Универзитет у Нишу
Природно–математички факултет
Департман за математику

Владимир М. Балтић

Пермутације са ограничењима

Докторска дисертација

Ниш, 2014.

University of Niš
Faculty of Science and Mathematics
Department of Mathematics

Vladimir M. Baltić

Restricted permutations

PhD thesis

Niš, 2014.

Чланови комисије

1. Проф. др Драган Стевановић, ментор
   научни саветник Математичког института САНУ
2. Проф. др Снежана Илић, члан
   редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Нишу
3. Проф. др Слободан Симић, члан
   научни саветник Математичког института САНУ
4. Проф. др Војислав Петровић, члан
   редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду
5. Проф. др Раде Дорословачки, члан
   редовни професор Факултета техничких наука Универзитета у Новом Саду

Датум одбране: ________________ .

Садржај

Предговор **3**

1. Основни комбинаторни објекти и низови **5**
1.1. Пермутације . . . 5
1.1.1. Циклуси . . . 6
1.1.2. Транспозиције . . . 8
1.1.3. Знак пермутације . . . 10
1.1.4. Операције са пермутацијама . . . 11
1.2. Комбинације . . . 12
1.3. Партиције . . . 12
1.4. Композиције . . . 13
1.5. Графови . . . 15
1.6. Фибоначијеви бројеви . . . 17
1.6.1. Општи члан Фибоначијевог низа . . . 18
1.6.2. Трибоначијев низ . . . 18
1.6.3. Лукасов низ . . . 19
1.7. Каталанови бројеви . . . 20

2. Пермутације без датих шаблона **21**
2.1. Основни појмови . . . 21
2.1.1. Дикови путеви . . . 23
2.2. Пермутације без шаблона дужине 3 . . . 24
2.3. Пермутације без шаблона дужине 4 . . . 24
2.4. Пермутације без неколико шаблона . . . 25
2.4.1. Пермутације без шаблона 1243 и 2143 . . . 25

3. Пермутације са ограничењима **29**
3.1. Увод и историјат . . . 29
3.1.1. Перманенти . . . 29
3.1.2. Појам пермутације са ограничењима . . . 32
3.1.3. Проблем спаривања (деранжмани) . . . 33
3.1.4. Проблем распоређивања за столом . . . 34
3.1.5. Историјат . . . 36
3.2. Метода матрица преноса . . . 38
3.2.1. Факторизација у слободним моноидима . . . 40
3.3. Пермутације $p(i) - i \leqslant r$ . . . 41
3.4. Пермутације $-k \leqslant p(i) - i \leqslant r$ . . . 42
3.4.1. Поређења наше технике са другим методама . . . 48
3.4. Пермутације $-k \leqslant p(i) - i \leqslant r,\ p(i) - i \notin I$ . . . 49
3.4. Парне и непарне пермутације . . . 52
3.5. Везе са другим комбинаторним објектима . . . 58
3.5.1. Пребројавање $R_4^{(k)}$ и композиције . . . 58
3.5.2. Пребројавање $N(n; k, r, I)$ и подскупови . . . 61
3.6. Рачунарска сложеност . . . 77
3.7. Шта даље? . . . 77
3.7.1. Кружне пермутације . . . 78

3.7.2. Варијације са ограничењима 78

4. Примене коначних аутомата **79**
4.1. Коначне машине и аутомати 79
4.2. Пребројавање пермутација помоћу аутомата 82
4.2.1. Примери 86

Литература **103**

5. Прилози **105**
5.1. Паскал и Мејпл кодови 105
5.2. Прилози у Енциклопедији целобројних низова 115
5.2.1. Нови низови у Енциклопедији целобројних низова 116
5.2.2. Коментари на постојеће низове у Енциклопедији 119
5.3. Биографија аутора 120
5.3.1. Библиографија 121
5.4. Изјаве аутора 123
5.4.1. Изјава о ауторству 124
5.4.2. Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторске дисертације 125
5.4.3. Изјава о коришћењу 126
5.4.4. Резиме на српском језику 127
5.4.5. Резиме на енглеском језику 128

Предговор

Комбинаторика (са Теоријом графова) је једна од најстаријих области математике, али и данас је веома актуелна. Неки њени проблеми су заокупљали математичаре вековима (попут проблема четири боје), док су неке области постале веома актуелне са вртоглавим развојем рачунара и њиховом све већом применом при решавању математичких проблема.

Основни проблеми комбинаторике су питање егзистенције неких комбинаторних објеката, као и у случају потврдног одговора на претходно питање, колико има таквих објеката (тј. комбинаторних објеката који садрже неко одређено својство). У овом раду ми ћемо се позабавити проблемима пребројавања одређених комбинаторних објеката (пермутација, варијација, композиција) уз нека додатна ограничења. Том приликом ћемо развити потпуно нов метод за пребројавање неких од ових објеката. Као што ће се видети касније ови (и њима слични проблеми) су стари и по неколико стотина година. Поред пребројавања датих објеката, ми ћемо успоставити и везе међу неким од ових објеката, а и осврнућемо се на алгоритамску сложеност нашег новог метода, који је бољи од постојећих. Сада размотримо садржај сваке главе понаособ.

Прво ћемо увести основне комбинаторне објекте, затим ћемо се осврнути на неке бројевне низове са којима се сусрећемо касније. На неке основне појмове ћемо само ставити референце на одговарајуће уџбенике, док ћемо се овде детаљније позабавити оним који не представљају део основних курсева комбинаторике, као и оним аспектима основних појмова који нису тако често заступљени у уџбеничкој литератури.

У другој глави уводимо пермутације без датих шаблона, које чине једну од водећих тема у данашњој комбинаторној литератури. Наш оригиналан допринос је комбинаторан доказ броја пермутација без шаблона 1243 и 2143.

У трећој глави смо развили нову технику за пребројавање пермутација са ограничењима типа $k \leqslant p(i) - i \leqslant r$ (те пермутације, као и пермутације са још неким додатним ограничењима: $p(i) - i \notin I$; парне и непарне пермутације). Дали смо детаљан историјски увод ове проблематике, као и поређење наше технике са другим постојећим. Анализирали смо и алгоритамску сложеност наше технике. Ова глава је у потпуности оригиналан допринос: [2, 5, 6, 7].

У четвртој глави пребројавамо пермутације из треће главе на други начин – користећи коначне аутомате. И ова глава је у потпуности оригиналан допринос: [1, 3, 4].

У петој глави су дати прилози. Први део чине паскал и Мејпл кодови које смо користили при пребројавању пермутација са ограничењима из треће главе. Дали смо и слике низова којима смо проширили Слоунову енциклопедију целобројних низова [43] (енг. Sloane's online encyclopedia of integer sequences). Након тога су убачене и потребне административне ставке, као што су биографија аутора (са библиографијом) и изјаве о ауторству и коришћењу.

1. Основни комбинаторни објекти и низови

1.1. Пермутације

Пермутације су свакако најбитнији појам у овом раду (јављају се и самом наслову!). Њихов значај се огледа и у томе што је Миклош Бона (мађ. Miklós Bóna) целу једну књигу посветио пермутацијама – то је „Комбинаторика пермутација“, [10]. Овде ћемо дати неке од основних комбинаторних својстава пермутација, која нису део уобичајене средњошколске или факултетске литературе, а потребне су нам у даљем раду.

ДЕФИНИЦИЈА 1.1.1. *Пермутација* коначног скупа $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ је уређена n-торка $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, при чему је $p_i \in X_n$ за $i = 1, 2 \ldots, n$ и $p_i \neq p_j$ за $i \neq j$. Такву пермутацију ћемо скраћено приказивати[1] као $p_1\ p_2\ \ldots\ p_n$.

Без умањења општости, у остатку текста (сем ако не нагласимо другачије) узимаћемо да је скуп $X_n = \mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, а скуп свих пермутација над овим скупом означаваћемо са S_n.

ДЕФИНИЦИЈА 1.1.2. Нека је у скупу $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ дато уређење (релација поретка) са $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ и нека су сви a_i и b_j елементи скупа X_n.

Тада кажемо да су уређена n–торка $(a_1, \ldots, a_n)$ и уређена m–торка $(b_1, \ldots, b_m)$ у релацији мање, тј. $(a_1, \ldots, a_n) < (b_1, \ldots, b_m)$ ако

- постоји неки број $k \in \mathbb{N}$ за који важи да је $a_k < b_k$ и $a_i = b_i$ $(\forall i < k)$ или
- ако је $n < m$, а $a_i = b_i$ $(\forall i \leqslant n)$.

Овако уведена релација поретка на скупу речи са словима из скупа X_n назива се *лексикографски поредак*.

Може се показати да је број пермутација скупа X_n једнак

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Пермутација се може посматрати и као преуређење неког фиксног редоследа. Замена фиксног редоследа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ са $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ представља се са

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \color{red}{p_1} & \color{red}{p_2} & \ldots & \color{red}{p_n} \end{pmatrix}$$

[1]Један од разлога је да правимо разлику између саме пермутације и циклусног представљања пермутације што ћемо увести касније. До забуне би могло доћи када се пермутација састоји од само једног циклуса.

чиме је дефинисано пресликавање $p(x_i) = p_i$ које мења x_i са p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тако смо дошли до алтернативне дефиниције пермутације:

ДЕФИНИЦИЈА 1.1.3. *Пермутација* скупа $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ је било које бијективно пресликавање σ скупа $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ на скуп X_n, тј. $\sigma : \mathbb{N}_n \to X_n$.

Када је $X_n = \mathbb{N}_n$, вредност x_i за коју је $p(x_i) = x_i$, назива се *фиксна тачка* ове пермутације. Пермутација која нема фиксних тачака, тј. код које је $p(x_i) \neq x_i$ за свако $x_i \in X_n$, назива се *деранжман* (енг. derangment).

Идентичка пермутација (или *полазна пермутација*), у ознаци ε, је пермутација код које је $\varepsilon(i) = i$, за све $i \in \mathbb{N}_n$.

Код идентичке пермутације сви елементи представљају фиксне тачке.

Фиксне тачке ће бити од значаја код неког броја пермутација са којима се срећемо у главама 3. и 4. Више о деранжманима ће бити речи у потпоглављу 3.1.3.

1.1.1 Циклуси

ДЕФИНИЦИЈА 1.1.4. Посматрајмо подскуп $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_d\}$ скупа X_n. Пермутација

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{d-1} & y_d \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_d & y_1 \end{pmatrix}$$

у којој замене $p(y_1) = y_2$, $p(y_2) = y_3$, $\ldots$, $p(y_{d-1}) = y_d$, $p(y_d) = y_1$ формирају затворен круг се назива *циклус*. Претходно означавање циклуса уобичајено се скраћено приказује тако што између заграда стоје редом вредности које мењају места (последња мења место са првом):

$$(y_1, y_2, \ldots, y_d).$$

Број d елемената који формирају циклус назива се *дужина циклуса*.

Транспозиција је циклус дужине $d = 2$.

Фиксне тачке пермутације су циклуси дужине 1.

Циклус од n објеката или n-циклус има облик $a_1a_2a_3\ldots a_n$ где се сматра да је a_n поред a_1, тако да је

$$a_1a_2a_3\ldots a_n = a_ja_{j+1}\ldots a_na_1a_2\ldots a_{j-1}$$

(нпр. имамо $a_1a_2a_3 = a_2a_3a_1 = a_3a_1a_2$).

Постоји $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-k+1)}{k}$ различитих циклуса дужине k на скупу X_n.

ДЕФИНИЦИЈА 1.1.5. Циклус дужине n, који садржи све елементе скупа X_n, се назива *циклична* (*циркуларна*) *пермутација*.

У складу са претходним, постоји $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1}{n} = (n-1)!$ цикличних пермутација скупа X_n.

ДЕФИНИЦИЈА 1.1.6. Композиција функција $p \circ q$ је дефинисана као $p(x) \circ q(x) = q\big(p(x)\big)$.

За сваку пермутацију $p \in S_n$, можемо увести релацију ϱ на скупу $\mathbb{N}_n$ на следећи начин:

$$a \,\varrho\, b \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad a \text{ и } b \text{ припадају истом циклусу},$$

тј. постоји $k \in \mathbb{N}$ такво да је $b = p\Big(p\big(p(\ldots p(a)\ldots)\big)\Big)$, где се пермутација p у овој композицији јавља k пута. Ово краће пишемо и као $b = p^k(a)$.

