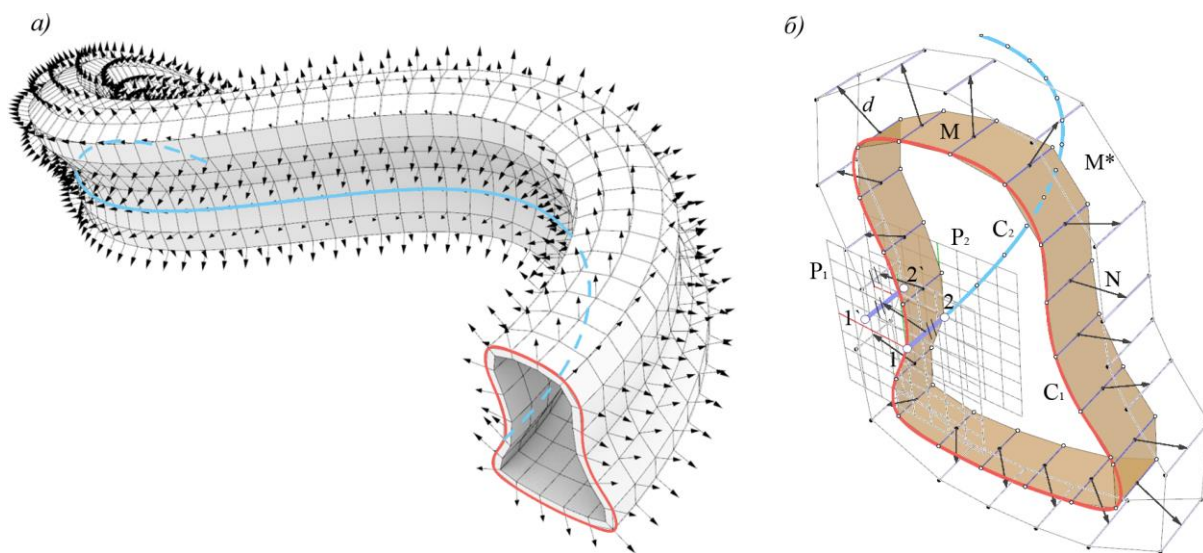


Слика 3-27. Пример затворене профилне криве C_1 где је примењено треће решење са паралелним полилинијама

На слици (Слика 3-26б) се јасније може видети поступак конструисања паралелног сегмента. Почиње се од првог сегмента задате криве 1-3, затим се у тачки 2

задаје исти правац вектора сегмента, где се у пресеку са следећом профилном равни P_2 добије тачка 4. Поступак се понавља за сваку тачку профилне равни. Као резултат се добијају сегменти истог правца дуж целог реда између две криве, док је планарност панела загарантована паралелним суседним страницама. Након завршетка првог реда, у следећој итерацији тачке 3 и 4 постају 1 и 2. Као и у осталим случајевима, поступак се понавља $n \times m$ пута. Како су сви офсетовани сегменти међусобно паралелни, могуће је имати затворену профилну криву где се први и последњи сегмент поклапају, што не мора бити случај у претходним решењима (Слика 3-27).

Када је у питању процес офсета решења 1ц користимо сличан процес паралелних сегмената полилиније настале од просторне криве C_2 . На слици (Слика 3-28а) се може видети готова мрежа са њеним офсетом и правцима дискретних нормала. Поступак је приказан на детаљу (Слика 3-28б) где се сегменти 1-2 мреже M померају паралелно у правцу вектора N за задату величину d . Вектори померања су добијени као средња вредност нормала контактних панела. Како би се осигурала планарност страница модула као и офсетоване мреже M^* , тражи се пресек профилних равни P_1 и P_2 са помереним сегментом где се конструишу сегменти $1'-2'$. Овај поступак се понавља за сваки сегмент у круг тако да су сви међусобно паралелни. Јасно је да суседни делови полилиније, у том случају, чине планарне сегменте мреже M^* као и њихових веза $P_{121'2'}$.



Слика 3-28. а) Приказ трећег решења генерисања офсета дискретне Монжове површи M коришћењем паралелних полилинија задате криве C_2 ; б) Детаљ офсета паралелних сегмената полилиније 1-2 и почетних нормала N , где су сви сегменти између две профилне равни P_1 и P_2 паралелни како би се добила мрежа M^*

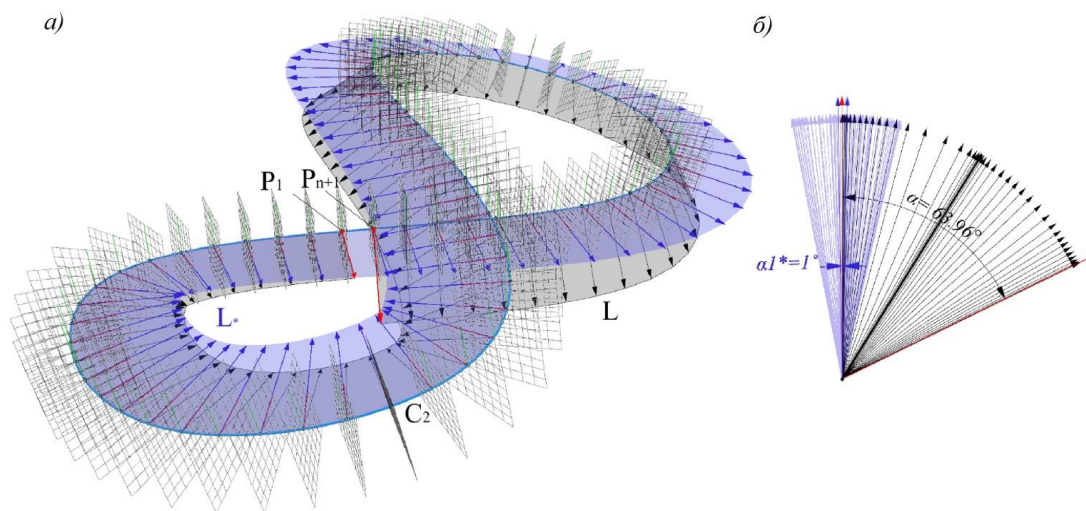
Овај поступак је поновљен за сваки ред (n пута), где нам за други и све остале редове не требају правци вектора N већ се сегменти наредног реда померају до крајњих тачака претходног 2° . У овом случају, померањем паралелних сегмената полилиније за задати офсет, јасно је да се конструише офсет ивица у правцу просторне криве C_2 , међутим не и у профилним равнинама P . Самим тим, ове две мреже се не сматрају комплетним офсетом ивица где свака од четири одговарајуће има константу дистанце d (случај Коебе мреже). Међутим, овим поступком је осигурана планарност панела мрежа, као и нула геометријске торзије.

3.2.4.4 Дискретна верзија Монжове површи – случај 2

Последњи случај који може бити задат у процесу дизајна је и најзахтевнији, који подразумева случај затворене просторне криве. Овде је потребно узети укупну торзију затворене криве у обзир, тако да генерисањем панела прве и последње профилне криве такође добијамо панеле у равни. Постоје задате просторне периодичне криве чија укупна торзија није велика и где је могуће применити претходне методе с обзиром на то да толеранције планарности нису велике, међутим, то није увек случај. Како би поједноставили проблем и понудили решење које ће бити приступачније и јасније за коришћење пројектанту, уводи се метода *конструктивне дискретне торзије* затворене просторне криве. Важно је нагласити да она није ни у каквој корелацији са класичном торзијом криве. Као и у претходним примерима, креће се од просторне криве и задатог броја њене поделе на n делова где се конструишу тачке на кривима. Корекција управних равни просторне криве у задатим тачкама се врши ротацијом око своје нормале тако да свака линија у правцу x осе дужине L са суседном гради полигон у равни (Слика 3-29а), као код понуђеног решења 1а. Што је L веће, добија се тачнији резултат због толеранција планарности.

Када је поступак поновљен n пута, проверава се планарност панела који чине последња и прва линија у тачкама P_1 и P_{n+1} (Слика 3-29а). Уколико је он планаран за задату толеранцију, усвајају се кориговане профилне равни P са новим x осама L . Ако, ипак, последњи панел не испуњава услове, рачуна се угао између претпоследње и последње линије (*црвене*) који представља укупну *конструктивну дискретну торзију* α (Слика 3-29б). Идеја је да се та величина угла прерасподели на задати број панела како би се надоместила кроз целу дужину просторне криве. Укупан угао се дели са бројем панела n и добија *угао дискретне конструктивне торзије* α^* , који представља величину

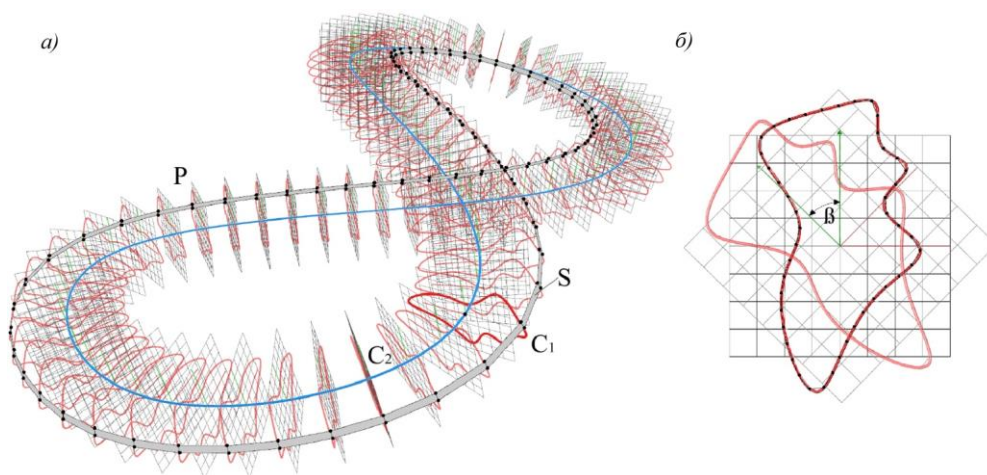
одступања сваке суседне две линије L^* од планарности. Овај корак се постиже тако што се свака од већ ротираних профилних равни *враћа* за величину тог угла у односу на суседну раван.



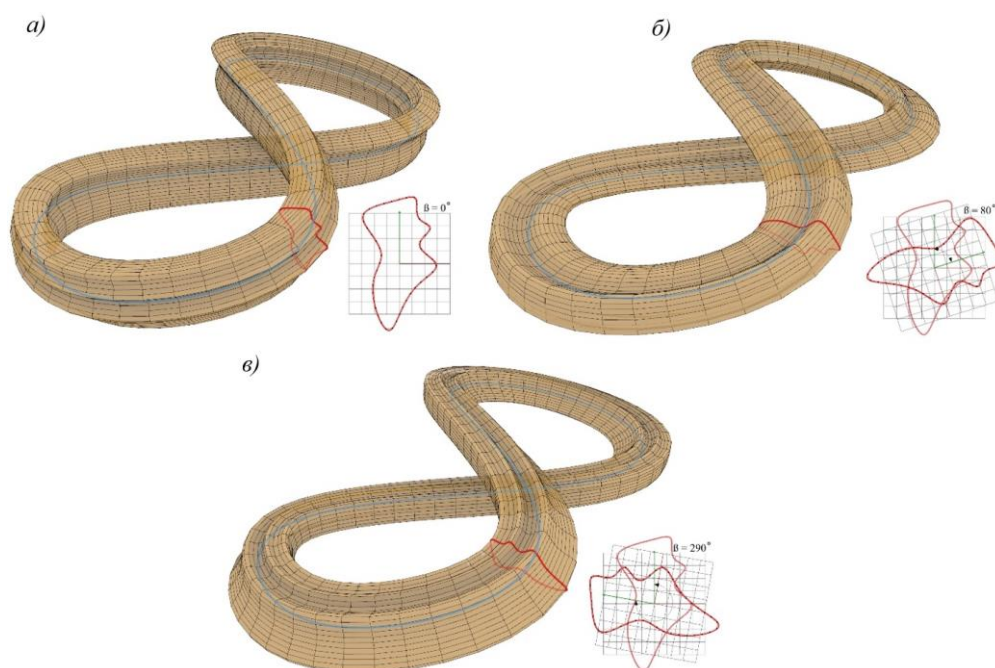
Слика 3-29. а) Приказ процеса корекције профилних равни P , преко конструкције панела у равни суседним линијама L , у првој фази (црно) и након тога другој фази L^* (лила); б) Детаљ конструкције линија L у равни после прве фази (црно) корекције са углом α између прве и последње линије и након друге фази (лила) где је угао између суседних линија L^* константан α^*

На пример, уколико је укупан угао конструктивне торзије $\alpha=64^\circ$, број поделе $n=64$ криве C_2 , у том случају је $\alpha^*=1^\circ$. Из стања када су све суседне линије L компланарне, започиње се ротација равни тако да се прва ротира за $\alpha_1^*=1^\circ$, друга за $\alpha_2^*=2^\circ$, трећа за друга за $\alpha_3^*=3^\circ$, а свака следећа за $\alpha_{n+1}^* = \alpha_n^* + \alpha^*(1^\circ)$. У тим равнима се затим врши уцртавање профилне криве C_2 која, такође, има своју поделу m (Слика 3-30а). Добијене полилиније у профилним равнима се спајају у мрежу, где сваки суседни припадајући сегмент чини један панел. На тај начин се конструишу развојне траке S (Слика 3-30а) чије странице се проверавају на планарност. Као и у осталим решењима, и овде је могуће подесити жељани угао β (Слика 3-30б) који одређује оријентацију профилне криве у односу на управну раван P ради експериментисања са формом у процесу дизајна.

Коначно, спајањем свих сегмената профилне полилиније конструише се први слој дискретне Монжове површи (Слика 3-31). У овом примеру су показане варијанте са различитим вредностима угла β , док су вредност $n=75$, $m=45$ константне.



Слика 3-30. а) Позиционирање профилне криве C_1 у ортогоналне равни P криве C_2 као и развојна трака S сачињена повезивањем сегмената криве C_1 ; б) Приказ задате профилне криве у њеној равни, као и омогућеног улазног параметра ротације за угао β за различите варијанте Монжа

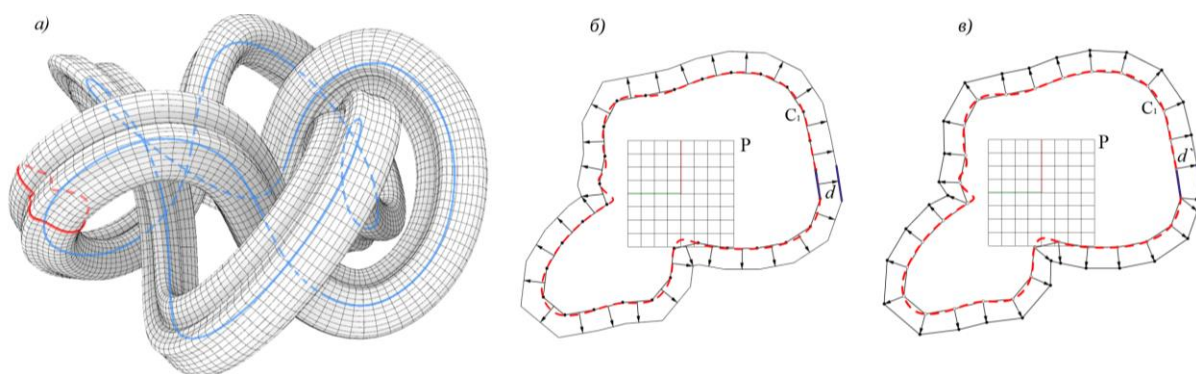


Слика 3-31. Приказ коначне Монжове мреже са планарним панелима и задатим кривима (плава и црвена), где се може добити различити дизајн применом угла β

У овом тренутку се поставља логично питање; *Како се овом методом могу добити планарни панели дуж просторне криве уколико сваки намерно одступа од своје равни?* Величина дискретног угла α^* би требало да је мала у односу на дистанцу између две тачке на кривој, како би панел био у равни за задату толеранцију. Као и у свакој методи која се овде користи, за резултат се не конструишу потпуно равни панели (у математичком смислу дефиниције равни), већ планарни панели који задовољавају услове толеранција производње. Како овде није циљ математичка тачност задатих

геометријских услова, већ примена метода конструкције у архитектури, овај услов не представља ограничење у процесу пројектовања овом површи. Ова чињеница иде у прилог архитектонској пракси у којој се углавном задаје већи број подела, како би се избегла полигонална форма као и велики панели за производњу. Са друге стране, то значи да би требало наћи адекватан однос поделе двеју кривих како би задовољили услове префабрикације.

На слици (Слика 3-32а) је приказан пример сложене просторне криве „чвора“ (плаве) и профилне неправилног облика (црвене). Пример демонстрира перформансе алгорита како су сви панели мреже планарни, користећи поделу $n=350$, $m=40$. Такође, демонстрирана су два типа офсета која се могу користити. Прва могућност је офсет ивице, тако што се сваки сегмент добијен поделом профилне криве помера паралелно ка споља/унутра за дистанцу d (Слика 3-32б). У том случају, офсет ивица постоји само у профилним равнинама P (супротно случају 1б), тако да је ова конфигурација веома повољнија за примену носача у профилној равни правоугаоног попречног пресека константне висине. Друга могућност је офсет тачака где се свака тачка помера у правцу вектора који се конструише као средња вредност нормале на суседне сегменте за вредност d' (Слика 3-32в). У овом случају, цела мрежа има офсет тачака и веома је повољан случај за елементе чворова који могу да буду стандардизовани између почетне и офсетоване мреже.



Слика 3-32. а) Приказ офсета дискретне Монжове мреже на примеру сложене криве „чвора“ и профиле у равни; б) Пример офсета ивице за величину d у профилној равни где су обележене дистанце између одговарајућих сегмената полилиније; в) Пример офсета тачака са константном дистанцом d' између тачака сегмената

Осим ове геометријске методе, посматрана је још једна која, такође, потпада у групу пре-рационализације, с обзиром на то да се бавимо посебним категоријама мрежа. Разлика између њих је у томе што наредна метода, поред посебних геометријских, у себи садржи и повољне конструктивне особине примењених мрежних љуски.

3.2.5 Алгоритам Коенигсових (дуалних) мрежа: радни пакет 2.2

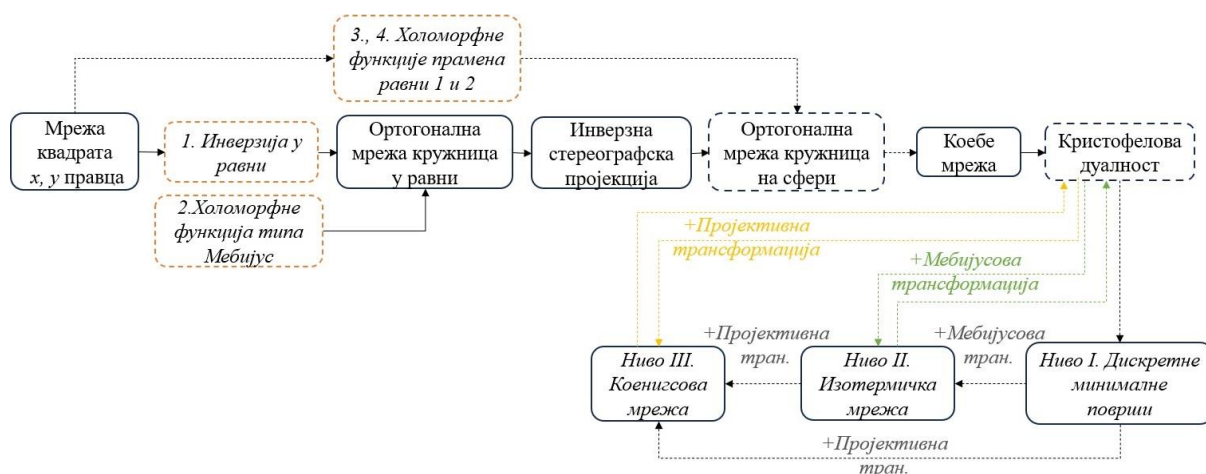
Као што је наговештено у поглављу 2.1.4, посебан приступ који је овде анализиран потиче од методе Кристофелове дуалности. Као део радног пакета 2.2 за генерисање дизајна модуларне мрежне љуске може се користити један од алгоритама за конструкцију дуалних мрежа. Да се подсетимо, дуалне мреже су оне које прихватају примену Кристофелове дуалности. Разлог за њихово интересовање произилази, пре свега, из њене уске повезаности са конструктивним карактеристикама дуалних мрежа. Поред тога, задовољени су главни геометријски критеријуми за пројектовање мрежа базирани на локалним условима префабрикације. У овом раду то су планарни модули без геометријске торзије. Такође, ова метода је позната у уском кругу математичара и истраживача који се баве ДДГ, међутим, до сада, ове теоријске спознаје нису развијене за примену дизајна двоструко закривљених површи. Такође, у склопу Коенигсових мрежа се први пут имплементира принцип коришћења трансформација које задржавају геометријске карактеристике мреже, како би се проширио опус варијанти дизајна.

Метода која се користи за развијање алата и алгорита за њихову конструкцију је базирана на аналитичкој методи моделовања (дефинисане су датим једначинама). Како су ове мреже стриктно дефинисане њиховим геометријским својствима, ови алгоритми се могу применити само у стратегији [пре-рационализације](#). На основу теоријских основа у потпоглављима 2.2.3, 2.2.4 и 2.2.5 овде су развијене стратегије дизајна дуалним мрежама. Оне се јасније могу уочити на шеми која приказује кораке за њихову конструкцију (Слика 3-33).

Наиме, полази се од дефинисане мреже квадрата у равни x , у правца. Може се задати различита укупна дужина и ширина мреже, али се истовремено мора водити рачуна да подела остане квадратна. То значи да ако је X укупна дужина, а u број поделе x правца, и Y укупна дужина а v број поделе y правца мора бити задовољен услов: $X/u = Y/v = n$ (n је дужина стране квадрата). Након тога је могуће употребити једну од конформалних пресликавања како би се „деформисала” мрежа кружница у равни. Употребом различитих вредности улазних параметара и променом величине почетне x , у равни се могу добити другачији патерни мреже. Затим се може применити инверзна стереографска пројекција како би се кружнице пројектовале на сферу и преко њих конструисати Коебе мрежа (потпоглавље 2.2.3). Уколико се користе специјални

случајеви холоморфних функција преко праменова равни, корак инверзне стереографске пројекције није потребан.

Од овог корака, дуалне мреже су категорисане у три нивоа дизајна. Први је најограниченији и представља дискретне минималне површи. Како би се оне добиле, потребно је применити конструкцију Кристофелове дуалности на Коебе мрежу. Други ниво се може добити уколико се на ниво I примени [Мебијусова трансформација](#) где се ослобађамо услова минималне површи, али задржавамо кружну дуалну мрежу што је чини изотермичком мрежом. Уколико на ниво II применимо [пројективну трансформацију](#) губи се својство кружне (ортогоналне) мреже, али се задржава Коенигсова и тиме добија ниво III. Јасно је да је могуће на ниво I директно применити пројективну трансформацију где се спуштамо на ниво III. Иако се разликују по појединим геометријским особинама, сви нивои мрежа се убрајају у Коенигсове мреже и за све важе геометријске и конструктивне повољности дуалних мрежа.



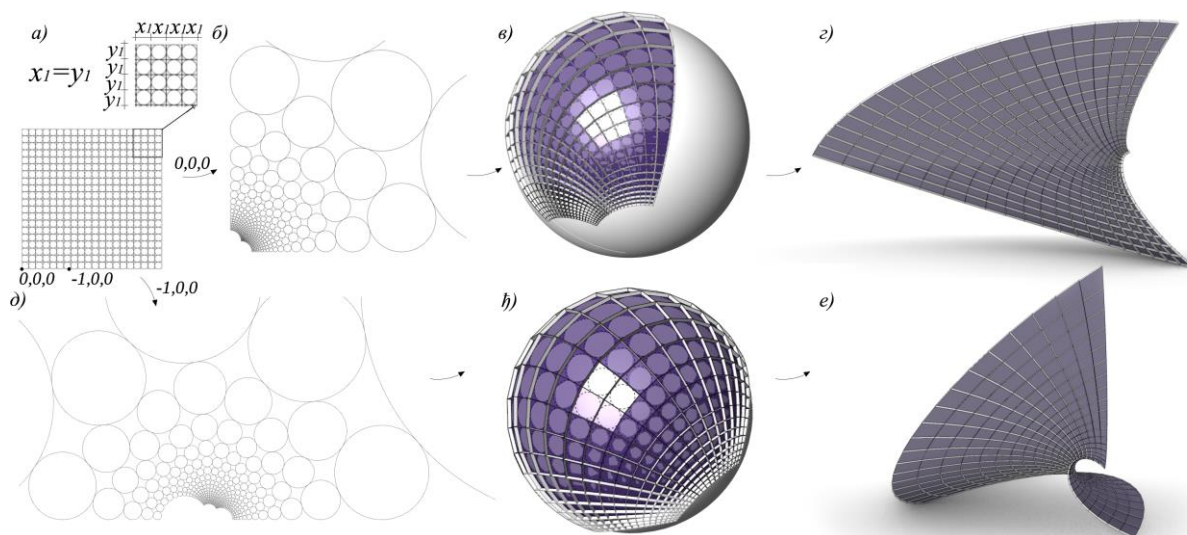
Слика 3-33. Шема могућих стратегија конструкције ПК мрежа у равнотежи преко Кристофелове дуалности, Коебе мрежа и пратећих трансформација

Такође, важно је нагласити да, осим у случају нивоа I, у друга два нивоа (II и III) могуће је наизменично примењивати Мебијусову или пројективну трансформацију са Кристофеловом дуалношћу како би се добиле различите форме нивоа II или III (*жуто и зелено* на Слика 3-33). Ова теорија показује да Мебијусова и пројективна трансформација нису имуне на Кристофелову дуалност, за разлику од првог нивоа где то јесте случај. Ово својство омогућава генерисање неограниченог броја различитих форми дуалних мрежа. Шема показује могућност преласка са првог на други или трећи ниво, али не и повратак са трећег на други или први. У наставку је приказана примена стратегија за конструкцију дуалних мрежа кроз три нивоа.

3.2.5.1 Поступак конструкције дискретних минималних површи – ниво I

Прво потпоглавље приказује поступак конструкције дуалних мрежа нивоа I – дискретних минималних површи. Посматрана су четири наведена случаја конформалних пресликавања (Слика 3-33) и на основу њих четири поступка која се могу користити за процес дизајна.

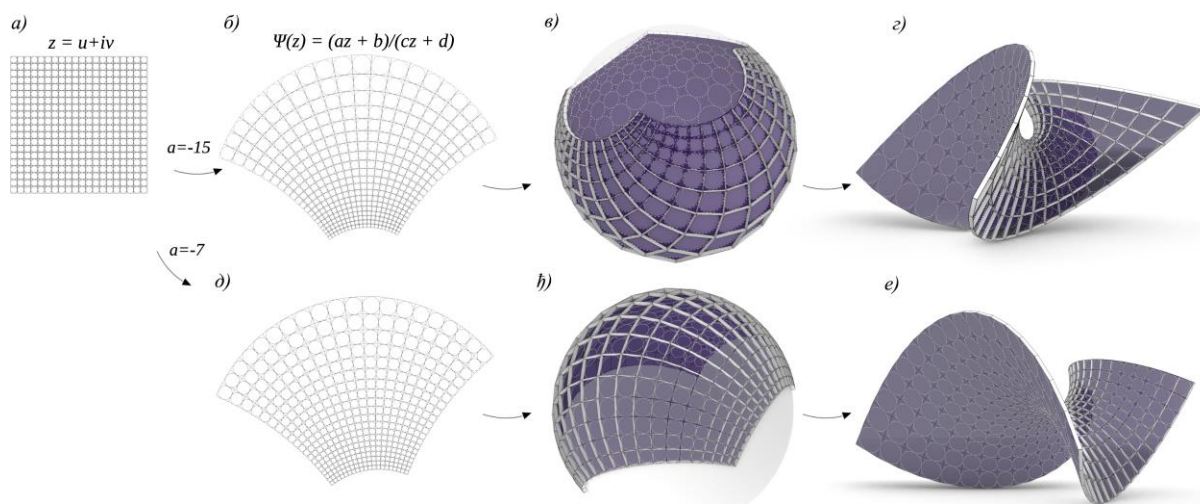
Први случај је имплементација [инверзије у равни](#). Задата мрежа квадрата је 20×20 са координатним почетком у тачки $0,0,0$ у првом случају (Слика 3-34а). Применом инверзије добија се деформисана шема кружница (Слика 3-34б). Наредни корак је примена инверзне стереографске пројекције на сферу која је примењена за сваку од истих тачака на кружници према познатој формули. Коебе мрежа је конструисана према описаном поступку на основу ових кружница као и офсет (поглавље 2.2.3), који је задат према нормалама сфере у тангентним тачкама ивица мреже (Слика 3-34в). Ово значи да све мреже нивоа I имају [офсет ивица](#) (edge offset). Након тога је поступак Кристофелове дуалности примењен по конструкцији дефинисаној у поглављу 2.2.4, где се конструише дискретна верзија минималне површи и то [Енеперова](#) – ниво I (Слика 3-34г). Како су равни панела Енеперове површи и њене Гаусове слике (Коебе мреже) исте као и нормале, оне се могу применити за конструкцију њеног офсета.



Слика 3-34. Процес конструкције нивоа I преко инверзије: а) Квадратна мрежа у x, y правцу б) Инверзија кружница у равни в) Инверзна стереографска пројекција на сферу за конструисање Коебе мреже г) Примена Кристофелове дуалности на Коебе мрежу за добијање дискретне Енеперове минималне површи д) Друга варијанта инверзије са почетном координатом $(-1,0,0)$ у равни е) Добијена Коебе мрежа ж) Добијена Енеперова површ

Конструкција Енеперове површи није ништа ново, међутим, овде се ради о развоју алата као и предлогу улазних параметара за експериментисање формом љуске. Наиме, променом положаја почетне x, y равни у односу на центар кружнице инверзије, број поделе равни, број редова и колона као и радијуса кружнице инверзије могу се конструисати различите форме мреже. Овде је наведена једна могућа варијација промене положаја почетне равни где је она померена са координате $0,0,0$ на $-1,0,0$. Може се уочити на кој начин је дошло до промене патерна кружница (Слика 3-34д), Коебе мреже (Слика 3-34ђ) као и резултујуће форме Енеперове површи (Слика 3-34е). Уколико би се, на пример, број редова квадрата повећао, сама мрежа би била продужена, илити већи део целокупног домена површи би био приказан. У програму ГХ су ови кораци као засебне компоненте дефинисане, па се може у сваком кораку видети резултат и модификовати форма добијене љуске.

Посебно би требало водити рачуна о формама које нису увек погодне за конструкцију љуски, где се приликом продужетка површи она пресеца сама са собом. Ова појава је јаснија у наредном примеру.

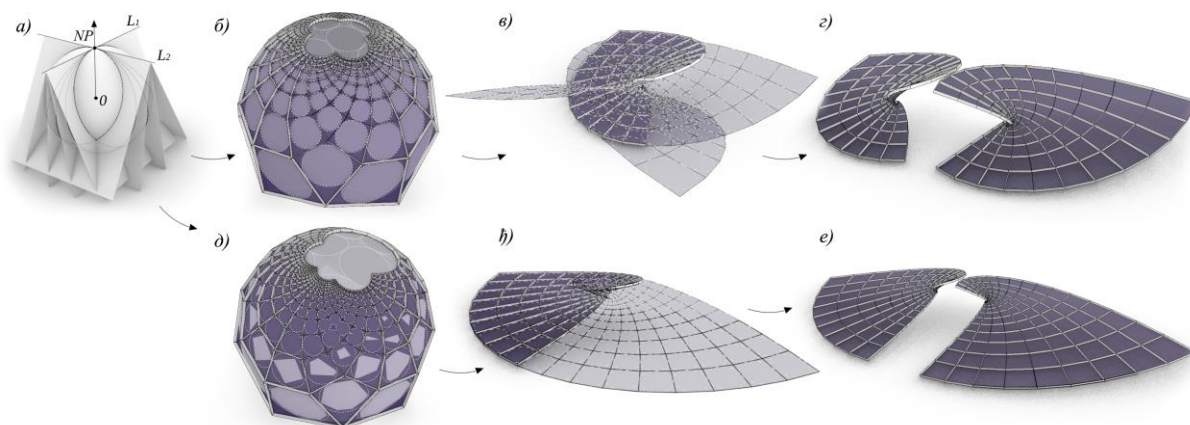


Слика 3-35. Процес конструкције нивоа I преко мапе типа Мебијус и инверзне стереографске пројекције: а) Квадратна мрежа у x, y правцу б) Мебијус пресликавање кружница у равни в) Инверзна стереографска пројекција на сферу за конструисање Коебе мреже г) Примена Кристофелове дуалности на Коебе мрежу за добијање дискретне минималне површи д) Друга варијанта инверзије са почетном параметром $a = -7$ ђ) Добијена Коебе мрежа е) Добијена друга верзија површи

Други пример дискретне минималне површи је добијена полазећи од комплексног пресликавања [типа Мебијус](#). У овом случају се, такође, полази од поделе x, y равни на квадрате где је она иста као и претходном примеру (Слика 3-35а). Затим се примењује пресликавање већ дефинисаном параметризацијом мреже, где се добија

мрежа кружница (Слика 3-35б). Инверзном стереографском пројекцијом се кружнице пресликавају на сферу како би се већ познатим поступком добила Коебе мрежа (Слика 3-35в). На крају, применом Кристофелове дуалности се добија дискретна минимална површ (Слика 3-35г). Улазни параметри дизајна су овде a , b , c и d функције типа Мебијус, где се њиховом променом могу добити различите форме мреже. Ова промена је приказана корак по корак на примеру где се може видети друга варијанта форме мреже (Слика 3-35д, ђ, е). У овом случају би требало водити рачуна о могућности самопресецања површи приликом пројектовања. То се лако може избећи смањивањем домена површи (почетне мреже) или варијацијом улазних параметара a , b , c и d .