Сада ћемо навести једно тврђење везано за релацију ϱ које ће нам требати касније.

ТЕОРЕМА 1.1.1. Овако уведена релација ϱ је релација еквиваленције на скупу $\mathbb{N}_n$. □

Класу еквиваленције елемента a чине елементи циклуса који садржи a, тј.

$$C_a = \{a, p(a), p(p(a)), p(p(p(a))), \ldots, p^{d-1}(a)\}.$$

Број елемената класе еквиваленције d је дужина одговарајућег циклуса.

ТЕОРЕМА 1.1.2. Свака пермутација скупа X_n је или циклус или се може представити као унија дисјунктних циклуса.

Доказ. Циклусни запис за произвољну пермутацију π може да се добије помоћу следећег поступка, који се понавља све док сви елементи не буду распоређени у циклусе.

> Изабрати произвољан елемент a који још није распоређен у неки циклус. Нови циклус чине елементи
>
> $$\Big(a, \quad \pi(a), \quad \pi(\pi(a)), \quad \pi(\pi(\pi(a))), \ \ldots\ , \quad \pi^{d-1}(a)\Big)$$
>
> које ређамо све док не дођемо до најмањег природног броја d за који важи $\pi^d(a) = a$.

Како су различите класе еквиваленције релације ϱ дисјунктне, добијамо да је свака пермутација или циклус или се може представити као унија дисјунктних циклуса. □

Овако представљање пермутације се назива *циклусни запис* или *циклусна декомпозиција* пермутације.

Циклусни запис није јединствен. Уобичајено је (што ћемо и ми користити) да се циклус записује тако што му је најмањи елемент на првој позицији и на тај начин долазимо до јединствене репрезентације циклуса. Такође, у циклусном запису ћемо циклусе поређати тако да су им први елементи у растућем редоследу.

ДЕФИНИЦИЈА 1.1.7. *Ред пермутације* p је најмањи природан број d за који важи

$$p^d = \underbrace{p(p(p...(p)...))}_{d} = \varepsilon.$$

Другим речима, ред пермутације је најмањи број колико пута треба да направимо композицију пермутације са самом собом да бисмо добили идентичку пермутацију.

Нагласимо да је у претходној дефиницији d природан број. „Степен“ пермутације се може увести и за произвољан цео број на следећи начин: $p^0 = \varepsilon$, а $p^{-k} = (p^{-1})^k$ (где је p^{-1} инверзна пермутација, која се уводи касније у Дефиницији 1.1.9).

ТЕОРЕМА 1.1.3. Ред пермутације p једнак је најмањем заједничком садржаоцу дужина свих циклуса у p. □

1.1.2 Транспозиције

Сада ћемо навести неколико својстава транспозиција. Њих смо увели у Дефиницији 1.1.4, али ћемо их додатно појаснити због њиховог значаја.

Транспозиција $\tau_{i,j}$ мења бројеве i и j $(i < j)$, а остале бројеве оставља на свом месту:

$$\tau(i) = j, \qquad \tau(j) = i, \qquad \text{и} \qquad \tau(k) = k \quad \text{за} \quad k \neq i, j.$$

Ако хоћемо ову пермутацију да представимо као низ бројева, она би имала следећи облик:

$$12 \dots (i-1)j(i+1) \dots (j-1)i(j+1) \dots (n-1)n.$$

Број транспозиција скупа X_n износи $\dfrac{n(n-1)}{2}$, јер елементе i и j који мењају места можемо из скупа $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ одабрати на $\binom{n}{2}$ начина.

ТЕОРЕМА 1.1.4. Свака пермутација се може представити као композиција идентичке пермутације ε и транспозиција.

Доказ. Означимо са $k(p)$ тражену композицију пермутације p.

За $n = 1$ у S_1 имамо само једну пермутацију и то је идентичка пермутација ε.
Претпоставимо да тврђење важи за све пермутације дужине $n - 1$.
Нека се у пермутацији $p \in S_n$ елемент n налази на i-тој позицији, тј. $p(i) = n$. Посматрајмо пермутацију $\pi \in S_{n-1}$ која се добија од p када обришемо само елемент n. У зависности од i имамо 2 случаја:

- ако је $i = n$, онда је $k(p) = k(\pi)$;
- ако је $i \neq n$, онда је $k(p) = k(\pi) \circ \tau_{i,n}$.

Тиме смо показали и да се свака пермутација $p \in S_n$ може представити као композиција идентичке пермутације ε и транспозиција.
На основу Принципа математичке индукције добијамо да тврђење важи за произвољну пермутацију. $\square$

Претходну теорему ћемо користити када будемо успостављали везу између неких пермутација са ограничењима и подскупова скупа који имају неке додатне услове (Теорема 3.5.4).
Ово представљање као композиција идентичке пермутације ε и транспозиција није јединствена, али наредне 2 теореме нам описују услове да би таква репрезентација била минимална. До Теореме 1.1.5 је дошао мађарски математичар Денеш (мађ. j. Dénes) 1959. године.

ТЕОРЕМА 1.1.5. Нека су $t_2, t_3, \dots, t_n$ транспозиције из S_n. Тада је производ $t_n \cdot t_{n-1} \cdot \dots \cdot t_2$ циклична пермутација ако и само ако граф $G(t_2, t_3, \dots, t_n)$ код кога су темена $1, 2, \dots, n$, док су гране $t_2, t_3, \dots, t_n$ (тачније ако траспозиција t мења места елемената i и j тада су чворови i и j повезани граном), представља једно стабло. $\square$

Сада ћемо дати и једну генерализацију овог тврђења.

ТЕОРЕМА 1.1.6. Композиција транспозиција је минималне дужине ако и само ако мултиграф који се добија када граном спојимо елементе које мењамо у транспозицији не садржи контуру. $\square$

Пермутацију можемо представити и оријентисаним графом. У њему постоји грана (x_i, x_j) ако и само ако је $x_j = p(x_i)$. Оријентисани графови представљају добру визуелну репрезентацију пермутације. Они налазе своје место у методи „Факторизација у слободним моноидима“

(видети поглавље 3.2 Метода матрица преноса) која директно одговара графовској дефиницији перманента (генараторима у слободном моноиду одговарају фактори диграфа).

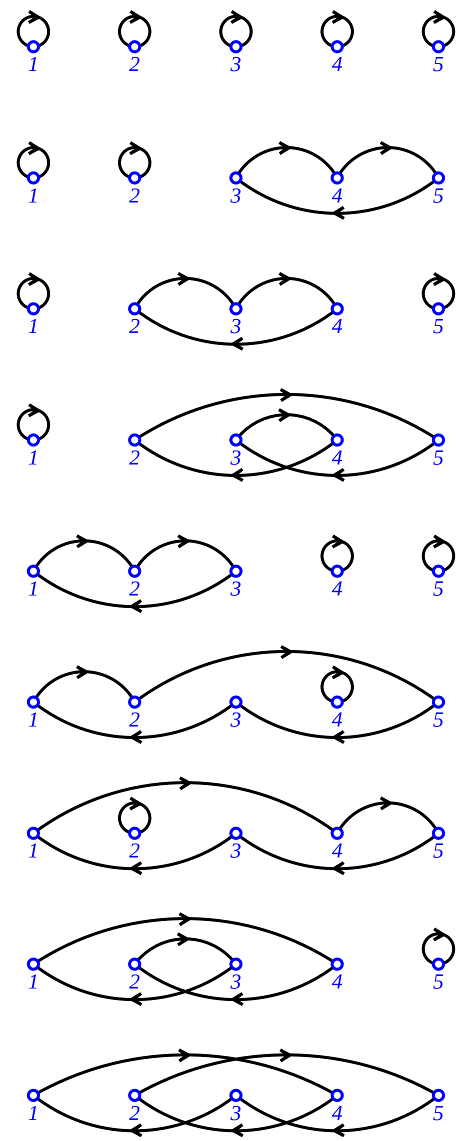
Сва ова представљања пермутација ћемо дати у следећем примеру.

ПРИМЕР 1.1.1. Одредити све пермутације скупа $\mathbb{N}_5 = \{1,2,3,4,5\}$ које задовољавају услове

$$-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 3 \qquad \text{и} \qquad p(i) - i \neq -1, \quad p(i) - i \neq 2.$$

Решење. Сваку пермутацију ћемо представити на Слици 1.1 као преуређење, преко декомпозиције у дисјунктне циклусе испод тога, као композицију транспозиција у средини и преко одговарајућег оријентисаног графа на десној страни. Има 9 таквих пермутација:

1.	1 2 3 4 5 $(1)(2)(3)(4)(5)$	ε
2.	1 2 4 5 3 $(1)(2)(3,4,5)$	$\tau_{3,4} \circ \tau_{4,5}$
3.	1 3 4 2 5 $(1)(2,3,4)(5)$	$\tau_{2,3} \circ \tau_{3,4}$
4.	1 5 4 2 3 $(1)(2,5,3,4)$	$\tau_{2,5} \circ \tau_{3,5} \circ \tau_{3,4}$
5.	2 3 1 4 5 $(1,2,3)(4)(5)$	$\tau_{1,2} \circ \tau_{2,3}$
6.	2 5 1 4 3 $(1,2,5,3)(4)$	$\tau_{1,2} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{3,5}$
7.	4 2 1 5 3 $(1,4,5,3)(2)$	$\tau_{1,4} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{3,5}$
8.	4 3 1 2 5 $(1,4,2,3)(5)$	$\tau_{1,4} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{2,3}$
9.	4 5 1 2 3 $(1,4,2,5,3)$	$\tau_{1,4} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{3,5}$



Слика 1.1. Пермутације скупа $\mathbb{N}_5$ за које је $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 3$ и $p(i) - i \neq -1, 2$.

Генерализација овог примера је појам *пермутација са ограничењима* са којима ћемо се срести касније. ∎

ТЕОРЕМА 1.1.7. Свака пермутација $p \in S_n$ може се представити као композиција транспозиција $\tau_{1,2}, \tau_{2,3}, \tau_{3,4}, \ldots, \tau_{n-1,n}$.

Доказ. Прво ћемо показати да се произвољна транспозиција $\tau_{p,q}$ $(p < q)$ може представити као композиција датих транспозиција:

$$\tau_{p,q} = \tau_{p,p+1} \circ \tau_{p+1,p+2} \circ \ldots \circ \tau_{q-2,q-1} \circ \tau_{q-1,q} \circ \tau_{q-2,q-1} \circ \tau_{q-3,q-2} \circ \ldots \circ \tau_{p+1,p+2} \circ \tau_{p+1,p}.$$

Покажимо да горња формула стварно представља транспозицију $\tau_{p,q}$.

Помоћу $\tau_{p,p+1} \circ \tau_{p+1,p+2} \circ \ldots \circ \tau_{q-2,q-1} \circ \tau_{q-1,q}$ доводимо елемент p на позицију q, док све елементе $p+1, p+2, \ldots, q-1, q$ померамо за 1 место у лево. Даље са $\tau_{q-2,q-1} \circ \tau_{q-3,q-2} \circ \ldots \circ \tau_{p+1,p+2} \circ \tau_{p+1,p}$ доводимо елемент q (са позиције $q-1$) на позицију p, док све елементе $p+1, p+2, \ldots, q-1$ померамо за 1 место у десно (тако да су они на својој полазној позицији). Тиме смо показали да је горњом формулом баш представљена транспозиција $\tau_{p,q}$.

Теорема 1.1.4 каже да се свака пермутација $p \in S_n$ може се представити као композиција транспозиција, па на основу претходног следи да се свака пермутација $p \in S_n$ може се представити као композиција следећих транспозиција: $\tau_{1,2}$, $\tau_{2,3}$, $\tau_{3,4}$, $\ldots$, $\tau_{n-1,n}$. □

1.1.3 Знак пермутације

Следећи битан основни појам везан за пермутације је појам инверзије, који је директно повезан са појмом знака пермутације, што игра битну улогу код дефиниције детерминанте.

ДЕФИНИЦИЈА 1.1.8. Ако у пермутацији σ елементи σ_i и σ_k задовољавају $\sigma_i > \sigma_k$, при чему је $i < k$, кажемо да елементи σ_i и σ_k образују *инверзију*. Значи, два елемента у пермутацији образују инверзију, ако нам прво иде већи, а затим мањи.