Последња два примера потичу од конструкције конформалне параметризације сфере преко [два прамена ортогоналних пресечних равни](#) са њом. Први случај је дефинисан преко конформалне параметризације сфере, помоћу два скупа равни која пролазе кроз ортогоналне праве L_1 и L_2 кроз северни пол NP (Слика 3-36а). Преко њене параметризације, која је дефинисана у виду једначине (поглавље 2.2.3) за дефинисани домен и његову поделу, могу се добити кружнице пресека на сфери.

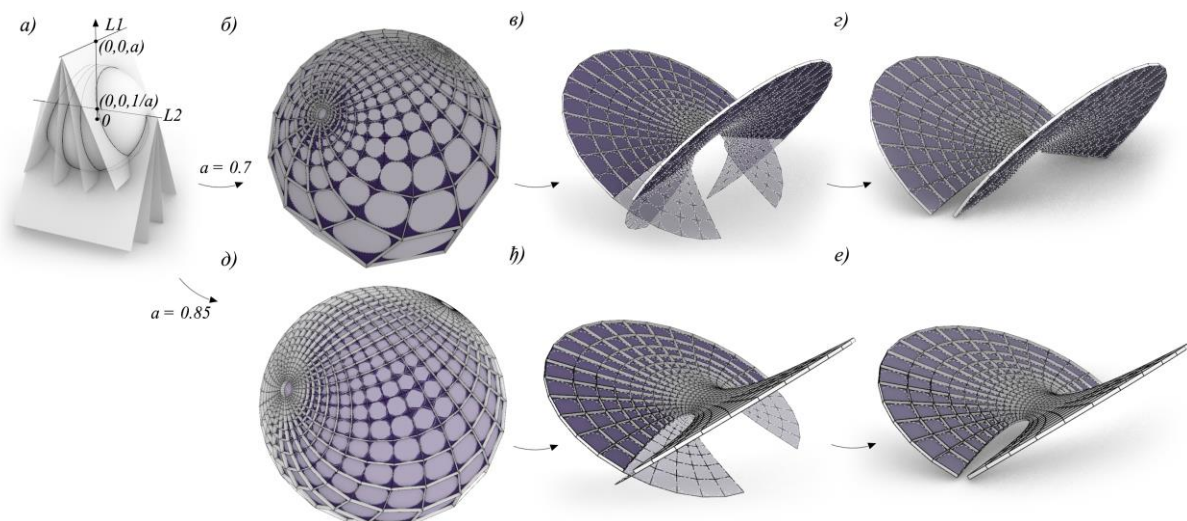


Слика 3-36. Процес конструкције нивоа I преко ортогоналних праменова равни: а) Први случај праменова равни кроз северни пол; б) Конструисање Коебе мреже в) Примена Кристофелове дуалности на Коебе мрежу за добијање дискретне минималне површи г) Узет исечак за симетричан дизајн мреже д) Коебе мрежа за другу вредност домена ђ) Добијена дискретна минимална површ е) Исечак мреже за другу варијанту симетричног дизајна

Важно је нагласити да је у овом случају потребно, у функцији задатог домена и поделе, проверити да ли су кораци исти у оба правца како би се добила квадратна мрежа у параметријском простору. С обзиром на то да се не види почетна раван, ово је лако израчунати. На пример, уколико је домен једног правца од 0 до 1, и подела $u=10$, следи да је страница квадрата 0,1. Самим тим, могуће је изабрати други домен другог правца, нпр. од 1 до 3, међутим, број поделе мора бити 20 како би се добила иста вредност која

износи опет 0.1. Према већ дефинисаном поступку конструише се Коебе мрежа (Слика 3-36б) и примењује Кристофелова дуалност како би се добила дискретна минимална површ – ниво I (Слика 3-36в). Како се у овом случају десило да се мрежа пресеца сама са собом, издвојен је асиметричан исечак који се може поставити симетрично у односу на вертикалну раван и тиме модификовати у стабилнији дизајн конструкције (Слика 3-36г). Друга варијанта дизајна се може видети у облику свих корака, тако што се промени почетни домен улазних параметара (Слика 3-36д, ђ, е).

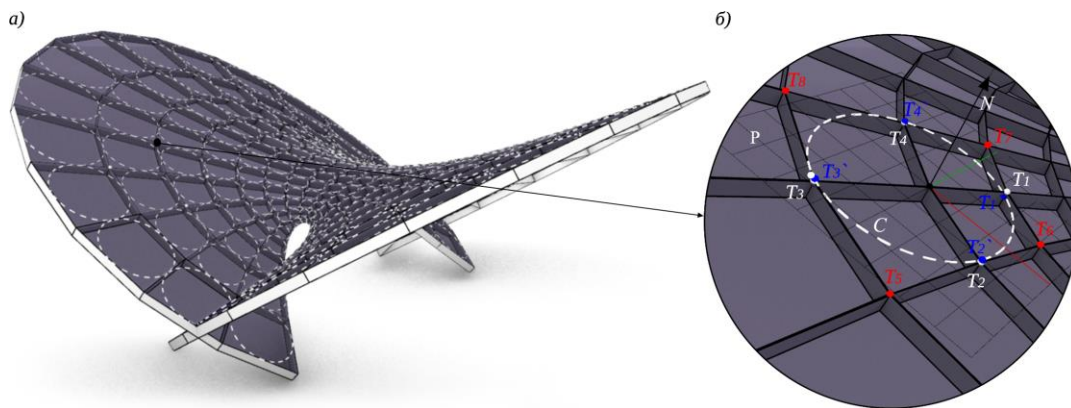
Наредни случај је веома сличан претходном, са том разликом што су праве L_1 и L_2 кроз које пролазе праменови равни удаљене од центра сфере за обрнуто реципрочну вредност a (Слика 3-37а). Она се уводи као још један улазни параметар варијације дизајна. Као и у претходном примеру, приказана је Коебе мрежа која је конструисана по већ познатом поступку (Слика 3-37б). Као што је познато из анализе ових мрежа, уколико се кружнице на сфери секу у две тачке, применом Кристофелове дуалности се конструише [Бонетова дискретна минимална површ](#) (Слика 3-37в). Она представља ниво I у овом случају. Како се и она пресеца сама са собом у задатом домену, могуће је употребити само део ње за дизајн (Слика 3-37г). Прва варијанта дизајна је задата параметром $a=0.7$, док је друга приказана са промењеном вредности параметра $a=0.85$ и свим корацима конструкције (Слика 3-37д, ђ, е).



Слика 3-37. Процес конструкције нивоа I преко ортогоналних праменова равни: а) Други случај праменова равни; б) Конструисање Коебе мреже в) Примена Кристофелове дуалности на Коебе мрежу за добијање дискретне Бонетове површи г) Узет исечак дизајн мреже д) Коебе мрежа за другу вредност домена ђ) Добијена дискретна Бонетова површ е) Исечак мреже за другу варијанту

Како би потврдили тврдњу да су све површи након примене Кристофелове дуалности на Коебе мрежу минималне дискретне површи, следи провера својства које

дефинише ове мреже. Као што је назначено у теоријским основама, [по Бобенку](#) добијена мрежа припада дискретној минималној површи уколико: се у свакој тачки може конструисати раван P преко нормале N у тој тачки која садржи њене црвене суседи T_5, T_6, T_7, T_8 , док су њени бели суседи T_1, T_2, T_3, T_4 једнако удаљени од те равни, чије пројекције T_1', T_2', T_3', T_4' праве кружницу C . Примена ове провере је показана на Бонетовој минималној површи (Слика 3-38) где она задовољава услове у свакој тачки. На исти начин је извршена провера три претходна случаја нивоа I који, такође, испуњавају услове минималних дискретних површи.



Слика 3-38. а) Пример Бонетове минималне површи са б) детаљем конструктивне провере њених својстава

Овим је завршен приказ свих анализираних стратегија конструкције дуалних мрежа нивоа I. У наредном делу прелази се на дуалне мреже нивоа II.

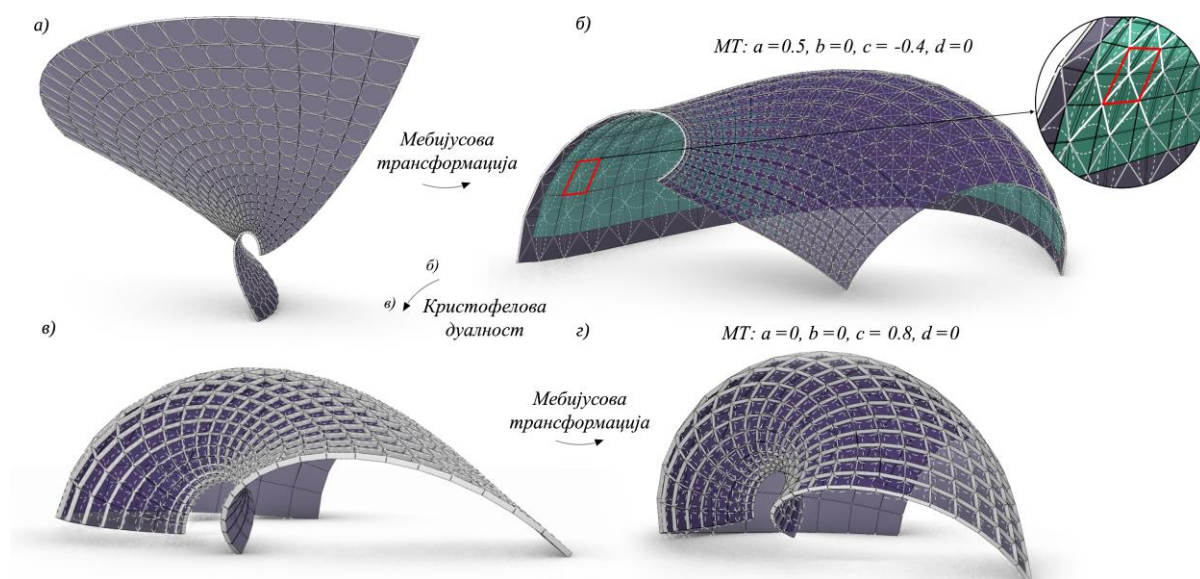
3.2.5.2 Поступак конструкције изотермичких мрежа – ниво II

У овом потпоглављу се фокусирамо на конструкцију изотермичких мрежа које су дефинисане као ниво II. Он означава кружне Коенигсове мреже. Начин њихове конструкције је дефинисан према формулисаној [стратегији](#). Већ је познато да се мрежа нивоа II добија применом Мебијусове трансформације (MT) на ниво I, па ће управо на претходним примерима она бити и имплементирана.

Прва у низу је [Енеперова површ](#) нивоа I (Слика 3-39а) на коју је примењена MT. Примена MT је рађена аналитичким моделовањем по приказаним формулама у потпоглављу 2.2.5. На основу приказаних формула је конструисана компонента са израчунавањем сваке нове координате трансформисане тачке. Улазни параметри задати за трансформацију су: $a=0.5$, $b=0$, $c=-0.4$, $d=0$. Требало би нагласити да је од велике

важности задати трансформацију тачака које припадају кружницама. То могу бити или темена полигона или тачке описаних кружница у којима се оне тангирају.

Након трансформације добијена мрежа јесте ортогонална и има описане кружнице (Слика 3-39б), с обзиром на то да Енеперова површ спада у изотермичке мреже (дуалним са описаним кружницама). Провера да ли је мрежа, такође, дуална је приказана на детаљу где се конструишу панели преко дијагонала и проверава њихова планарност која је, као и очекивано, задовољена (Слика 3-39б детаљ десно).



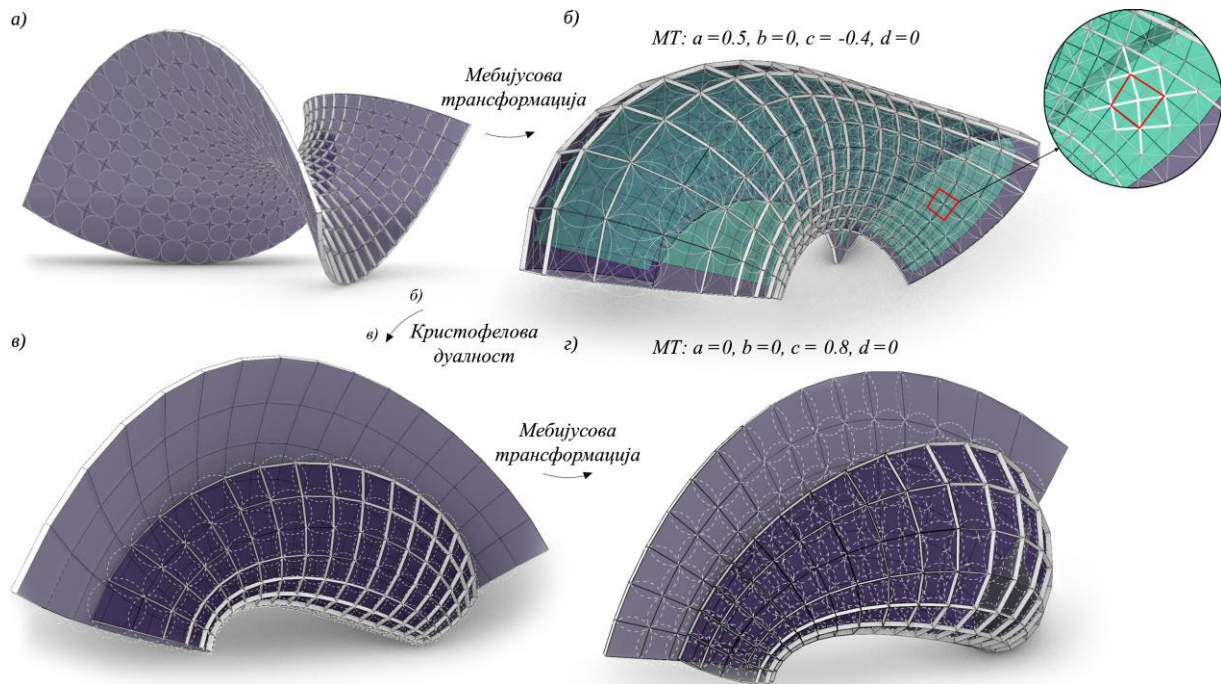
Слика 3-39. Конструкција различитих варијанти изотермичких мрежа почевши од а) Енеперове површи б) примена Мебијусове трансформације са детаљем провере кружне и Кoenигсове мреже, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена Мебијусове трансформације

Већ је поменуто да изотермичка мрежа као кружна има [офсет тачака](#), па је тако и задата дебљина љуске. Вектори нормала су преузети из НУРБС¹⁴ површи која пролази кроз тачке мреже где је свака тачка померена у правцу тог вектора за исту дистанцу. Додатна провера планарности страница панела је показала да нема геометријске торзије као што је и очекивано код кружне мреже.

Да би се показала већ формулисана стратегија, демонстрирано је како наизменична примена Кристофелове дуалности и Мебијусове трансформације може генерисати додатне варијанте изотермичких мрежа. Приказан је још један круг примене

¹⁴ NURBS (engl. Non-Universal Ration Basic Spline) – (срп. не-универзална рационална основна крива) тип површи и кривих развијених за рачунарско моделовање и графику слободних форми и облика. Заснивају се на апроксимацији задатих тачака при моделовању површи/кривих и манипулацијом преко тзв. контролних тачака.

тих трансформација, где се добијају два додатна примера мрежа (Слика 3-39в, Слика 3-39г). У случају МТ промењени су улазни параметри: $a=0$, $b=0$, $c=0.8$, $d=0$.

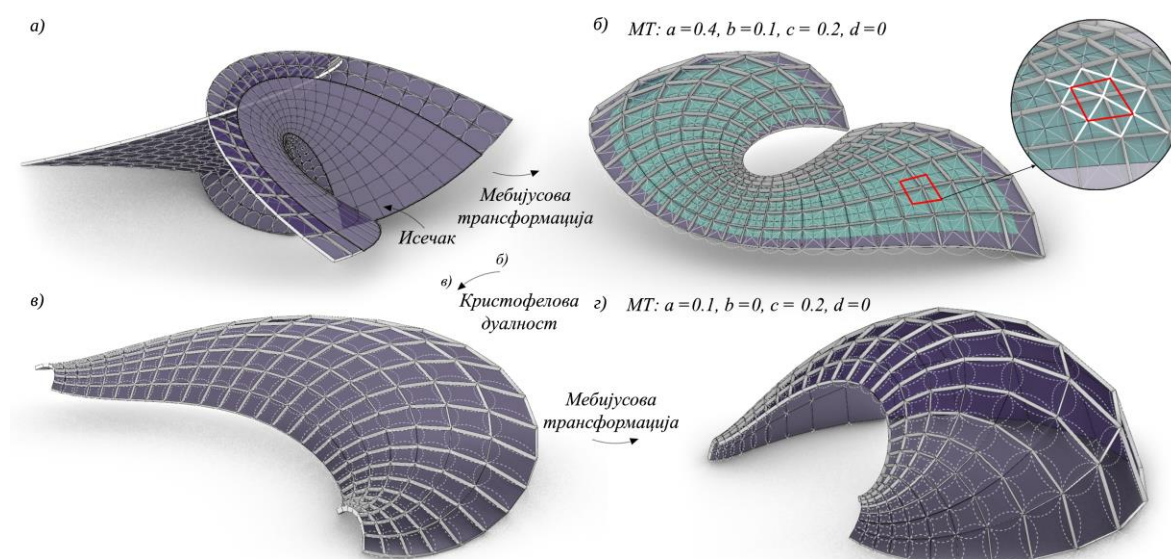


Слика 3-40. Конструкција различитих варијанти изотермичких мрежа почевши од а) дискретне минималне површи добијене функцијом типа Мебијус б) примена Мебијусове трансформације са детаљем провере кружне и Коенигсове мреже, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена Мебијусове трансформације

Друга итерација истог принципа је примењена на случају дискретне минималне површи из претходног потпоглавља. Она је добијена комплексним пресликавањем помоћу холоморфне функције [типа Мебијус](#) (Слика 3-40а). Како би се са првог нивоа дошло на ниво II, најпре је примењена Мебијусова трансформација са улазним параметрима: $a=0.5$, $b=0$, $c=-0.4$, $d=0$ (Слика 3-40б). И у овом случају поред својства кружне мреже је лако проверено својство Коенигсове мреже конструкцијом панела зелене боје преко пресечних дијагонала (беле) панела (Слика 3-40б детаљ десно). Сваки од панела је у равни, па је тиме услов дуалне мреже задовољен. Офсет тачака је конструисан за сваки од примера као и у претходном случају изотермичких површи, где је проверено одсуство геометријске торзије. Наредна два примера представљају наизменичну примену Кристофелове дуалности (Слика 3-40в) и Мебијусове трансформације како бисмо показали могућност конструкције различитих варијанти изотермичких мрежа. Улазни параметри за МТ овог пута износе: $a=0$, $b=0$, $c=0.8$, $d=0$ (Слика 3-40г). У сврху истраживања форми, ове две трансформације је могуће

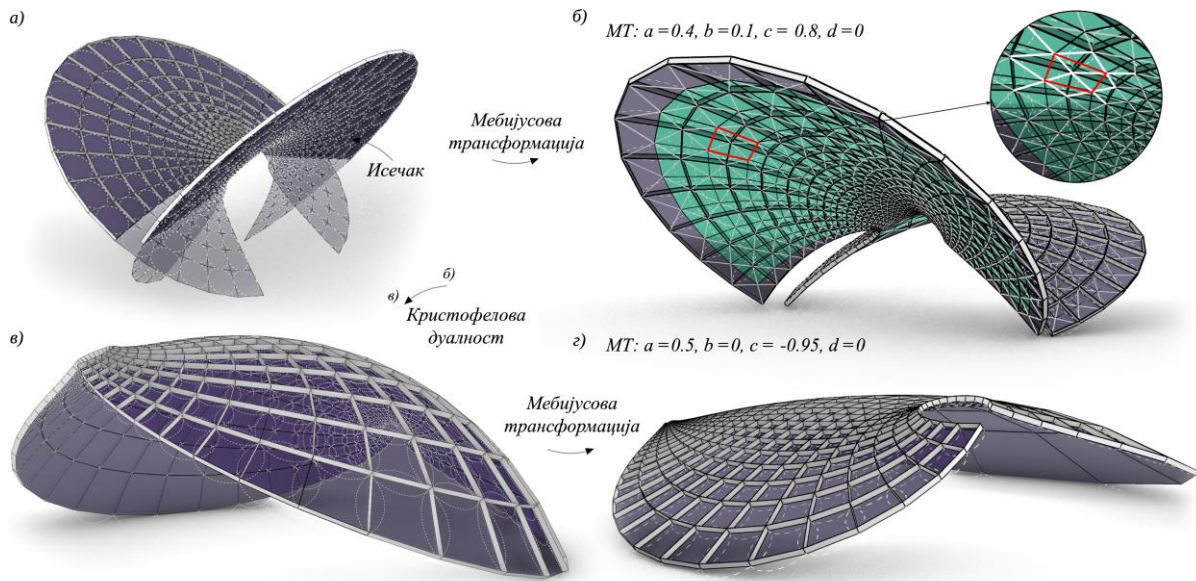
наизменично примењивати неограничен број пута, где би се добиле различите форме мрежних изотермичких љуски.

Последња два случаја представљају трансформацију дискретних минималних површи нивоа I добијених [преко пресека праменова равни са сфером](#) у изотермичке површи нивоа II. Да се подсетимо, први случај је када праменови равни пролазе кроз северни пол сфере где се добија дискретна минимална површ (Слика 3-41а). Код другог су праменови равни обрнуто пропорцијално удаљени по вертикали где се добија специјална Бонетова површ (Слика 3-42а). Наредни примери на сликама представљају резултате изотермичких површи које су произашле из та два случаја (Слика 3-41б, в, г, Слика 3-42б, в, г).



Слика 3-41. Конструкција различитих варијанти изотермичких мрежа почевши од а) дискретне минималне површи добијене праменом равни случај I б) примена Мебијусове трансформације са детаљем провере кружне и Коенигсове мреже, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена Мебијусове трансформације

Исти поступак као и у претходна два случаја је примењен како би се добиле различите комбинације изотермичких мрежа и њихови офсети. Сва неопходна својства кружне и Коенигсове мреже су проверена на исти начин, где је резултат показао да су она задовољена, као и очекивано (Слика 3-41б, Слика 3-42б). Осим улазних параметара за примену МТ који се разликују, ови примери су карактеристични јер би требало водити рачуна о пресеку мреже саме са собом. Наиме, код оба случаја су обележени исечци који су употребљени за наставак са трансформацијама (Слика 3-41а, Слика 3-42а). Препорука је, ипак, експериментисати са целим доменом мреже и након тога одлучити који исечак одговара дизајну ради бољег увида у избор форми мрежних љуски.



Слика 3-42. Конструкција различитих варијанти изотермичких мрежа почевши од а) дискретне Бонетове површи добијене праменом равни случај 2 б) примена Мебијусове трансформације са детаљем провере кружне и Коенигсове мреже, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена Мебијусове трансформације

Након експериментисања са улазним параметрима Мебијусове трансформације може се приметити да параметри не морају имати искључиво дејство једног типа на мрежу, већ зависе од датог дизајна љуске. Ова појава чини развој интуиције за њену имплементацију тежом. Међутим, ипак се може уочити утицај који се понавља а то је да параметри a и b повећавају асиметричност љуске, c делује на закривљеност док d чини љуску већом, попут ефекта скалирања. Исто тако је од великог значаја почетни положај мрежне љуске пре саме трансформације, као и њена величина. Наиме, препоручује се да се мрежа увек позиционира у почетној координати $0,0,0$ као и да се њеним скалирањем може повећати или смањити ефекат Мебијусове трансформације.

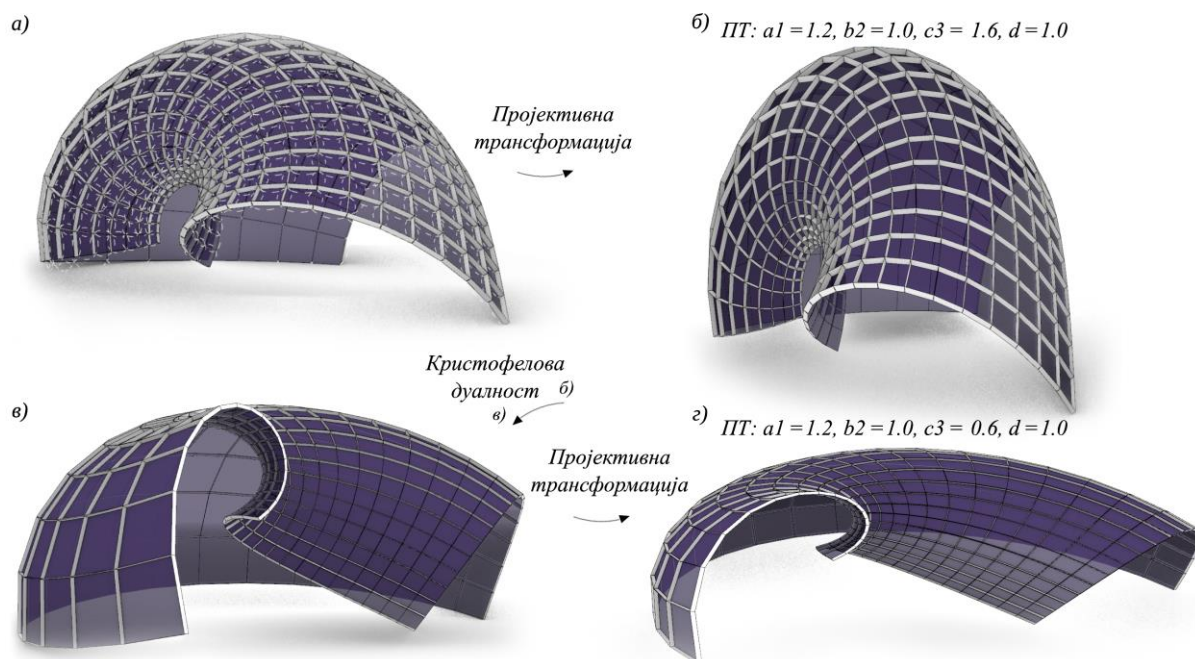
Требало би нагласити да су за примену Мебијусове трансформације и Кристофелове дуалности у ГХ конструисане засебне компоненте са одговарајућим улазним параметрима. Ово омогућава њихову несметану и наизменичну имплементацију, која се може наставити на презентованим примерима за даља истраживања. Међутим, за демонстрацију принципа развијене стратегије, може се прећи на ниво III, где су дефинисане само Коенигсове мреже, без додатних својстава.

3.2.5.3 Поступак конструкције Коенигсових мрежа – ниво III

Уколико се подсетимо [стратегије](#) за конструкцију дуалних мрежа, у мреже нивоа III спадају Коенигсове, које дозвољавају само примену Кристофелове дуалности. То

значи да својства минималних површи и кружне мреже нису присутна. Самим тим што предствалају најмање ограничену групу, њихова конструкција се може применити на више начина. Наиме, речено је да није могуће ићи са нижег нивоа на виши, нпр. са нивоа II на ниво I и сл., међутим, могуће је кретати се са вишег на нижи. То значи да конструкцију нивоа III можемо добити преко нивоа I или II.

Друга чињеница је да се за ниво III користи пројективна трансформација (ПТ). Као што је већ наглашено, она не задржава својство минималне површи или ортогоналности, већ само планарности. Ако се подсетимо да главно својство Коенигсових мрежа представљају планарни панели конструисани од пресечних дијагонала четири контактна панела једне тачке, јасно је да ПТ не угрожава ту карактеристику. Њена примена се базира, такође, на аналитичком моделовању применом формуле из поглавља 2.2.5 о теоријским основама. Слично као и за Мебијусову трансформацију, конструисана је компонента у ГХ која узима координате задатих тачака и као излазни податак даје нову позицију тачака мреже. Такође, слично као и у претходном случају, примена ПТ се може смењивати са Кристофеловом дуалношћу како би се добиле нове варијанте форме дуалне мреже. То се може видети и на приказаном дијаграму у уводном делу овог потпоглаља.

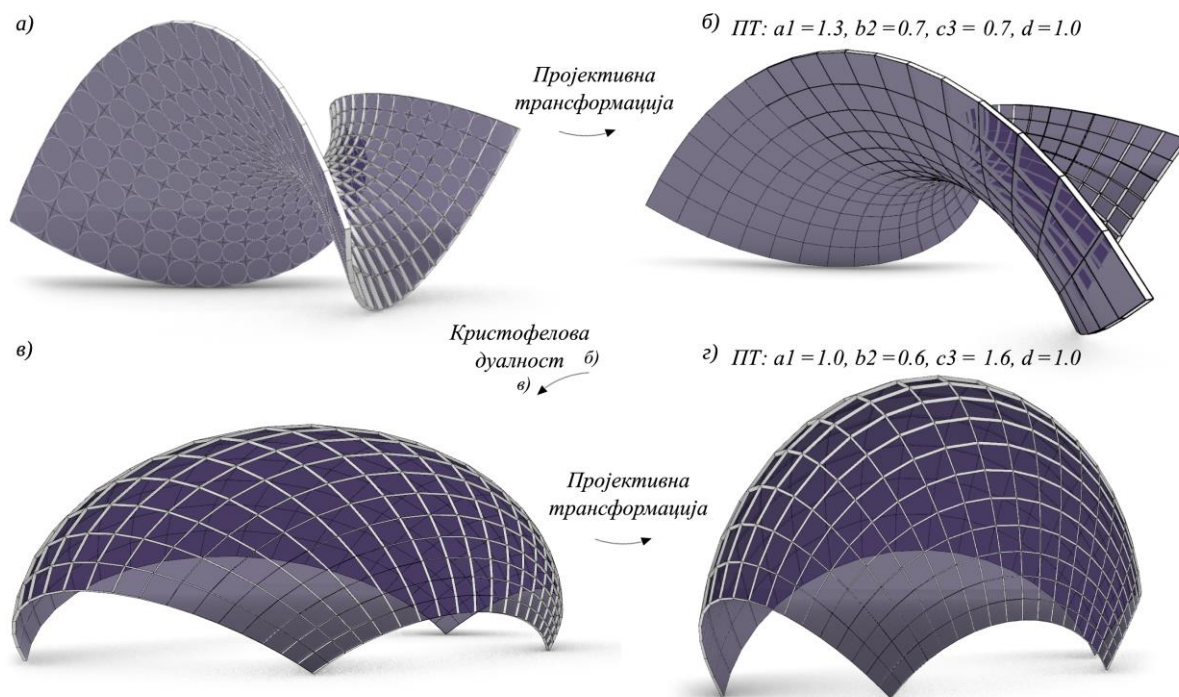


Слика 3-43. Конструкција различитих варијанти Коенигсових мрежа нивоа III почевши од а) изотермичке мреже са Слика 3-39г, б) примена пројективне трансформације, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена пројективне трансформације

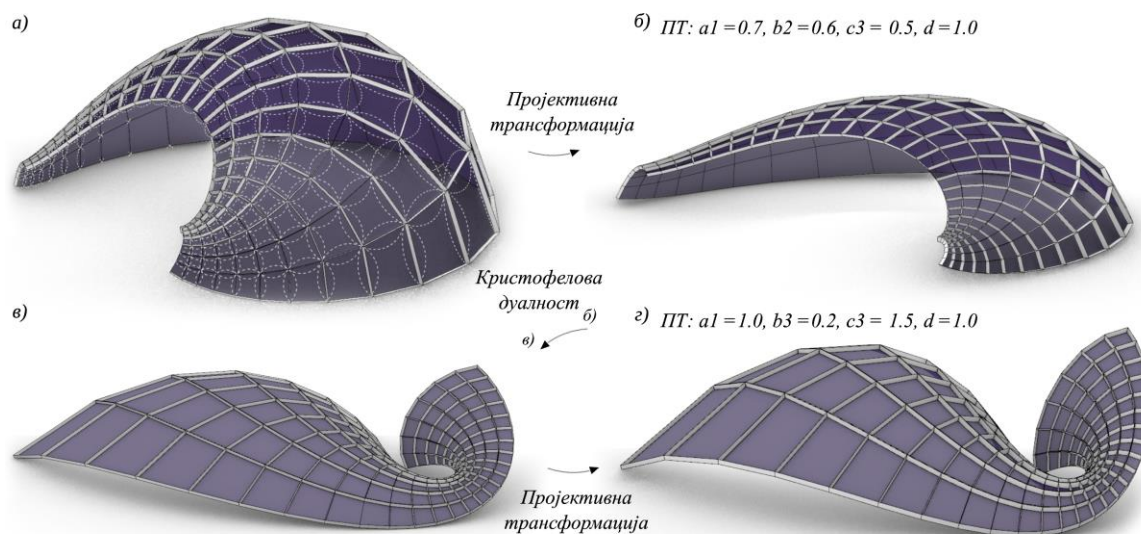
За разлику од начина конструкције дуалних мрежа у претходна два нивоа, за ниво III, почетни примери ће бити насумично изабрани из досада наведених. Ово ће истовремено демонстрирати могуће начине конструкције Коенигсових мрежа. Истовремено, избегава се потреба за понављањем претходних корака у стратегији конструкције нивоа I или II. Након тога следи наизменична примена пројективне трансформације са различитим улазним параметрима дизајна и Кристофелове дуалности. Ова примена има за циљ генерисање различитих форми дуалних љуски.

За први пример као полазна површ је изабрана изотермичка мрежа (ниво II) (Слика 3-43а). Она је настала наизменичном применом Мебијусове трансформације и Кристофелове дуалности за случај инверзије у равни из претходног потпоглавља (Слика 3-39г). Након тога је примењена пројективна трансформација са следећим улазним параметрима: $a_1=1.2$, $b_2=1.0$, $c_3=1.6$, $d_4=1.0$ где се добија мрежа нивоа III (Слика 3-43б). Уколико се подсетимо улазних параметара дизајна за ПТ (потпоглавље 2.2.5), важно је нагласити да, ако је вредност дијагоналних параметара a_1 , b_2 , c_3 , d_4 једнака 1.0, а остали су једнаки нули, као резултат се добија непромењена мрежа. Са овим вредностима можемо почети, а онда постепеном променом посматрати на који начин се мења форма мреже у односу на промењене вредности параметара. Након тога је примењена Кристофелова дуалност како би се добила сасвим другачија форма мреже (Слика 3-43в). Ако се подсетимо правила четири четвороугла која омогућавају примену Кристофелове дуалности на задату мрежну љуску (потпоглавље 2.2.4), јасно је да мрежа задржава то својство. Након примене процеса дуалности, све тачке се поклапају, што потврђује да је мрежа одржала своју структуру. Напослетку се још једном примењује ПТ како би се форма дуалне љуске деформисала и добио додатни пример мреже нивоа III (Слика 3-43г). У овом случају су изабрани другачији улазни параметри дизајна.

Наредна три примера различитих варијанти Коенигсових мрежа су конструисана на исти начин као и претходни. Најпре су изабрани примери почетних мрежа из преостала три начина конструкције конформалних пресликавања: тип Мебијус, случај праменова равни кроз северни пол и праменови равни обрнуто пропорцијално удаљени од њега. У првом се креће од мреже нивоа I (Слика 3-44а), док су код друга три изабране мреже нивоа II (Слика 3-45а, Слика 3-46а). Након прве примене ПТ су добијене мреже нивоа III (Слика 3-44б, Слика 3-45б, Слика 3-46б) као и све остале (Слика 3-44в,г, Слика 3-45в,г, Слика 3-46в,г).

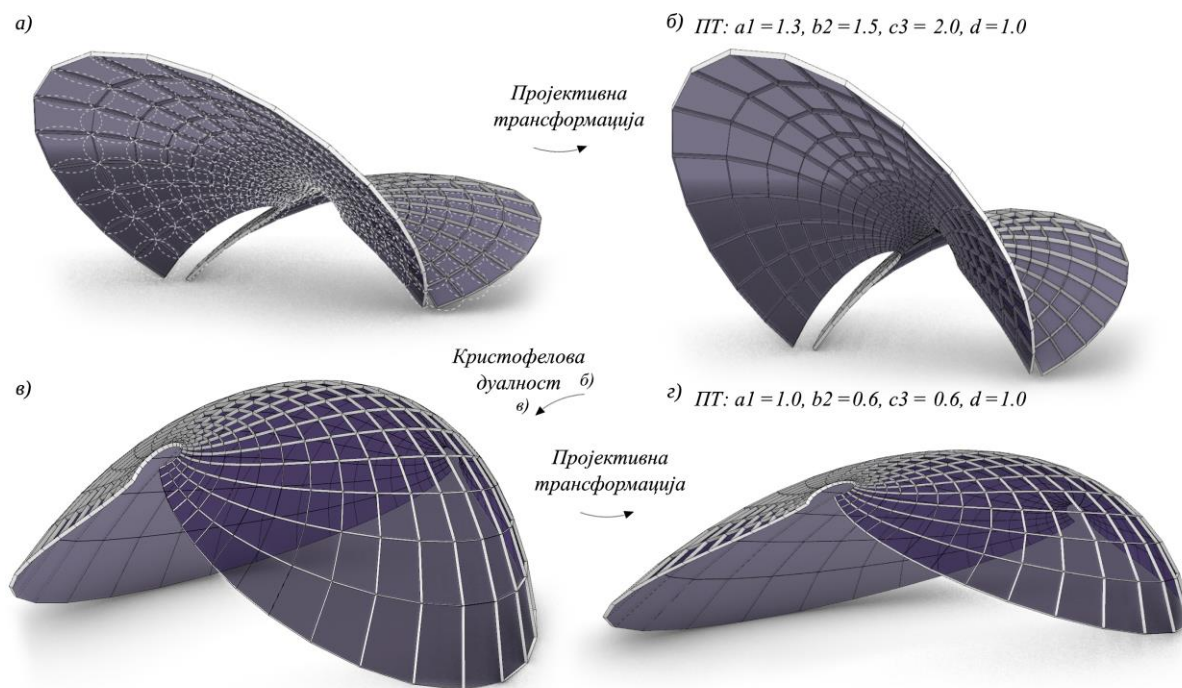


Слика 3-44. Конструкција различитих варијанти Кoenигсових мрежа нивоа III почевши од а) дискретне минималне површи са Слика 3-40а, б) примена пројективне трансформације, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена пројективне трансформације



Слика 3-45. Конструкција различитих варијанти Кoenигсових мрежа нивоа III почевши од а) изотермичке мреже са Слика 3-41г, б) примена пројективне трансформације, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена пројективне трансформације

У сваком од ових примера проверен је услов планарности панела, као и одсуства геометријске торзије. Како знамо да је први задовољен услов самом природом пројективне трансформације, други би могао да представља изазов.



Слика 3-46. Конструкција различитих варијанти Коенигсових мрежа нивоа III почевши од а) изотермичке мреже са Слика 3-42б, б) примена пројективне трансформације, в) затим примена Кристофелове дуалности, г) и на крају накнадна примена пројективне трансформације

Наиме, важно је нагласити да приликом примене ПТ на изотермичку површ, требало би посебно третирали почетну мрежу, а посебно њен офсет. Тиме се користи својство ПТ за очување планарности страница модула. Овај приступ не важи када се на мрежу нивоа III примени Кристофелова дуалности како офсетована мрежа не мора бити и дуална. На основу тога прибегнуто је принципу конструкције офсета преко НУРБС површи интерполацијом кроз тачке мреже, као што је то урађено на примерима изотермичких мрежа. Овај начин је показао да су резултујуће странице без геометријске торзије за задати офсет.

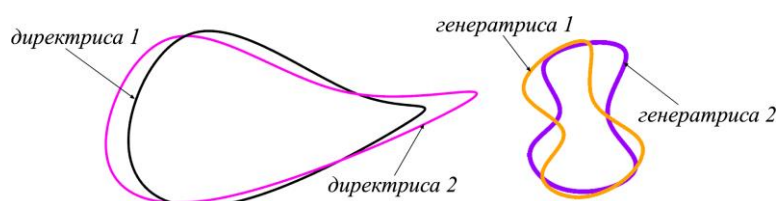
Након експериментисања различитим улазним параметрима пројективне трансформације, може се увидети да се њено дејство знатно разликује од онога који даје Мебијусова трансформација. Примена је интуитивнија с обзиром на то да се ради о врсти афине трансформације које обухватају транслацију, скалирање, ротацију, рефлексију и све њихове комбинације. Самим тим и након анализе приказаних примера може се издвојити запажање да: параметри a и b дају ефекат развлачења у два правца у x, y равни, параметар c развлачење у глобалном правцу z , док параметар d означава скалирање. Као и у случају Мебијусове трансформације, резултат промене форме може бити другачији у зависности од положаја саме мреже у односу на координатни почетак. Због тога се

саветује да се мрежа увек позиционира у координати $0,0,0$ глобалног координатног система са жељеном оријентацијом x, y равни, у односу на основу будућег објекта.

Овим потпоглављем завршава радни пакет 2.2 будући да су показни сви развијени алгоритми који се могу користити за пројектовање модуларних мрежних љуски. Након употребе било које од развијених геометријских метода у РП2.2 добија се њихова параметризована геометрија. Наредни корак у стратегији префабриковано-оријентисаног дизајна је испитивање домена улазних параметара изабраног алгоритма. Приказ овог поступка следи у наставку.

3.2.6 Провера геометрије модула генерисане мреже: радни пакет 2.3

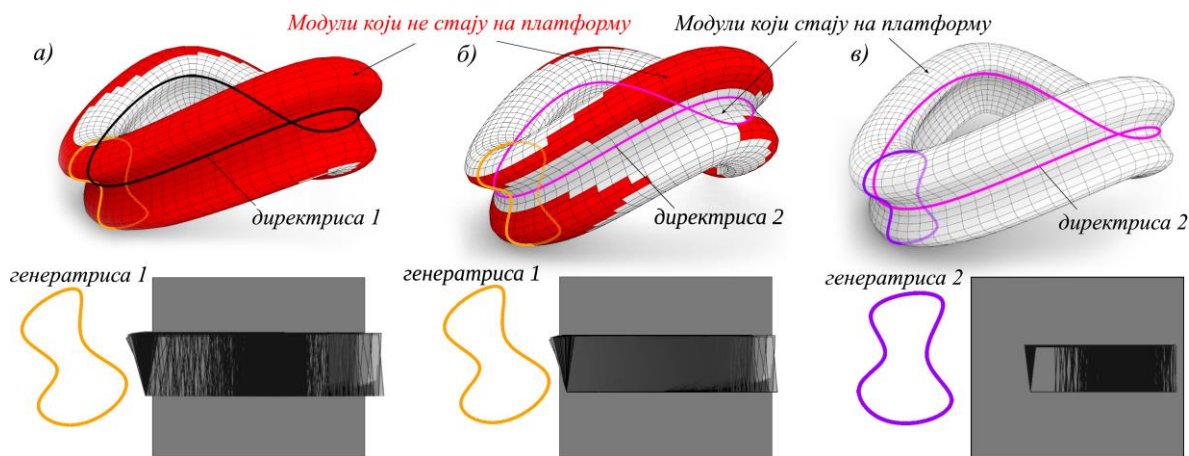
Подсетимо се да овај процес представља корак четири обе [стратегije префабриковано-оријентисаног дизајна](#). Било који од развијених алгоритама из претходних пет потпоглавља се може изабрати за дизајн, у зависности од већ поменутих услова пројекта. За демонстрацију овог процеса изабран је алгоритам Монжове површи. У приказаном случају дискретне мреже је улазни параметар профилна крива, *генератриса* и просторна водила, *директриса*. Како су обе криве затвореног типа, користи се алгоритам за генерисање [Монжове површи – случај 2](#) (поглавље 3.2.4.4). Две врсте кривих су изабране као варијација дизајна, за које би требало тестирати домен улазних параметара (Слика 3-47).



Слика 3-47. Приказ два типа генератрисе и директрисе за генерисање Монжове површи

Главни параметри модула које би требало тестирати у овој фази су *максимална величина елемената* и *најмањи углови између ивица*. Прва величина се не може дефинисати једним бројем, јер је најважније да сви појединачни елементи стају на дефинисану величину платформе. У том случају је потребно сваки елемент сместити у кутију дефинисане величине x, y, z . Уколико елемент не стаје потпуно на платформу, означава се као *неподобан*. Код примера на слици (Слика 3-48а) се може закључити да у прва два случаја модуларне љуске Монжа није могуће сместити све елементе на

платформу (Слика 3-48а и б). Модификацијом директрисе и генератрисе, као и њиховог међусобног положаја, добија се да сви модули стају на платформу (Слика 3-48в).



Слика 3-48. а) Први пример параметризованог дизајна са задатом почетном кривом и тестирањем четири позиције модула; б) Модификован дизајн помоћу полазне криве са обележеним модулима који не стају на дефинисану платформу за штампање (црвени)

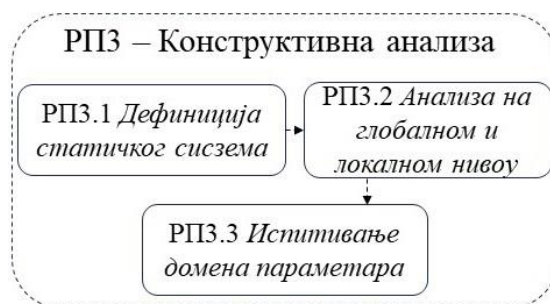
Када је најмањи угао у питању, знамо сада да он зависи и од величине попречног пресека, односно радијуса кривине екструдера који је могуће користити како би се два модула несматано повезала завртњевима преко контактне дужине по страници. У овој фази је пак довољно да се избегавају оштри углови мањи од 45° , где је услов у приказаном примеру испуњен.

Главни циљ РП1.3 је установити *домен улазних параметара 1*. У овом случају, то је деформација кривих директрисе и генератрисе и угао директрисе, где се за резултат добија мрежа са модулима који испуњавају задате услове. Овај принцип има смисла за дато архитектонско и конструктивно решење само уколико се упоређују сродне варијанте, где се тражи најбоља могућа за дефинисане услове. Стога, није потребно да домен улазних параметара буде велики, већ се могу тестирати случајеви који долазе из одлуке о „моделовању“ задате форме који су архитектонске, естетске или функционалне природе. Један такав случај је овде приказан, где се на основу опција у архитектонском дизајну оцењују улазни параметри у облику сличних варијанти двеју кривих и њиховог односа (Слика 3-48). Променом њене геометрије могу се добити различите мрежне љуске, а самим тим и оценити неподобни модули за префабрикацију обележени црвеном бојом. На основу оваквог ширег спектра улазних параметара, сужавају се случајеви који се убрајају у домene улазних параметара 1, без црвених модула.

Овај процес је завршни корак радног пакета 2, са фокусом на постизање локалне геометрије модула који испуњавају услове префабрикације. То је остварено развојем алгоритама за дизајн дискретних мрежа и дефинисањем домена улазних параметара 1. Ова фаза се концентрише на геометрију, док се друга фаза комбинованог приступа фокусира се на конструктиван одговор конструкције, који следи у наставку.

3.3 Конструктивна анализа љуске: радни пакет 3

Ово поглавље ближе одређује активности РПЗ, који је заслужан за конструктивну анализу дефинисаног дизајна. Циљ овог радног пакета је, пре свега, конструктивна евалуација дизајна бетонске љуске, где се као резултат дефинише домен у коме је потребно тражити оптимално решење одговора конструкције бетонске љуске. Овај процес се постиже у неколико фаза. Прва фаза је дефинисање статичког система модларне љуске (РПЗ.1), статичка анализа на глобалном и локалном нивоу (РПЗ.2) и истраживање домена параметара (РПЗ.3) (Слика 3-49). Јасно је да су они хронолошки постављени и да се преносе неопходне информације из претходног у наредни, како би се они извршили. Као резултат се добија коначан домен улазних параметара, који се користи приликом процеса мултикритеријумске оптимизације РП4. Такође, дефинишу се конструктивни параметри које би требало оптимизовати и на основу којих се врши оптимизација. То могу бити: максимална деформација љуске, максимални напони (искоришћеност попречног пресека, не већа од 100%) и маса конструкције.



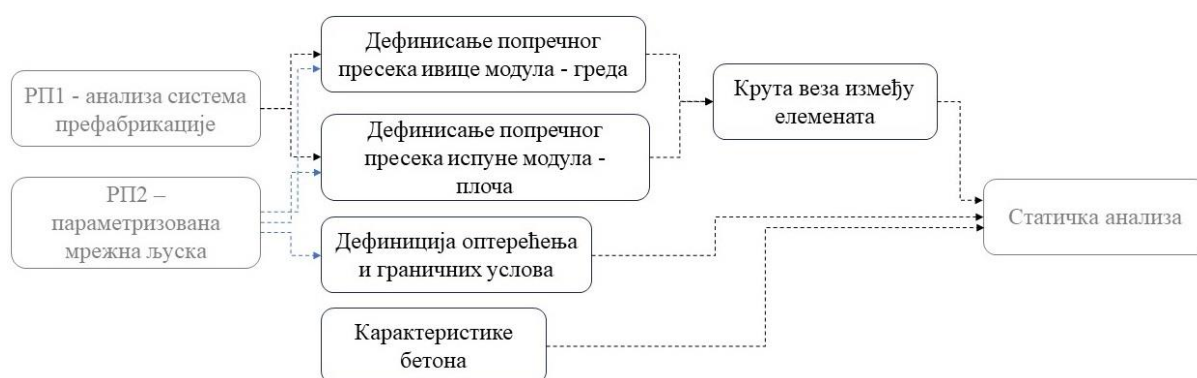
Слика 3-49. Слика шеме радног пакета 3 који означава конструктивну анализу

Важно је нагласити да, за разлику од РП2, циљ овог није допринос иновацији статичког прорачуна љуске или дефинисање нових метода попут ТНА и сл. Са друге стране, РПЗ представља важан корак у оригиналној развијеној стратегији, која у највећој мери доприноси стратегији пре-рационализације префабриковано-оријентисаног дизајна. Такође, требало би имати у виду да су усвојени услови прорачуна у РПЗ дефинисани највише у вези са темом модларних бетонских љуски и конкретног

пројекта за који су примењени на основу анализе приказане у РП1. То значи да ова стратегија може да послужи у широкој примени и код других материјала, конструктивних елемената и статичких решења, која су базирана на геометријској параметризацији метода из РП2. У том случају је пак потребно активност из приказаног РП3 прилагодити дефинисаним условима материјала, технологији префабрикације, конструктивним елементима, решењима веза, и др. У наставку, процеси РП3 су објашњени детаљније, док се на студијама случаја у поглављу 4 могу најбоље видети и начини примене.

3.3.1 Дефиниција статичког система: радни пакет 3.1

Овај радни пакет има задатак да параметризовани геометријски модел материјализује како би се извршила статичка анализа. За то је потребно, најпре, дефинисати главне услове прорачуна. У то се убрајају: *дефинисање модула за производњу, увођење претпостављеног попречног пресека, анализирање конструктивног решења везе и њено формулисање у статичком моделу, дефинисање граничних услова ослонаца, дефинисање случајева оптерећења* (Слика 3-50).



Слика 3-50. Шема РП3.1 са преузетим информацијама из РП1 и РП2 и неопходним корацима

Како бисмо започели прву фазу, подразумева се да је форма дизајна дефинисана у смислу положаја љуске, места ослонаца, њене висине и распона. Такође, као резултат [РП2.3](#) требало би имати информацију о почетној подели површи, која нам говори о броју и типовима модула, њиховој величини и положају. У овом раду, у складу са процесом производње, дефинисани модули представљају четвороугаоне панеле.

Након дефинисања дискретне геометрије мрежне љуске, конструишу се четвороугаони панели, који морају бити материјализовани. Уколико се подсетимо РП1, то значи да ивице и испуна конструишу различити попречни пресек и дебљину. Као што

је поменуто, ивични делови модула имају већи попречни пресек и требало би да примају углавном аксијалне силе у конструкцији, док испуна доприноси стабилности четвороугаоника и преузима смичућа напрезања. Попречни пресеци ивица су трапезасти и континуални у целој конструкцији. Они могу бити и различити, али би требало водити рачуна о контактної површини између модула због конструкције веза. Ова величина се претпоставља на почетку и може зависити од предвиђене величине попречног пресека екструдера за штампу.

Након прелиминарног статичког прорачуна, уколико добијени резултат показује веће прекорачење напона, може се деловати на пољу поделе на мање модуле што повећава број елемената и омогућава мањи попречни пресек. Са друге стране, на стабилности се може деловати повећањем дебљине испуне. Димензија попречног пресека директно одређује радијус кривине који се јавља код углова модула, где је минимални једнак ширини попречног пресека (димензија у основи). Овај податак је важан јер је овим дужина сваке странице скраћена. Као што је наглашено раније, на основу ових података је потребно анализирати контактне дужине модула и установити да ли је задовољена [минимална дужина странице \$l\$](#) на основу једначине 16 (поглавље 1.8.2) и усвојених величина које диктирају елементи везе. Овај параметар би, такође, требало узети у обзир код дефинисања геометрије модула, где се могу анализирати минимална дужина странице модула на основу њихове величине и попречног пресека.

Ивице модула су дефинисане као линијски елементи (греде) у конструкцији, у виду просторне решетке, а део испуне као површински елемент (љуска). Како је другачији бетон коришћен за ове две зоне, могуће је дефинисати и другачије особине материјала током прорачуна, док њихови елементи могу бити повезани крутом везом. С обзиром на то да је конструкција везе предвиђена са два или више завртња између модула, претпоставља се да су сви елементи повезани крутим везама у целој конструкцији љуске. Ове информације се преузимају као излазни податак РП1. Када је статичка интерпретација веза у питању, ово поље истраживања је могуће третирати засебно. У зависности од формулисане конструкције веза, како би се дефинисао прецизнији статички модел, потребно је урадити додатна испитивања која подразумевају тестирање везе, нумерички модел и експерименте. Како су модуларне бетонске љуске слободне форме које не раде само на притисак новијег датума, није много истраживања рађено у овом пољу. Такође, конструкција веза не представља фокус

рада, самим тим, усвојено решење се не сматра оптималним, већ једним од могућих за конструисање прототипа.

Као оптерећење су уведени уобичајени случајеви за кровне конструкције: *сопствено оптерећење, снег и ветар* као асиметрично оптерећење. Ослонци су дефинисани преко чворова мреже који се налазе на тлу или које би требало фиксирати, што је уобичајно код конструкција љуски. Померање тачака није омогућено, док је ротација на ослонцима дозвољена. Требало би да се ради на формирању случајева оптерећења по пројекту. Како се овде не користе методе налажења форме (*енгл. form-finding*), може се применити више случајева оптерећења, између осталог и асиметрично.

Када су модули материјализовани, гранични услови дефинисани и оптерећење додато, параметријски модел је спреман за РПЗ.2 – статичку анализу.

3.3.2 Анализа на глобалном и локалном нивоу: радни пакет 3.2

У овом поглављу је описан процес статичке анализе љуске на глобалном (целе форме) и локалном нивоу (модул). Циљ анализе је утврђивање максималних и дозвољених вредности конструктивних параметара, као и потенцијалних места и стратегија за оптимизацију. Ради се линеарна анализа у обе фазе на целој конструкцији љуске, као и модулима у склопу ње. Није предвиђена нелинеарна анализа издвојених модула.

3.3.2.1 Конструктивна анализа љуске на глобалном нивоу

На основу материјализованог параметријског модела из РПЗ.1 наставља се статичка анализа конструкције. Алгоритам предвиђа варирање облика љуске на глобалном нивоу помоћу улазних геометријских параметара ради прорачуна дефинисаних конструктивних критеријума. Кад су у питању љуске, то су *максимална деформација и напон у попречном пресеку ивице и испуне модула (искоришћеност попречног пресека ивице и испуне)*. Домен параметра се поставља тако да не угрожава процес сегментације. За прорачун конструкције није било потребно развити алгоритам, већ је циљ користити постојеће алате као део који је повезан са параметризованим моделом.

Процес израчунавања се врши у додатку за софтверски пакет ГХ, Карамба3Д (Karamba3D) који спроводи прорачун методом коначних елемената (МКЕ). У Карамба3Д је могуће дефинисати све конструктивне елементе као и у другим

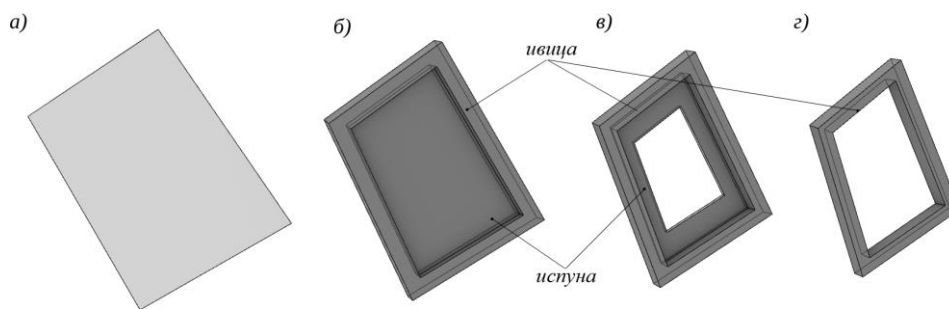
софтверским пакетима за статичку анализу. Овај програм је изабран због могућности директне везе са параметријским дизајном. Ова веза омогућава статичку анализу у реалном времену, као и различите итеративне процесе (real-time) у току промене форме љуске.

Као што је већ поменуто, ивице модула су задате као гредни елементи, док испуна представља површински елемент. Позиције ослоња у конструкцији љуске остају исти приликом варијације форме. Како је геометрија модула параметризована у истом софтверу, лако је варирати димензије попречних пресека како би се испитивали различити резултати конструктивних параметара. Прорачун има две фазе. У првој је приоритет дефиниција попречног пресека ивице. Ово се ради са фиксном дебљином испуне на основу два параметра: *максималне деформације* и *вон Мисовог напона*. Прорачун прве фазе се ради више пута за потребне комбинације процеса оптимизације, док се друга ради само за коначну геометрију љуске након евалуације варијанти.

3.3.2.2 Конструктивна анализа љуске на локалном новоу

Ова фаза следи када је коначна варијанта модуларне љуске изабрана и она је опциона. Када су ови параметри задовољени, испуна се може оптимизовати на више начина са циљем смањења укупне масе бетона. Оптимизација попречног пресека се врши варирањем испуне, док је ивични део приказан у виду ребара континуалног попречног пресека, који би требало да прихвата највеће силе у конструкцији.

У овој фази се обезбеђује смањење употребе материјала и постизање лакше конструкције љуске. За оптимизацију масе, испуна се може модификовати на три начина: варијацијом дебљине слоја или површине испуне модула или оба истовремено. У процесу прорачуна, елементи који имају мање искоришћење попречног пресека могу бити тањи, пратећи минималну дебљину коју производња дозвољава. Друго решење је да се искористи само део/цела површине испуне, омогућавајући да остатак буде покривен стаклом које може донети више дневне светлости у простор унутар љуске. Ово се углавном може дефинисати задатим процентом испуне у функцији од искоришћености попречног пресека елемента. Ако има више простора за оптимизацију материјала у конструкцији, што се обично може десити код веома великих конструкција са великим распонима, обе ове технике се могу применити истовремено (Слика 3-51). Овај процес се детаљније може видети на примењеним студијама случаја (поглавље 4).



Слика 3-51. а) Модули љуске; б) Дефинисана ивица и део испуне модула са дебљином; в) ивица модула са испуном само на делу унутрашњости; з) Само ивица модула без испуне.

3.3.3 Испитивање домена параметара: радни пакет 3.3

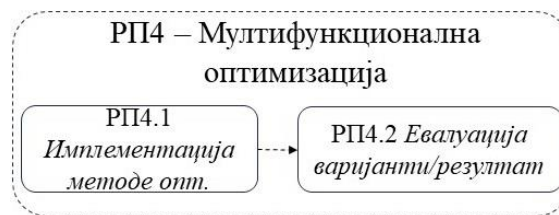
У овом РП3.3 се бавимо испитивањем различитих вредности улазних геометријских параметара материјализованог параметријског дизајна посматрањем вредности излазних конструктивних параметара. Овде су у фокусу, пре свега, параметри дефинисани у претходном радном пакету, где се обраћа пажња на њихово потенцијално прекорачење. То је омогућено управо параметријским моделом који се састоји од компонената дефиниције геометрије.

Процес се извршава тако што дефинисани улазни геометријски параметри варирају како би закључили да ли добијене морфологије форме изазивају превелике величине напона и деформација. Уколико неке величине покажу у прорачуну прекорачење конструктивних излазних параметара, оне се неће узимати у обзир. Овај процес се понавља док не установимо домен који нам даје дозвољено понашање конструкције љуске односно у оквиру допуштених вредности.

Такође, уколико је ипак важно да неке од варијанти форме буду узете у обзир приликом мултифункционалне оптимизације, могуће је испитивати међузависност улазних параметара како би се установиле комбинације различитих параметара. На пример, могуће је установити да су код појединих варијанти форме љуске потребни већи попречни пресеци како би се избегла прекорачења сила. У том случају, требало би имати у виду да је тиме и маса конструкције већа. Са друге стране, овај проблем се може решити повећањем броја поделе мреже, како напони у модулима не би били прекорачени. На крају, сва ова запажања заједно са установљеним екстремима улазних параметара варијације форме, чине *коначан домен улазних параметара* који се преноси у процес мултифункционалне оптимизације (РП4).

3.4 Мултикритеријумска оптимизација љуске: радни пакет 4

Радни пакет 4 служи као додатни алат који се уводи у процес дефинисане стратегије префабриковано-оријентисаног дизајна (Слика 3-52). Начин његове имплементације представља оригиналан приступ у оквиру *пре-рационализације* или *хибридног приступа*. Већ се говорило о томе да многе од ових мрежа подразумевају повољне конструктивне консталације на основу њихових геометријских карактеристика двоструко закривљених површи. Ово се базира на међузависности геометрије и статичког одговора љуске. Међутим, питање на које није одговорено је: Која од варијанти форми параметризованог модела љуске даје оптимални одговор конструктивних параметара за дати пројекат? Стога, овај радни пакет помаже у дефиницији *најповољнијих варијанти* за дате услове пројекта. Дефинисањем *коначног домена улазних параметара* обезбеђују се неопходни префабрикацијски услови на нивоу модула у оквиру којих се тражи решење. Затим се ови домени користе за спровођење процеса мултикритеријумске оптимизације (РП4.1).



Слика 3-52. Слика шеме радног пакета 4 где се обавља мултифункционална оптимизација

У овом раду су тестиране три методе које се разликују по типу њихових математичких модела у зависности од броја и типа излазних параметара оптимизације. Овде би требало нагласити да циљ рада није допринос у развијању оригиналног математичког модела за мултифункционалну оптимизацију, већ интегрисати алате који су доступни у параметријског дизајну. Поред тога, покушај супротног не иде у прилог приказаном процесу дизајна, где је наглашено да фокус процеса пре-рационализације није у функцији процеса оптимизације. Овако развијена стратегија представља предност како се добијена геометријска решења добијају у реалном времену без захтевних прорачунских процеса.

Са друге стране, једна од иновативности представља тестирање методе која до сада није коришћена у сврху пре-рационализације. Овако постављен процес доприноси конструктивној евалуацији параметризованих, дефинисаних мрежа. Овај поступак, као и коришћене методе и алати, су описани детаљније у РП4.1.

С обзиром на то да постоји више излазних параметера које би требало оптимизовати, методе нуде више могућих варијанти. Оне се могу сматрати оптималним у зависности који параметар се више вреднује. Самим тим, последњи РП4.2 се бави коначном евалуацијом где би пројектант требало да сагледа најбоља понуђена решења и на основу дефинисаних приоритета одреди коначну варијанту модуларне љуске. Сви ови процеси су објашњени детаљније у радним пакетима који следе.

3.4.1 Имплементација методе оптимизације: радни пакет 4.1

Ово потпоглавље ближе одређује начин имплементације метода мултифункционалне оптимизације за одређивање најбољих варијанти генерисаног дизајна дискретне љуске за посматрани пројекат. У овом раду је експериментисано са три различите методе у три различите студије случаја. Као што је већ поменуто, циљ РП4.1 није на развоју нове методе оптимизације, већ на њиховој имплементацији у оквиру дефинисане геометријске стратегије.

Оно што се имплементује код свих метода је да улазни подаци представљају дефинисан *коначни домен улазних параметара* из претходног РП4.1 док се излазни подаци оптимизују. У зависности од стратегије префабриковано-оријентисаног дизајна, излазни подаци се могу разликовати.

Код процеса пре-рационализације циљ оптимизације је на *минимизацији максималне деформације и напона у попречном пресеку*. На тај начин се остварује конструктивна ефикасност бетонске љуске који је један од задатих потциљева истраживања. Исто тако, посматра се и искоришћеност попречног пресека како би се осигурало оптимално искоришћење материјала и добила што лакша конструкција која ће уштедети количину бетона. Искоришћеност попречног пресека одређује директно величину максималног фон-Мисовог напона у сваком елементу модуларне бетонске љуске. Искоришћеност попречног пресека је изражена у процентима и не сме бити већа од 100%. Помоћу вон Мисовог напона се осигурава да конструкција буде дизајнирана тако да издржи очекивана оптерећења без преласка у пластичну деформацију, што повећава сигурност и поузданост конструкције. У случају хибридног приступа постоји додатни *параметар форме* који мери колико је генерисана модуларна љуска далеко од задате геометрије. Овај параметар обезбеђује сличност коначне љуске од задате тако што се врши његова минимизација. Имплементација овог параметра се види најбоље у првој студији случаја.

Теоријске основе три изабране методе су већ презентоване у поглављу 2. То су: [метода Бокса-Вилсона](#), додаци за Грасхопер под називом [Галапагос](#) и [Октопус](#). Када је у питању метода Бокса-Вилсона речено је следеће – да би метода дала успешан резултат, неопходно је одредити оптималне домене (опсеге вредности) и тип улазних параметара. Што је бољи избор улазних параметара модела, већа је шанса да се одреди вредност оптимума. Из тог разлога је од великог значаја пажљиво спровести процес суперпозиције из РП4.1.

Ово је једина метода чији алат није у саставу софтвера ГХ, већ се за њену имплементацију користи софтверски програм *Минитаб19*. С обзиром на то, метода се спроводи извођењем групе тестова где се у оквиру коначног ДУП за различите њихове комбинације величина очитава вредност параметара који се оптимизују. Добијене вредности обе групе се убацују касније у програм *Минитаб19* који спроводи процес методе БВ. Као резултат се добијају више варијанти комбинација улазних параметара на основу којих се генеришу мрежне љуске у ГХ и очитавају излазни параметри. На основу ових резултата се прелази на процес њихове евалуације у РП4.3. Цео процес је приказан у првој студији случаја са унапред дефинисаним дизајном љуске слободне форме, тј. у оквиру хибридне стратегије. Овај приступ се, такође, може користити за експериментисање и ширење спектра дизајна, фокусирајући се само на локална ограничења геометрије модула дефинисана кроз услове производње.