Пермутација σ је *парна* уколико је укупан број инверзија у њој паран, а *непарна* ако је укупан број инверзија непаран. *Знак* (*парност*) пермутације σ, у ознаци *sgn* σ, дефинишемо као

$$sgn\ \sigma = \begin{cases} 1 & \text{ако је } \sigma \text{ парна пермутација} \\ -1 & \text{ако је } \sigma \text{ непарна пермутација} \end{cases} = (-1)^{\text{ број инверзија }}.$$

Може се показати да за знак пермутације важи формула

$$sgn\ \sigma = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Знак пермутације може се одредити на 3 начина: помоћу инверзија (што смо имали у Дефиницији 1.1.8), на основу композиције транспозиција (Теорема 1.1.4) и преко циклусног записа (Теорема 1.1.2). Сада ћемо детаљније описати сваки од ових начина.

I Пермутација p је парна уколико је укупан број инверзија у p паран, а непарна ако је укупан број инверзија у p непаран. Може се рећи да се знак пермутације p добија по формули

$$sgn\ p = (-1)^{\text{ број инверзија }}.$$

II Уколико се пермутација може представити као композиција парног броја транспозиција она је парна, а ако се може представити као композиција непарног броја транспозиција она је непарна (тј. полазећи од полазне пермутације битно је колико је потребно замена места по два елемента да би добили дату пермутацију). Односно, имамо формулу

$$sgn\ p = (-1)^{\text{ број транспозиција }}.$$

III Уколико је p пермутација скупа X_n (који има n елемената) представљена у циклусном запису и ако тај запис има c различитих циклуса, тада је

$$sgn\ p = (-1)^{n-c}.$$

1.1.4 Операције са пермутацијама

Већ смо срели са једном бинарном операцијом на пермутацијама – то је композиција 2 пермутације (даћемо још неких значајних својстава ове операције). Код пермутација без датих шаблона јављаће потреба за неким (унарним) операцијама на пермутацијама. То су инверзна пермутација (енг. *inverse*), обрнута пермутација (енг. *reverse*) и комплементарна пермутација (енг. *complement*).

На основу Дефиниције 1.1.3 имамо да је пермутација бијекција, па постоји и њена инверзна функција.

ДЕФИНИЦИЈА 1.1.9. Инверзна функција пермутације p назива се *инверзна пермутација* и најчешће се означава са σ^{-1}.

Вратимо се сада унарним операцијама над пермутацијама.

ДЕФИНИЦИЈА 1.1.10. За пермутацију $p = p_1\ p_2\ \dots\ p_{n-1}\ p_n$ пермутација $p_n\ p_{n-1}\ \dots\ p_2\ p_1$ назива се *обрнута пермутација* и најчешће се означава са p^r.

ПРИМЕР 1.1.2. Одредити обрнуту пермутацију σ^r за пермутацију $\sigma = 2\ 4\ 3\ 1$.

Решење. Елементе пермутације σ испишимо у обрнутом редоследу и добили смо обрнуту пермутацију σ^r за пермутацију σ: $\sigma^r = 1\ 3\ 4\ 2$. ■

ДЕФИНИЦИЈА 1.1.11. За пермутацију $p = p_1\ p_2\ \dots\ p_{n-1}\ p_n$ дужине n пермутација $q_1\ q_2\ \dots\ q_{n-1}\ q_n$, код које за сваки елемент важи да је $q_i = n + 1 - p_i$, назива се *комплементарна пермутација* и најчешће се означава са p^c или $\overline{p}$.

ПРИМЕР 1.1.3. Одредити комплементарну пермутацију σ^c за пермутацију $\sigma = 2\ 4\ 3\ 1$.

Решење. Овде је $n = 4$ и за елементе пермутације σ одредимо одговарајуће елементе комплементарне пермутације σ^c:

$$5 - 2 = 3, \qquad 5 - 4 = 1, \qquad 5 - 3 = 2, \qquad 5 - 1 = 4.$$

Тиме смо добили да је тражени комплемент $\sigma^c = 3\ 1\ 2\ 4$. ■

ПРИМЕР 1.1.4. Код пермутације $s = 5\ 2\ 3\ 4\ 1$ се комплемент и обрат поклапају:
$s^c = s^r = 1\ 4\ 3\ 2\ 5$. ■

Ове операције налазе примену у доказима код пермутација без датих шаблона (глава 2).

1.2. Комбинације

Комбинације представљају неуређене изборе елемената. Њих можемо поистоветити са подскуповима:

ДЕФИНИЦИЈА 1.2.1. Комбинација (неуређени избор) k елемената коначног скупа X је било који k-точлани подскуп скупа X.

Уколико скуп X има n елемената, тада је број свих комбинација са k елемената једнак биномном коефицијенту $\binom{n}{k}$.

Више о комбинацијама може се наћи у [40][главе 1.3 и 1.5].

1.3. Партиције

Партиције природног броја, заједно са композицијама (које ћемо обрадити у наредном одељку), представљају изузетно важне комбинаторне објекте. Поред мноштва научних радова који се баве баве проблемима везаним са овим објектима, постоје и целе књиге које се баве њима — амерички математичар Џорџ Ендриус аутор је 2 књиге које су посвећене партицијама.

Партиције у свом корену имају енглеску реч *part* (део), али се код нас овај појам не преводи. Такође у целом овом поглављу за делове партиције ми ћемо користити израз *сабирак* (код партиција и композиција природног броја), односно *подскуп* (код партиција скупа).

За укупан број партиција природног броја n користићемо ознаку $p(n)$, а са $p(n \mid \mathcal{P})$ означаваћемо број партиција природног броја n које имају неко својство $\mathcal{P}$. Самоконјуговане партиције ћемо означавати са с.к. а са н.с. ћемо означавати највећи сабирак у датој партицији. Изузетно, својства везана за информације о броју сабирака ћемо стављати у индекс, нпр. број партиција које имају тачно k сабирака ћемо означавати са $p_k(n)$, ако има највише k сабирака то ћемо означавати са $p_{\leqslant k}(n)$, а партиције које имају тачно m различитих сабирака ћемо означавати са $p_m(n \mid \neq)$. Потпуно аналогно за композиције природног броја n ћемо користити ознаке које почињу са c, попут $c(n)$, $c(n \mid \mathcal{P})$, ...

ДЕФИНИЦИЈА 1.3.1. *Партиција* π броја n, $n \in \mathbb{N}$, на k сабирака, $k \geqslant 1$, је фамилија $\pi = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, таква да важи $a_i \in \mathbb{N}$ за свако $i = 1, 2, \ldots, k$ и

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Ако партиција $\pi = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ садржи α_i сабирака једнаких i, $i = 1, 2, \ldots, k$, тада партицију π записујемо на следећи начин

$$\pi = [1^{\alpha_1}\ 2^{\alpha_2}\ \ldots\ n^{\alpha_n}].$$

Несрећна околност је да за партиције у скраћеној нотацији користимо мултипликативне ознаке (али те ознаке су се усталиле у литератури свуда у свету), иако је партиција у ствари сума (тј. адитивна декомпозиција). Тако $[2^3]$ је партиција броја 6, која значи да смо 6 представили као суму три двојке. Такође, ради веће прегледности уместо k^1 писаћемо само k.

Основна разлика између партиција и композиција је што је код композиција битан редослед сабирака, док код партиција није.

Тако, нпр. партицији $1+2+2+5$, коју можемо записати и као $[1\ 2^2\ 5]$, одговара $\binom{4}{1,2,1} = 12$ композиција из Примера 1.4.2.

Нажалост, за партиције природних бројева не постоји експлицитна формула као за композиције, али зато можемо да одредимо бројеве партиција помоћу рекурентних веза или на основу функције генератрисе, што ћемо видети касније.

ТЕОРЕМА 1.3.1. Нека је $p_k(n)$ број партиција n на k сабирака. Тада је

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \ldots + p_1(n-k). \quad \square$$

Ово тврђење можемо искористити да израчунамо укупан број партиција $p(n)$ броја n. Слично као у доказу Теореме 1.4.2, видимо да партиције броја n могу имати од $k=1$ до $k=n$ сабирака. Стога важи формула за број партиција

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n).$$

Првих 16 вредности функције броја партиција $p(n)$ је дато у Табели 1.1. Ови бројеви чине низ A000041 у *Енциклопедији целобројних низова* [43].

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231

Табела 1.1: Број партиција $p(n)$ природног броја n.

Више о партицијама можете погледати у [40], где им је посвећено цело једно поглавље.

Партицијама скупа ћемо се бавити и у поглављу о Стирлинговим бројевима II врсте.

1.4. Композиције

ДЕФИНИЦИЈА 1.4.1. *Композиција* природног броја n на k сабирака представља било које решење $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ у скупу природних бројева једначине

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n. \tag{1.1}$$

Композиција се понекад назива и *уређена партиција* или *уређено разбијање* природног броја n. О броју композиција нам говоре и следећа два тврђења.

ТЕОРЕМА 1.4.1. Број решења једначине (1.1), тј. број композиција једнак је

$$\binom{n-1}{k-1}. \quad \square$$

Директна последица овог тврђења је следеће којим одређујемо укупан број свих могућих композиција датог природног броја.

ТЕОРЕМА 1.4.2. Укупан број композиција броја n је једнак $c(n) = 2^{n-1}$. $\square$

ПРИМЕР 1.4.1. Одредити колико има композиција броја 5. Колико тих композиција има 1, 2, 3, 4, односно 5 сабирка?

Решење. Имамо $c(4) = 2^4 = 16$ композиција броја 5. Прикажимо их:

$$\begin{gathered} 5; \\ 1+4, \qquad 2+3, \qquad 3+2, \qquad 4+1; \\ 1+1+3, \quad 1+2+2, \quad 1+3+1, \quad 2+1+2, \quad 2+2+1, \quad 3+1+1; \\ 1+1+1+2, \quad 1+1+2+1, \quad 1+2+1+1, \quad 2+1+1+1; \\ 1+1+1+1+1. \end{gathered}$$

У првом реду је само 1 композиција броја 5 на 1 сабирак и то се слаже са резултатом Теореме 1.4.2: $\binom{5-1}{1-1} = \binom{4}{0} = 1$.

У другом реду претходног приказа имамо укупно $\binom{5-1}{2-1} = \binom{4}{1} = 4$ композиције на 2 сабирка.

У трећем реду имамо $\binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$ композиција на 3 сабирка.

У четвртом реду су $\binom{5-1}{4-1} = \binom{4}{3} = 4$ композиције на 4 сабирка.

У петом реду је $\binom{5-1}{5-1} = \binom{4}{4} = 1$ композиција на 5 сабирака. $\blacksquare$

ТЕОРЕМА 1.4.3. Композиција броја n, код којих се сваки број $j \in \mathbb{N}_n$ јавља тачно α_j пута, при чему је $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 2 + \ldots + \alpha_n \cdot n = n$, има

$$\frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} = \binom{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}. \quad \square$$

ПРИМЕР 1.4.2. Одредимо све композиције код којих су сабрици 1, 2, 2 и 5.

Решење. Све те композиције одговарају пермутацијама са понављањем бројева 1, 2, 2 и 5. Стога тих композиција укупно има $\binom{4}{1,2,1} = 12$:

$$\begin{array}{lll} 1+2+2+5, & 1+2+5+2, & 1+5+2+2 \\ 2+1+2+5, & 2+1+5+2, & 2+2+1+5 \\ 2+2+5+1, & 2+5+1+2, & 2+5+2+1 \\ 5+1+2+2, & 5+2+1+2, & 5+2+2+1. \end{array}$$

$\blacksquare$

ТЕОРЕМА 1.4.4. Нека су $n_1, n_2, \ldots, n_k$ различити природни бројеви. Означимо број композиција природног броја n, код којих је сваки од сабирака једнак неком од бројева $n_1, n_2, \ldots, n_k$ са $c(n \mid \{n_1, n_2, \ldots, n_k\})$. Тада важи једнакост

$$c(n \mid \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}) = \sum_{j=1}^{k} c(n - n_j \mid \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}),$$

где као почетне услове имамо $c(m \mid \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } m < 0, \\ 1, & \text{ако је } m = 0. \end{cases}$ $\square$

Резултате овог тврђења уопштићемо у потпоглављу 3.5.1.

1.5. Графови

Графови су математички објекти које често срећемо у свакодневном животу, али налазе примене у разним научним дисциплинама. Сада ћемо увести најосновније појмове. Терминологија је усаглашена са [11, 18, 39].