Код алата *Галапагос*, успешност решења зависи од генерација које произилазе из насумичних комбинација вредности улазних параметра. То значи да, уколико покренемо исти поступак оптимизације више пута, можемо добити сличне, али не и исте резултате. Из овог разлога се процес оптимизације изводи више пута, где се свако решење узима као једна варијанта за евалуацију РП4.3. Такође, логично је да више различитих комбинација улазних параметара може дати слична оптимална решења. Због тога се препоручује да почетне вредности улазних параметра слајдера, пре процеса оптимизације, буду сличне решењу форме мреже коју најрадије очекујемо.

У алату *Октопус* различите варијанте решења добијају се у зависности од почетних вредности улазних параметара и броја покретања алгорита. Због тога се *Октопус* тестира више пута, са улазним параметрима који генеришу жељену форму мрежне љуске. У свим случајевима, ако се поступак покрене више пута, свако решење се третира као варијанта за процес евалуације РП4.2. Коришћењем било које од три

методе добијају се варијанте решења са најповољнијим конструктивним параметрима модуларне мрежне љуске за дати пројекат. Након тога, потребно је извршити процес евалуације да би се дошло до коначног решења, који је описан у наставку.

3.4.2 Евалуација резултата: радни пакет 4.2

Евалуација резултата представља последњи РП4.2 у предложеној стратегији префабриковано-оријентисаног дизајна. Он је неопходан јер се у њему сагледавају добијене варијанте које представљају скуп најповољнијих решења мултифункционалне оптимизације. Независно од имплементиране методе, врши се упоредна анализа добијених варијанти према главним одређеним геометријским и конструктивним параметрима. Најпре се проверава да ли свака од варијанти поседује модуле који се уклапају у домен префабрикације, како је то један од кључних услова изведбе модуларне љуске. Овај услов би требало бити задовољен самом поставком коначног домена улазних параметара (ДУП). Међутим, може бити да неке непредвиђене комбинације улазних параметара доводе до посебних случајева геометрије појединих модула.

Исто тако, могуће је, на основу нових сазнања, кориговати коначан ДУП и поновити процес оптимизације. У супротном, наставља се анализа преосталих решења. У следећој фази се анализирају конструктивни фактори: *максималне деформације, напони и тежина*. Важно је утврдити да ли постоји варијанта где је сваки од ових фактора повољнији у поређењу са осталим варијантама. Уколико је то случај, она се може усвојити као коначна. У супротном, важно је утврдити да ли је један од ових параметара важнији од других, па се, самим тим, према њему тражи најповољнија варијанта. На пример, може се десити да се искоришћеност попречног пресека више вреднује будући да је у том случају материјал у већој мери искоришћен. Такође, могуће је спровести детаљније прорачуне на различитим пољима који би могли дати више информација о свакој од варијанти. Са друге стране, код хибридног приступа додаје се *параметар форме* који је укључен у процес оптимизације. Он је заслужан да облик коначне мрежне љуске буде што ближе задатој.

Резултат РП4.2 представља коначну форму мрежне љуске, на којој је могуће радити на оптимизацији материјала у модулима. Ово је последњи корак у стратегијама пре-рационализације и хибридног приступа. Наредно поглавље приказује студије случаја које тестирају ове стратегије на конкретним пројектним задацима.

4 ПРИКАЗ РЕЗУЛТАТА

У овом поглављу се спроводе различите врсте оригиналних стратегија префабриковано-оријентисаног дизајна које су представљене у овом раду. Са једне стране, то значи имплементација радних пакета који су представљени у претходном поглављу. У склопу њих су присутни и развијени приступи који се тичу две различите групе стратегија *пре-рационализације* и *хибридне* приказане у виду шема у поглављу 3.1. Потребно је подсетити се да свака од њих садржи све описане активности радних пакета са појединим разликама на почетку и крају процеса.

За сада, процес прорачуна система модуларних бетонских љуски префабрикован 3Д штампаним бетоном од PSHCC није стандардизован. Из тог разлога је, најпре, неопходно доказати развијене концепте на конструкцијама мањег распона – [демонстраторима](#). Из овог разлога, прве две задате љуске су мањег распона са величином модула који одговарају условима описане технологије примењене у пројекту АЦДЦ (РП1). Како би се, ипак, испитала решења љуски већих распона, трећа студија случаја узима у обзир могућност префабрикације већих модула.

Поред приказане стратегије, код свих студија случаја је, такође, фокус на имплементацији једног од развијених оригиналних алгоритама геометријских метода које су приказане у поглављу 3.2 (РП2). Па тако у првој и другој се може видети примена *алгорита кружне мреже (АКМ)* као део *хибридног приступа*. У трећој је фокус на имплементацији *алгорита Дупинових циклуса* као стратегије *пре-рационализације*. Када су у питању методе мултифункционалне оптимизације, и ту се врши тестирање

различитих метода. У првој студији случаја имплементира се методе Бокса-Вилсона, у другој Октопус, а у трећој Галапагос (РП4).

На крају сваког од случаја приказани су резултати мултифункционалне оптимизације и решења геометријских и конструктивних параметара са визуализацијом коначне форме. Мераважни конструктивни параметри су: максимална деформација, максимални вон Мисов напон и маса бетонске љуске. Евалуација у случају прве студије случаја је поређење конструктивних параметара љуске са традиционалним начином поделе. Ефикасност другог и трећег решења се огледа у прорачуну еквивалента средње вредности попречног пресека глатке љуске.

У наставку су приказане све три студије случаја од задатих услова пројекта до резултата.

4.1 Студија случаја 1 – Листови детелине

Прва студија случаја, као што је већ поменуто, представља имплементацију процеса *хибридне* стратегије са већ задатом почетном површи. За процес префабрикације се узимају услови анализирани у РП1 поглавља 1.8. Пример љуске је приказан на слици (Слика 4-1) у виду демонстратора који се може користити као надстрешница за седење на кампусу Универзитета. У овој студији случаја, једна осмина је моделована у Рајну помоћу контролних тачака НУРБС површи како би се добила једна половина латице, где је након серија трансформација симетрије и ротације дефинисан дизајн љуске под називом „Листови детелине”. У овом случају, примењен је АКМ као геометријска метода модуларијације, док су карактеристике материјала, распони и метода прорачуна наведени у табели (Табела 4-1).

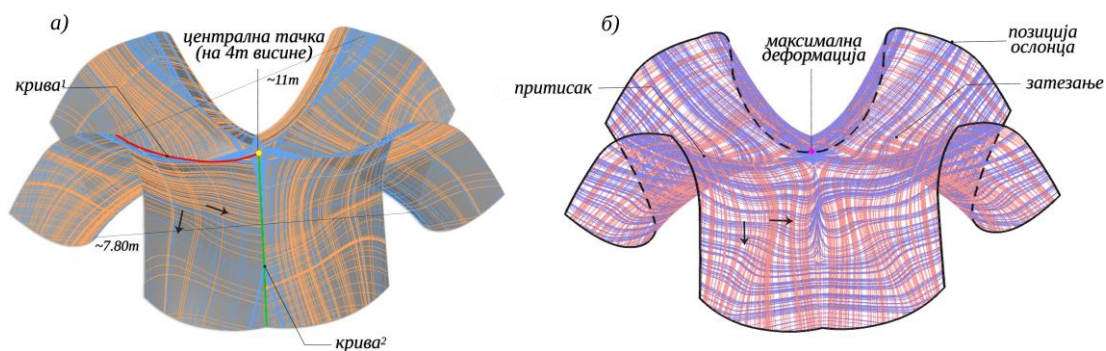
Табела 4-1. Опис главних карактеристика задате бетонске љуске прве студије случаја са примењеним методама геометријске стратегије и алгоритма модуларијације, као и прорачуна

Геометријска стратегија	Алгоритам дискретне љуске	Распон љуске	Материјал (бетон)	Метода прорачуна
Хибридна стратегија	Алгоритам кружне мреже (АКМ)	11m x 7.8m, минимална висина у средишту 4m	Јунгов модул еластичности: 2280 kN/cm ² , Густина: 20 kN/m ³ Граница еластичности: 3.5 МПа Поасонов коефицијент 0.2	Метода коначних елемената, софтверски програм Карамба3Д

Имајући у виду ротациону симетрију, ослања се на четири места, у подножју зелених кривих (Слика 4-1а), док се супротни делови љуске издижу у виду отвора латица за продор светлости. У равни симетрије једне латице налази се црвена крива, а између

две латице – зелена крива. Обе криве су у равни јер је модел симетричан. Средња тачка конструкције је постављена на висини од 4m, дијагонални распон између ослонаца љуске је око 7,8m, а дијагонално растојање између две највише тачке око 11m (Слика 4-1a).

Трећа фаза хибридног приступа је анализа геометријских и конструктивних карактеристика задате љуске која подразумева упоређивање положаја главних праваца кривина и напона. Након анализе долази се до закључка да су у овом примеру правци веома близу и стога конструкција има већи потенцијал за конструктивну оптимизацију (Слика 4-1a и Слика 4-1б). Треба напоменути да је урађена статичка анализа у случају позиције ослонаца по целом ободу љуске, што неће бити случај у коначном прорачуну конструкције.

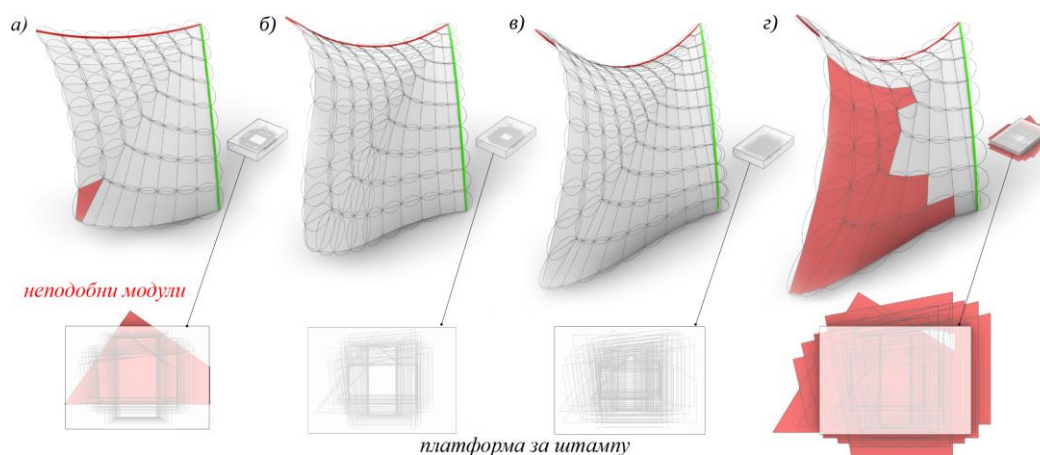


Слика 4-1. а) Приказ главних праваца кривина, б) главних праваца напона љуске

Након утврђивања почетних позиција обе криве, примењује се један од развијених геометријских метода за конструкције мрежне љуске. У овом случају је изабран АКМ који од две задате почетне криве генерише ПК кружну мрежу без геометријске торзије. С обзиром на ротациону симетрију љуске, логичан улазни податак су две криве – црвена и зелена, како би се једна *закрпа* мреже конструисала. Од ње се, затим, може добити цела конструкција љуске. На основу ове две криве и њихове задате поделе n и m може се генерисати ПК кружна мрежа како би се испитали домени улазних параметара 1 на основу локалних геометријских услова за производњу. Дефинисано је неколико геометријских улазних параметара чије вредности и комбинација утичу на геометрију почетних кривих. То су: *закривљеност обе криве*, *угао између кривих* (ротација у сопственим равнима) и *број подела кривих n и m* (величина и број елемената).

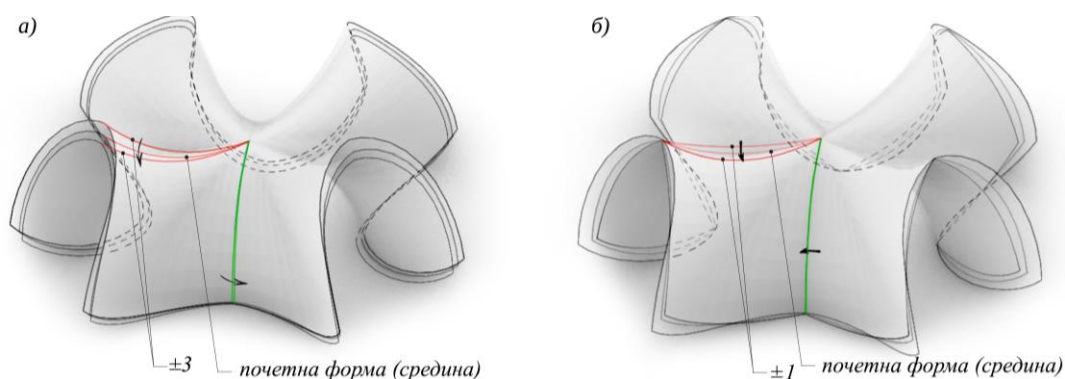
На слици (Слика 4-2) приказани су различити резултати кружне мреже једне половине латице на основу изабраних параметара, са циљем да се утврди да ли се модули уклапају у домен префабрикацијских услова. С обзиром на то да конструкција има

симетрију, потребно је испитати само овај део љуске. Услови производње су величина платформе дефинисане у РП1, која је представљена у облику квадрата (Слика 4-2), и угао између ивица сваког модула не мањи од 45° . Модули који не задовољавају ове критеријуме су означени црвеном бојом. Да би се смањио број могућности, тестова и искључила решења која одступају од почетног дизајна, смањен је опсег улазних променљивих. Добијени домен улазних параметара 1 је варијација угла кривих $+3^\circ$ од почетних кривих (ротирање у једном или супротном смеру) угао закривљеност $+1$ (+ већа кривина, - мања кривина) и број подела кривих је исти и износи од $n = m$ од 8 до 12. На основу тога, слика (Слика 4-2) приказује неколико комбинација параметара које су резултирале са модулима који не задовољавају критеријуме (Слика 4-2а и Слика 4-2г) и улазе у домен префабрикације (Слика 4-2б и Слика 4-2в).



Слика 4-2. Решења кружне мреже са различитим комбинацијама параметара: а) кривина кривих -1, ротација од почетне криве -3, број подела 10; б) кривина кривих 0, ротација од почетне криве 0, број подела 10; в) кривина кривих +1, ротација од почетне криве +3, број подела 12; г) кривина кривих +1, ротација од почетне криве +3, број подела 8; испод сваког примера је дефинисана величина платформе за штампу са црвено означеним модулима који не стају на платформу и повезаним са решењима делова латица

Први пример је комбинација променљивих: кривина кривих -1, ротација од почетне криве -3, број подела 10 (Слика 4-2а). Може се видети да нису сви модули подобни, па овај број подела не може бити у домену. Други пример је положај полазних кривих са поделом 10 (Слика 4-2б), док трећи има комбинацију променљивих: кривина кривих +1, ротација од почетне криве +3, број подела 12 (Слика 4-2в). Последњи пример има исту комбинацију променљивих као и трећи, осим броја поделе који је 8. Као и код првог, тако и код последњег примера нису сви модули подобни за штампање (Слика 4-2г). Након ове анализе најмањи усвојен број подела је 10. Остали параметри се задржавају са постојећим границама. На слици (Слика 4-3) приказана је варијација форме целе љуске са различитим вредностима параметара.



Слика 4-3. Приказ варијације форме љуске променом различитих улазних параметара: а) промена угла кривих у њиховим равнима -3 до +3; б) промена кривине полазних кривих -1 на +1

Након ове фазе следи конструктивна анализа мрежне љуске као део РПЗ и испитивање домена улазних параметара (ДУП). Пре тога неопходно је дефинисати конструктивне елементе из добијене мреже. Попречни пресек коришћен за ивични део модула 4cm x 6cm са константном дебљином испуне од 2cm. Како би се максимални напони посебно посматрали за поперчни пресек ивице и испуне, они су моделовани као посебни елементи. Конструкција рачуна као комбинација бетонског решеткастог система, који дефинише ивична зона модула и континуиране танке љуске, која представља зону испуне. Њихова веза је дефинисана као крута. Ради поједностављења процеса анализе, за прву фазу прорачуна узета је само сопствена тежина као случај оптерећења. Сви чворови мреже који додирују тло узимају се као ослонци и онемогућује се транслационо кретање у свим правцима. Као што је већ наглашено, прорачун је спроведен у програмском додатку Карамба3Д за ГХ методом коначних елемената (МКЕ). Након испитивања више конфигурација мрежне љуске са истим улазним параметрима као и у претходној фази, долази се до закључка да је коначан ДУП једнак ДУП1 где важе исте екстремне вредности. Ове екстремне вредности се узимају у обзир приликом мултифункционалне оптимизације.

Следећи корак је израчунавање одговора (решења) различитих комбинација променљивих за процес оптимизације [методом Бокса-Вилсона](#) (БВ) (РП4.1). У овом случају, узимају се у обзир два излазна параметра, један који представља конструктивни параметар *максималне нормалне силе* у конструкцији, а други, *параметар форме*, осигурава да коначна форма буде блиска почетној. На основу коначног ДУП геометрије може се кренути са тестовима. Као што је поменуто у објашњењу методе БВ, они се извршавају у оквиру ГХ, док се вредности улазних параметара са одговорима (излазним параметрима) пребацују у програм за прорачун. Посебна пажња је усмерена на број

дефинисаних промењивих и њихове домене. Тестови се израчунавају за 54 различите комбинације, како би се методи БВ обезбедило довољно података за предвиђање оптималних резултата. Прве четири комбинације су приказане у табели (Табела 4-2), где N представља број подела кривих, $УПК$ је угао прве криве, $УДК$ угао друге криве, следеће две $КПК$ и $КДК$ су кривина прве и друге криве. Прва израчуната вредност P_1 представља максималну нормалну силу у kN у конструкцији, а P_2 максимално растојање између генерисане кружне мреже и почетне конструкције у m . Ова величина је израчуната преко најкраће дистанце тачака генерисане ПК кружне мреже и задате површи у правцу нормала мреже.

Табела 4-2. Пример прва 4 теста са 5 улазних промењивих и два израчуната одговора за РСМ оптимизацију

Улазни параметри					Резултати	
N подела	УПК	УДК	КПК	КДК	P_1	P_2
12	-3	-3	0	0	9,17	1,15
10	-3	0	-1	1	7,58	1,07
11	-3	-1	-1	1	9,9	0,52
11	0	-1	-1	1	22,58	0,43

Задатак методе БВ је да предвиди најбољу комбинацију улазних промењивих за жељени одговор. Варијацијом улазних геометријских параметара на основу АКМ, резултујући облик љуске се мења (форме). У овом случају постоје два излазна параметра где се користе различите тежине како би се установио оптималан резултат минимизацијом функције математичког модела. Резултати добијени из ГХ се убацују у виду табеле у софтверски пакет *Минитаб19* за прорачун методе БВ. У случају када су присутна два излазна параметра, врши се минимизација њиховог производа тако да њихов удео у једначини може бити различит. Ако су параметри подједнако важни, онда оба добијају фактор $0.5P_1 \times 0.5P_2 = y \Rightarrow \text{мин}$. У наредном примеру тежина фактора се мења како би се одредио најбољи могући резултат:

1. $0.5P_1 \times 0.5P_2$,
2. $0.2P_1 \times 0.8P_2$,
3. $0.8P_1 \times 0.2P_2$,
4. $0P_1 \times 1.0P_2$ и
5. $1.0P_1 \times 0P_2$.

Резултати пет комбинација на основу различитих тежина су приказани у табели (Табела 4-3). Као што је већ напоменуто, ова метода предлаже комбинације променљивих које ће дати минималну вредност одговора. Након имплементације ових комбинација улазних геометријских параметара у ГХ применом АКМ за генерисање кружне мреже, *одговори* се израчунавају и означени су у последње две колоне.

Табела 4-3. Резултати 5 најбоље показаних комбинација тежине одговора са предложеним улазним променљивама и израчунатим одговорима

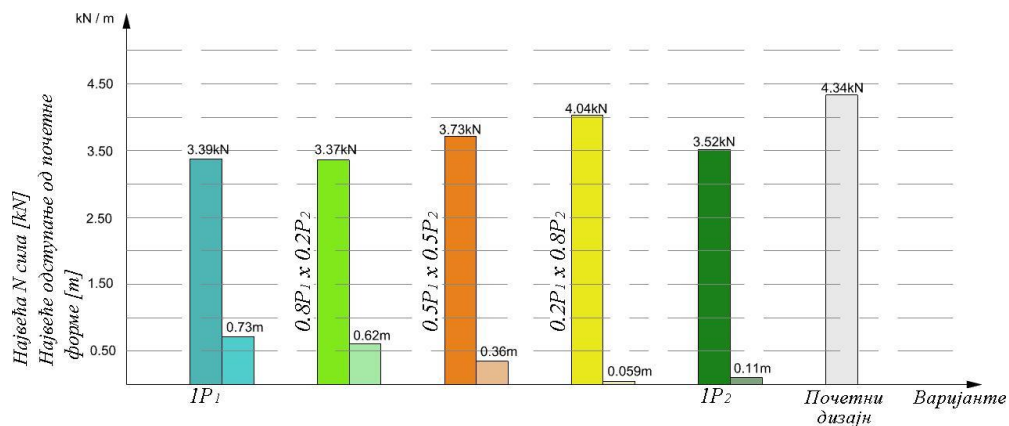
Тежина параметара		Оптимални улазни параметри					Оптимални резултати	
Највећа N сила (R1)	Параметар облика (R2)	Број поделе	Угао прве криве	Угао друге криве	Кривина прве криве	Кривина друге криве	N сила (R1)	Параметар облика (R2)
100	0	10.0	-2.3939	-3.0	-1.0	0.2525	3.39	0.62
80	20	12.0	-2.2121	-0.7879	-0.1313	0.9293	4.04	0.059
50	50	12/12	-2.1286	1.8788	-0.1919	0.5657	3.73	0.36
20	80	10.0	-2.4545	-3.0	-1.0	0.2323	3.37	0.62
0	100	10.0	-2.1515	-0.6061	-0.1111	0.7677	3.52	0.11

Последња фаза рада је процес евалуације варијанти (РП4.2). Геометријска својства модула свих пет комбинација параметара приказана су у табели (Табела 4-4), док график на слици (Слика 4-4) представља вредности за оба одговора за различите комбинације тежина (задатих коефицијената). Конструкције мрежних љуски свих пет варијанти могу се видети на слици (Слика 4-5). Сиво маркирана конструкција која се преклапа са резултујућим љускама представља почетну форму дизајна. Прва (*плава*) и четврта (*светлозелена*) љуска су занемарене јер је домен између најмањих и највећих елемената веома висок, па стога услов домена скалабилности је најмање задовољен.

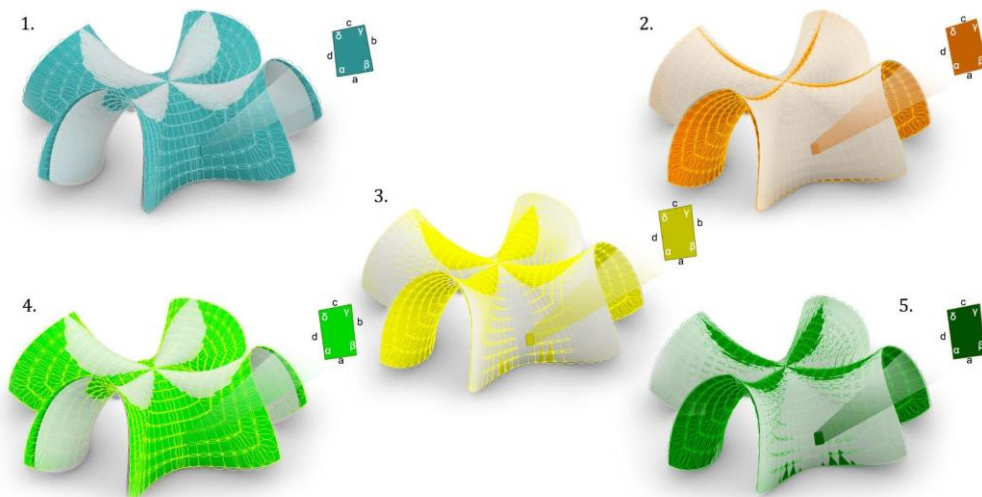
Уколико се упореде остали параметри, може се закључити да је за коначно решење изабрана пета (*тамнозелена*) љуска, која има најмању вредност нормалне силе као и параметар одступања форме од пројектованог модела. Самим тим, комбинација улазних параметара број 5 узима се као полазна геометрија за коначни прорачун модела.

Табела 4-4. Геометријски параметри за израду модула за свих 5 могућих решења у зависности од различитих тежина одговора

Геометријски параметри за производњу		
	Величина модула [m]	Угао између страница
Решење 1 (плаво)	0.14 – 1.17	45° - 135°
Решење 2 (наранџасто)	0.20 – 0.83	46° - 134°
Решење 3 (жуто)	0.20 – 0.89	46° - 134°
Решење 4 (светло зелено)	0.15 – 1.17	45° - 135°
Решење 5 (тамно зелено)	0.24 – 1.03	46° - 134°

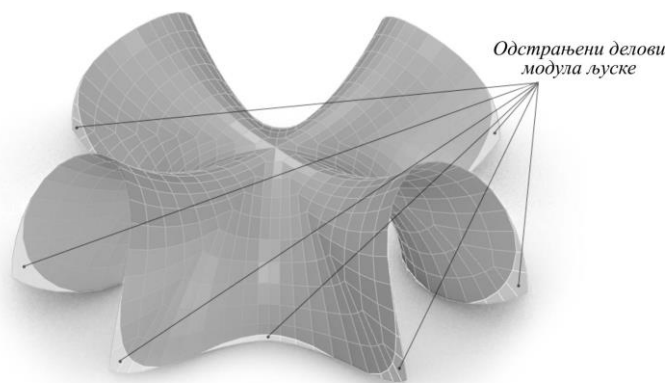


Слика 4-4. График који приказује резултате оба одговора за максимални нормални напон (кN) и оператор облика (m) за 5 различитих комбинација тежина одговора као резултат методе оптимизације БВ



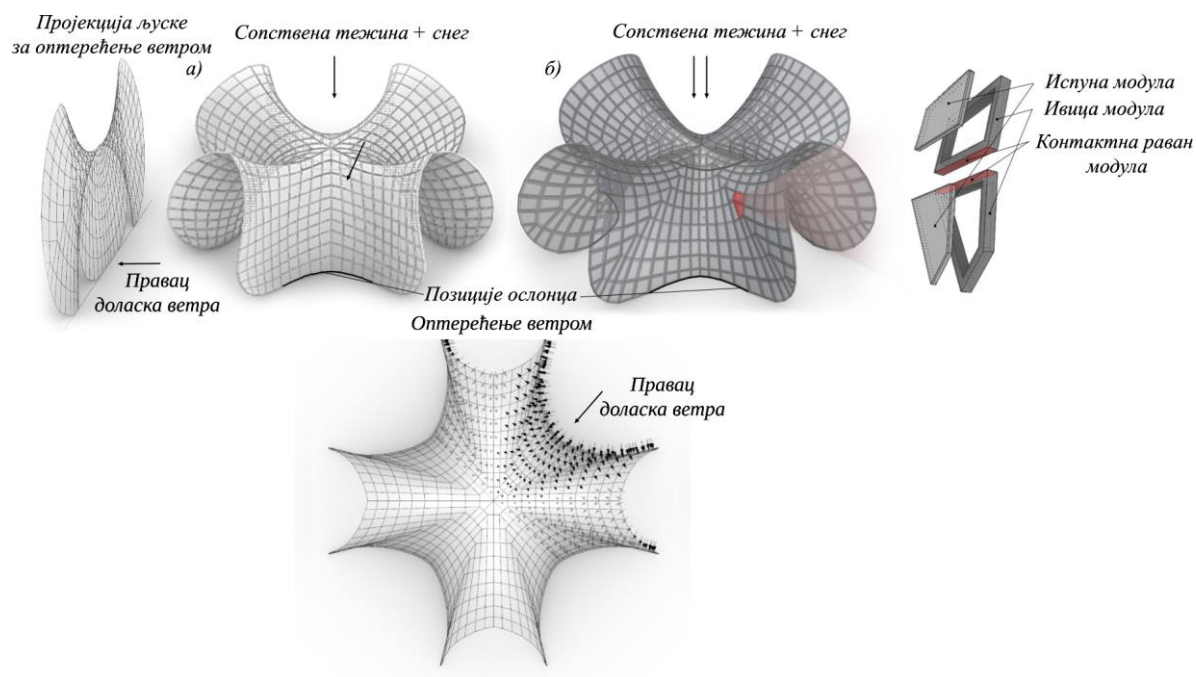
Слика 4-5. Модели свих 5 понуђених решења са суперпонованим почетним обликом као референцом (сива љуска) где боје представљају референтно решење одговора у графикону и табели; Појединачни елемент на врху слике представља дискретни елемент са означеним свим страницама (a, b, c, d) и угловима (α , β , γ , δ)

Након утврђивања коначних улазних параметара геометрије, последња модификација се врши одсецањем модула доњег дела љуске како би се конструкција довела на висину почетног дизајна, с обзиром на то да се током варијације полазних кривих мења висина средње тачке. Ивице бочних модула обе љуске су, такође, модификоване ради естетских побољшања латиче љуске (Слика 4-6).



Слика 4-6. Коначан дискретни облик конструкције (сива) са одсеченим деловима (светлосива)

Након тога, извршен је прорачун конструкције са дефинисаном геометријом модула. Овај процес је извршен за почетну и крајњу модуларну бетонску љуску како би се упоредили карактеристике њихових параметара (Слика 4-7а, Слика 4-7б). На овај начин се извршава евалуација приказане методе за процес хибридне стратегије.



Слика 4-7. а) Почетна бетонска модуларна конструкција љуске; б) Завршна бетонска модуларна конструкција љуске (лево) детаљи у деловима модула (десно)

Прорачун је спроведен по истој процедури где су ослонци у тачкама које су на тлу, а све везе између модула круте. Исти попречни пресек је коришћен за ивични део модула 4cm x 6cm са константном дебљином испуне од 2cm. Овај пут се уводе додатни случајеви оптерећења: снегом и ветром. За снег коришћена је сила од 0,85 kN/m², која делује у правцу z осе, док је ветар 0,80 kN/m² који долази из правца управном на њену највећу пројекцију. Постављање оптерећења ветром може бити сложен процес, посебно код, исто тако, сложене геометрије. У овом раду усвојен је поједностављен приступ како се ради о евалуацији новог концепта пројектовања. Силе ветра су константне, делују нормално на љуску као сишуће или притискујуће, у зависности од положаја тачке (Слика 4-7). Овај принцип важи и за остале примере. На основу дозвољене толеранције у систему производње од око 3 mm, разматрано је увођење коефицијента несавршености ради постојања ротације и савијања од 1,5° по елементу. Из овог разлога, сва оптерећења се множе са фактором сигурности од 1,35.

Геометријска и конструктивна својства иницијалне форме анализирана су, такође, на модуларној верзији љуске која је добијена стандардном поделом *u*, *v* правца НУРБС површи (Слика 4-7а) са истим бројем 10 као и у коначној љусци. Модули и својства материјала се третирају на исти начин у оба решења.

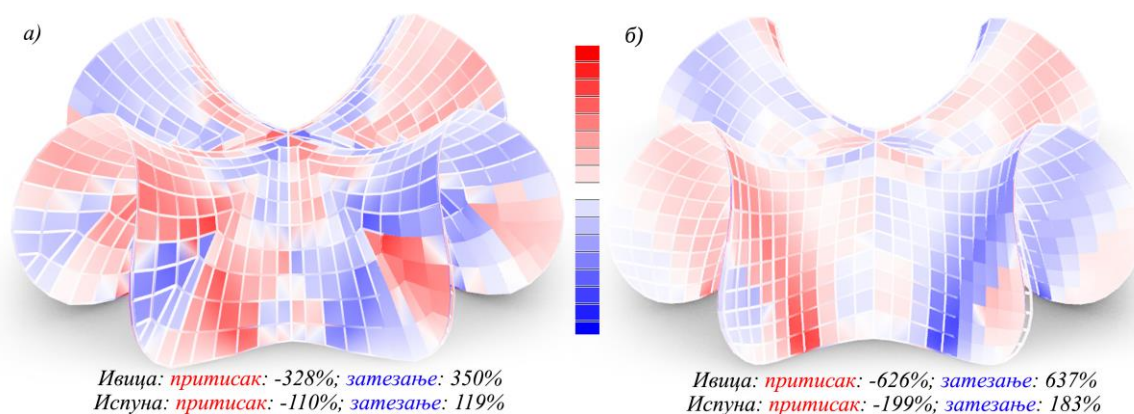
Табела 4-5. Резултати конструктивних и геометријских својстава почетне и коначне конструкције

	Конструктивне карактеристике				
	Маса [kg]	Деформација	фон Мисов напон (макс.)		Искоришћеност [%]
Почетни модел	18145	18.32 cm	0.665 kN/cm ²		Испуна: прос. 190 Ивица: прос. 630
Коначна геометрија љуске (попречни пресек конст.)	17344	9.89 cm	0.5 kN/cm ²		Испуна: прос. 115 Ивица: прос. 330
Коначна љуска (оптимизован попречни пресек)	45935	0.38 cm	0.16 kN/cm ²		Испуна: прос. 54 Ивица: прос. 95
	Геометријске карактеристике				
	Планарност [%]	Геометријска торзија	Број елемената	Дужина ивице [m]	Угао између страница
Почетни модел	7	0° - 21°	800	0.42 - 0.89	25° - 168°
Коначан модел	0	0°	800	0.34 – 0.98	46° - 134°

За верификацију развијене методологије, у табели (Табела 4-5) су упоређене геометријске и конструктивне карактеристике задате и коначне геометрије љуске. Оптимизација конструкције може бити уочена код свих мерних параметара. Деформација је смањена за 50%, док је вон Мисов напон смањен за око 25% (Слика 4-8).

Исто тако, коначна геометрија љуске омогућава мању потрошњу бетона за 4,5% масе полазног модела.

Како је дошло до повећања оптерећења, може се приметити да је потребно поновити процес димензионисања љуске. Да би се задовољио услов искоришћености попречних пресека ивице, користимо итеративни процес где је попречни пресек испуне и ивица се подешавају. На тај начин се врши и додатна уштеда материјала, како је он искоришћен тамо где је највише потребан. Због већ поменутих ограничења у изради ивица, у овом случају уводе се четири различита пресека која се могу применити: 4×2 , 6×2 , 13×6.5 и 18×9 . Процес прорачуна креће са претходним задатим попречним пресеком ивица. Он, за сваки елемент, износи $4 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ са константном дебљином испуне од 2 cm .



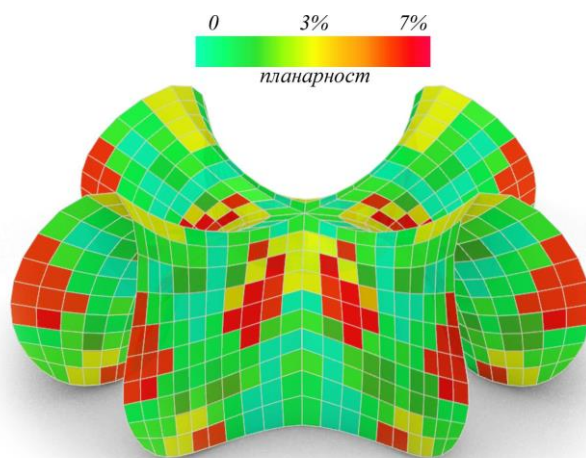
Слика 4-8. а) Искоришћење попречног пресека ивице и испуне у процентима код коначног, б) почетног модела

У свакој итерацији се врши прорачун са актуелним попречним пресецима по задатом оптерећењу. Итерације су остварене преко додатка за Грасхпер под називом Хупснејк (Hoopsnake). Приликом сваке итерације са понуђене листе се бира максималан потребан попречни пресек за одговарајући модул. Модули који имају већу вредност унутрашњих сила теже већој групи попречног пресека. Процес се завршава када сваки модул има искоришћеност попречног пресека ивица мањи од 100%.

У исто време се сваком итерацијом мења и дебљина испуне модула. Њена искоришћеност попречног пресека се мери засебно. Минимална дебљина испуне износи 2 cm а максимална не сме бити већа од висине ивице одговарајућег модула. У току сваке итерације висина испуне се повећава у зависности од искоришћења одговарајуће ивице. Овај процес се завршава када је достигнуто максимално искоришћење попречног пресека ивице, које мора бити испод 100%.

Како ветар представља несиметрично оптерећење, добијају се несиметрични резултати за попречне пресеке ивица дуж модула љуске. Из тог разлога узимају се вредности модула закрпе са највећим попречним пресецима и преносе на све остале симетрично, где су они узети као коначни. Овим поступком је искоришћеност попречног пресека ивице смањена на 95%, док за испуну износи 54% (Табела 4-5).

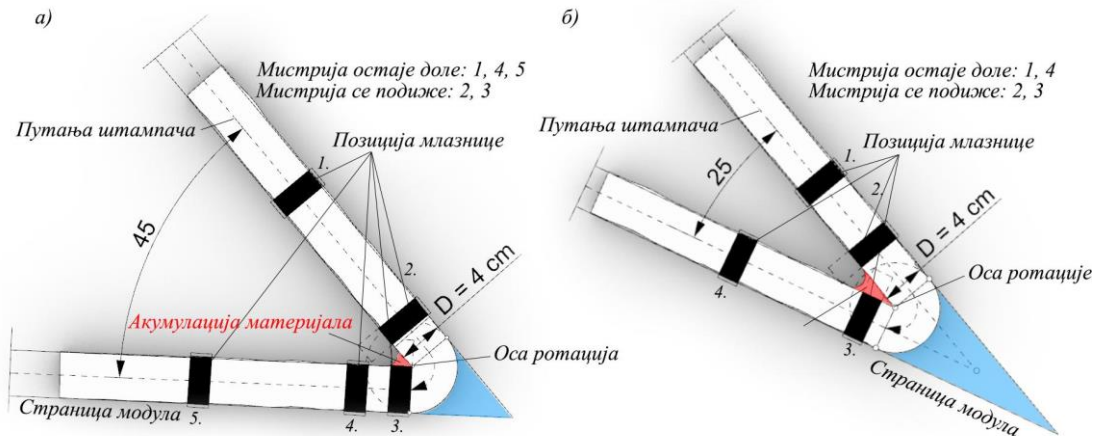
У случају локалне геометрије модула, само љуска конструисана методом АКМ задовољава услове процеса префабрикације 3Д штампом, док су модули подељене љуске u , v правцима неподобни (Слика 4-9). Један од главних проблема је непланарност модула у почетном дизајну. Ова геометријска карактеристика се може израчунати на различите начине и треба је дефинисати на основу коришћене технологије. У овом случају, с обзиром на то да се могу произвести само равни елементи, референца за прорачун планарности почетног пројекта је преузета од Шобера (Schober, 2016). Заснована је на средњој вредности дијагонала (100% дужине), где се израчунава проценат одступања једне од четири тачака полигона, од равни остале три тачке. Максимално одступање у почетној љусци износи 7% (Слика 4-9).



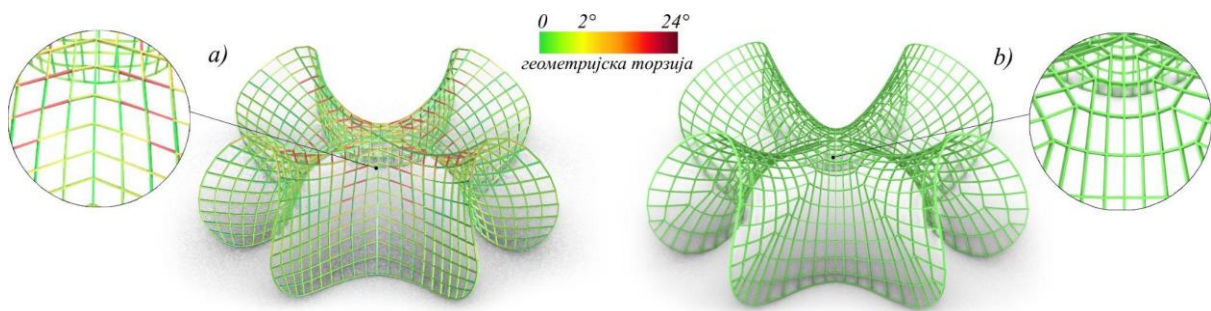
Слика 4-9. Планарност модула почетне љуске

Домен угла између ивица у почетној љусци варира од 25° до 168° , док модули коначне љуске иду од 45° до 134° . На слици (Слика 4-10) приказан је поступак производње најмањих углова модула обе љуске на основу израчунатог попречног пресека (Слика 4-10а, Слика 4-10б). Најмањи угао код почетне конструкције је веома критичан из перспективе акумулације материјала (Слика 4-10б *црвена*) на унутрашњој страни ивице, као и губитка геометрије модула на спољној страни (Слика 4-10б *плава*). Као резултат услова скалабилности, сви елементи стају на платформу за штампање.

Почетна конструкција има елементе са уврнутим контактним страницама модула ([геометријска торзија](#)) до 21° , док употребом АКМ коначна конструкција има спојеве равних ивица које одговарају условима производње (Слика 4-11).



Слика 4-10. а) Поступак штампања са најмањим углом (45°) завршне конструкције и б) почетне конструкције (25°) са различитим положајима млазнице и глетице

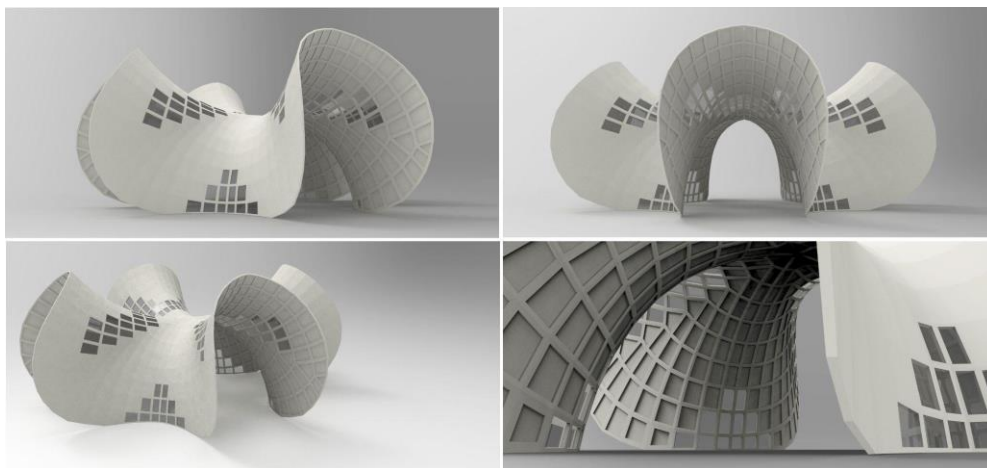


Слика 4-11. а) Геометријска торзија почетне љуске, б) коначне љуске

Као што је већ поменуто, могуће је додатно оптимизовати тежину конструкције, утрошак материјала и унети више дневне светлости у објекат, одстрањивањем испуне и заменом стакла на местима мањег напрезања. Ово се не ради у последњој фази прорачуна, јер овај поступак није могућ код почетне конструкције због закривљених панела. На слици (Слика 4-12) коначани дизајн је приказан у облику љуске од састављених 3Д штампаних бетонских модула са оптимизацијом испуне.

Резиме прве студије случаја је да су у прорачуну остварени услови скабилности и адаптабилности, тако да се сви модули могу произвести на штампарској платформи $B \times L \times H = 1,4\text{m} \times 1,0\text{m} \times 1,2\text{m}$ у оквиру коришћене технологије префабрикације. Ови модули, састављени, чине дискретну љуску висине 4m са распонима око $11\text{m} \times 7,8\text{m}$, као што је показано на примеру. Такође, на основу улазних геометријских параметара омогућена је оптимизација параметара конструкције као што су деформација за 50% и

вон Мисовог напона за 25%, у поређењу са почетним дизајном. Технологија производње, такође, омогућава оптимизацију тежине за 4,5% са две карактеристичне зоне модула различите дебљине и расподељености материјала. На основу планарности модула имплементација стакла у модулима љуске је могућа, што може допринети смањењу тежине љуске као и повећаном унутрашњем осветљењу.



Слика 4-12. Рендер друге верзије љуске са делимично стакленом испуном за осветљење, мањом тежином и употребом бетона (рендер Мартин Ајхенауер)

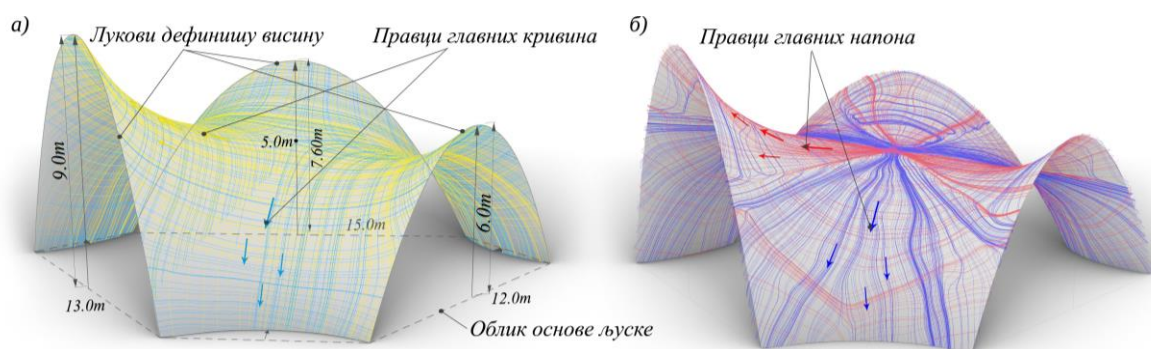
4.2 Студија случаја 2 — Минималне површи „Павиљони”

У другој студији случаја дизајн је инспирисан мотивима минималних површи у сврху демонстратора који се може користити као вишенаменски јавни простор. Из анализе конструкција љуски (поглавље 1) знамо да ове класе површи подразумевају мембранско понашање љуске и, самим тим, оптимално искоришћење попречног пресека без опасности избочавања и момената савијања. Из тог разлога се користе овде где се на сличан начин тестира развијена геометријска метода АКМ у просецу *хибридног* приступа.

Табела 4-6. Опис главних карактеристика задате бетонске љуске друге студије случаја са примењеним методама геометријске стратегије и алгоритма модуларизације, као и прорачуна

Геометријска стратегија	Алгоритам дискретне љуске	Распон љуске	Материјал (бетон C20/25)	Метода прорачуна
Хибридна стратегија	Алгоритам кружне мреже (АКМ)	Максималан распон 15m, минимална висина у средишту 5m	Јунгов модул еластичности: 29962 kN/cm ² , Густина: 25 kN/m ³ Граница еластичности: 1.33 kN/cm ² Поасонов коефицијент 0.2.	Метода коначних елемената, софтверски програм Карамба3Д

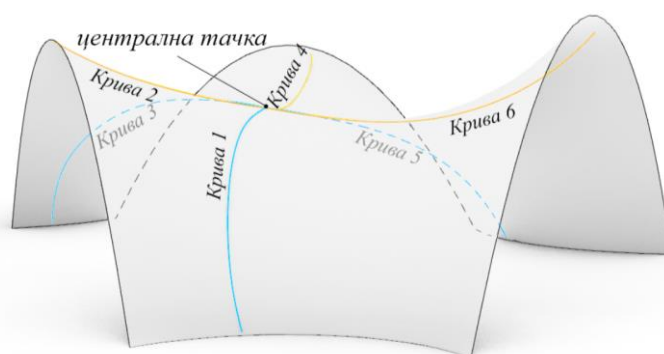
Форма љуске је добијена задавањем параболичних отвора висина 9.0m, 7.60m и 6.0m док је најнижа тачка у средишту површи на висини од 5.0m и облика полигоналне основе са фиксираним ослонцима распона 13.0m, 12.0m и 15.0m. Поред поменутих имплементираних геометријских стратегија и алгоритма, у табели (Табела 4-6) су назначене главне карактеристике материјала и метода прорачуна бетонске љуске. Облик љуске је добијен једноставном применом додатка за програм ГХ под називом Кенгур (Kangaroo) фиксирањем места ослонаца у подножју конструкције као и отвора. Кенгур ради на принципу једне од анализираних метода налажења форме метода густине силе (енгл. *force density method* — *FDM*) где се као резултат конструише троугаона мрежа неправилне поделе. Ова мрежа се користи за наредну фазу анализе задате форме љуске. Као и очекивано, у случају минималних површи, правци главних кривина и напона су близу једни другима (крећу се од средишта љуске ка крајевима), што јесте основа за повољну геометријску и конструктивну оптимизацију (Слика 4-13а, Слика 4-13б).



Слика 4-13. а) Анализа полазног дизајна љуске слободне форме са правцима главних кривина и б) напона

И у овом случају је идеја да се крене од две криве и да се генерише кружна мрежа са резултатом дискретне површи слободне форме што је могуће ближе пројектованој. Према томе, други податак који се може извући је место задатих кривих за имплементацију АКМ. На основу анализе главних праваца кривине, бирају се почетне криве за процес генерисања. Иако су у претходној студији случаја почетне криве у равни због симетрије модела, могуће је користити и просторне криве као улазни параметар. Њихов положај зависи од положаја главних кривина и главних праваца сила. У појединим решењима је, такође, могуће изабрати почетне криве за оптимизацију као средњу вредност поменутих праваца уколико се они не преклапају. У том случају је мања вероватноћа да је коначна форма близу почетној површи.

Ако су правци главних кривина и напона близу један другоме, као у овом случају, почетни избор кривих је одређен са два главна правца кривине у једној тачки на површи, где се онда очекују мањи моменти у ивицама модула. У зависности од симетрије и форме, обично се криве могу суитцати на оси симетрије, што показује претходна студија случаја, или на местима сингуларитета одакле креће више главних праваца, као у овом случају (Слика 4-14). Након одабира полазних кривих, у фази која следи, кружна мрежа се може генерисати коришћењем развијеног алгоритма АКМ где се конструише кружна ПК мрежа.

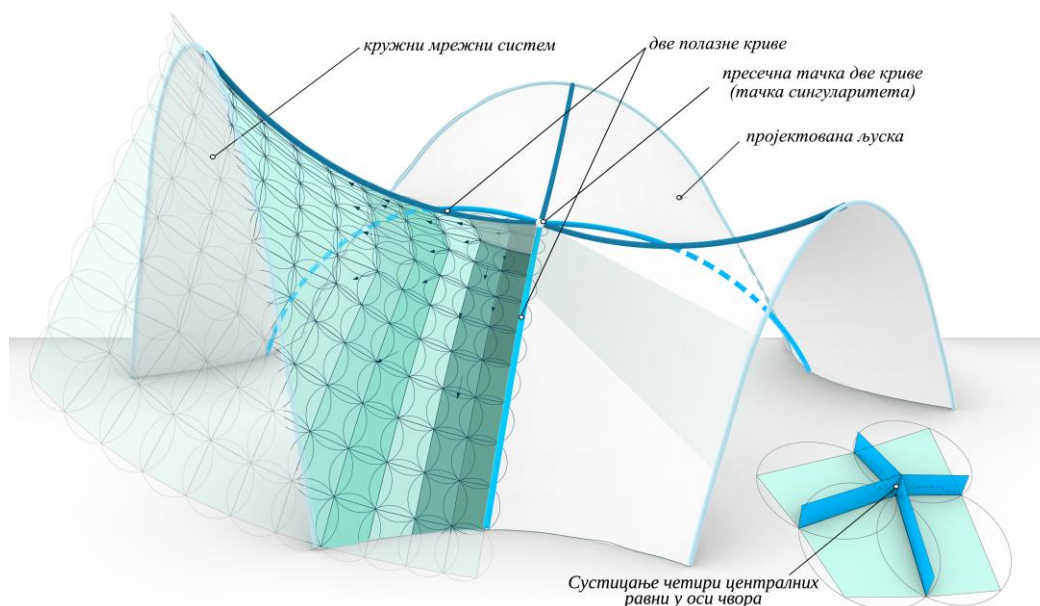


Слика 4-14. Одређени правци шест задатих кривих за конструкцију кружне мреже

Као и код прве студије случаја, и овде је простор између две параметризоване криве испуњен ПК кружном мрежом алгоритмом АКМ и чини *закрпу* – геометријска јединица (енгл. *patch*) (Слика 4-15 зелено). Параметризоване криве представљају улазни податак алгоритма и, у зависности од броја отвора и форме, број и облик закрпа може бити различит. У овом случају, сваки пар кривих је различит јер немамо симетрију у љусци па тако конструишемо шест различитих закрпа (Слика 4-15). На детаљу се, такође, може видети да централне равни четири полигона која се сустичу у једној тачки немају геометријску торзију.

Алгоритам је тестиран на параметризованим просторним кривима у равни трећег реда и вертикалним луковима, где су упоређене геометријске и структурне карактеристике мрежне љуске. Оба чиниоца су показала да се најбољи мрежни систем добија употребом лукова. Ова анализа је примењена како би се пронашао најбољи систем кружне мреже са модулима који одговарају геометријским параметрима производње и имају оптимална конструктивна својства. Параметри који су коришћени за оптимизацију су: *максимална висина лукова (варирају максимално 1 м), позиција*

пресечне тачке почетних кривих и нормала на произвољну раван у тој тачки која дефинише закривљеност лука.



Слика 4-15. Генерисање кружне мреже равних четвороуглова помоћу две полазне криве једног сегмента љуске слободне форме са детаљем који демонстрира чвор без геометријске торзије

Како добијена кружна мрежа прелази границе почетне површи, вишак је отклоњен пресеком вертикалним равнима почетних ланчаница за коначни прорачун конструкције. Затим је испитан домен улазних параметара 1 за величину модула погодну за платформу процеса штампе. Установљено је да свака од величина може да варира $\pm 1\text{m}$ у односу на почетну. Овде се уводи претпоставка да, што је крајња мрежа ближа минималној површи, имаће боље и конструктивне карактеристике. Самим тим, у овом случају се мења редослед поступака. Наиме, први степен оптимизације се ради само на основу параметра форме, а затим се врши конструктивни прорачун за евалуацију добијених варијанти. На крају се оптимизација попречног пресека спроводи на нивоу ивица и испуне. У том случају домен улазних параметара 1 (ДУП1) постаје и коначни ДУП.

Већ је речено да је резултујући мрежни систем јединствено дефинисан са шест лукова. Ови лукови су дефинисани са седам тачака. Три се налазе на крајевима лукова и представљају висину отвора, а три су на ослонцима у подножју љуске. Тачка пресека или сингуларитета је дефинисана у центру произвољне равни са нормалом која дефинише тангенту лукова у тој тачки. За геометријску оптимизацију, сагледавајући број слободних параметара, могу се израчунати 7×3 комбинације на које се додају још

два параметра за оријентацију равни. Двадесет три комбинације су велики број променљивих за мултифункционалну оптимизацију.

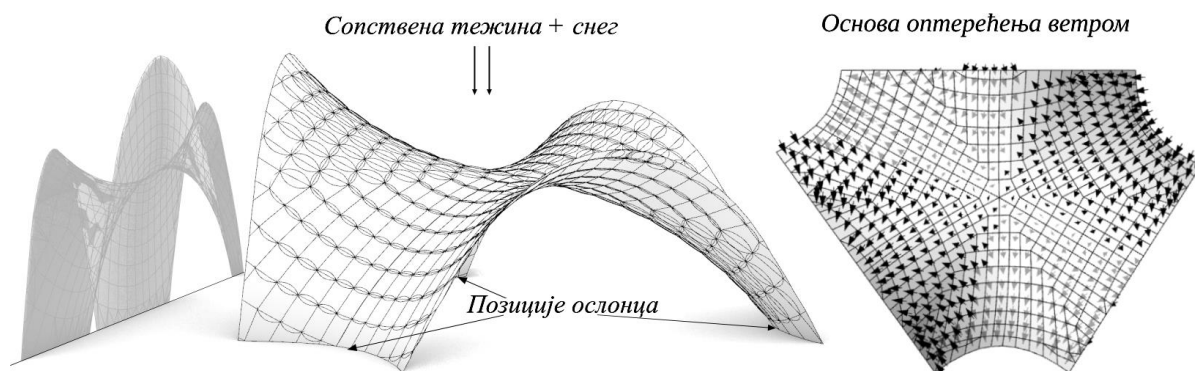
Због тога користимо анализирани додатак програма *Галапагос* за ГХ. У случају више параметара, алгоритам тежи да пронађе локалне минимуме. Да би се ублажио овај ефекат, параметри се подешавају на почетку тако да је почетна форма што ближа задатој мембрани, за успешнији процес апроксимације. Самим тим су сличне форме интегрисане као почетне популације приликом оптимизације. На крају су изабране две најбоље варијанте од неколико покушаја, које задовољавају и геометријске и конструктивне захтеве (Слика 4-16).



Слика 4-16. Приказ два решења из процеса оптимизације Галапагоса са улазним параметром форме

Наредни корак је прорачун конструкције како би се извршила евалуација варијанти у односу на обе групе параметара. Два излазна конструктивна параметра која се посматрају су *максимално искоришћење попречног пресека* и *максимална деформација*. Ради убрзавања процеса, у овом кораку не прави се разлика између ивичних зона и испуне током прорачуна. Сви панели су почетне дебљине 10cm и са својствима конвенционалног бетона C20/25. Претпостављена оптерећења су ветар са 0,8 kN/m² (третиран као у претходном примеру), снег са 0,85 kN/m² и сопствена тежина конструкције (Слика 4-17). Поред тога, укључен је фактор сигурности од два. Тачке ослоња су онемогућена на померања у сва три правца, док је ротација омогућена. Резултати геометријске и конструктивне оптимизације се могу видети у табели (Табела 4-7).

Када су у питању конструктивни параметри конструкције: *деформација* и *тежина*, тражи се решење са што мањом вредношћу. Исти је циљ и са параметром одступања од почетног дизајна. Такође, вреднује се ортогоналност између суседних страница модула, док домен њихове величине мора да се уклапа са величином производне платформе.



Слика 4-17. Приказ оптерећења љуске примењена током прорачуна

Анализом табеле Табела 4-7, може се видети да су геометријски резултати прилично слични, где обе љуске немају геометријску торзију, што је задато примењеним АКМ. Са друге стране, као последица пресека ПК закрпа са вертикалним равнима јављају се тругаони модули које би требало модификовати и избећи. На основу конструктивних карактеристика, за даљи процес се узима љуска број 2, где се већи значај даје мањој искоришћености попречног пресека што имплицира мањи вон Мисов напон у њој, док деформације нису велике за тај распон. Исто тако, одабрана љуска представља бољи потенцијал за оптимизацију попречног пресека, а самим тим и количину искоришћеног материјала.

Табела 4-7. Геометријска и конструктивна својства обе варијанте љуски

Решење	Геометријске карактеристике					Конструктивне карактер.	
	Број модула	Углови између суседних страница	Дужина страница модула [m]	Број троуглова	Средња вредност одступања од дизајна	Максимална деформација	Максимална искоришћеност попречног пресека
Љуска 1	437	54° - 125°	0.47-1.28	342	79.87 cm	0.56 cm	2.16
Љуска 2	429	55° - 125°	0.48-1.23	342	88.52 cm	1.04 cm	1.20

За коначну дефиницију геометрије модула, потребно је модификовати троуглове на ивицама љуске како би се избегли мали елементи са оштрим угловима. Модули облика четвороугла на крајевима љуске су продужени са циљем да се смањи број троуглова. Након модификације геометријских карактеристика елемената проверавају се на критеријуме процеса производње. Уколико би се упоредила табела (Табела 4-7 и Табела 4-8), може се уочити да је укупан број модула као и троуглова знатно смањен. С обзиром да постоји 3% троуглова на рубовима љуске са угловима мањим од 60°, требало би их посебно тестирати за производњу. Ово ограничење зависи од односа између

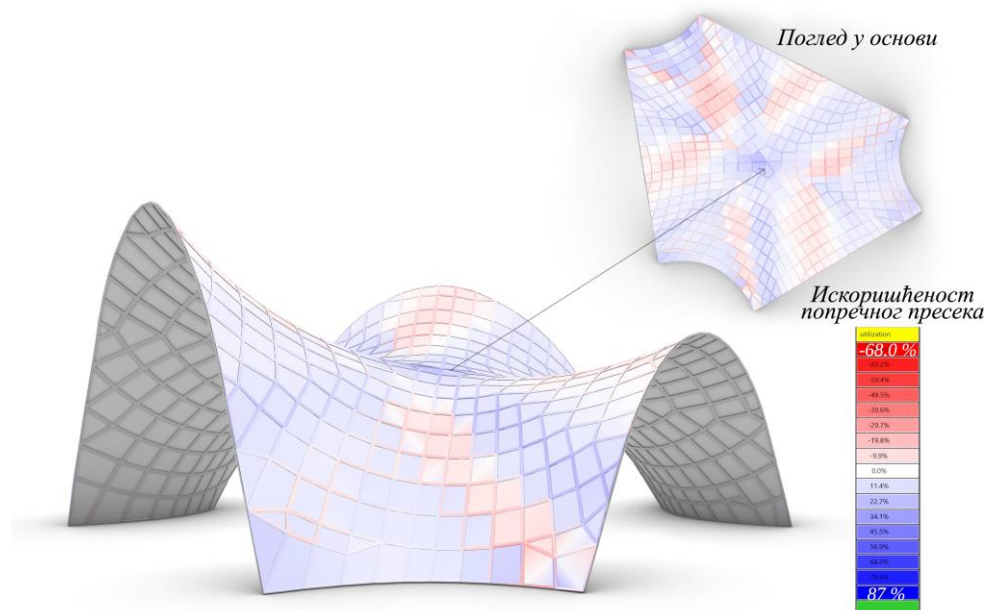
дужине ивице, попречног пресека и угла између страница. Могућност директне везе између елемената је обезбеђена равним контактним страницама, с обзиром на то да је геометријска торзија једнака нули.

Након тога следи коначан прорачун конструкције који подразумева оптимизацију попречног пресека испуне. Као и у првој студији случаја, прорачун се врши по МКЕ у програму Карамба3Д. У овој фази се конструкција рачуна као комбинација бетонског решеткастог система, који дефинише ивична зона модула и континуиране танке љуске, која представља зону испуне. Везе између елемената су круте. Гранични услови одговарају претходном прорачуну, као и оптерећење. Попречни пресек ивица је константан и одређује се пре оптимизације на основу тренутне величине млазнице за штампање и минималне дебљине за успостављање директне везе између модула. У овој студији случаја је испитана могућност константног попречног пресека ивице са варијацијом испуне. Ова идеја је резултат доброг одговора конструкције након првобитне статичке анализе (Табела 4-7). Као почетне вредности дефинисани су попречни пресек ивица 5x5 cm и дебљина испуне 1,5 cm. Почетно димензионисање се дефинише анализирањем искоришћености попречног пресека, где вредност не сме бити већа од 100%. Задати попречни пресек ивица испуњава овај услов тако да се он усваја као коначан.

Како би обезбедили максималну могућу уштеду материјала врши се оптимизација испуне модула. Оптимизација испуне се врши, такође, помоћу софтверског додатка *Галапагос* за *ГХ*. Процес прекида када је достигнута вредност испод задате граничне. У овом случају, гранична вредности представља деформација од 1cm при максималном искоришћењу од 100%. Почиње се задатом дебљином испуне од 1,5 cm, док се коефицијент повећања пресека за који се повећава дебљина f_n израчунава након сваке итерације. Овај коефицијент за сваки панел се израчунава по једначини (4-1). За израчунавање ове вредности задају се два позната параметра. Фактор за који се повећава дебљина материјала F и вредност за коју се повећава искоришћеност једног панела као референтни R . Алгоритам је подешен тако да се вредност $R=80$ увек додаје за фактор $F=0.2$. У свакој итерацији се поново израчунава вредност искоришћености попречног пресека панела U_n док задати F и R остају исти.

$$\frac{((U_n + R) - 100) F + 100}{100} = f_n; U_n \rightarrow \text{Искоришћеност панела } n \quad (4-1)$$

Након постигнутог дефинисаног граничног услова, процес се зауставља, где се усваја последња израчуната вредност f_n . Уколико се за један од панела добија се фактор $f_n = 1.12$ он се множи са дебелином испуне како би се добила коначна вредност материјала за тај панел. За љуску приказану на слици (Слика 4-18), гранична вредност је смањена након 4 итерације. Тада је максимална искоришћеност попречног пресека спала на око 87% са вон Мисовим напоном $1,22 \text{ kN/cm}^2$, где вредност максималне деформације износи 0.69 cm (Табела 4-8). Тиме је граничан услов задовољен. Након прорачуна се може приметити да се највеће силе налазе у елементима на крајевима лучних отвора.



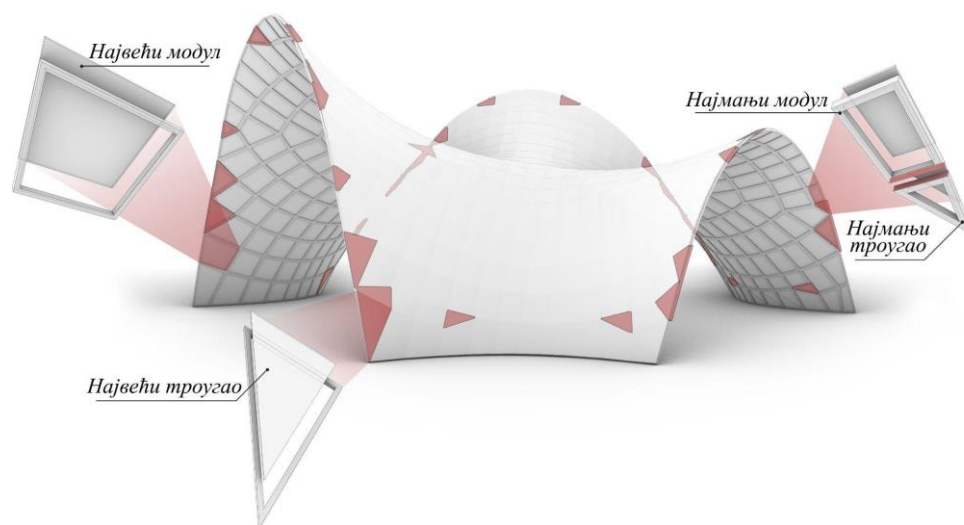
Слика 4-18. Приказ искоришћености попречног пресека елемената ивица и испуне љуске у перспективи и основи са мерном скалом

Табела 4-8. Геометријска и конструктивна својства коначног решења

Геометријске карактеристике				Конструктивне карактеристике			
Број панела	Углови између суседних страница	Дужина страница модула [m]	Број троуглова	Макс. дефор. [cm]	Макс. искориш. (испуна/ивица)	Вон Мисов напон (максимални)	Тежина [kg]
494	30° - 135°	0.39-1.98	29	0.69	0.68/ 0.87	1.22 kN/cm ²	26259

По завршетку коначног прорачуна коначна модулarna љуска је приказана на слици (Слика 4-19). Елементи троугла су истакнути црвеном бојом. Висина попречног пресека ивице се разликује од дебелине испуне на унутрашњој страни љуске, јер су ови елементи изравњани са њене спољашње стране како би конструкција од споља била

глатка. Уједно ова оријентација углавном диктира доњу страну модула, која је тако окренута на платформи приликом производње.