ДЕФИНИЦИЈА 1.5.1. *Граф* G је уређен пар (V, ϱ), где је V непразан скуп и ϱ бинарна релација на V. Елементи скупа V се зову *чворови*, а елементи скупа ϱ *гране* графа G.

На основу дефиниције бинарне релације важи да је $\varrho \subseteq V^2 = V \times V$, па свака грана графа представља један уређени пар чворова графа.

Сваки граф са коначним скупом чворова може се геометријски представити на следећи начин. Чворове графа $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ представљамо међусобно различитим тачкама у равни или простору. Уколико постоји грана $(v_i, v_j) \in \varrho$ тада су тачке које одговарају чворовима v_i и v_j спојене непрекидном линијом оријентисаном од чвора v_i ка чвору v_j. При томе грана која спаја чвор са самим собом назива се *петља*.

У Теорији графова су од посебног интереса графови (V, ϱ) код којих је релација ϱ симетрична. Ови графови се називају *неоријентисани графови*. Код оваквих графова за сваку грану $(u, v) \in \varrho$, такву да је $u \neq v$, постоји и грана $(v, u) \in \varrho$ обрнуте оријентације. Стога се гране (u, v) и (v, u) могу заменити скупом $\{u, v\}$. У случају петље, када је $u = v$, њу можемо представити као $\{u\}$. Зато се врло често појам неоријентисаног графа може дефинисати и на алтернативан начин.

ДЕФИНИЦИЈА 1.5.2. *Неоријентисани граф* G је уређен пар (V, E), где је V непразан скуп, а $E \subseteq \big\{\{u, v\} \mid u, v \in V\big\}$. Елементи скупа V се зову *чворови*, а елементи скупа E *гране* неоријентисаног графа G.

Граф уведене Дефиницијом 1.5.1 зовемо *оријентисан графов* или *диграф*, а под *неоријентисаним графом* ћемо подразумевамо граф из Дефиниције 1.5.2. Заједнички термин *граф* ћемо користити само у тврђењима и дефиницијама који важе и за оријентисане и за неоријентисане графове. Надаље ћемо све графове обележавати са (V, E).

ДЕФИНИЦИЈА 1.5.3. *Шетња дужине* k, $k \geqslant 1$, у графу (V, E) је низ грана из E облика

- $(v_0, v_1),\ (v_1, v_2),\ \ldots\ ,\ (v_{k-1}, v_k)$ (код оријентисаних графова);
- $\{v_0, v_1\},\ \{v_1, v_2\},\ \ldots\ ,\ \{v_{k-1}, v_k\}$ (код неоријентисаних графова).

За ову шетњу кажемо да *почиње* у чвору v_0, а да се *завршава* у чвору v_k. Чворови v_0 и v_k се зову *крајњи чворови шетње*.

Видимо да се у шетњи гране практично надовезују једна на другу, тако да у ствари ми идемо из чвора v_0 у чвор v_1, затим из њега у чвор v_2 итд. до коначног чвора v_k. Стога се шетња у графу може задати и као низ узастопних чворова спојених гранама:

$$v_0 - v_1 - v_2 - \ldots - v_{k-1} - v_k.$$

Шетња може више пута да пролази истом граном или кроз исти чвор, као и кроз петље. Неке специјалне врсте шетњи дате су у наредној дефиницији.

ДЕФИНИЦИЈА 1.5.4. *Затворена шетња* је шетња која се завршава у истом чвору у којем и почиње, тј. $v_0 = v_k$.

Пут (или *елементарни пут* или *прост пут*) је шетња која кроз сваки чвор графа пролази највише једанпут.

Контура (*циклус*) је елементарни кружни пут (дозвољавамо да су почетни и заврсни чворови једнаки).

Петља се може сматрати контуром дужине 1.

Надаље ћемо се бавити оријентисаним графовима (сем ако се не нагласи другачије).

ДЕФИНИЦИЈА 1.5.5. Нека је $G = (V, E)$ граф са скупом чворова $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. *Матрица суседства графа* G је квадратна матрица $A = ||a_{ij}||_{n\times n}$ реда n код које су $a_{ij} = 1$ ако је $(v_i, v_j) \in E$ и $a_{ij} = 0$ ако $(v_i, v_j) \notin E$

(за оријентисане графове).

Овако задата матрица суседства је 0-1 матрица. Појам (ди)графа и матрице суседства можемо уопштити на тежинске графове.

ДЕФИНИЦИЈА 1.5.6. Функција $w\colon E \to \mathbb{R}$, која свакој грани $e \in E$ придружује реалан број назива се *тежинска функција*, а уређена тројка (V, E, w) назива се *тежински граф*. За шетњу (дужине k) $\ell = e_1 - e_2 - \ldots - e_k$ уводимо *тежину шетње* као

$$w(\ell) = w(e_1) \cdot w(e_2) \cdot \ldots \cdot w(e_k).$$

Означимо са

$$A_{ij}(k) = \sum_{\ell} w(\ell),$$

где сумирање иде по свим шетњама ℓ у диграфу G дужине k, које полазе из v_i и завршавају се у v_j. Уведимо $n \times n$ матрицу $A = (A_{ij})$ са $A_{ij} = A_{ij}(1)$. Овако дефинисана матрица A назива се *матрица суседства* диграфа G у односу на тежинску функцију w.

Касније, у Методи матрица преноса (страна 38), користићемо појмове из претходне дефиниције, а и од суштинског значаја ће бити наредно тврђење.

ТЕОРЕМА 1.5.1. Нека је $k \in \mathbb{N}$. Тада је елемент на позицији (i, j) матрице A^k једнак $A_{ij}(k)$. (Овде узимамо да је $A^0 = I$ чак и ако A није инвертибилна.)

Доказ. Ово следи директно из дефиниције множења матрица. Специјално, имамо

$$(A^k)_{ij} = \sum A_{ii_1} A_{i_1 i_2} \cdots A_{i_{n-1} j},$$

гдещ сума иде по свим низовима $(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}) \in (\mathbb{N}_n)^{k-1}$. Ови сабирци су једнаки 0, изузев ако постоји шетња дужине k $v_i - v_{i_1} - v_{i_2} - \ldots - v_{i_{k-1}} - v_j$. Ако постоји таква шетња, онда је одговарајући сабирак у горњој суми једнак збиру тежина свих таквих шетњи, те одатле следи доказ. $\square$

Због неких тврђења у глави 4. даћемо и дефиницију диграфа $D(A)$ који одговара матрици A и навести Теорему 3.1.2. из [11], коју ћемо користити у неким доказима.

ДЕФИНИЦИЈА 1.5.7. Нека је $A = [a_{ij}]$ матрица реда n. Матрици A придружујемо диграф $D(A)$ са n чворова. Чворове графа $D(A)$ означимо са $1, 2, \ldots, n$. У диграфу имамо грану која води из чвора i у чвор j тежине a_{ij} за свако $i, j \in \mathbb{N}_n$. Тако $D(A)$ има петљу у чвору i тежине a_{ii}. Грана тежине 0, која одговара 0 елементу матрице A, може се уклонити из диграфа $D(A)$ без икаквог даљег утицаја. Један од разлога је и што тежину шетње у $D(A)$ дефинишемо ако производ тежина свих грана које чине ту шетњу.

Како ми радимо са $0-1$ матрицама, имамо да је тежина сваке шетње у диграфу $D(A)$ једнака 1 (оне са тежином 0 немамо, јер смо уклонили гране тежине 0), те стога имамо једноставнију формулацију Теореме 3.1.2. из [11] (њу ћемо само навести без доказа):

ТЕОРЕМА 1.5.2. Нека је $A = [a_{ij}]$ $0-1$ матрица реда n. За сваки природан број k, елемент $a_{ij}^{(k)}$ матрице A^k у i-тој врсти и j-тој колони једнак је броју свих шетњи дужине k у диграфу $D(A)$ које полазе из чвора i и завршавају у чвору j.

Доказ. Тврђење ћемо показати математичком индукцијом по k.

За $k = 0$ ($A^0 = I$) и за $k = 1$ ($A^1 = A$ је матрица суседства) тврђење је тачно. ✓

Нека је тврђење тачно за $k = K$.

Из једнакости $a_{ij}^{(K+1)} = \sum\limits_{t=1}^{n} a_{i\,t}^{(K)} a_{tj}$, закључујемо да је $a_{ij}^{(K+1)}$ једнак броју путева дужине $K+1$ који спајају чворове v_i и v_j. ✓

На основу Принципа математичке индукције добијамо да тврђење важи за сваки $k \in \mathbb{N}$. □

1.6. Фибоначијеви бројеви

Фибоначијеви бројеви представљају свакако један од најпознатијих низова. Више о њима и њиховом историјату може се наћи у [40].

Најчешће се Фибоначијев низ дефинише тако да су индекси померени за 1 у односу на низ (f_n) (има неколико чисто математичких разлога, од којих је један да се тада много природније врши проширење индекса на цео скуп целих бројева). То је низ дат у Табели 1.2. Ти бројеви представљају низ A000045 у *Enciklopediji celobrojnih nizova* [43].

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Табела 1.2. Фибоначијев низ.

Сада ћемо дати и дефиницију Фибоначијевих бројева.

ДЕФИНИЦИЈА 1.6.1. Фибоначијев низ (F_n) је задат следећом рекурентном једначином:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \quad \text{и} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Понекад се уводи и проширење тако да индекси могу да буду цели бројеви:
$F_0 = 0$ и $F_{-a} = (-1)^{a+1} F_a$, па низ изгледа

$$\ldots, -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

Приметимо да и овакав низ задовољава својство да је збир два узастопна члана једнак следећем.

У следећој теореми је дата *комбинаторна дефиниција Фибоначијевих бројева.*

ТЕОРЕМА 1.6.1. Скуп $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ садржи тачно F_{n+2} подскупа (укључујући и празан скуп) у којима се не налазе 2 узастопна природна броја.

Доказ. Означимо са a_n број подскупова скупа $\mathbb{N}_n$ који не садрже 2 узастопна природна броја. За сваки скуп S, који бројимо у a_n, имамо 2 могућности:

1° $\underline{n \notin S}$. У скупу S могу бити сви бројеви из $\mathbb{N}_{n-1}$ (јер број n није у S), али уз услов да нема 2 узастопна. Таквих подскупова има a_{n-1}.

2° $\underline{n \in S}$. Како је број n у скупу S у њему не може бити и број $n-1$, те је $S \setminus \{n\} \subseteq \mathbb{N}_{n-2}$, уз услов да нема 2 узастопна. Таквих подскупова има a_{n-2}.

Стога добијамо да важи рекурентна једначина

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Почетне услове ћемо одредити простим пребројавањем. За $n = 1$ имамо $a_1 = 2$ таква подскупа

$$\emptyset \quad \text{и} \quad \{1\},$$

а за $n = 2$ имамо $a_2 = 3$ таква подскупа

$$\emptyset, \quad \{1\} \quad \text{и} \quad \{2\}.$$

Како имамо исту рекурентну једначину, а само померене почетне услове добијамо да важи $a_n = F_{n+2}$. □

1.6.1. Општи члан Фибоначијевог низа

Следећу формулу за општи члан Фибоначијевог низа је 1843. године показао француски математичар Бине и стога се она понегде у литератури назива и Бинеова формула.

ТЕОРЕМА 1.6.2. Општи члан Фибоначијевог низа је једнак $F_n = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$. □

ТЕОРЕМА 1.6.3. Функција генератриса Фибоначијевог низа једнака је $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$. □

1.6.2. Трибоначијев низ

Име овог низа добијено је укрштањем речи три и Фибоначи. Он је задат на сличан начин као и Фибоначијев.

ДЕФИНИЦИЈА 1.6.2. Трибоначијев низ је задат следећом рекурентном једначином:

$$T_0 = T_1 = 0, \quad T_2 = 1 \quad \text{i} \quad T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}.$$

Првих неколико чланова Трибоначијевог низа је дато у Табели 1.3.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
T_n	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927	1 705	3 136

Табела 1.3. Трибоначијев низ.

Напомена. Ови бројеви чине низ A000073 у *Енциклопедији целобројних низова* [43].

Неколико комбинаторних интерпретација Трибоначијевих бројева можете наћи у [40].

Овај низ се може поопштити на $(r+1)$-*Фибоначијеве бројеве* (енг. $(r+1)$-*step Fibonacci numbers*):

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-r-1},$$

уз почетне услове $a_0 = \ldots = a_{r-1} = 0$ и $a_r = 1$.