Слика 4-19. Коначна модулarna љуска са четири истакнута типа модула

Конструктивна ефикасност коначне модулarne љуске се може видети најбоље уколико на основу употребљеног материјала израчунамо средњу вредност величине попречног пресека глатке љуске. Наиме, између три ослонаца распон износи 15.8m, 14.4m, 18.0m, док је максимална висина око 9.3m и минимална у средишту 5m. Уколико поделимо тежину љуске са оквирном густином армираног бетона узетог у прорачун, а затим са њеном површином од око $345m^2$, добија се оквирна средња вредност њене дебљине од 3cm дуж целе љуске. Исто тако, висина ребра у односу на максимални распон износи $L/316$ (од уобичајне $L/200$) уз имплементацију другог случаја извођења у коме дебљина испуне варира, док је ребро константног попречног пресека. У том случају се такође закључује ефикасност модулarnог система са мањим попречним пресеком ивица него уобичајно, где се променљивом дебљином испуне може доста уштедети од непотребног материјала.

У студији случаја 2 је, такође, показано да се модули могу сматрати јединственим префабрикованим елементима, који су део целог система и пројектовани тако да се уклапају у флексибилан производни процес. На тај начин, циљ *скалабилности* и *адаптабилности* модула је постигнут, где се неке вредности морају тестирати, како не би реметиле кључне делове производног процеса. И у овом случају, уз помоћ АКМ, коришћен је хибридни приступ на задатом дизајну минималне површи, која показује веома добре резултате за генерисање кружне мреже. Он омогућава адекватну дефиницију мреже решавањем проблема планарности и геометријске торзије, где се,

затим, у оквиру мултифункционалне оптимизације тражи најбоља варијанта варирањем улазних параметара у склопу свог домена.

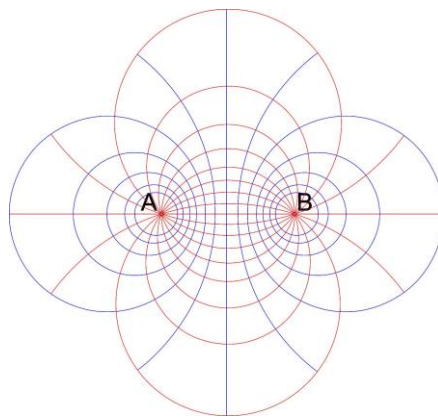
4.3 Студија случаја 3 – Морска шкољка

Трећа студија случаја се у многоме разликује од претходне две, с обзиром на то да је у питању стратегија *пре-рационализације* коришћењем развијеног алгорита на бази [дискретне верзије Дупинових циклуда](#). Принцип пројектовања пре-рационализације подразумева да је глобална форма добијена преко начина конструкције одабране класе површи или мреже. Изабрана форма објекта би требало да буде у функцији изложбене сале минималног распона у правцу тачака А и В од око 35m и максималне висине око 20m. Како се ради о стратегији пре-рационализације, на дефинисање форме могу утицати и архитектонски параметри функције који су овде испитивани: максимална висина објекта, квадратура, волумен и форма. Поред ових карактеристика, геометријске стратегије и алгорита, карактеристике материјала и метода прорачуна су дати у табели (Табела 4-9).

Табела 4-9. Опис главних карактеристика задате бетонске љуске треће студије случаја са примењеним методама геометријске стратегије и алгорита модуларизације, као и прорачуна

Геометријска стратегија	Алгоритам дискретне љуске	Распон љуске	Материјал (бетон)	Метода прорачуна
Пре-рационализација	Алгоритам конструкције Дупинових циклуда	Величина краћег правца распона 35m, максимална висина у средишту око 20m	Јунгов модул еластичности: 2280 kN/cm ² , Густина: 20 kN/m ³ Граница еластичности: 3.5 kN/cm ² Поасонов коефицијент 0.2	Метода коначних елемената, програм Карамба3Д

Други (максималан) правац распона и дизајн ове мрежне љуске полази из дефинисане основе. Требало би се подсетити да је као полазни податак за алгоритам Дупинових циклуда (потпоглавље 3.2.3) потребан положај једног система кружница како би се одредиле пресечне тачке са другим који је управан. За задавање почетних положаја кружница као инспирација је коришћена [Аполонијева шема кружница](#). Иако постоји математички модел ове шеме, он није коришћен за параметризацију у овом случају. Главни разлог за то је однос величина између елемената у конструкцији који се може видети на слици (Слика 4-20).

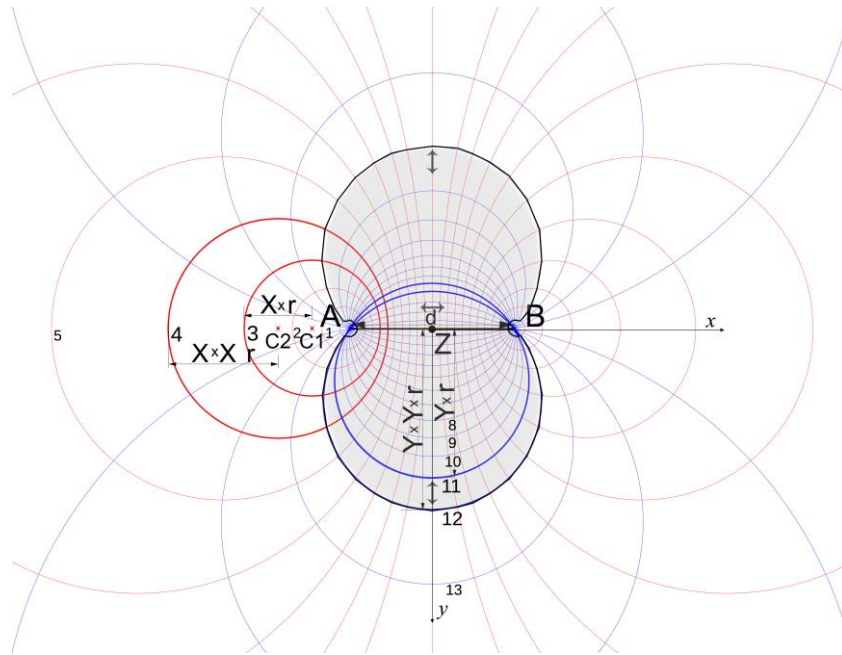


Слика 4-20. Шема два система ортогоналних Апологијевих кружница конструисаних са инверзијом са центром у две граничне тачке A и B

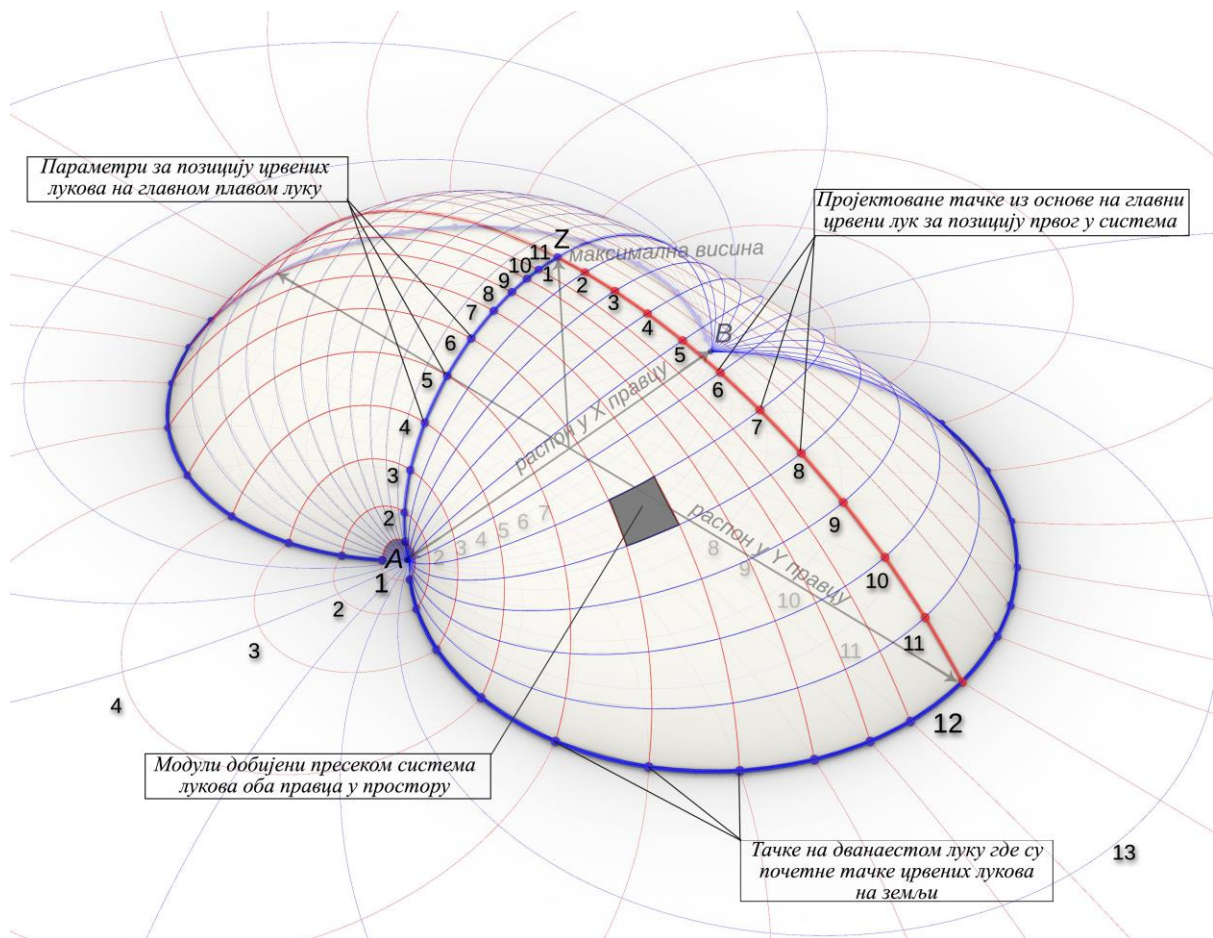
Ова карактеристика може да има велики утицај на производни процес будући да разлика у величини елемената иде и до 100 пута, што може правити проблем приликом префабрикације, логистике и сегментације љуске у естетском смислу. У том случају би се добио велики број полигоналних структура што угрожава глаткост љуске. Исто тако, оваквом неравномерном поделом закривљене површи може доћи до концентрације великих напонских стања на местима веза.

Из наведених разлога, параметризација шеме је базирана на односу кругова у основи, држећи се основних правила изгледа шеме, како би се искористио широк дијапазон могућности дизајна и сегментације, којег је могуће прилагодити датој технологији. Ту се убрајају параметри који су задужени за дефинисање форме објекта, као и процеса сегментације.

Распоном између тачака A и B је могуће манипулисати и одредити распон конструкције у правцу x (Слика 4-21). Величина и број модула се одређује подешавањем броја кругова између полазних поменутих тачака. Оба система кругова имају параметар раста пречника наредне кружнице од 1 (пречник остаје исти) до 3 (пречник је већи 3 пута), који дефинише величину елемената као и скаларност. Сива зона на слици (Слика 4-21) је одређена као дефиниција границе простора конструкције и у овом случају је изабран круг број 12 у зависности од полазне референце. Варијацијом свих ових параметара, могу се добити различити облици љуске у основи. Ови параметри су коришћени како би се поставиле почетне димензије елемената и конструкције, као и за алтернативне димензије током оптимизације дизајна.



Слика 4-21. Дизајн кругова у основи са обележеним почетним параметрима у оба x, y правца и маркираном почетном основом



Слика 4-22. Формирање 3Д модела мрежног система преко параметризације у 2Д моделу, висине централне тачке и израчунатих параметара на главним луковима преко датог једног система (плавих)

За примену алгоритма Дупинових циклида потребно је дефинисати позицију првог система кружница. Како би се кружнице из основе превеле у 3Д, неопходно је дефинисати два главна лука у правцу A и B преко позиције пресечне тачке Z (Слика 4-21). Она се издиже у правцу глобалне z осе, односно вертикално. Координата z те тачке дефинише максималну висину конструкције као и позицију главних лукова (Слика 4-22 *плави* и *црвени*). Затим су одређени гранични лукови који дефинишу форму конструкције. Као што је већ речено, у овом случају је то лук број 12. У складу са том информацијом, позиција система лукова у правца је задата према пресечним тачкама између њих и средњег црвеног лука у основи (Слика 4-22). Те тачке се подижу вертикално до средњег црвеног лука. Затим се помоћу те тачке и тачака A и B конструише први систем задатих лукова (*плави* Слика 4-22) који је неопходан за покретање алгоритма Дупинових циклида. На овај начин се могу задати модули сличне пропорције, крећући се од средине ка крајевима. Лукови x правца (*црвени*) су параметризовани преко две тачке на граничним луковима и тачком на главном плавом луку. Тачке на граничним луковима, односно у подножју љуске, су задате, такође, из основе. Њихов положај може бити последица жељене пропорције или величине модула за производњу.

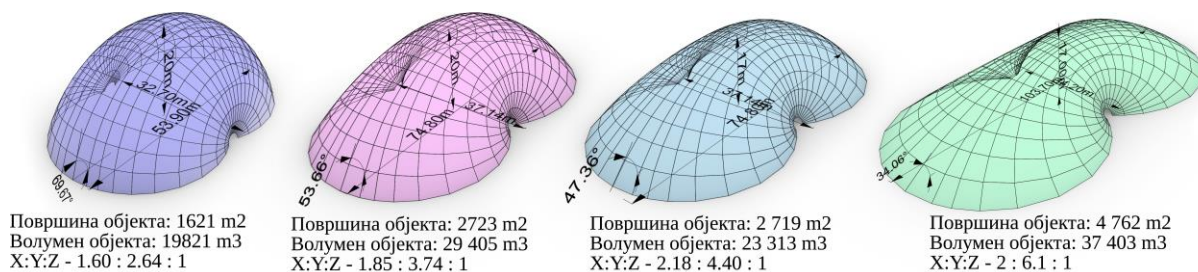
На основу позиције задатог положаја лукова у правца и две фиксне тачке лукова x правца алгоритам проналази положај средњих тачака на главном плавом луку. За овај процес се користи већ дефинисан алгоритам за конструкцију *дискретне верзије Дупинових циклида* (поглавље 3.2.3). Овај процес се изводи за сваки од лукова x правца, где параметар t не сме имати вредност већу од 0.5 како постоји симетрија, па лукови долазе само до пола (врха) конструкције. Када су сви лукови дефинисани, симетрично се могу пренети са друге стране. Детаљније објашњење процеса се може наћи у поглављу 3.2.3.

Алгоритам је покренут сваки пут када се неки од улазних геометријских параметара промени. Уз помоћ њих можемо експериментисати са глобалном формом љуске или мењати расподелу задатих тачака и задатих лукова. Улазни геометријски параметри су: *висина тачке пресека два главна лука, позиција граничних лукова на земљи, позиција задатог система лукова*, растојање тачака A и B . Јасно је да раздаљина између тачака A и B дефинише распон једног правца, док дефинисање граничних лукова у основи одређују други правац распона. Висина пресечне тачке два главна лука је максимална висина љуске, док се позиције лукова задатог система могу одредити преко

основе или преко параметара у 3Д моделу. Који год начин изабрали, сваки пут се након ових промена конструише ПК мрежа. [Геометријска торзија](#) се, такође, може проверити за сваки ред и задати као услов усвајања параметра t за сваки лук.

Наредни корак је испитати домен улазних параметара 1. Међутим, на овом примеру је циљ прво показати на који начин би у процесу пројектовања још могли дефинисати опсег улазних параметара за испитивање. На пример, у зависности од намене објекта, потребе за димензијама и габаритом конструкције могу бити другачије. На основу конструктивног система, архитектонског приступа, волумена и потенцијала форме, предвиђено је да би овај објекат био адекватан за намену изложбене сале. Након анализе већ постојећих објеката ове намене и њихових уобичајних димензија, показало се да је очекивана висина на средини љуске која се тражи од 7 до 30 метара, у зависности од капацитета објекта. Крећући се од минималних димензија ка већој, на основу статичке анализе конструкције, попречног пресека модула, тежине љуске и оптималне расподеле напона без локалних прекорачења, биће одређене коначне димензије.

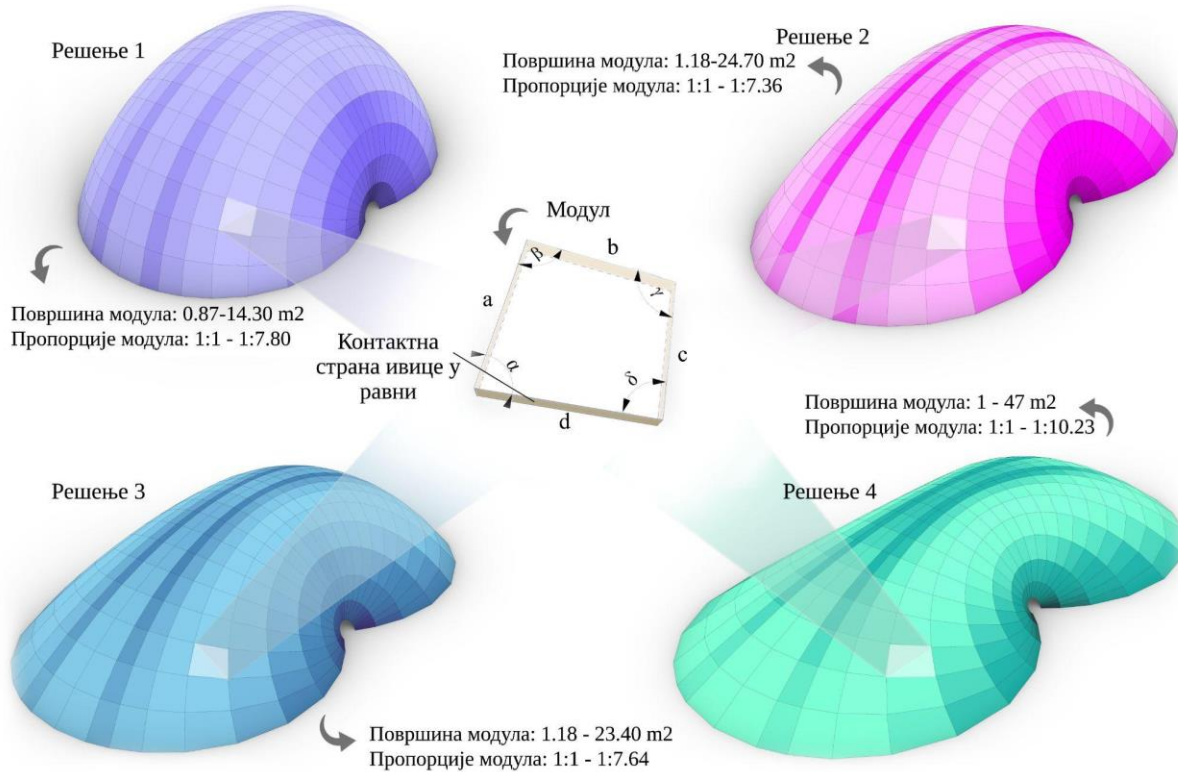
Дизајн објекта је инспирисан мотивом *морске шкољке*, што би значило да је пропорција између распона и висине и закривљеност површи једна од важних параметара како би се естетика слободне површи задржала. На слици (Слика 4-23) се налазе четири различите могућности пропорција висине и распона које дају другачији архитектонски израз. Решење би требало тражити на основу специфичних архитектонских потреба и може се разликовати од пројекта до пројекта. Параметре архитектуре је важно употребити на почетку како би се добио адекватан опсег улазних параметара, који би могао да задовољи потребе намене објекта. Међутим, статички прорачун и услови производње ће дефинисати коначно решење.



Слика 4-23. Приказ различитих могућих архитектонских решења мењањем пропорција између глобалних улазних параметара (распон у оба правца и максимална висина)

Као што је већ поменуто, важно је установити карактеристике производње бетонских модула како би се формирали услови под којима би требало дефинисати

дизајн. На основу тога, следећи корак је да се испитају потенцијали горе наведених решења и испитају предности и недостаци, карактеристике на локалном нивоу модула као и глобалном (форме). Критеријумски фактори су скалабилност, адаптивност модула и оптимизовани попречни пресек, док је, са друге стране, важно задржати архитектонски израз љуске слободне форме. Однос параметара једног од понуђених решења, који најбоље одговара карактеристикама, ће бити узет као полазни пример за даљу оптимизацију. На основу развијеног алгоритма, модификацијом улазних геометријских параметара у сваком од случаја на слици (Слика 4-23) као резултат се добија ПК мрежни систем у простору. Величине детаљније анализе модула су обележене на једном елементу (Слика 4-24).



Слика 4-24. Приказ четири различита решења љуски са карактеристикама модула. Различите нијансе боја приказују различите пропорције модула

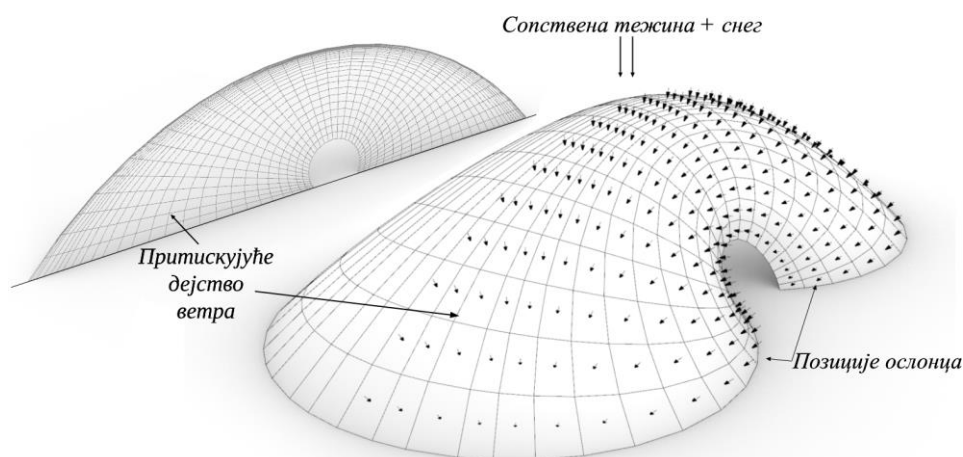
Анализа модула за сва четири случаја је приказана у табели (Табела 4-10). Облици модула се крећу од трапезастог издуженог облика до приближно квадратног. Ипак се може видети да не постоје врло оштри углови који би могли представљати проблем приликом префабрикације. Различите нијансе боја у решењима представљају разлику у пропорцијама облика модула, тако да тамније нијансе означавају веће разлике у пропорцијама, док светлије показују квадратне модуле са пропорцијом средње линије 1:1. Величине које су у табели приказане су максималне и минималне величине странице

модула, као и површина модула. Циљ је анализирати табелу како би се ове величине могле ограничити у складу са условима производње преко улазних параметара који ће се користити за оптимизацију. Имајући у виду величину љуске, може се приметити да су модули знатно већи него у претходна два случаја. За ове димензије распона неопходно би било повећати величину платформе за штампу или, са друге стране, смањити распон и повећати број поделе. За сада је број поделе 20x22 што даје укупно 440 модула од чега је сваки поновљен 4 пута, значи 110 различитих типова модула. Овај број је могуће касније модификовати како би се добили мањи модули. Са друге стране, требало би водити рачуна о броју елемената за префабрикацију и, самим тим, броју веза, које представљају најосетљивије место у конструкцији.

Табела 4-10. Геометријске карактеристике скупа модула који припадају различитим решењима љуски

Геометријске карактеристике модуле (минимум - максимум)	Четири различита решења љуски			
	Решење 1 (љубичасто)	Решење 2 (лила)	Решење 3 (плаво)	Решење 4 (зелено)
Дужина страница модула	0.20 – 4.83 м	0.22 – 6.83 м	0.21 – 6.83м	0.16 – 10m
Пропорција модула	1:1 – 1:7.67	1:1 – 1:7.36	1:1 – 1:7.64	1:1 – 1:10.22
Површина модула	0.87m ² – 14.13m ²	1.18m ² – 24.70m ²	1.18m ² – 23.40m ²	1m ² – 47m ²
Угао између страница	83° - 97°	81° - 99°	80° - 100°	78° - 102°

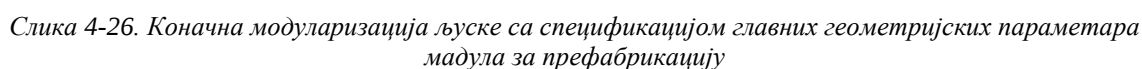
На основу анализе на локалном нивоу модула као и архитектонске замисли форме фиксирани је домен улазних параметара 1 (ДУП1). У овом случају, они представљају однос распона у два главна правца који би требало да се креће у домену 1:1.75 и 1:2 како би се сачувала закривљена издужена форма љуске и адекватне пропорције модула. Други важан параметар представља висина улаза са стране која би требало да износи минимум 5m. Такође, максимална висина љуске је фиксирана на око 20m. За дефинисање коначног ДУП неопходно је извршити процес материјализације ПК мреже. Како би се поједноставио процес, конструкција се дефинише као континуирана љуска за прорачун са константим попречним пресеком од 6cm.



Слика 4-25. Оптерећења узета у обзир током прорачуна модуларне љуске

Од оптерећења, поред сопствене тежине, су узети ветар од 0.8kN/m^2 (третиран као у претходна два примера) и снег 0.85kN/m^2 (Слика 4-25). У овом случају оптерећење ветром има само притискајуће дејство обзиром на затвореност геометрије љуске. Тачке ослоња љуске су целом дужином два лука који се налазе на земљи, где је степен слободe подешен само на транслацију у свим правцима, а ротација није спречена. Приликом анализе прорачуна користи се Карамба3Д где је примећено да, уколико се не поставе границе између односа распона, геометрија целе љуске се оптимизује у облику сфере (Слика 4-24а, решење 1). Ово не би требало да буде изненађујуће, с обзиром на то да ова форма има тенденцију да се приближава решавању задатих лукова на бази конструкције на притисак, са разликом отвора који се налазе са стране. Ипак, тестирањем ДУП1 за вредност конструктивних карактеристика добија се резултат да су решења у оквиру њих статички подобна, па се тај домен узима као коначни ДУП.

Следи оптимизација конструкције која је постигнута из два корака. Први је глобална дефиниција форме, а други локална оптимизација попречног пресека модула. Критеријум конструктивне оптимизације је минимизација *максималне деформације и искоришћења попречног пресека модула (минимизације вон Мисовог напона)*. У овом кораку се бетонска љуска третира као монолитна са константним попречним пресеком од 6см. Поменут опсег односа распона у X и Y правцу је подешен између 1.75 и 2. Овога пута за процес мултифункционалне оптимизације је коришћен додатак [Октопус](#) за софтвер ГХ. Као што је поменуто у анализи еволутивне методе коју овај програм користи, мултикритеријумска оптимизација са два параметра оптимума не даје јединствено решење. Другим речима, приликом оптимизације се може добити распон решења међу којима би требало дефинисати приоритете. У овом случају, анализа



Иако су услови префабрикације задовољени поделом на 20x22 модула, параметризација луковима Дупинових циклида нам даје могућност за даљом корекцијом поделе без промене глобалне форме мрежне љуске. На основу тога, у следећем кораку се испитује њена додатна модификација. С обзиром на облик модула, нису постојали оштри углови између страница, који би могли бити проблем. Један од најважнијих остаје величина модула и пропорција између страница. Ово би се најбоље могло испитати варијацијом броја лукова у оба снопа и, након поновног решавања алгорита, после сваке итерације, резултати су посматрани. Конструкција се састоји од 28 модула (у једном правцу) са 18 модула (у другом правцу). Као и на претходној слици, градијент боје показује разлику у пропорцијама модула. Најсветлије боје су модули са приближно једнаким страницама 1:1, док су најтамнији пропорције 1:7. Детаљне геометријске карактеристике екстремних вредности се могу видети на слици (Слика 4-26).

У финалном, другом кораку оптимизација попречних пресека модула је одрађена такође у Карамба3Д. Ипак, како би се оптимизовала маса конструкције, разлика у

дебљини испуне модула је анализирана и оптимизирана за сваки модул посебно. С обзиром на то да је попречни пресек ивица већи од испуне и може се радити од другачијег бетона, она може служити као оплата за испуну. У првом кругу прорачуна, због већ поменутих локалних напона, морало се радити на ојачању и ивица попречног пресека модула код улаза на угловима. Прва три модула, посматрано од земље са обе стране улаза (укупно $3 \times 4 = 12$ модула), су третирани засебно. Сигурносни фактор који је примењен је 2. Повећан је како би се покриле фазе монтаже које би конструкција морала да прихвати.

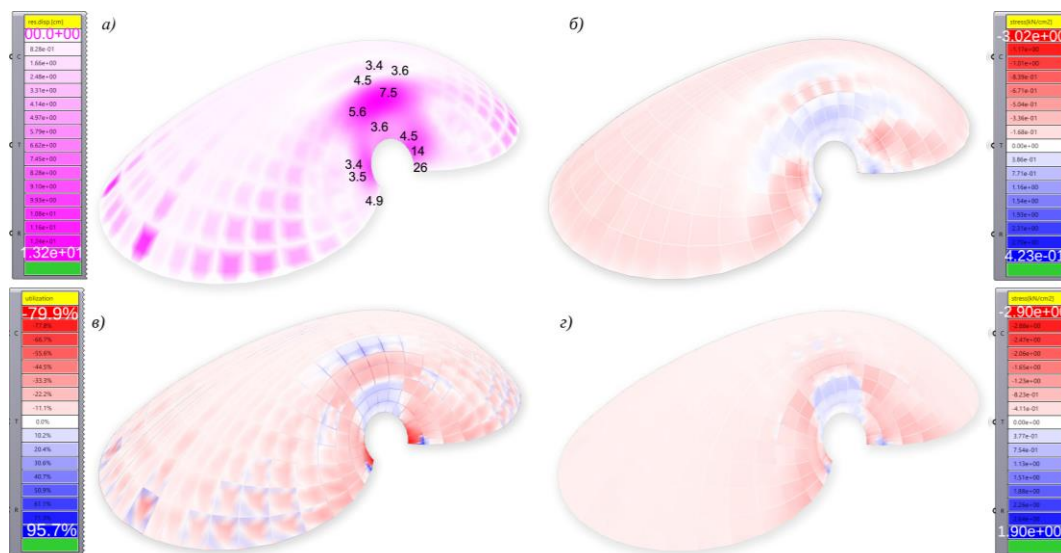
Још један од разлога за прорачун са овим фактором сигурности су имперфекције приликом производње које нису урачунате у прорачун, као и посвећеност статичком тумачењу веза између модула, које нису део овог истраживања. У оптерећења се убрајају ветар, снег и сопствена тежина, као што је већ поменуто. Сва оптерећења су нанета као и у претходном прорачуну. Карактеристике материјала су у складу са производњом приказане у табели (Табела 4-9) где је коришћен брзо очвршћујући цементни композит [PSHCC](#), који се често користи као материјал за 3Д штампу због своје вискозности.

У зависности од почетне задате дебљине испуне модула, алгоритам за прорачун конструкције у секвенцама повећава потребну дебљину испуне како би оптерећење конструкције пало испод 100%. Ово је дефинисано у једначини (4-1) као и у претходном примеру. Исти додатак програма Галапагос за ГХ је имплементиран у сврху оптимизације. Потребно је израчунати фактор fn који одређује коефицијент повећања пресека, као и у студији случаја 1.5. Он узима у обзир фактор искоришћености попречног пресека Un , свеобухватни фактор повећања F и вредност искоришћености пресека R . Вредност R дефинише број попречних пресека, који би требало бити ојачани у околини прекорачених напона.

Висина попречног пресека ивица модула је подешена на 14cm док је ширина 7cm. Дванаест модула поменутих на улазима објекта су попречног пресека 27 x 13cm (Слика 4-26). Почетна дебљина испуне модула је подешена на 3.2cm. Вредност R у формули је изабрана 60 а фактор F је 0.5. И овде је коришћен додатак за ГХ под називом Хупснејк (Hoopsnake) који омогућава процес итерације приликом прорачуна тиме што у свакој следећој повећава дебљину испуне за израчунату вредност fn . Са овим улазним подацима за прорачун и изабраном конструкцијом након 5 итерација је искоришћеност

попречног пресека конструкције спала на испод 100%. Као резултат, само 40 модула има ојачану испуну и већина модула не показује велике напоне у попречном пресеку.

Како је првобитни прорачун показао веће деформације, неопходно је да се љуска провери и по теорији другог реда. Исти гранични услови и оптерећења су узета у обзир приликом прорачуна, као и по теорији првог реда. Овај процес је, такође, имплементиран у програму Карамба3Д са опцијом за прорачун по теорији другог реда. Након тога, било је потребно повећати попречни пресек испуне за око 30%. Ојачани модули код улаза су сада истог попречног пресека испуне и ивице модула. Остала ојачања се могу видети на слици (Слика 4-27) као и искоришћеност попречних пресека. Највећа искоришћеност је код модула на самим ивицама улаза љуске и то 95% (на затезање) (Слика 4-27в). Ова вредност одговара фон Мисовом напону од $1,90\text{kN/cm}^2$ (Слика 4-27г).