За ове бројеве важе и нека поопштења претходних особина. Тако они представљају број пермутација скупа $\mathbb{N}_{n-r+1}$ које задовољавају услов $-1 \leqslant p(i) - i \leqslant r$, за $i = 1, 2, \ldots, n-r+1$, као и број композиција броја $n-r+1$ на сабирке из скупа $\{1, 2, \ldots, r+1\}$, о чему ће бити више речи у потпоглављу 3.5.1.

Напомена. За $r = 3$ добијамо Тетраначијеве бројеве, што је низ A000078; за $r = 4$ то су Пентаначијеви бројеви — A001591; а за $r = 5$ то су Хексаначијеви бројеви — A001592 у *Енциклопедији целобројних низова* [43].

1.6.3. Лукасов низ

Енглески математичар из 19. века Едвард Лукас је кумовао Фибоначијевим бројевима (он их је назвао по Фибоначију због Проблема зечева). Такође, по њему је име добио и један низ који је веома сличан са Фибоначијевим низом и по рекурентној једначини, као и по неким особинама, које ћемо описати у овом одељку.

ДЕФИНИЦИЈА 1.6.3. Лукасов низ (L_n) је задат следећом рекурентном једначином:

$$L_1 = 1, \quad L_2 = 3 \quad \text{i} \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Понекад су почетни услови задати и као $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ (нећемо се освртати на померене Лукасове низове). Ово L_0 ће нам требати кад будемо одређивали функције генератрисе.

ТЕОРЕМА 1.6.4. Општи члан Лукасовог низа је $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. □

ТЕОРЕМА 1.6.5. Функција генератриса $L(x)$ Лукасовог низа износи $L(x) = \dfrac{2-x}{1-x-x^2}$.

У Табели 1.4 је дато првих неколико чланова Лукасовог низа. Ови бројеви чине низ A000032 у *Енциклопедији целобројних низова* [43].

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843

Табела 1.4. Лукасов низ.

Следећа теорема нам даје везу Фибоначијевих и Лукасових бројева. Њу ћемо користити у израчунавањима у Примеру 4.2.5.

ТЕОРЕМА 1.6.6. За сваки $n \in \mathbb{N}$ важи једнакост $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$. $\square$

У следећој теореми је садржана комбинаторна дефиниција Лукасових бројева.

ТЕОРЕМА 1.6.7. Скуп $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ садржи тачно L_n подскупова (укључујући и $\emptyset$) у којима се не налазе 2 узастопна природна броја, као ни 1 и n истовремено.

Доказ. Означимо са a_n број подскупова скупа $\mathbb{N}_n$ који не садрже 2 узастопна природна броја (исто као у Теореми 1.6.1), а са b_n број подскупова скупа $\mathbb{N}_n$ који не садрже 2 узастопна природна броја, као ни 1 и n истовремено. За сваки скуп S, који бројимо у b_n, имамо 2 могућности:

1° $\underline{n \notin S}$. Како број n није у S у њему могу бити сви бројеви из $\mathbb{N}_{n-1}$, али уз услов да нема 2 узастопна. Таквих подскупова има a_{n-1}.

2° $\underline{n \in S}$. Како је број n у S у њему не може бити ни 1 ни $n-1$, те је стога $S \setminus \{n\} \subseteq \mathbb{N}_{n-2} \setminus \{1\}$, опет уз услов да нема 2 узастопна. Таквих подскупова има a_{n-3}.

Стога на основу Теорема 1.6.1 и 1.6.6 добијамо да важи

$$b_n = a_{n-1} + a_{n-3} = F_{n+1} + F_{n-1} = L_n. \qquad \square$$

1.7. Каталанови бројеви

Каталанови бројеви C_n, $n \geqslant 0$, представљају низ природних бројева који се појављује као решење великог броја комбинаторних проблема. Књига [39] садржи задатке који описују чак 66 различитих интерпретација Каталанових бројева! Више о њима можете наћи и у [40].

Првих неколико Каталанових бројева је дато у Табели 1.5. Ови бројеви представљају низ A000108 у *Енциклопедији целобројних низова* [43].

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786	208012	742900	...

Табела 1.5: Каталанови бројеви.

Каталанови бројеви задовољавају једноставну рекурентну релацију, коју ћемо навести у следећој теореми.

ТЕОРЕМА 1.7.1. За Каталанове бројеве важи $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$, уз услов $C_0 = 1$. $\square$

Иако хомогена, ова релација није линеарна, тако да се за њено решавање не могу применити формуле дате у [40]. Уместо тога, искористићемо метод функција генератрисе.

Каталанови бројеви имају једноставну формулу.

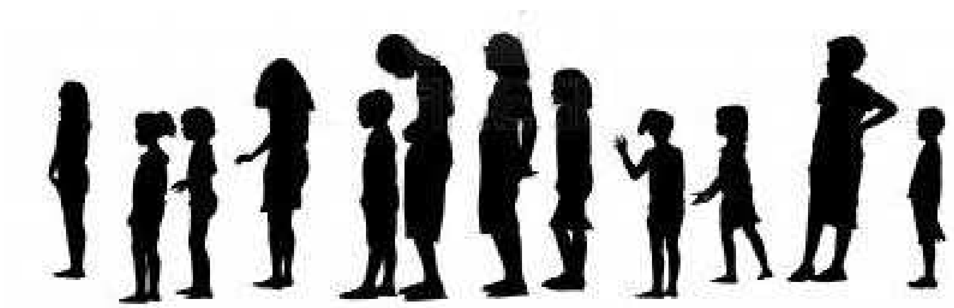
ТЕОРЕМА 1.7.2. За Каталанове бројеве важи једнакост $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. $\square$

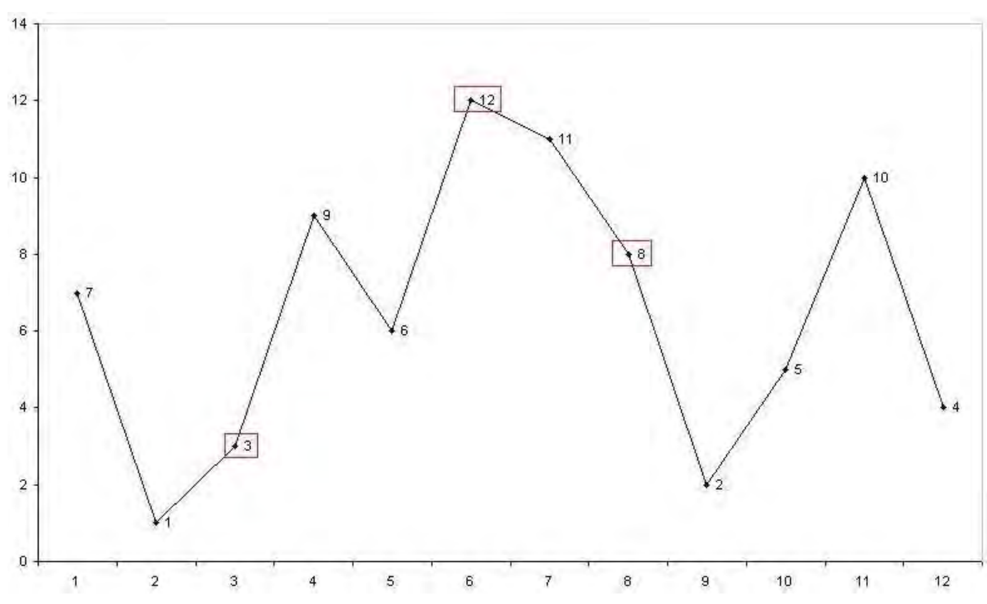
2. Пермутације без датих шаблона

2.1. Основни појмови

Пермутације са ограничењима, тачније пермутације које избегавају дате шаблоне, су део комбинаторике који се последњих десетак година интензивно развија. Ову проблематику ћемо илустровати на једном примеру из свакодневног живота.

Нека се на једном игралишту налази n деце, од којих не постоје 2 детета исте висине. За следећу игру потребно је да се поређају у колону, тако да свако дете гледа у потиљак детета испред њега. Такође, потребно је да свако дете може да види сву децу која су нижа од њега и налазе се у колони испред њега. Колико има различитих колона које задовољавају дате услове?





Означимо бројевима 1, 2, ..., n децу на игралишту, тако да су поређана по висини – са бројем 1 је означено најниже дете, а са n највише. Тако би колона деце (има их $n = 12$) са горње слике била представљена пермутацијом

$$7 \quad 1 \quad 3 \quad 9 \quad 6 \quad 12 \quad 11 \quad 8 \quad 2 \quad 5 \quad 10 \quad 4$$

(последње дете у колони је означено бројем 4 јер постоје 3 детета која су нижа од њега, док је рецимо, шесто дете у колони највише иако је погнуло главу).

Да ли би оваква колона задовољавала дате услове? Не, јер рецимо дете чија је висина 8. по реду не види од највишег детета (12) дете које је 3. по висини, а требало би, јер је то дете ниже од њега и налази се испред њега.

Са друге стране, нпр. за $n = 7$ би

$$6 \quad 7 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 5$$

била добра колона.

Дакле, када је нека колона добра? Колона је добра уколико не садржи 3 елемента a, b и c, тако да се они налазе овим редоследом у колони и да за њих важи $a < c < b$. Кадгод имамо такву ситуацију, тада c не може да види a јер је b који је виши од обојице између њих. За бројеве у овом распореду кажемо да формирају *шаблон облика 132* или краће *132–шаблон* (јер је први од њих a најмањи, тј. 1. по величини, па је следећи b 3. по величини, док је последњи од њих c у средини, тј. 2. по величини од њих тројице).

Слично, ако имамо $a < b < c$, кажемо да бројеви a, b и c формирају *123–шаблон*, а ако имамо $c < a < b$, тада ћемо рећи да бројеви a, b и c формирају *231–шаблон*.

Сада ћемо и строго формално дефинисати појам *шаблона* (енг. *pattern*).

ДЕФИНИЦИЈА 2.1.1. За низ (различитих) бројева $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ уводимо *смањени облик* (енг. *reduced form*), у ознаци $\varrho(a)$, тако што најмањи елемент заменимо са 1, следећи најмањи са 2 и тако даље.

Ова операција на неки начин чува редослед елемената у односу на њихове вредности (у односу на стандардну релацију поретка $\leqslant$).

ПРИМЕР 2.1.1. Смањени облик низа 8157 је $\varrho(8157) = 4123$, док је смањени облик низа 544529 дат са $\varrho(544529) = 322314$. ■

У случају пермутација (тј. низова a дужине k који имају све различите елементе) операцију смањеног облика можемо увести и на следећи начин:

$$\varrho(a_j) = |\{m \colon a_m \leqslant a_j,\ 1 \leqslant m \leqslant k\}|.$$

ДЕФИНИЦИЈА 2.1.2. Нека су $p \in S_n$ и $\tau \in S_k$ две пермутације (уз претпоставку $k \leqslant n$). Тада кажемо да пермутација p *садржи шаблон* τ ако постоји подниз $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ такав да је смањени облик пермутације $p_{i_1}\ p_{i_2}\ \ldots\ p_{i_k}$ баш пермутација τ, тј. $\varrho(p_{i_1}\ p_{i_2}\ \ldots\ p_{i_k}) = \tau$. Уколико пермутација p не садржи шаблон τ тада кажемо да пермутација p *избегава шаблон* τ или краће да је p *tau–избегавајућа* пермутација. Скуп свих пермутација из S_n које избегавају шаблон τ означаваћемо са $S_n(\tau)$.

ПРИМЕР 2.1.2. Пермутација 5716243 садржи два шаблона облика 4132 који се преклапају, то су 7162 и 6243 (јер је $\varrho(7162) = 4132$ и $\varrho(6243) = 4132$). Поред њих ова пермутација има још шаблона облика 4132. Сви такви шаблони су: 5162, 5164, 5163, 5243, 7162, 7164, 7163, 7243, 6243. ■

ПРИМЕР 2.1.3. Пермутација 4215763 избегава шаблон 2413, али не избегава шаблон 3142 због подниза 4273 за који је смањена форма $\varrho(4273) = 3142$. ■

Сада ћемо увести још један појам који ће нам бити касније потребан када уводимо одговарајућу бијекцију.

ДЕФИНИЦИЈА 2.1.3. Елемент пермутације који је већи од свих елемената који му претходе назива се *слева-надесно максимум* (енг. left-to-right maximum), тј. елемент пермутације p_i је слева-надесно максимум ако важи $p_i > p_j$ за све $j < i$.

Напомена. Приметимо да је први елемент у пермутацији увек слева-надесно максимум, док је последњи слева-надесно максимум највећи елемент n. Такође слева-надесно максимуми формирају растући подниз.

ПРИМЕР 2.1.4. У пермутацији 26173854 елементи 2, 6, 7 и 8 су слева-надесно максимуми. ■

2.1.1. Дикови путеви

Сада ћемо увести појам *Диковог пута* (енг. Dyck).

ДЕФИНИЦИЈА 2.1.1. *Диков пут* дужине $2n$ је пут у целобројној решетци $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ између тачака $(0,0)$ и $(2n,0)$ који се састоји само од горњих корака (енг. up-steps) облика $(1,1)$ и доњих корака (енг. down-steps) облика $(1,-1)$. Како је пут у $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ он никад не иде испод x-осе.

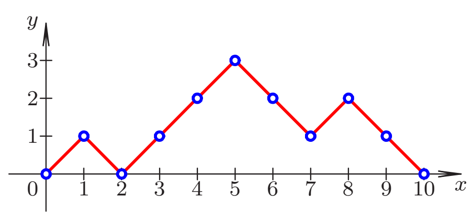
Понекад је згодно кодирати сваки горњи корак са u и сваки доњи корак са d. На тај начин добијамо од Диковог пута одговарајући код који називамо *Дикова реч*. Означићемо са $\mathcal{D}_n$ скуп свих Дикових путева дужине $2n$, а са $\mathcal{D} = \bigcup_{n\geqslant 0} \mathcal{D}_n$ скуп свих Дикових путева.

Висина Диковог пута је највећа вредност y-координате неке тачке са Диковог пута. *Низбрдица* (енг. ascent) је дужина максималног низа узастопних горњих корака, док је *узбрдица* (енг. descent) је дужина максималног низа узастопних доњих корака.

Сваки Диков пут се може задати и преко 2 низа: низа узбрдица и низа низбрдица. Пар низова представља низове узбрдица и низбрдица неког Диковог пута ако задовољава следеће:

- оба низа садрже само природне бројеве;
- оба низа имају исту дужину;
- оба низа имају једнаку дужину;
- свака парцијална сума првог низа није мања од одговарајуће парцијалне суме другог низа.

ПРИМЕР 2.1.1. На Слици 2.1 је приказан један Диков пут дужине 10 коме одговара Дикова реч *uduuuddudd*.



Слика 2.1.

Његова висина је 3 јер му највиша тачка $(5,3)$ има y-координату 3.

Низ узбрдица овог Диковог пута је $(1,3,1)$ (јер прва узбрдица има дужину 1, друга 3, а трећа 1), док је низ низбрдица $(1,2,2)$. ■

2.2. Пермутације без шаблона дужине 3

Навешћемо неколико тврђења за пермутације које избегавају шаблон 132.

ТЕОРЕМА 2.2.1. Број пермутација дужине n које избегавају шаблон 132 једнак је Каталановом броју, тј. $|S_n(132)| = C_n$. □

ТЕОРЕМА 2.2.2. Број пермутација дужине n које избегавају шаблон 123 једнак је Каталановом броју, тј. $|S_n(123)| = C_n$. □

На основу претходне 2 теореме долазимо до тога да број пермутација који избегавају неки шаблон q дужине 3, уопште не зависи од q. Да бисмо то показали искористићемо раније уведене унарне операције над пермутацијама: инверзну пермутацију, обрнуту пермутацију и комплементарну пермутацију (видети дефиниције 1.1.9, 1.1.10 и 1.1.11).

ТЕОРЕМА 2.2.3. Број пермутација дужине n које избегавају неки шаблон q дужине 3 једнак је Каталановом броју, тј. $|S_n(q)| = C_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.

Доказ. Како је 231 обрнута пермутација од 132, имамо да ако пермутација p избегава шаблон 132, онда њена обрнута пермутација p^r избегава 231 и обрнуто. Ова чињеница нам успоставља бијекцију између 132–избегавајућих n-пермутација и 231–избегавајућих n-пермутација. Стога, на основу Теореме 2.2.1, важи $|S_n(231)| = |S_n(132)| = C_n$.

Како је 312 комплементарна пермутација од 132, имамо да важи $|S_n(312)| = |S_n(132)| = C_n$.

Како је 213 обрнута пермутација од 312, имамо да важи $|S_n(213)| = |S_n(312)| = |S_n(132)| = C_n$.

Како је 321 обрнута (а и комплементарна) пермутација од 123, на основу Теореме 2.2.2, важи $|S_n(321)| = |S_n(123)| = C_n$. □

2.3. Пермутације без шаблона дужине 4

За пермутације без шаблона дужине 3 смо у претходном поглављу показали да не зависе од тога који је шаблон дужине 3 у питању. За пермутације без шаблона дужине 4 (и веће), проблем одређивања њиховог броја је значајно тежи. Познато је само неколико шаблона q за које је позната тачна формула за $|S_n(q)|$.

У овом поглављу посматраћемо пермутације без шаблона дужине 4. Тих шаблона има укупно 24, али коришћењем инверзне, обрнуте и комплементарне пермутације, као и неких теже уочљивих трикова, може се показати да су суштински различите само шаблони 1234, 1342 и 1324. Компјутерска израчунавања већ за мале вредност ($n \leqslant 8$) нам показују да су пермутације без ових шаблона различите:

- за $|S_n(1342)|$ низ је: 1, 2, 6, 23, 103, 512, 2740, 15485, ...
- за $|S_n(1234)|$ низ је: 1, 2, 6, 23, 103, 513, 2761, 15767, ...
- за $|S_n(1324)|$ низ је: 1, 2, 6, 23, 103, 513, 2762, 15793, ...

За разлику од шаблона дужине 3, видимо да $|S_n(q)|$ више није независно од шаблона q. Такође, изгледа да за $n \geqslant 7$ важи

$$|S_n(1342)| < |S_n(1234)| < |S_n(1324)|.$$

Ово се може показати да стварно важи.

Изненађујуће је (у смислу да не знамо ваљано објашњење), да је монотон шаблон 1234 у средини. Било је за очекивати да је њега најлакше или најтеже избећи.

Више о овом типу пермутација са ограничењима може се наћи у доста литературе, нпр. [10, 19, 23].

2.4. Пермутације без више шаблона

И о овој проблематици може се више наћи у литературу, нпр. за референце видети [**?**].

2.4.1. Пермутације без шаблона 1243 и 2143

У раду [**?**] Ерик Еге (енг. Eric S. Egge) и Туфик Мансур (фра. Toufik Mansour) су се бавили пермутацијама које избегавају и 1243 и 2143. Они су помоћу технике која користи функције генератриса показали да за пермутација које истовремено избегавају шаблоне 1243, 2143 и 231 важи:

$$|S_n(1243, 2143, 231)| = (n+2) \cdot 2^{n-3}.$$

На крају рада [**?**, стр. 30] они су поставили неколико отворених проблема везаних за тај рад. Трећи од њих је био да се покаже претходна једнакост, али комбинаторно. Ми ћемо овде дати 2 комбинаторна доказа, један који се ослања на решава ње рекурентних једначина и други који успоставља бијекцију са неким посебним Диковим путевима.

ТЕОРЕМА 2.4.1. За број пермутација из скупа S_n које истоврено избегавају шаблоне 1243, 2143 и 231 важи:

$$|S_n(1243, 2143, 231)| = (n+2) \cdot 2^{n-3}, \qquad (n \geqslant 2).$$

Доказ 1. Тврђење ћемо показати математичком индукцијом. Означимо са a_n број пермутација које истоврено избегавају шаблоне 1243, 2143 и 231.

За $n = 2$ имамо само 2 пермутације 12 и 21 и обе избегавају сва 3 шаблона (јер су дужине шаблона веће од 2). За $n = 3$ имамо да је $a_3 = C_3 = 5$ (где C_n означава n-ти Каталанов број) јер овде од $3! = 6$ пермутација скупа $\{1, 2, 3\}$ избацујемо само 231.

Претпоставимо да тврђење важи за $n-1$: $a_{n-1} = (n+1) \cdot 2^{n-4}$. Покажимо да важи и за n.

Прво ћемо показати да се највећи број n може налазити само на првој, другој или последњој позицији. Претпоставимо да је n на k-тој позицији, $3 \leqslant k \leqslant n-1$. Нека се на првој позицији налази a, на другој b и на последњој c. Уколико је $a < c$ и $b < c$ тада елементи $abnc$ образују или шаблон

1243 или 2143. Уколико то није ситуација онда је c мањи $d = \max\{a, b\}$, али тада елементи dnc формирају шаблон 231. Тиме смо показали да ако је n на некој позицији различитој од прве, друге или последње онда таква пермутација не припада скупу $S_n(1243, 2143, 231)$.

Следеће што примећујемо је да ако је број n на првој или последњој позицији тада он не може бити део ниједног шаблона 1243, 2143 или 231 јер се у свим тим шаблонима највећи број налази негде у средини. Стога је и број пермутација из $S_n(1243, 2143, 231)$ код којих је n на првом месту једанак $a_{n-1} = |S_{n-1}(1243, 2143, 231)|$ и број пермутација код којих је n на последњем месту једанак је такође a_{n-1}.

Остаје још да видимо шта се дешава уколико је n на другом месту. Тада на првом мора бити 1 (у противном ако би на првом месту био неки број $a > 1$ онда би $an1$ чинили забрањени 231 шаблон). Опет број n не може бити део ниједног шаблона 1243, 2143 или 231, али 1 на првој позицији може бити део шаблона 1243. Како је смањени облик од 243 једнак $r(243) = 132$, то у остатку ове пермутације не можемо имати шаблон 132. Како је 132 и део шаблона 2143, то добијамо да је број тражених пермутација у овом случају једнак $S_{n-2}(132, 231)$. Овај број пермутација са ограничењима је познат, видети нпр. решење задатка 2 из главе 14 књиге Миклоша Боне „Шетња кроз комбинаторику“, [**?**, стр. 334]. Стога добијамо да је број тражених пермутација у случају када је n на другој позицији једнак $|S_{n-2}(132, 231)| = 2^{n-3}$.

Тиме смо добили рекурентну једначину $a_n = a_{n-1} + 2^{n-3} + a_{n-1}$, тј. нехомогену линеарну рекурентну једначину са константним коефицијентима

$$a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-3}.$$

Сада још остаје да искористимо Принцип математичке индукције:

$$a_n = 2 \cdot \left((n+1)2^{n-4}\right) + 2^{n-3} = (n+2) \cdot 2^{n-3},$$

што је и требало показати. □

Сада ћемо дати и други доказ овог тврђења. У том доказу ћемо користи следеће помоћно тврђење, које ћемо такође показати на 2 различита начина.

ЛЕМА 2.4.2. Важи $\sum\limits_{i=2}^{n} i \cdot \binom{n-2}{i-2} = (n+2) \cdot 2^{n-3}$.

Доказ 1. Означимо дату суму са $S = \sum\limits_{i=2}^{n} i \cdot \binom{n-2}{i-2}$. Из Биномне формуле, када уведемо смену $i = k - 2$, имамо да је $(x+1)^{n-2} = \sum\limits_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k = \sum\limits_{i=2}^{n-2} \binom{n-2}{i-2} x^{i-2}$. Помножимо обе стране са x^2 и означимо тако добијену функцију са $f(x)$:

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1)^{n-2} = \sum_{i=2}^{n-2} \binom{n-2}{i-2} x^i.$$

Како је извод $(x^2 \cdot (x+1)^{n-2})' = 2x \cdot (x+1)^{n-2} + x^2 \cdot (n-2)(x+1)^{n-3} = (x+1)^{n-3} \cdot (nx^2 + 2x)$, то добијамо једнакост:

$$f'(x) = (x+1)^{n-3} \cdot (nx^2 + 2x) = \sum_{i=2}^{n-2} i \cdot \binom{n-2}{i-2} x^{i-1}.$$

Када ту заменимо $x = 1$ добијамо тражену једнакост. □

Доказ 2. Претпоставимо да у кутији имамо скуп B који се састоји од n куглица, од чега су 2 плаве и $n-2$ црвених куглица. На 2 начина ћемо пребројати број различитих избора уређеног пара (S, k), при чему је скуп $S \subseteq B$ такав да садржи обе плаве куглице и $k \in S$ је произвољна куглица из S.