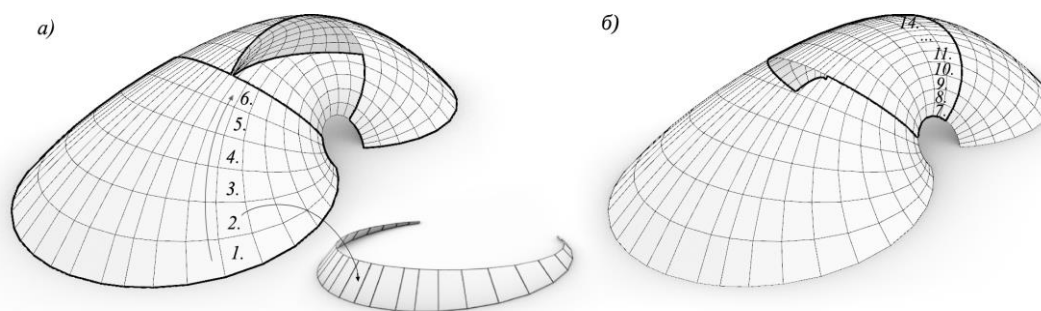
Слика 4-27. а) Деформације са дебљинама унутрашње зоне модула; б) максимални главни напони в) Искоришћеност попречног пресека модула г) фон Мисов напон

У случају ове конфигурације Дупинових циклида, било је интересно испитати могућности монтаже конструкције код које се може употребити само кран, без додатне оплате и већих скела. Наиме, с обзиром на то да редови модула леже на кружницама, претпоставка је да се они могу монтирати на тлу а затим по принципу „ред по ред” ређати један за другим (Слика 4-28а детаљ). Различит редослед ређања редова модула је симулиран како би се одредило који од њих представља најмање оптерећење за конструкцију.

Табела 4-11. Главне геометријске и конструктивне карактеристике модула и коначне љуске за префабрикацију

Коначно решење љуске	Геометријске карактеристике				Статичке карактеристике		
	Ивице модула	Пропорције модула	Углови и међу страница	Број модула	Маса љуске	Максимална деформација	Вон Мисов напон (максимални)
	66 cm – 655 cm	1:1– 1 : 7.56	80° - 99°	504	627 876 kg	13.36 cm	2,90kN/cm ²

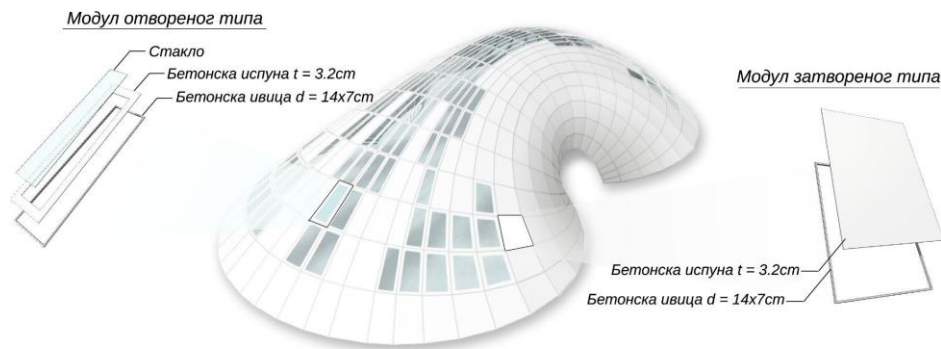
У овом случају оптерећење од снега није узето у обзир, јер може бити избегнуто у периоду монтаже конструкције. Остали гранични услови и оптерећење су исти као и у претходном прорачуну. Ред модула који је први постављен представља и позицију ослоња у тачкама које се налазе на тлу (Слика 4-28а ред 1). Посматрани конструктивни параметри су деформације и максималне силе у попречном пресеку. Као решење се показало да би прво требало поставити првих шест лукова управна на већи распон, а затим попуњавати модулима који припадају луковима у другом правцу, крећући се од улаза са обе стране (Слика 4-28а). Како то геометрија омогућава, за потпору конструкције могуће је додати помоћне потпорне елементе на улазима како би осигурали лукове који се монтирају у другој фази (након првих 6 монтираних редова) (Слика 4-28б). Максимална искоришћеност попречног пресека у том случају износи 65% са максималном деформацијом 13.36cm (Табела 4-11).



Слика 4-28. а) Прва фаза градње модуларне љуске постављањем шест редова лукова са обе стране; б) Друга фаза монтаже садржи четрнаест реда са обе стране отвора

Како би сагледали ефикасност љуске, можемо применити исти прорачун као и у претходном случају. Љуска је приближног распона 98x37m и висине око 20m. Са тежином преузетом из табеле, густином урачунатог бетона као и израчунатом површином од око 5466 m² може се добити просечна дебљина око 4,5cm. Исто тако, уколико се упореди висина ивице (ребара) са анализираним примерима и препорукама (поглавље 1.8), видимо да је већина има однос висине и максималног распона L/700

изузев дванаест ојачаних на улазу која су L/363 (препорука је L/100-450). Штацише, већи попречни пресек ивице (27x13cm) је мањи у односу на приказане примере мрежастих љуски мањих распона. У том случају и овде можемо видети велику ефикасност конструктивних карактеристика ове класе површи као и успешност система комбинације промењивог попречног пресека ивице и испуне истовремено.



Слика 4-29. Приказ модела коначне љуске са издвојена два типа модула и њиховим елементима

Како су модули планарни, то омогућава употребу и комбинацију стакла са бетонским модулима за осветљење објекта, тако да је оно искоришћено као коначан корак у моделовању љуске (Слика 4-29). Двадесет седам процената модула са најмање оптерећеним попречним пресеком испуне је изабрано да буде испуњено стаклом. Величина стакленог дела испуне зависи у потпуности од оптерећења елемента, што је мање оптерећење, већа је стаклена површина. Циљ је да се овим доведе више директне светлости у објекат, олакша конструкција, оптимизује употреба бетона у љусци и добије другачији архитектонски израз (Слика 4-30). Узимајући у обзир облик модула и геометријске карактеристике (*величину, планарност, унутрашње углове*), уградња стакла не би требало да представља велики проблем приликом процеса производње. Прорачун је показао да статички утицај модула са отвором за стакло није велики.



Слика 4-30. Поглед из унутрашњости љуске са стакленим панелима на један од улаза у правцу већег распона

У овом примеру је приказан процес пре-рационализације имплементацијом развијеног алгоритма за конструкцију дискретне верзије Дупинових циклида. Параметризацијом шеме кружница у основи се може дефинисати положај дизајна лукова у простору који даје различите варијације глобалне форме. Преко дефинисане геометријске методе формиран је планарни систем четвороуглова без геометријске торзије и оптимизује како за потребе намене објекта, тако и процеса префабрикације. Оваква стратегија дизајна омогућава већу слободу за примену ширег спектра архитектонских услова који су тестирани манипулацијом локалних и глобалних параметара, док се у исто време оптимизацијом води рачуна о статичкој ефикасности конструкције. Променама улазних параметара се могу дефинисати разне варијације, као што су и несиметричан дизајн, за разлику од наведеног примера. Такође, параметризација луковима омогућила је накнадну модификацију поделе како би се побољшале геометријске карактеристике модула за процес префабрикације.

5 РЕЗИМЕ НАЛАЗА, ДИСКУСИЈА И ЗАКЉУЧАК

Пето поглавље је подељено на шест потпоглавља: резиме налаза, ограничења, будући правци истраживања, теоријски и практични значај, дискусија и закључак. Ова потпоглавља се баве двома кључним областима доприноса кандидата: дизајном и оптимизацијом конструктивних система модуларних бетонских љуски у студијама случаја, као и развојем оригиналних геометријских метода за тај дизајн.

Први део говори о проширењу метода и алата за дизајн модуларних бетонских љуски за систем префабрикације, наглашавајући конструктивну оптимизацију и ефикасност нових метода. Други део има фокус на значај оригиналних алгоритама за генерисање различитих типова мрежних љуски.

Поглавље почиње резимеом налаза у ове две области.

5.1 Резиме налаза

У докторској дисертацији развијене су две стратегије дизајна модуларних бетонских љуски, са фокусом на технологију префабрикације бетоном. Оригинална методологија дизајна обухвата четири синхронизована радна пакета, где су кораци стратегије дефинисани кроз *пре-рационализацију*, као и нови *хибридни приступ*. У наставку је формулисан осврт на главне развијене геометријске методе за пројектовање љуски. Након тога су дефинисане и њихове примене на студијама случаја, које наглашавају успешност конструктивне оптимизације љуски.

Геометријске методе: Развијене су методе за дизајн планарних мрежа четвороуглова без геометријске торзије. [АКМ](#) алгоритам омогућава генерисање

кржних ПК мрежа задавањем две просторне криве. Оригиналношћу увођења просторних кривих омогућава већу слободу приликом дизајна. Даљи развијени алгоритми из РП2.2 омогућавају употребу дискретних верзија површи са повољним геометријским и конструктивним особинама као што су Дупинови циклиди, Каналне и Монжова површ. Ови алгоритми омогућавају интерактивни дизајн мреже задавањем почетних кривих, једноставно интегришући ове површи у дизајн без сложених математичких операција. Пример је дизајн модуларне љуске, преко дискретне верзије Дупинових циклида у трећој студији случаја. Монжова површ нуди различите могућности употребе, при чему се решења офсета могу прилагодити различитим конструктивним елементима у зависности од улазних кривих. Ова метода избегава захтевне процесе оптимизације имплементацијом конструктивне геометрије за сложене просторне криве.

Пројектовање Коенигсових мрежа: Као део РП2.2 истраживани су и конструктивни системи са Кристофеловом дуалношћу, који чине Коенигсове мреже у пољу дизајна мрежних љуски. Формулисане су стратегије дизајна специјане подгрупе дуалних мрежа које чине *изотермичке површи*, које до сада нису испитиване у архитектонској геометрији. Развијени су алати за дизајн ових мрежа, класификовани на три нивоа, у зависности од префабрикације и комбинације са Мебијусовом и Пројективном трансформацијом.

Прва студија случаја: Применом хибридног приступа и развијеног алгоритма пресечних кривих, геометрија љуске је редефинисана у [ПК](#) мрежу без геометријске торзије. Употребом ове методе под називом [АКМ](#) смањена је деформација бетонске љуске за 50%, вон Мисовог напона за 25%, и тежину за 4.5%. Коришћена је Бокс-Вилсонова метода мултифункционалне оптимизације, први пут у архитектури као део [РП4](#). Четири групе попречног пресека ивица модула и промењива дебљина испуне класификоване су према оптерећењу за ефикасну употребу материјала. Развијеним приступом поделе ивице модула на различите групе попречних пресека омогућава се употреба комбинације варијације како ивице, тако и испуне модула, што доводи до додатне уштеде материјала.

Друга студија случаја: Дизајн минималне површи је имплементиран уз АКМ, редефинишући љуску за префабрикацију планарних елемената без геометријске торзије. [Галапагос](#) алгоритам је коришћен за оптимизацију конструктивних карактеристика. Константан попречни пресек ивица је знатно мањи од уобичајне препоруке, где је

оптимизација дебљине испуне осигурала додатну конструктивну ефикасност. Просечна дебљина љуске је 3cm, са распонима од 15.8m, 14.4m и 18.0m, висином од 9.3m и минималном висином у средишту од 5m.

Трећа студија случаја: Истражена је оптимизација мрежа Дупинових циклуда помоћу еволутивног алгоритма у додатку за ГХ под називом [Октопус](#). Комбинована метода пре-рационализације је први пут коришћена за конструктивну евалуацију ове класе површи. Конфигурација модула омогућава минималну употребу оплате и фазну монтажу. Евалуација је показала ефикасност система у погледу употребе материјала на основу анализираних примера као и препорука за мрежне бетонске љуске за љуску распона 98x37m, висине 20m и дебљине 4.5 cm.

Након резимеа приказаног доприноса и резултата, требало би сагледати ограничења развијених метода и алата.

5.2 Ограничења

Запажена су следећа ограничења развијених метода:

АКМ: Није погодан за површи са сложеним системом закрпа, посебно оне са три или четири дефинисане криве у средишту површи. Исто тако, требало би водити рачуна о дефиницији границе (обода) конструкције тако да нема већих засецања добијених закрпа (студија случаја 2).

Дискретна верзија Монжове површи (случај 2): Алгоритам зависи од броја поделе почетних кривих. Ако је број подела мали (нпр. $n, m = 5$) за сложене криве, алгоритам вероватно неће дати равне панеле.

Каналне и Монжове површи: Потребно је пазити на однос почетних кривих/кружница, како би се избегло пресецање профилне криве саме са собом дуж просторне.

Коенигсове мреже: Захтевају развијање интуиције јер је добијена геометрија у великој мери контролисана аналитичком методом конструисања. Улазни параметри нису геометријског типа, већ се мреже трансформишу мењањем величина улазних параметара (слајдерима у Грасхоперу).

Ипак све ове методе имају потенцијала за даљу примену која је разматрана у наставку.

5.3 Будући правци

За процес проналаска најбоље варијанте глобалне форме могуће је тестирати и друге методе мултифункционалне оптимизације или чак машинског учења у циљу предвиђања статички повољног дизајна. Иако је овде дотакнут концепт монтаже са минималном употребом скеле, будућа истраживања би се могла бавити анализом осталих класа површи, као и развијањем композиција дизајна које омогућавају такву имплементацију. Такође, могуће је разматрати другачије типове модула љуске који подразумевају различите врсте многоуглова, као и просторне вишеслојне модуларне системе двоструко закривљених љуски. Иако је истражено више могућности за конструкцију Коенигсових мрежа, у будућем истраживању се може проширити аспект избора холоморфних функција, уврстити квадрике, као и површи са константном средњом кривином. Ради њихове адекватне примене у пројектовању конструкција, потребно је детаљније изучити и класификовати форме приказаних мрежа у овом раду.

5.4 Теоријски и практични значај

Развијени алати помажу у увиђању бенефита и омогућавају интуитивну имплементацију префабриковано-оријентисаног дизајна. Они едукују пројектанте о различитим геометријским површима које би, иначе, биле недоступне и неатрактивне за употребу. Као засебне компоненте, ови алати омогућавају лаку интеграцију са другим истраживањима, што је кључно за прихватање нових компонената и наставак рада. Иако нису универзална решења, могу се модификовати према пројекту и различитим условима производње.

Практични значај тезе је у развоју алата за параметријско моделовање модуларних конструктивних система. Алгоритми су написани у Грасхоперу (ГХ) као комбинација доступних компоненти и скрипти писаних у Пајтону и ГХ Пајтон Ремоут (GH Python Remote). Сваки алат је представљен као обједињена компонента у ГХ. За њихово коришћење потребно је инсталирати библиотеке попут *Numpy*, *Scipy* и *SymPy* у оквиру ГХ *Python Remote*. Алати се могу применити једноставним копирањем компоненте у *User/ Object/ Folder*. Компоненте су доступне у ГХ под картицом *User*.

У наредном делу настављамо са дискусијом на основу добијених резултата.

5.5 Дискусија

Развијене методе имплицирају ширу примену која овде није детаљно истраживана. Наиме, како је већина алгоритама развијена на бази конструктивне геометрије, могуће је интегрисати толеранције посматране производње где се у ПК мрежи јавља максимална закривљеност панела у функцији толеранција материјала. Иако је у овом раду примарно посматрана технологија префабрикације АЦДЦ пројекта, важно је поменути и процесе префабрикације за које важе слични ограничавајући улазни параметри.

То значи да поменути процеси префабрикације у уводним поглављима, као што су префабрикација модула коришћењем флексибилне оплате, затим производња ЦНЦ-млевањем или роботским сечењем загреваном жицом, коришћење стиропора за префабрикацију калупа модула или било која вишенаменска оплата би могла бити примењена. Сви ови приступи префабрикације би могли бити узети у обзир, са модификацијом улазних параметара производње током процеса дизајна и сегментације. Разлог за то је принцип *скалабилности* и *адаптабилности*, чији је домен, у овом случају, мањи и ограничава геометрију модула на том нивоу. Уколико се користи било који од поменутих типова оплате или процеса роботским сечењем, бенефити су велики, имајући у виду једноставност геометрије модула. На пример, геометријски услови, као што су планарност модула и странице модула без геометријске торзије, омогућавају веома једноставну изградњу оплате, као и поједностављење осталих наведених процеса префабрикације. Међутим, параметри које би увек требало анализирати су: цена материјала, тип технологије и процеса, брзина и прецизност префабрикације и количина отпада.

У првој студији случаја се користи приступ оригиналне хибридне стратегије, почевши од почетног дизајна лјуске помоћу АКМ. Иста методологија се може применити за истраживање нових форми у виду пре-рационализације. То значи да се у фази оптимизације методом Бокса-Вилсона не мора користити излазни параметар форме, а домен улазних геометријских параметра се може повећати у складу са жељама дизајна. Чак и ако правци главних кривина и напона нису блиски, оптимизација би и даље помогла у проналажењу најбољих варијанти форме, тражењем оптималне комбинације параметара за ефикаснију конструкцију користећи предложену методологију параметризације за било које задате криве.

Алгоритам Монжове површи за тип 1 (а, б, ц) омогућава планарне панеле без торзије, док тип 2 зависи од задате поделе и величине офсета. Овај алгоритам брзо решава сложене криве, омогућавајући проналажење адекватних решења у складу са толеранцијама производње.

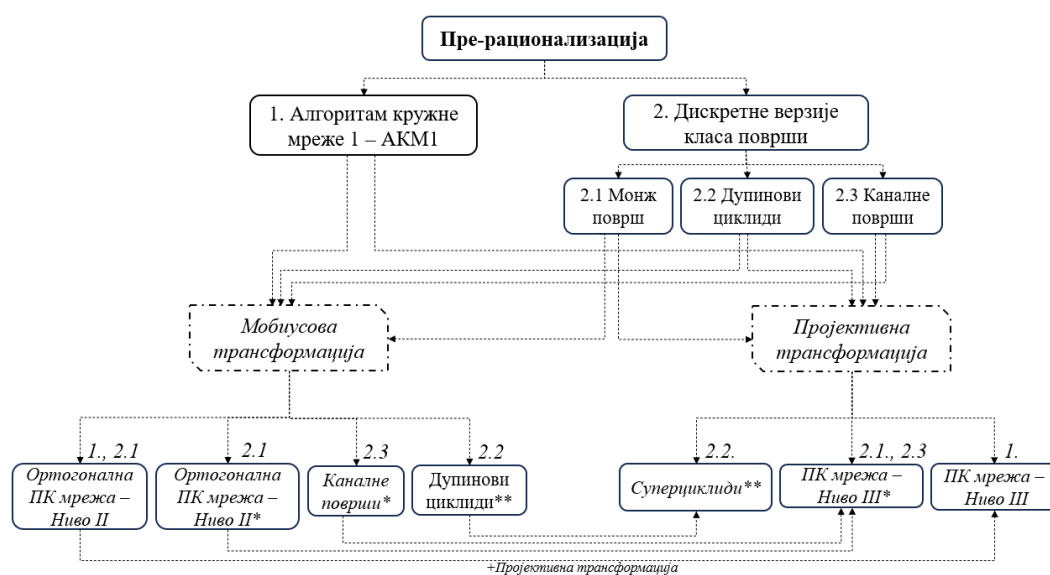
У трећој студији случаја кружнице Дупинових циклида дозвољавају могућност монтаже модула једног реда на равној подлози, где се они касније могу уграђивати из већих целина. Још једна предност правилне геометрије кружница је та да би могла да олакшана проверу тачности форме током процеса извођења радова. Ово својство би требало испитати и код других класа површи са бар једним правцем кривина у равни, као што су Монжова и Каналне површи.

Са друге стране, у случају предефинисане класе површи, као што је у овом случају код Дупинових циклида, би требало имати на уму да се могу јавити локални скокови напона на местима веће закривљености геометрије. Ови делови се не могу избећи, како је сама конфигурација класе површи предефинисана (пре-рационализација). На тим местима би требало предвидети веће попречне пресеке модула и, уколико је неопходно, проверити додатно љуску по теорији другог реда у случају већих деформација. Такође, у процесу пре-рационализације, јасно је да ће приликом оптимизације глобална геометрија тежити једноставнијим конфигурацијама површи, нпр. у случају Дупинових циклида тежила је форми сличној сфери. Међутим, овај проблем је могуће решити ограничавањем улазних параметара форме у конфигурације које одговарају архитектонским потребама пројекта. У трећој студији случаја је то успешно решено ограниченим пропорцијама два правца распона.

Резултати алгоритама из РП2.2 упућују на велики потенцијал њихове примене и комбинације за префабриковано-оријентисани дизајн конструктивног система модуларних љуски. Како је уведена примена Мебијусове и Пројективне трансформације (МТ и ПТ) за формирање различитих могућности просторних конфигурација (поглавље 3.2.5), овде се сагледава могућност њихове комбинације са геометријским методама мрежа из других поглавља.

Праћењем једноставних геометријских правила развијене методе, и алати из различитих поглавља се могу користити у комбинацији. Ова могућност повећава слободу дизајна и решења у оквиру контролисане локалне геометрије елемента. Наиме, иако је категоризација извршена у поглављима на различитим местима, требало би

нагласити да има смисла комбиновати одређене методе које припадају различитим геометријским решењима. На слици (Слика 5-1) су приказане претходно развијене геометријске методе у комбинацији са две представљене трансформације након чега би решења могла да се добију применом једне, друге или обе. Осим већ назначених имена, решења са једном звездом означавају да мрежа има један правац кривих у равни, док две звезде означавају оба правца кривих у равни. На пример, када је у питању оригинални АКМ који за резултат даје кружну мрежу као и њени Гаусову слику, могуће је применити компоненту Мебијусове трансформације и тиме повећати поље деловања дизајна. У том случају се конструише, такође, ортогонална ПК мрежа без геометријске торзије, већ дефинисана као ниво II (Слика 5-1).



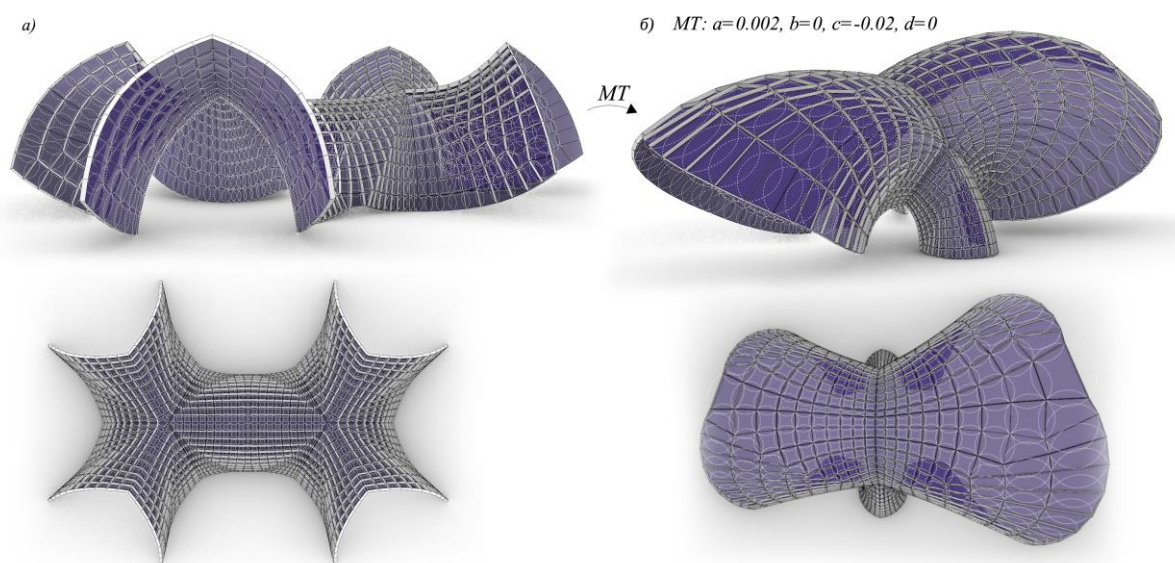
Слика 5-1. Шема комбинације осталих развијених метода и алгорита са Мебијусовом и Пројективном трансформацијом, где се формирају дефинисани нивои мрежа у зависности од геометријских критеријума

Требало би нагласити да је разлика у односу на ниво II у претходном поглављу што ове мреже немају додатно својство изотермичких или Коенигсових. Затим, уколико се не фокусирамо на ортогоналност правца, може се искористити пројективна трансформација за даље истраживање форме где се спуштамо на ниво III. Иста правила важе и за дискретну верзију Монжове површи, Дупинових циклида и Каналних површи. Прва класа применом МТ има два могућа решења. Прво је, уколико је профилна крива кружница, тада се конструише ниво II*¹⁵. У супротном, мрежа нема планарне криве, али остале карактеристике важе. Примена ПТ на Монжову површ ће дати ниво III*. Требало

¹⁵ Једна звезда означава да мрежа има један систем кривих као кружнице, а две да су оба таква.

би обратити пажњу да, уколико се примењује МТ на циклиде и каналне површи, кружнице ће остати у равни као и да се класа површи не мења, тј. конструишу се опет циклиди и каналне површи, само друге варијанте. Уколико, се примене ПТ на циклиде, конструише се класа суперциклида који имају за главне правце кривих елипсе, тако да се убрајају у подкласу нивоа III^{**}. Каналне површи применом ПТ су нивоа III^{*} са елипсама у једном правцу. У шеми се може видети јасно шта се дешава уколико се након примене МТ додатно експериментише са ПТ. У том случају, свака од мрежа се спушта са нивоа II на ниво III, тј. губи ортогоналност, док се планарност кривих задржава.

Такође, трансформација не мора бити на нивоу једне површи, већ се цео систем љуске као целина са више јединица може трансформисати. У том случају се могу трансформисати у ново решење објекта где су главне геометријске карактеристике површи задржане (Слика 5-2). Из тог разлога су алати трансформација и развијених алгоритама за ГХ направљени као засебне компоненте па се могу се комбиновати и користити заједно за конструисање наведених варијанти, где је поље дизајна веће.



Слика 5-2. а) Пример сложеног дизајна ПК кружне мреже добијеног АКМ са основом; б) Имплементација МТ како би се задржао ниво II

5.6 Закључак

На основу свега приказаног, могу се извући следећи закључци:

Прва студија случаја показала је да развијени АКМ у облику хибридног приступа омогућава конструкцију модуларне љуске чији модули задовољавају услове префабрикације. За разлику од анализираних метода пост-рационализације, овај приступ задржава контролу локалне геометрије модула, задовољавајући услове скалабилности и адаптабилности. Ова метода, такође, даје повољнију конфигурацију поделе са оптимизованим конструктивним параметрима бетонске љуске у поређењу са традиционалним методама.

У другој студији случаја, иста АКМ методологија у хибридном приступу показује могућност конструкције модуларне верзије минималних површи. Коначна конструкција представља самонесећу модуларну бетонску љуску са веома малом количином материјала. Прорачун је показао да су услови испуњени и током монтаже елемената. Главни услови префабрикације су испуњени, а модули су у равни са одсуством геометријске торзије. Међутим, потребно је обратити пажњу на формирање геометрије ивица љуске, како би се избегли троугаони модули.

Прве две студије случаја показале су да *хибридни приступ* омогућава адекватну дефиницију мреже на задатој форми љуске решавањем проблема планарности и геометријске торзије. Формирањем оваквог приступа је загарантована контрола локалне геометрије модула, за разлику од приказаних метода пост-рационализације које не могу увек дати повољно решење. Метода коришћења главних праваца кривина за конструкцију закрпа помоћу АКМ даје сличну форму задатој. Овај успех оправдава увођење и успешност хибридног приступа.

Трећа студија случаја показала је да дизајн конструктивних система, базиран на Дупиновим циклидима, има вишеструке предности. Алгоритам омогућава више конфигурација форми и испитивање геометрије на бази архитектонских захтева. Такође, алгоритам омогућава интерактивно подешавање пропорција модула, задовољавајући услове скалабилности и адаптабилности. При промени конфигурације љуске, алгоритам задовољава услов планарности модула са одсуством геометријске торзије. Конструктивна евалуација показује повољне карактеристике за веће распоне до око 100m, са веома малом количином материјала. Додатни статички прорачун показује да се

модули могу ређати на тлу и затим монтирати у фазама без прекорачења деформација и напона. Ова конфигурација омогућава значајну уштеду у оплати и скели током монтаже. На основу овог закључка, требало би испитати ова својства осталих класа мрежа са бар једним правцем кривина у равни. За то би се могли користити развијени алгоритми Монжове и Каналних површи из овог рада.

Закључује се да имплементација дефинисаних класа површи у пројектовању бетонских љуски показује вишеструке конструктивне бенефите поред познатих геометријских. Оригинална примена *пре-рационализације* у оквиру *комбиноване методе* је оправдана и потврђује постављену хипотезу. Пре-рационализација се не би требало изоловати као искључиво геометријски приступ, већ би, у будућим истраживањима, требало имплементирати и евалуирати остале класе мрежа на конкретним пројектима.

Све три студије случаја показују ефикасност у употреби материјала за изградњу љуске у поређењу са анализираним примерима и стандардним препорукама за пројектовање мрежних бетонских љуски. Овај резултат је постигнут повољном прерасподелом напона приликом употребе развијених алгоритама за генерисање дефинисаних конфигурација модула (АКМ), употребом конструктивно ефикасних класа површи (минималне површи и Дупинови циклиди), као и развијеним приступом истовремене оптимизације попречног пресека ивица и испуне модула. Имплементацију последњег омогућава 3Д штампа са поделом модула на ивичну и зону испуне.

На основу имплементације развијених алгоритама за генерисање различитих мрежа из РП2.2, може се закључити да сва решења дају мрежне љуске равних панела без геометријске торзије и тиме гарантују локалну контролу геометрије модула. Успешан циљ *скалабилности* и *адаптабилности* је задовољен, како је омогућено експериментисање пропорцијама модула због заснованости алгоритма на почетној подели кривих или задатог домена. Затим, како су алгоритми засновани на конструктивном и аналитичком моделовању, резултујућа мрежа се добија у реалном времену, што омогућава ефикаснији процес дизајна. Ово разликује формиран геометријски приступ, приказан у овом раду, од осталих анализираних.

Може се закључити да показана имплементација АКМ на просторним кривама које дају већу слободу у дизајну, се издваја од сличних алгоритама који користе криве у равни. Исто тако, алгоритми Монжове површи показују већу слободу у дизајну и експериментисању, као и више могућности офсета у односу на постојеће методе.

Значајан допринос је постигнут у проширењу конструкција Коенигсових мрежа и новог начина уврставања трансформација у процес дизајна. Изотермичке мреже, као посебна класа површи, први пут су коришћене у контексту дизајна и тиме показале могућност нових форми кроз трансформације са различитим улазним параметрима.

На основу претходног потпоглавља (дискусије) се може увидети потенцијал различитог комбиновања развијених метода и алата у процесу пројектовања модуларних љуски. Заједно са формираним алатима и методама из РП2.2, омогућавају имплементацију пре-рационализације као део комбиноване методе, као што је то показано у трећој студији случаја.

Сагледавањем свих приказаних доприноса и резултата, може се закључити да су сви дефинисани [потциљеви](#) истраживања испуњени, као и да је хипотеза потврђена. *Интеграција напредних геометријских метода и префабриковано-оријентисаних стратегија пројектовања у префабрикацију модуларних бетонских љуски доводи до значајних побољшања у ефикасности конструкције и оптимизације материјала.* Допринос и резултати показани у овом раду омогућавају интеграцију нових метода које повећавају контролу геометрије на локалном нивоу модула и посматрани систем префабрикације. Поред тога, оне пружају шире и слободније приступе дизајну префабрикованих модуларних бетонских љуски за пројектанте.

6 ЛИТЕРАТУРА

- Abbena, E., Salamon, S., & Gray, A. (2017). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Third Edition*. Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315276038>
- Abdelmagid, A., Elshafei, A., Mansouri, M., & Hussein, A. (2022). A Design Model for a (Grid)shell Based on a Triply Orthogonal System of Surfaces. *Design Modelling Symposium Berlin*, 46–60.
- Abdelmagid, A., Tošić, Z., Mirani, A., Hussein, A., & Elshafei, A. (2023). Design Model for Block-Based Structures from Triply Orthogonal Systems of Surfaces. In *Advances in Architectural Geometry 2023* (pp. 165–176). De Gruyter. <https://doi.org/10.1515/9783111162683-013>
- Adriaenssens, S., Block, P., Veenendaal, D., & Williams, C. (2014). *Shell Structures for Architecture*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315849270>
- Ahlfors, L. S. (1979). *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable* (3rd ed.). McGraw-Hill Education.
- Allen, E., & Zelewski, W. (2009). *Form and Forces: Designing Efficient, Expressive Structures* (1st ed.). John Wiley and Sons.
- Austern, G., Capeluto, I. G., & Grobman, Y. J. (2018). Rationalization methods in computer aided fabrication: A critical review. *Automation in Construction*, 90, 281–293. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2017.12.027>

- Azhar, S. (2011). Building Information Modeling (BIM): Trends, Benefits, Risks, and Challenges for the AEC Industry. *Leadership and Management in Engineering*, 11(3), 241–252. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)LM.1943-5630.0000127](https://doi.org/10.1061/(ASCE)LM.1943-5630.0000127)
- Baan, I., Crow, H., & Binet, H. (2013, November 14). *Heydar Aliyev Center / Zaha Hadid Architects*. <<https://www.archdaily.com/448774/heydar-aliyev-center-zaha-hadid-architects>> ISSN 0719-8884
- Baldwin, C. Y., & Clark, K. B. (2000). *Design Rules*. The MIT Press. <https://doi.org/10.7551/mitpress/2366.001.0001>
- Battaglia, C. A., Miller, M., & Verian, K. (2020, October). DE:Stress Pavilion - Print-Cast Concrete for the Fabrication of Thin Shell Architecture. *ACADIA 2020*.
- Beghini, A., Miki, M., Walker, S., Han, I. X., Adriaenssens, S., & Parascho, S. (2020). Robotic construction of a self-balancing glass masonry vault: design and tessellation. *Proceedings of IASS Annual Symposia, IASS 2020/21 Surrey Symposium: Advanced Manufacturing Techniques*, 1–8.
- Bell, B., Read, T. C., Ede, A., & Barnes, N. (2014). *Casting non-repetitive Geometries with Digitally Reconfigurable Surfaces*. 453–462. <https://doi.org/10.52842/conf.acadia.2014.453>
- Bender, E. A., & Goldman, J. R. (1975). On the Applications of Mobius Inversion in Combinatorial Analysis. *The American Mathematical Monthly*, 82(8), 789. <https://doi.org/10.2307/2319793>
- Bezerra, M. A., Santelli, R. E., Oliveira, E. P., Villar, L. S., & Escalera, L. A. (2008). Response surface methodology (RSM) as a tool for optimization in analytical chemistry. *Talanta*, 76(5), 965–977. <https://doi.org/10.1016/j.talanta.2008.05.019>
- Bhooshan, S., Bhooshan, V., Dell’Endice, A., Chu, J., Singer, P., Megens, J., Van Mele, T., & Block, P. (2022). The Striatum bridge. *Architecture, Structures and Construction*, 2(4), 521–543. <https://doi.org/10.1007/s44150-022-00051-y>
- Block, P., & Ochsendorf, J. (2007). Thrust network analysis: A new methodology for three-dimensional equilibrium. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 48(155).
- Block Research Group, Zaha Hadid Architects (ZHACODE), incremental3D(in3D), & Holcim. (2022, April 1). *Striatum 3D concrete printed masonry bridge*. <https://www.Striatumbridge.Com/>.