Лева страна. Прво одаберимо $i-2$ куглице од $n-2$ црвених, што можемо учинити на $\binom{n-2}{i-2}$ начина, а затим додамо још 2 плаве куглице да бисмо добили скуп S. Сада од тих i куглица бирамо једну, што можемо учинити на $\binom{i}{1} = i$ начина. Како скуп S може да садржи произвољан број i куглица, $2 \leqslant i \leqslant n$, добијамо да је тражени број избора пара (S, k) једнак $\sum\limits_{i=2}^{n} i \cdot \binom{n-2}{i-2}$.

Десна страна. Ако је издвојена куглица црвена њу можемо одабрати на $\binom{n-2}{1} = n-2$ начина, а остале црвене (има их $n-3$) или јесу или нису у S, па избора (S,k), где је k црвена куглица има 2^{n-3}. Ако је издвојена куглица плава њу можемо одабрати на 2 начина, а остале црвене на 2^{n-2}. Укупно избора пара (S,k) има $(n-2)\cdot 2^{n-3} + 2\cdot 2^{n-2} = (n+2)\cdot 2^{n-3}$.

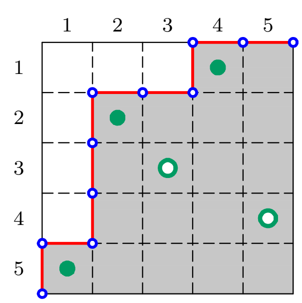
Тиме смо комбинаторно показали да важи тражена једнакост $\sum\limits_{i=2}^{n} i\cdot\binom{n-2}{i-2} = (n+2)\cdot 2^{n-3}$. □

Сада се враћамо на други доказ Теореме 2.4.1.

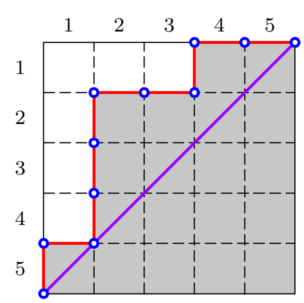
Доказ 2. Користићемо пресликавање које свакој пермутацији из скупа $S_n(132)$ придружује један Диков пут. То пресликавање је дато у раду Серђи Елизалде и Игора Пака [?], а оно је базирано на пресликавању Кратнхалера из [?]. Ми ћемо користити и графичка представљања Маркуса Фулмека из [?]. У тим радовима можете наћи и доказе да је ово пресликавање бијекција, тако да ћемо се ми овде само задржати на опису.

Прво да објаснимо како долазимо до скупа $S_n(132)$. Повратна (енг. reversal) бијекција $r: S_n \to S_n$ дата са $p_1p_2\dots p_n \mapsto p_n\dots p_2p_1$ пресликава пермутацију (шаблон) 231 у 132, а самим тим и скуп $S_n(231)$ у скуп $S_n(132)$. Чак штавише пресликавање c слика $S_n(1243, 2143, 231)$ на $S_n(3421, 3412, 132)$.

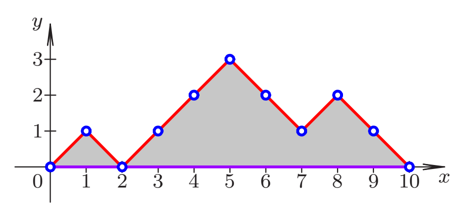
Сада ћемо описати пресликавање $f\colon S_n(132) \to \mathcal{D}_n$. Представимо пермутацију $p \in S_n(132)$ преко таблице (неки аутори ово представљање називају пермутациони граф) облика $n\times n$ која у пољу (i,j) има одређени симбол (зелени кружићи на Слици 2.2) ако и само ако је $p_i = j$. Посебно ћемо означити поља која одговарају слева-надесно максимумима (то су пуни зелени кружићи на Слици 2.2). Уочимо полигоналну фигуру (иштрафирану сивом бојом на Слици 2.2) коју формирају сва поља која су испод или десно од неког слева-надесно максимума, тј. сва поља (x,y) таква да за неки слева-надесно максимум (i,p_i) важи $x \geqslant i$ и $y \geqslant p_i$. Ротирајмо ову полигоналну фигуру (са Слике 2.3) за 45° у смеру казаљки на сату и посматрајмо њену горњу границу, тј. део који је изнад споредне дијагонале пре ротирања (ова дијагонала је на свим сликама представљена љубичастом бојом). Тај део је баш један Диков пут D (представљен на Слици 2.4; то је исти Диков пут као и на Слици 2.2). На тај начин смо описали тражену бијекцију $f(p) = D$.



Слика 2.2.



Слика 2.3.



Слика 2.4.

Од Дикових путева можемо добити обрнутим поступком пермутације из скупа $S_n(132)$: слева-надесно максимуми су у пољима која су ограничена са u и d (не d и u) Диковог пута пре ротирања, а остали елементи узимају што мању вредност (тј. за „слободно“ i бирамо најмање „слободно“ p_i).

Пермутацијама из $S_n(3421, 3412, 132)$ одговарају Дикови путеви који након другог доњег корака не садрже 2 узастопна горња корака (можемо разматрати и одговарајуће Дикове речи које након другог слова d не садрже 2 узастопна слова u). Посматрајмо на колико различитих начина можемо доћи до тачке $(i+2, i-2)$ у Диковом путу. Њој одговара почетак Дикове речи који се састоји од i слова u и 2 слова d, при чему је слово u прво, а слово d последње. Стога се то своди на бирање једне од i средњих позиција за прво појављивање слова d, што можемо учинити на $\binom{i}{1} = i$ начина. Остатак речи (који се састоји од $2n-(i+2) = 2n-i-2$ слова) не сме да садржи два узастопна слова u, тј. након сваког слова u иде слово d (то важи и за последње слово u јер се Дикова реч увек завршава словом d), што се своди на бирање позиција за $n-i$ везана слова ud и преосталих $i-2$ „самих“ слова d, а то можемо учинити на $\binom{n-2}{i-2}$ начина. Тиме смо показали да је

$$|S_n(3421, 3412, 132)| = \sum_{i=2}^{n} i \cdot \binom{n-2}{i-2},$$

што на основу Леме 2.4.2 даје $|S_n(3421, 3412, 132)| = (n+2) \cdot 2^{n-3}$, што је и требало показати. $\square$

На сличан начин (само мало компликованије) можемо показати и четврти отворен проблем из [**?**, стр. 31] свођењем на линеарну рекурентну везу:

$$|S_n(1243, 2143, 321)| = \tbinom{n-1}{0} + \tbinom{n-1}{1} + 2 \cdot \tbinom{n-1}{2} + 2 \cdot \tbinom{n-1}{3}.$$

3. Пермутације са ограничењима

3.1. Увод и историјат

3.1.1. Перманенти

Перманент је важна функција над матрицама. Веома наликује детерминанти, али за разлику од детерминанти може се рачунати и за матрице које нису квадратне. Перманент су увели 1812. године Бине и Коши (независно један од другог). У наредних скоро 2 века, њима су се бавили многи познати математичарима. О перманентима је Хенрик Минк (енг. Henryk Minc) написао целу књигу, [36].

Перманент матрице се може искористити за израчунавање пермутација и варијација са ограничењима. Више о томе може се видети у књизи [16], као и радовима [2] и ... У овом раду тиме ћемо се бавити касније (видети Теорему 3.1.5).

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.1. Перманент матрице $A = (a_{ij})$ облика $m \times n$, где је $m \leq n$, означавамо са $\mathrm{Per}(A)$ или $\mathrm{Per}(A)$. Он је једнак

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{m} a_{i\sigma(i)},$$

где сумирање иде по свим $1-1$ функцијама $\sigma : \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

У овом раду углавном ћемо се бавити само перманентима квадратних матрица (разлика је и у ознаци – $\mathrm{Per}(A)$ представља перманент произвољне матрице, док са $\mathrm{per}(A)$ означавамо перманент квадратне матрице). Иако је то само специјални случај претходне дефиниције за $m = n$, ми ћемо га издвојити у засебну дефиницију јер ћемо га у том облику много више користити.

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.2. Нека је $A = (a_{ij})$ релна квадратна матрица реда n. Тада је *перманент* матрице A, у ознаци $\mathrm{per}(A)$ или $\mathrm{per}\, A$, једнак следећој суми по свим пермутацијама из скупа S_n:

$$\mathrm{per}\, A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}.$$

Видимо да је ова функција над матрицама веома слична детерминанти — у дефиницији се разликују само у члану $\mathrm{sgn}\, \sigma$ (знак пермутације) који се јавља код детерминанте. Али та разлика чини да већина особина које имамо код детерминанти не важе, нпр. код детерминанти смо имали ако су 2 врсте (или колоне) пропорционалне да је тад детерминанта једнака 0, аналог томе код перманената не важи. Такође не смемо додавати врсту некој другој. Стога се перманент теже рачуна него детерминанта и можемо применити Лапласов развој по елементима неке врсте или колоне (код њега сви сабирци иду са знаком $+$, тј. нема $(-1)^{i+j}$).

Још неке особине (које директно следе из дефиниције перманента) које ћемо користили када будемо рачунали перманенте су да ако матрица A има врсту (или колону) са свим елементима 0, тада је и $\operatorname{per} A = 0$. Ако је $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ онда је $\operatorname{per} A = ad + bc$.

Слично као и код детерминанти уводимо графовску дефиницију перманента (аналогно се и показује да је она еквивалентна са класичном дефиницијом перманента).

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.3. *Перманент* матрице A је број који је једнак следећој суми преноса свих фактора $F \in \mathcal{F}$ диграфа G_A придруженог матрици A:

$$\operatorname{per}(A) = \sum_{F \in \mathcal{F}} p(F).$$

Наредна 2 тврђења ће нам бити потребна да бисмо могли да уведемо перманент графа.

ТЕОРЕМА 3.1.1. Нека је матрица B транспонована матрица матрице A, тј. $B = A^T$. Тада важи да је $\operatorname{per} B = \operatorname{per} A$.

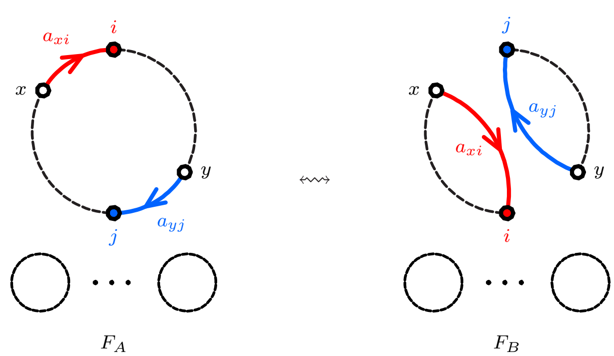
Доказ. Графовски доказ ове особине иде потпуно аналогно као и доказ одговарајућ теореме за детерминанте само је једноставније јер не морамо разматрати број контура.

Диграф G_{A^T} се добија од диграфа G_A тако што се свим гранама у G_A промени оријентација (али се задржи пренос). Стога сваком фактору F из G_A одговара један фактор F^T из G_{A^T} састављен од истих грана (само промењене оријентације). Преноси та 2 фактора су исти, тј. $p(F) = p(F^T)$. Како се на овај начин скуп фактора $\mathcal{F}$ диграфа G_A бијективно слика у скуп фактора $\mathcal{F}^T$ диграфа G_{A^T} добијамо да је $\operatorname{per} A^T = \sum_{F^T \in \mathcal{F}^T} p(F^T) = \sum_{F \in \mathcal{F}} p(F) = \operatorname{per} A$. $\square$

Напомена. На основу ове теореме добијамо да свака особина која важи за врсте матрице A важе и за колоне матрице A.

ТЕОРЕМА 3.1.2. Ако се матрица B добија тако што у матрици A две врсте (колоне) замене места онда је $\operatorname{per} B = \operatorname{per} A$.

Доказ. Графовски доказ ове особине иде потпуно аналогно као и доказ одговарајуће теореме за детерминанте. Овде је само разматрање једноставније јер у дефиницији перманента нема чланова са (-1).



Слика 3.1. Заменом места 2 врсте (колоне) матрице њен перманент се не мења.