- Bobenko, A. I. (2008). Surfaces from Circles. In *Discrete Differential Geometry* (Vol. 38, pp. 3–35). Birkhäuser, Basel.
- Bobenko, A. I., Hoffmann, T., & Springborn, B. A. (2006). Minimal surfaces from circle patterns: Geometry from combinatorics. *Annals of Mathematics*, 164(1), 231–264.
- Bobenko, A. I., & Suris, Y. B. (2009). Discrete Koenigs Nets and Discrete Isothermic Surfaces. *International Mathematics Research Notices*. <https://doi.org/10.1093/imrn/rnp008>
- Bobenko, A., & Pinkall, U. (1996). Discrete isothermic surfaces. *Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1996(475), 187–208. <https://doi.org/10.1515/crll.1996.475.187>
- Bobenko, A., & Suris, Y. (2008). *Discrete Differential Geometry* (Vol. 98). American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/gsm/098>
- Borg Costanzi, C., Ahmed, Z. Y., Schipper, H. R., Bos, F. P., Knaack, U., & Wolfs, R. J. M. (2018). 3D Printing Concrete on temporary surfaces: The design and fabrication of a concrete shell structure. *Automation in Construction*, 94, 395–404. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2018.06.013>
- Bouaziz, S., Deuss, M., Schwartzburg, Y., Weise, T., & Pauly, M. (2012). Shape-Up: Shaping Discrete Geometry with Projections. *Computer Graphics Forum*, 31(5), 1657–1667. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2012.03171.x>
- Bruun, E. P. G., Pastrana, R., Paris, V., Beghini, A., Pizzigoni, A., Parascho, S., & Adriaenssens, S. (2021). Three cooperative robotic fabrication methods for the scaffold-free construction of a masonry arch. *Automation in Construction*, 129, 103803. <https://doi.org/10.1016/J.AUTCON.2021.103803>
- Cao, J., Bucher, D. F., Hall, D. M., & Lessing, J. (2021). Cross-phase product configurator for modular buildings using kit-of-parts. *Automation in Construction*, 123, 103437. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2020.103437>
- Cassinello, P., Schlaich, M., & Torroja, J. A. (2010). Félix Candela. En memoria (1910-1997). Del cascarón de hormigón a las estructuras ligeras del s. XXI. *Informes de La Construcción*, 62(519), 5–26. <https://doi.org/10.3989/ic.10.040>

- Catmull, E., & Clark, J. (1978). Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-Aided Design*, 10(6), 350–355. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(78\)90110-0](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90110-0)
- Chandru, V., Dutta, D., & Hoffmann, C. M. (1989). On the geometry of Dupin cyclides. *The Visual Computer*, 5(5), 277–290. <https://doi.org/10.1007/BF01914786>
- Collins, M., & Cosgrove, T. (2019). Dynamic relaxation modelling of braced bending active gridshells with rectangular sections. *Engineering Structures*, 187, 16–24. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.02.001>
- DANIELI, M. (2017). *CONSTRUCTION OF PRECAST CONCRETE SHELLS IN GEORGIA*. 97–108. <https://doi.org/10.2495/ERES170091>
- Darboux, G. (1887). *Lecons sur la th´eorie g´en´erale des surfaces: Vol. I*. Gauthier-Villars.
- Deng, B., Bouaziz, S., Deuss, M., Kaspar, A., Schwartzburg, Y., & Pauly, M. (2015). Interactive design exploration for constrained meshes. *Computer-Aided Design*, 61, 13–23. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2014.01.004>
- Deuss, M., Panozzo, D., Whiting, E., Liu, Y., Block, P., Sorkine-Hornung, O., & Pauly, M. (2014). Assembling self-supporting structures. *ACM Transactions on Graphics*, 33(6), 1–10. <https://doi.org/10.1145/2661229.2661266>
- Diaconu, R., & Brindasu, D. P. (2015). Optimum Solution for Sliding Formwork Equipment. *Applied Mechanics and Materials*, 808, 298–306. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.808.298>
- Dimčić, M. (2011). *Structural optimization of grid shells based on genetic algorithms*. University of Stuttgart.
- Douthe, C., Mesnil, R., Orts, H., & Baverel, O. (2017a). Isoradial meshes: Covering elastic gridshells with planar facets. *Automation in Construction*, 83, 222–236. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2017.08.015>
- Douthe, C., Mesnil, R., Orts, H., & Baverel, O. (2017b). Isoradial meshes: Covering elastic gridshells with planar facets. *Automation in Construction*, 83, 222–236. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2017.08.015>
- Eisenhart, L. P. (1909). *A Treatise On The Differential Geometry Of Curves And Surfaces*. Kessinger Publishing.

- Enrique, L., Cepaitis, P., Ordoñez, D., & Piles, C. (2016). CASTonCAST: Architectural freeform shapes from precast stackable components. *VLC Architectura. Research Journal*, 3(1), 85. <https://doi.org/10.4995/vlc.2016.4291>
- Farnsworth, D. B. Jr. (1999). *Behavior of Shell Structures*. Massachusetts Institute of Technology.
- Farshad, M. (1992). *Design and Analysis of Shell Structures* (Vol. 16). Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-1227-9>
- Gerhard, D., Wolf, M., Huxoll, J., & Vogt, O. (2020). *Digital Twin Representations of Concrete Modules in an Interdisciplinary Context of Construction and Manufacturing Industry* (pp. 101–115). https://doi.org/10.1007/978-3-030-62807-9_9
- Grangel-Gonzalez, I., Halilaj, L., Coskun, G., Auer, S., Collarana, D., & Hoffmeister, M. (2016). Towards a Semantic Administrative Shell for Industry 4.0 Components. *2016 IEEE Tenth International Conference on Semantic Computing (ICSC)*, 230–237. <https://doi.org/10.1109/ICSC.2016.58>
- Hajdin, N. (1984). *Teorija površinskih nosača* (3. Ljuske). Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Harding, J. (2015). *Meta-Parametric Design: Developing a Computational Approach for Early Stage Collaborative Practice*. University of Bath.
- Hartmann, E. (2003). *Geometry and Algorithms for COMPUTER AIDED DESIGN*. Department of Mathematics, Darmstadt University of Technology.
- Henriksson, V., & Hult, M. (2015). *Rationalizing freeform architecture Surface discretization and multi-objective optimization*. CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY.
- Hickert, S., & Knaack, U. (2016). Evaluation of free-form concrete architecture, moulding systems and their technical potentials. *Journal of Facade Design and Engineering*, 3(3–4), 273–288. <https://doi.org/10.3233/FDE-160045>
- Huang, B., Gao, X., Xu, X., Song, J., Geng, Y., Sarkis, J., Fishman, T., Kua, H., & Nakatani, J. (2020). A Life Cycle Thinking Framework to Mitigate the Environmental Impact of Building Materials. *One Earth*, 3(5), 564–573. <https://doi.org/10.1016/j.oneear.2020.10.010>
- Huijben, F. (2016). Vacuumatic formwork: a novel granular manufacturing technique for producing topology-optimised structures in concrete. *Granular Matter*, 18(2), 23. <https://doi.org/10.1007/s10035-015-0602-0>

- Isaacs, R. R. (1991). *Gropius : an illustrated biography of the creator of the Bauhaus* (1st ed.). Bulfinch Press, U.S.
- Ivaniuk, E., Friedrich Eichenauer, M., Tošić, Z., Müller, S., Lordick, D., & Mechtcherine, V. (2022). 3D printing and assembling of frame modules using printable strain-hardening cement-based composites (SHCC). *Materials & Design*, 219, 110757. <https://doi.org/10.1016/J.MATDES.2022.110757>
- Ivaniuk, E., Ivanova, I., Sokolov, D., Tošić, Z., Eichenauer, M. F., Lordick, D., & Mechtcherine, V. (2022). Application-Driven Material Design of Printable Strain Hardening Cementitious Composites (SHCC). *Materials*, 15(5), 1631. <https://doi.org/10.3390/ma15051631>
- Ivaniuk, E., Tošić, Z., Müller, S., Lordick, D., & Mechtcherine, V. (2024). Automated manufacturing of reinforced modules of segmented shells based on 3D printing with strain-hardening cementitious composites. *Automation in Construction*, 166, 105591. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2024.105591>
- Jiang, C., Wang, C., Rist, F., Wallner, J., & Pottmann, H. (2020). Quad-mesh based isometric mappings and developable surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 39(4). <https://doi.org/10.1145/3386569.3392430>
- Jones, P. (2006). *Ove Arup: Masterbuilder of the Twentieth Century*. Yale University Press, New Haven. <https://doi.org/10.1111/j.1540-594X.2008.00290.8.x>
- Kerr, J. S., NSW Public Works, & Sydney Opera House Trust. (1993). *Sydney Opera House : an interim plan for the conservation of the Sydney Opera House and its site*. Sydney Opera House Trust.
- Khuri, A. I., & Mukhopadhyay, S. (2010). Response surface methodology. *WIREs Computational Statistics*, 2(2), 128–149. <https://doi.org/10.1002/wics.73>
- Kilian M., Pellis Daniel, Wallner J., & Pottmann Helmund. (2017). Material-minimizing forms and structures. *Proc. SIGGRAPH Asia*, 1–12.
- Kovaleva, D., Nistler, M., Verl, A., Blandini, L., & Sobek, W. (2022). *Zero-Waste Production of Lightweight Concrete Structures with Water-Soluble Sand Formwork* (pp. 3–8). https://doi.org/10.1007/978-3-031-06116-5_1
- Krivoshapko, S., & Mamieva, I. (2014). Chronology of erection of the earliest reinforced concrete shells. *IJRRAS*, 12(2), 95–108.

- Kromoser, B., & Huber, P. (2016). Pneumatic Formwork Systems in Structural Engineering. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2016, 1–13. <https://doi.org/10.1155/2016/4724036>
- Le Corbusier. (1986). *Towards a new architecture*. Dover Publications, Inc.
- Li, V. C., Bos, F. P., Yu, K., McGee, W., Ng, T. Y., Figueiredo, S. C., Nefs, K., Mechtcherine, V., Nerella, V. N., Pan, J., van Zijl, G. P. A. G., & Kruger, P. J. (2020). On the emergence of 3D printable Engineered, Strain Hardening Cementitious Composites (ECC/SHCC). *Cement and Concrete Research*, 132, 106038. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2020.106038>
- Li, W., Lin, X., Bao, D. W., & Min Xie, Y. (2022). A review of formwork systems for modern concrete construction. *Structures*, 38, 52–63. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.01.089>
- Li, X., Mohammed, Abdelmagid, A., & Elshafei, A. (2024). Minimal surfaces for architectural design. *International Association for Shell Structures*.
- Lieboldt, M., & Mechtcherine, V. (2013). Capillary transport of water through textile-reinforced concrete applied in repairing and/or strengthening cracked RC structures. *Cement and Concrete Research*, 52, 53–62. <https://doi.org/10.1016/j.cemconres.2013.05.012>
- Lim, J. H., Weng, Y., & Pham, Q.-C. (2020). 3D printing of curved concrete surfaces using Adaptable Membrane Formwork. *Construction and Building Materials*, 232, 117075. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.117075>
- Lim, S., Buswell, R. A., Valentine, P. J., Piker, D., Austin, S. A., & De Kestelier, X. (2016). Modelling curved-layered printing paths for fabricating large-scale construction components. *Additive Manufacturing*, 12, 216–230. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2016.06.004>
- Lindemann, U., & Maurer, M. (n.d.). Entwicklung und Strukturplanung individualisierter Produkte. In *Individualisierte Produkte — Komplexität beherrschen in Entwicklung und Produktion* (pp. 41–62). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/3-540-34274-5_4
- Liu, Y. (2008). *Optimization and Differential Geometry for Geometric Modeling*. University of Hong Kong.
- Liu, Y., Pottmann, H., Wallner, J., Yang, Y.-L., & Wang, W. (2006). Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 25(3), 681–689. <https://doi.org/10.1145/1141911.1141941>
- Lobel, A. (1993). *Shapes and structures generated by identical elements*. Bourg-la-Reine.

- Maier, P. L., & Durham, S. A. (2012). Beneficial use of recycled materials in concrete mixtures. *Construction and Building Materials*, 29, 428–437. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2011.10.024>
- Mark, P., Lanza, G., Lordick, D., Albers, A., König, M., Borrmann, A., Stempniewski, L., Forman, P., Frey, A. M., Renz, R., & Manny, A. (2021a). Vom Handwerk zur individualisierten Serienfertigung. *Bautechnik*, 98(3), 243–256. <https://doi.org/10.1002/bate.202000110>
- Mark, P., Lanza, G., Lordick, D., Albers, A., König, M., Borrmann, A., Stempniewski, L., Forman, P., Frey, A. M., Renz, R., & Manny, A. (2021b). Vom Handwerk zur individualisierten Serienfertigung. *Bautechnik*, 98(3), 243–256. <https://doi.org/10.1002/bate.202000110>
- Mechtcherine, V., Michel, A., Liebscher, M., Schneider, K., & Großmann, C. (2020). Mineral-impregnated carbon fiber composites as novel reinforcement for concrete construction: Material and automation perspectives. *Automation in Construction*, 110, 103002. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2019.103002>
- Mesnil, R. (2017). *Structural explorations of fabrication-aware design spaces for non-standard architecture*. UNIVERSITE PARIS-EST.
- Mesnil, R., Douthe, C., Baverel, O., & Léger, B. (2018). Morphogenesis of surfaces with planar lines of curvature and application to architectural design. *Automation in Construction*, 95, 129–141. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2018.08.007>
- Mesnil, R., Santerre, Y., Douthe, C., Baverel, O., & Leger, B. (2015, August). Generating high node congruence in freeform structures with Monge’s Surfaces . *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS)*.
- Mitchell, W., Liggett, R. S., & Tan, M. (1988). *The Topdown System and its use in Teaching - An Exploration of Structured, Knowledge-Based Design*. 251–262. <https://doi.org/10.52842/conf.acadia.1988.251>
- Monge, G. (1850). *Application de l’analyse a la g’eom’etrie* (5th ed.). Bachelier.
- Montagne, N., Douthe, C., Tellier, X., Fivet, C., & Baverel, O. (2021, August). Voss surfaces: A design space for geodesic gridshells. *Symposium of the International Association for Shell and Spatial Structures*.
- Motro, R., & Maurin, B. (2011). *Bernard Laffaille, Nicolas Esquillan, Two French Pioneers*. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:15207815>

- Needham, T. (1997). *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press Inc., New York.
- Nikolic, D., Jaruhar, S., & Messner, J. I. (2009). An Educational Simulation in Construction: The Virtual Construction Simulator. *Computing in Civil Engineering (2009)*, 633–642. [https://doi.org/10.1061/41052\(346\)63](https://doi.org/10.1061/41052(346)63)
- Oesterle S., Vansteenkiste A., & Mirijan A. (2010). Zero Waste Free-Form Formwork. *2nd International Conference on Flexible Formwork*, 258–267.
- Ogura, H., Nerella, V., & Mechtcherine, V. (2018). Developing and Testing of Strain-Hardening Cement-Based Composites (SHCC) in the Context of 3D-Printing. *Materials*, 11(8), 1375. <https://doi.org/10.3390/ma11081375>
- Otto, F. (2015). *Finding Form 1925-2015: Jens Harzer spricht Frei Otto*. Cherbuliez Productions GbR. .
- Patel, V., & Shah, N. (2013). A Survey of High Performance Concrete Developments in Civil Engineering Field. *Open Journal of Civil Engineering*, 03(02), 69–79. <https://doi.org/10.4236/ojce.2013.32007>
- Pellis, D., Kilian, M., Pottmann, H., & Pauly, M. (2021). Computational design of weingarten surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 40(4), 1–11. <https://doi.org/10.1145/3450626.3459939>
- Pellis, D., Kilian, M., Wang, H., Jiang, C., Müller, C., & Pottmann, H. (2020). Architectural freeform surfaces designed for cost-effective paneling mold re-use. *Advances in Architectural Geometry*.
- Pellis, D., & Pottmann, H. (2018, September). Aligning principal stress and curvature directions. *Advances in Architectural Geometry*.
- PETERNELL, M., & POTTSMANN, H. (1997). Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, 23(2–3), 255–266. <https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0087>
- PETERS, S., TRUMMER, A., AMTSBERG, F., & PARMANN, G. (2017). PRECAST CONCRETE SHELLS: In *Fabricate 2017* (pp. 250–257). UCL Press. <https://doi.org/10.2307/j.ctt1n7qkg7.38>
- Piegl, L. (1989). Modifying the shape of rational B-splines. Part 1: curves. *Computer-Aided Design*, 21(8), 509–518. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(89\)90059-6](https://doi.org/10.1016/0010-4485(89)90059-6)

- Popescu, M., Rippmann, M., Liew, A., Reiter, L., Flatt, R. J., Van Mele, T., & Block, P. (2021). Structural design, digital fabrication and construction of the cable-net and knitted formwork of the KnitCandela concrete shell. *Structures*, 31, 1287–1299. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.02.013>
- Poranne, R., Ovreiu, E., & Gotsman, C. (2013). Interactive Planarization and Optimization of 3D Meshes. *Computer Graphics Forum*, 32(1), 152–163. <https://doi.org/10.1111/cgf.12005>
- Porter, L. (2013, October 24). Sydney Opera House: 40 fascinating facts. <https://www.telegraph.co.uk/travel/destinations/oceania/australia/new-south-wales/sydney/articles/Sydney-Opera-House-40-fascinating-facts/>
- Pottmann, H. (2013). Architectural Geometry and Fabrication-Aware Design. *Nexus Network Journal*, 15(2), 195–208. <https://doi.org/10.1007/s00004-013-0149-5>
- Pottmann, H., & Liu, Y. (2007). *Discrete Surfaces in Isotropic Geometry* (pp. 341–363). In: Martin, R., Sabin, M., Winkler, J. (eds) *Mathematics of Surfaces XII. Mathematics of Surfaces 2007. Lecture Notes in Computer Science*, vol 4647. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-73843-5_21
- Pottmann, H., Liu, Y., Wallner, J., Bobenko, A., & Wang, W. (2007). Geometry of multi-layer freeform structures for architecture. *ACM Transactions on Graphics*, 26(3), 65. <https://doi.org/10.1145/1276377.1276458>
- Pottmann, H., & Wallner, J. (2008). The focal geometry of circular and conical meshes. *Advances in Computational Mathematics*, 29(3), 249–268. <https://doi.org/10.1007/s10444-007-9045-4>
- Pottmann, H., Asperl, A., Hofer, M., & Kilian, A. (2007). *Architectural Geometry*. Bentley Institute Press.
- Radivojević, G., & Kostić, D. (2011). *Konstruktivni sistemi u arhitekturi I*. Građevinsko-arhitektonski fakultet, Univerziteta u Nišu.
- Rajak, D., Pagar, D., Menezes, P., & Linul, E. (2019). Fiber-Reinforced Polymer Composites: Manufacturing, Properties, and Applications. *Polymers*, 11(10), 1667. <https://doi.org/10.3390/polym11101667>
- Raun, C., Kristensen, M.K., & Kirkegaard, P.H. (2010). Flexible Mould for Precast Concrete Elements. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium*, 36–51.

- Rogers, C., & Schief, W. K. (2003). On the equilibrium of shell membranes under normal loading. Hidden integrability. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2038), 2449–2462. <https://doi.org/10.1098/rspa.2003.1135>
- Rutten, D. (2007). *Galapagos on the logic and limitations of genetic solvers*. Parametric House: Architecture, Art & Design. <https://Parametrichouse.Com/Galapagos1/>.
- Schek, H.-J. (1974). The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(1), 115–134. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(74\)90045-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(74)90045-0)
- Schiftner, A., & Balzer, J. (2010). Statics-Sensitive Layout of Planar Quadrilateral Meshes. In *Advances in Architectural Geometry 2010* (pp. 221–236). Springer Vienna. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-0309-8_16
- Schipper, R., Eigenraam, P., Grünwald, S., Soru, M., Nap, P., Overveld, B. Van, & Vermeulen, J. (2015). Kine-Mould: Manufacturing technology for curved architectural elements in concrete. *Proceedings of IASS Annual Symposia, IASS 2015 Amsterdam Symposium: Future Visions – Symposium on Flexible Formwork (ISOFF 2015)*, 1–11.
- Schlaich, J. (1940). Leichtbau – eine Forderung unserer Zeit. *Bautechnik*, 90(213)(12).
- Schling, E., Hitrec, D., & Barthel, R. (2018). Designing Grid Structures Using Asymptotic Curve Networks. In *Humanizing Digital Reality* (pp. 125–140). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-10-6611-5_12
- Schober, H. (2016). *Transparent Shells: Form, Topology, Structure: Vol. ISBN 3433031207*. John Wiley & Sons.
- Schramm, O. (1997). Circle patterns with the combinatorics of the square grid. *Duke Mathematical Journal*, 86(2). <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-97-08611-7>
- Schwerdtfeger Hans. (1980). *Geometry of Complex Numbers: Circle Geometry, Moebius Transformation, Non-Euclidean Geometry*. Dover Publications.
- Schwinn, T., & Menges, A. (2015). Fabrication Agency: Landesgartenschau Exhibition Hall. *Architectural Design*, 85(5), 92–99. <https://doi.org/10.1002/ad.1960>
- Sechelmann, S. (2007). *Discrete Minimal Surfaces, Koebe Polyhedra, and Alexandrov's Theorem. Variational Principles, Algorithms, and Implementation*. Technische Universität Berlin.

- Shah, A. N., Sahin, E. S., Malafey, A., Bechert, S., Maierhofer, M., Knippers, J., & Menges, A. (2022, September). Assembly-Oriented Design Methodology for Segmented Timber Shells. *Innovation, Sustainability, Legacy: Proceedings of the IASS 2022 Symposium Affiliated with APCS 2022 Conference*.
- Sheng, L., & Khamidi, Dr. M. F. (2018, April). *Client-oriented Building Mass Customization (CoBMC)*.
- Söderström, T. (2013, June 13). *Facts Emporia / Wingårdh Arkitektkontor*. <<https://www.archdaily.com/386107/facts-emporia-wingardhs>> ISSN 0719-8884
- Soltan, D. G., & Li, V. C. (2018). A self-reinforced cementitious composite for building-scale 3D printing. *Cement and Concrete Composites*, 90, 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2018.03.017>
- Springborn, A. B. (2003). *Variational principles for circle patterns*. Technical University of Berlin.
- Stieler, D., Schwinn, T., Leder, S., Maierhofer, M., Kannenberg, F., & Menges, A. (2022). Agent-based modeling and simulation in architecture. *Automation in Construction*, 141, 104426. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2022.104426>
- Tang, C., Sun, X., Gomes, A., Wallner, J., & Pottmann, H. (2014). Form-finding with polyhedral meshes made simple. *ACM Transactions on Graphics*, 33(4), 1–9. <https://doi.org/10.1145/2601097.2601213>
- Tang, G. (2015). An Overview of Historical and Contemporary Concrete Shells, Their Construction and Factors in Their General Disappearance. *International Journal of Space Structures*, 30(1), 1–12. <https://doi.org/10.1260/0266-3511.30.1.1>
- Tang, G., & Pedreschi, R. (2020). Gridshell as Formwork: Proof of Concept for a New Technique for Constructing Thin Concrete Shells Supported by Gridshell as Formwork. *Journal of Architectural Engineering*, 26(4), 04020036. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)AE.1943-5568.0000430](https://doi.org/10.1061/(ASCE)AE.1943-5568.0000430)
- Tellier, X., & Baverel, O. (2019). Fabrication-aware design of architectural envelopes using surfaces with planar curvature lines. In C. Lázaro, K.-U. Bletzinger, & E. Oñate (Eds.), *Proceedings of the IASS Annual Symposium 2019 – Structural Membranes 2019*.

- Tellier, X., Boutillier, R., Douthe, C., & Baverel, O. (2021). Patterns for gridshells with negligible geometrical torsion at nodes. *Curved and Layered Structures*, 8(1), 147–156. <https://doi.org/10.1515/cls-2021-0014>
- Tellier, X., Douthe, C., Baverel, O., & Hauswirth, L. (2023). Designing funicular grids with planar quads using isotropic Linear-Weingarten surfaces. *International Journal of Solids and Structures*, 264, 112028. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.112028>
- Tellier, X., Douthe, C., Hauswirth, L., & Baverel, O. (2019). Surfaces with planar curvature lines: Discretization, generation and application to the rationalization of curved architectural envelopes. *Automation in Construction*, 106, 102880. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2019.102880>
- Tellier, X., Zerhouni, S., Jami, G., Le Pavec, A., Lenart, T., Lerouge, M., Leduc, N., Douthe, C., Hauswirth, L., & Baverel, O. (2019). Hybridating vertex and face normals to design torsion-free gridshells: application to the X-Mesh pavilion. *FORM and FORCE - Proceedings of the IASS 2019 Symposium*.
- Teng, J. (2001). *Steel-concrete composite shells for enclosing large spaces*. 403–409.
- Tošić, Z., Eichenauer, M. F., Ivaniuk, E., Lordick, D., Krasić, S., & Mechtcherine, V. (2022). Design and optimization of free-form surfaces for modular concrete 3D printing. *Automation in Construction*, 141, 104432. <https://doi.org/10.1016/J.AUTCON.2022.104432>
- Tošić, Z., Krasić, S., Ando, N., & Milić, M. (2019). Geometry and Construction Optimization: An example using Felix Candela's Church of St. Joseph the Craftsman in Mexico. *Nexus Network Journal*, 21(1). <https://doi.org/10.1007/s00004-018-00424-1>
- Tošić, Z., Krasić, S., Lordick, D., Stanković, J., & Kocić, N. (2020, September 18). DISCRETIZATION AND OPTIMIZATION OF FREEFORM SURFACES WITH CIRCULAR MESHES FOR ADAPTING TO GRID SHELL STRUCTURES. *The 7th ICGG Conference, MoNgeometrija 2020*.
- Turner, M. J., Clough, R. W., Martin H. C., & Topp, L. J. (1956). *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*. 23(9), 805–823.
- United Nations Environment Programme. (2019). *2021 Global Status Report for Buildings and Construction: Towards a zero-emission, efficient and resilient buildings and construction sector*.

- van Mele, T., Mehrotra, A., Méndez Echenagucia, T., Frick, U., Augustynowicz, E., Ochsendorf, J., DeJong, M. J., & Block Philip. (2016). Form finding and structural analysis of a freeform stone vault. *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2016*.
- Velimirovic, L., Radivojevic, G., Stankovic, M., & Kostic, D. (2008). Minimal surfaces for architectural constructions. *Facta Universitatis - Series: Architecture and Civil Engineering*, 6(1), 89–96. <https://doi.org/10.2298/FUACE0801089V>
- Vertico. (2023). *Revolutionising Construction: 3D Concrete Printing as a revival for Structural Efficiency*. Hexastone. <https://www.vertico.xyz/hexastone>
- Vicenzino, E., Cuiham, G., Perry, V. H., Zakariasen, D., & Chow, T. S. (2005). First Use of UHPFRC in Thin Precast Concrete Roof Shell for Canadian LRT Station. *PCI Journal*, 50(5), 50–67. <https://doi.org/10.15554/pcij.09012005.50.67>
- Vierlinger, R. (2013). *Multi Objective Design Interface* [Technischen Universität Wien]. <https://doi.org/DOI:10.13140/RG.2.1.3401.0324>
- Vouga, E., Höbinger, M., Wallner, J., & Pottmann, H. (2012). Design of self-supporting surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 31(4), 1–11. <https://doi.org/10.1145/2185520.2185583>
- Wang, C., Jiang, C., Wang, H., Tellier, X., & Pottmann, H. (2023). Architectural Structures from Quad Meshes with Planar Parameter Lines. *Computer-Aided Design*, 156, 103463. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2022.103463>
- Weingarten, J. (1861). Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen. *Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1861(59), 382–393. <https://doi.org/10.1515/crll.1861.59.382>
- Welke, S. (1997). Stereographic projection of plane algebraic curves onto the sphere. *Transactions on Engineering Sciences*, 15(WIT Press).
- Welp, I., & Grundke, M. (2017). Organisationale Herausforderungen im modularen Hausbau und der Bauwirtschaft. *Der Betriebswirt*, 58(3), 26–33. <https://doi.org/10.3790/dbw.58.3.26>
- Wolf, M., Vogt, O., Huxoll, J., Gerhard, D., Kosse, S., & König, M. (2021). Lifecycle oriented digital twin approach for prefabricated concrete modules. In *ECPPM 2021 – eWork and eBusiness in Architecture, Engineering and Construction* (pp. 305–312). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781003191476-42>

- Xu, L. Da, Xu, E. L., & Li, L. (2018). Industry 4.0: state of the art and future trends. *International Journal of Production Research*, 56(8), 2941–2962. <https://doi.org/10.1080/00207543.2018.1444806>
- Yadav, D., Kulkarni, P. S., & Ghiya, S. (2017, August). Response Surface Methodology Based Optimization of Aerodynamic Package of a FSAE Car. *Annual CFD Symposium - 2017At: National Aerospace Laboratories*.
- Yuan, Z., Sun, C., & Wang, Y. (2018). Design for Manufacture and Assembly-oriented parametric design of prefabricated buildings. *Automation in Construction*, 88, 13–22. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2017.12.021>
- Zdravec, M., Schiftner, A., & Wallner, J. (2010). Designing Quad-dominant Meshes with Planar Faces. *Computer Graphics Forum*, 29(5), 1671–1679. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2010.01776.x>
- Zdravković, S. (2016). *Teorija površinskih nosača*. AGM knjiga.
- Zhao, D., & Lucas, J. (2015). Virtual reality simulation for construction safety promotion. *International Journal of Injury Control and Safety Promotion*, 22(1), 57–67. <https://doi.org/10.1080/17457300.2013.861853>
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. (2005). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Sixth Edition* (6th ed.). Butterworth-Heinemann.

Биографија аутора

Злата (Драган) Тошић је рођена 03.06.1992. године у Нишу. Основну школу је завршила у Нишу, након чега је уписала Гимназију „Бора Станковић“ језикчки смер истом граду, и завршила 2011. године. Током свог школовања била је активна у Европском парламенту младих као и спортским активностима у школи, где је била проглашена за спортисту генерације.

Основне академске студије на Грађевинско-архитектонском факултету у Нишу, студијски програм Архитектура, уписује 2011. године и завршава 2015, са просечном оценом 9,84, а интегрисане мастер студије 2016. године са просечном оценом 9,85. Исте године уписује, и 2017. завршава свој други мастер на Грађевинско-архитектонском факултету, студијски програм Грађевинарство, са просечном оценом 9,71. Докторске академске студије на Грађевинско-архитектонском факултету је уписала 2016. године.

Проглашена је за студента генерације основних студија три године за редом, као и мастера на студијском програму Архитектура. Посебну похвалу од Универзитета у Нишу је добила 2017. године за најбољег дипломираног студента академских студија Грађевинско-архитектонског факултета. Од маја 2017. до децембра 2019. године је била стипендијста Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије. У том периоду је била ангажована на реализацији вежби из предмета Нацртна геометрија I, Нацртна геометрија II, Нацртна геометрија III и Геометријске површи у архитектури на катедри за Визуелизације. Као сарадница проф. др Соње Красић је учествовала у формирању програма и практикума за вежбе на предмету Геометријске површи у архитектури као и дигитализацији вежби *Корак по корак* за предмет Нацртна геометрија I и Нацртна геометрија II.

Децембра 2019. године добија ДААД (нем. Deutscher Akademischer Austauschdienst - DAAD) стипендију за истраживачко усавршавање на пет месеци на Техничком Универзитету у Дрездену. Маја 2020. године заснива радни однос на Техничком Универзитету у Дрездену на Институту за геометрију у истраживачкој групи Геометријско моделовање и визуелизација професора др Данијела Лордика.

Учесник је неколико изложби и добитник друге награде на конкурс за идејно решење пешачког моста у Књажевцу 2017. године као и друге награде на изложби *Dimensions Reflected* која је била део Интернационалне конференције моГеометрија

2020. године. Аутор или коаутор је 30 научних и стручних радова, од којих је 8 у часописима са импакт фактором. Као истраживач на пројекту „Адаптабилне бетонске модуларне конструкције“ је члан истраживачке организације Приоритетни програм 2187 (нем. Schwerpunktprogramm - SPP 2187) која се бави темом „Адаптивних модуларних конструкција континуираних производних процеса: прецизна и брза изградња“, финансирана од стране DFG (Deutsche Forschungsgemeinschaft – Немачка истраживачка фондација) на основу које је настала тема докторске дисертације. Исто тако је члан мреже истраживача *AdvanceAEC* (енгл. Research Network for Advancing Architecture, Engineering and Construction).

У Нишу,
новембра 2024.

Потпис