Променом места i-те и j-те врсте матрице A (то је матрица B) добијамо да се и диграф G_A мења (у G_B) тако што чвор i са свим гранама које су улазиле у њега (то су црвене гране) замени место са чвором j и обрнуто, чвор j са свим гранама које су улазиле у њега (то су плаве гране) замени место са чвором i. Све те гране су сачувале и свој пренос. То је приказано на Слици 3.1.

Фактору F_A који имамо при рачунању детерминанте $\det A$ одговара фактор F_B. Оба ова фактора имају исте преносе, $p(F_B) = p(F_A)$. Значи допринос сваког фактора F_B при рачунању перманента $\operatorname{per} B$ једнак је доприносу одговарајућег фактора F_A (при рачунању $\operatorname{per} A$). Стога је $\operatorname{per} B = \operatorname{per} A$. □

ТЕОРЕМА 3.1.3. Перманент матрице суседства графа, $\operatorname{per} A_G$, је инваријанта графа.

Доказ. Како се свака пермутација (чворова графа) може представити као композиција транспозиција, довољно је да покажемо да матрице графова који се добијају транспозицијом (тј. заменом) 2 чвора имамју једнак перманент.

Нека се граф G добија од графа G заменом (у нумерацији) чворова i и j. Тада се матрица суседства A_G добија тако што у матрици суседства A_G прво заменимо места i-те и j-те врсте, а затим заменимо места i-те и j-те колоне. Када у сваком од ова 2 корака применимо претходну лему добијамо да је $\operatorname{per} A_G = \operatorname{per} A_G$. Тиме смо показали да перманент не зависи од нумерације чворова, па је он једна инваријанта графа. □

На основу претходног тврђења имамо следећу дефиницију (тј. претходним тврђењем смо показали да је перманент графа добро дефинисан).

ДЕФИНИЦИЈА 3.1.4. *Перманент графа* G, $\operatorname{per}(G)$, дефинишемо као перманент било које матрице суседства графа.

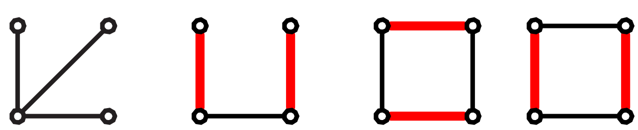
Навешћемо и тврђење које повезује савршена спаривања у бипартитним графовима са перманентом.

ТЕОРЕМА 3.1.4. Нека је G бипартитан граф. Тада је број савршених спаривања у G једнак $\sqrt{\operatorname{per}(G)}$. □

Илуструјмо ово тврђење на једном примеру.

ПРИМЕР 3.1.1. Одредити перманенте бипартитних графова $K_{1,3}$, P_4 и C_4.

Решење. На наредној слици су приказани ови графови са њиховим савршеним спаривањима, тј. звезда $K_{1,3}$ нема савршено спаривање, пут P_4 има 1 савршено спаривање, а контура C_4 има 2 савршена спаривања.



Проверимо резултате добијене малопре и преко перманената (све перманенте ћемо развијати по првој колони).

$$\operatorname{per}(K_{1,3}) = \operatorname{per}\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix} = \operatorname{per}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \operatorname{per}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \operatorname{per}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = 0+0+0 = 0 = 0^2.$$

$$\operatorname{per}(P_4) = \operatorname{per}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix} = \operatorname{per}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} = \operatorname{per}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} + \operatorname{per}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} = 1+0 = 1 = 1^2.$$

$$\operatorname{per}(C_4) = \operatorname{per}\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix} = \operatorname{per}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} + \operatorname{per}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix} = \operatorname{per}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} + \operatorname{per}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} + \operatorname{per}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} + \operatorname{per}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} = 1+1+1+1 = 4 = 2^2.$$ ■

У наредном потпоглављу ћемо се поново бавити перманентима и повезаћемо их са бројем пермутација са ограничењима (Теорема 3.1.5).

3.1.2. Појам пермутације са ограничењима

Сада настављамо тамо где смо стали у Прегледу основних појмова када смо разматрали пермутације. Генерализација Примера 1.1.1 је појам *пермутација са ограничењима.*

Пермутације са ограничењима могу се описати $n \times n$ $(0,1)$-матрицом $A = (a_{ij})$ код које је:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако елемент } x_j \text{ може заузети } i\text{-то место у пермутацији;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ову матрицу називамо и *придружена матрица.*

ПРИМЕР 3.1.2. Одредимо $(0,1)$-матрицу A која одговара пермутацијама елемената скупа $\mathbb{N}_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$ које задовољавају услов $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 2$.

Решење. Тражена матрица је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

Елементи у црвеним квадратићима одређују једну пермутацију са ограничењима.
У првом реду имамо 1 у квадратићу на другом месту, стога је $p(1) = 2$.
У другом реду имамо 1 у квадратићу на четвртом месту, стога је $p(2) = 4$ итд.
Овако долазимо до пермутације $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, или краће записано 2 4 1 5 3 6. ■

Сада ћемо навести добро познату чињеницу у вези броја пермутација са ограничењима.

ТЕОРЕМА 3.1.5. Број пермутација са ограничењима је дат преко перманента (видети страну 29) квадратне матрице A:

$$\operatorname{per} A = \sum_{p \in S_n} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)},$$

где се сумирање врши по свим пермутацијама $p \in S_n$ скупа $\mathbb{N}_n$.

Доказ. У датој суми, само производи који одговарају пермутацијама p које задовољавају сва ограничења имају вредност 1; остали производи су једнаки 0. Стога је број пермутација са ограничењима једнак перманенту придружене матрице A. □

Илуструјмо ова израчунавања на пермутацијама из Примера 1.1.1.

ПРИМЕР 3.1.3. Одредимо број пермутацијама из Примера 1.1.1 коришћењем претходне теореме.

Решење. Матрица A која одговара пермутацијама скупа $\mathbb{N}_5 = \{1,2,3,4,5\}$ који задовољава услове $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 3$ и $p(i) - i \neq -1, 2$ је једнака

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Према претходној теореми имамо да је број тражених пермутација, означимо га са a_n, једнак перманенту матрице A, тј. $a_n = \operatorname{per} A$.

Користићемо Лапласов развој да бисмо израчунали овај перманент. Лапласов развој перманента је сличан Лапласовом развоју детерминанте, само без члана $(-1)^{i+j}$ (слична разлика као и у дефиницијама перманента и детерминанте).

$$\begin{aligned} a_n &= \operatorname{per} \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0 \\ 0&1&1&0&1 \\ 1&0&1&1&0 \\ 0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&0&1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \operatorname{per} \begin{bmatrix} 1&1&0&1 \\ 0&1&1&0 \\ 1&0&1&1 \\ 0&1&0&1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \operatorname{per} \begin{bmatrix} 1&0&1&0 \\ 1&1&0&1 \\ 1&0&1&1 \\ 0&1&0&1 \end{bmatrix} = \operatorname{per} \begin{bmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&1 \\ 1&0&1 \end{bmatrix} + \operatorname{per} \begin{bmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&0 \\ 1&0&1 \end{bmatrix} + \operatorname{per} \begin{bmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&1 \\ 1&0&1 \end{bmatrix} + \operatorname{per} \begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 1&0&1 \\ 0&1&1 \end{bmatrix} \\ &= (1+1+0+0+0+0) + (1+0+0+1+0+0) + (1+0+0+1+0+0) + (0+0+1+0+1+1) = 9. \end{aligned}$$

Први и други перманент смо развили по првој колони, а трећи перманент по првој врсти. последња четири перманента смо израчунали по Сарусовом правилу (слично као и за детерминанте, али опет без минуса, тј. код перманента сви чланови имају знак $+$).

Ова израчунавања није тешко спровести за фиксирано и мало n (овде је $n = 5$), али ми желимо да дођемо до резултата у општем случају, тј. за произвољно n. У ту сврху ћемо увести нашу технику (као и неке друге) у овом поглављу. ■

Пермутација са јаким ограничењима (енг. *strongly restricted permutations*; овај термин је увео Дерик Хенри Лемер у [29]), је пермутација код које је број $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ уједначено мали (енг. uniformly small), тј. $r_i \leqslant K$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где је K природан број који не зависи од n. Код *пермутација са слабим ограничењима* (енг. *weakly restricted permutations*) је број $n - r_i$ уједначено мали.

Пермутације из Примера 1.1.1 и 3.1.2 (Пример 3.1.3 се бави истим пермутацијама као и Пример 1.1.1) представљају пермутације са јаким ограничењима.

Најпознатији проблеми из класе пермутација са слабим ограничењима су тзв. “le Problème des Rencontres” (деранжмани, енг. derangements) и “le Problème des ménages”. Са њима ћемо се бавити у наредна 2 потпоглавља.

3.1.3. Проблем спаривања (деранжмани)

Познати проблем поклапања или спаривања (енг. coincidences, matches, фра. “le Problème des Rencontres”) је оригинално постављен у специјалном случају за 13 карти. То су учинили Пјер Монморт (фра. Pierre R. Montmort) 1708. године и Јохан Бернули (фра. Johann Bernoulli) 1714. године. Поставка овог проблема је:

Одредити број пермутација без фиксних тачака.

Пермутације без фиксних тачака се уобичајено називају *деранжмани*.

Придружена матрица у “Problème des Rencontres” је $A = J_n - I_n$, где I_n означава јединичну матрицу, а J_n матрицу реда n која има све елементе једнаке 1.

Илуструјмо ово за $n = 6$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Елементи у црвеним квадратићима одређују један деранжман $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, или краће 2 4 1 5 3 6.

У скупу свих пермутација из Примера 1.1.1 само је 9-та пермутација, 4 5 1 2 3, деранжман. Приметимо да је пермутација деранжман ако и само ако одговарајући оријентисани граф не садржи петље.

Абрахам Моавр (фра. Abraham de Moivre) је 1718. решио општи случај за n елемената помоћу Принципа укључења-искључења. Број D_n свих деранжмана скупа $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ износи:

$$D_n = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Познате су и две рекурентне везе за број деранжмана:

$$D_n = n \cdot D_{n-1} + (-1)^n, \qquad D_0 = 1$$

и Ојлерова (нем. Leonard Euler) рекурентна релација (пронашао је 1751. године):

$$D_n = (n-1) \cdot (D_{n-1} + D_{n-2}), \qquad D_0 = 1, \quad D_1 = 0.$$

На основу ових рекурентних веза можемо израчунати број деранжмана D_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
D_n	1	0	1	2	9	44	265	1 854	14 833	133 496	1 334 961	...

Табела 3.1: Број деранжмана.

То је низ A000166 у [43].

Витворт (енг. W. A. Whitworth) је 1867. у својој књизи о комбинаторици игара на срећу, разматрао проблем упаривања и допринео је његовој популаризацији. Сличност рекурентних веза за D_n одговарајућим рекуренцијама за факторијале,

$$n! = n(n-1)!, \qquad 0! = 1,$$

$$n! = (n-1)\big((n-1)! + (n-2)!\big), \qquad 0! = 1, \quad 1! = 1,$$

је утицала да Витворт бројеве D_n назове *n-субфакторијалима* (енг. *n-subfactorial*).

МекМахон (енг. P. MacMahon) је у периоду између 1902. и 1916. године разматрао овај проблем у светлу функција генератриса и добио је фукцију генератрисе за број пермутација n карата са k фиксних тачака.

3.1.4. Проблем распоређивања за столом

Проблем распоређивања за столом (фра. "le Problème des ménages"; енг. the menáges problem) је један од класичних проблема пребројавања. Поставио га је и решио француски математичар Лукас (фра. François Edouard Anatole Lucas; правилније је изговарати Лука́, али ћемо ипак овако због Лукасовог низа) 1891. године. Пре тога, под разним мало другачијим формулацијама, овај проблем су 1878. године изучавали Артур Кејли (енг. Arthur Cayley) и Муир (фра. T. Muir). У овом проблему се тражи следеће:

> Одредити број различитих начина на који се могу распоредити n брачних парова око округлог стола[2] тако да мушкарци и жене седе наизменично и да нигде не седи муж до своје жене.

Можемо претпоставимо да прво распоредимо жене (то можемо учинити на $2 \cdot n!$ начина). Сада ћемо означити:

(а) n жена бројевима 1 до n у математичком смеру (супротно од смера казаљки на сату) почевши од неке од њих,

(б) n празних места бројевима 1 до n у математичком смеру почев од места које је лево од жене којо је додељен број 1 и

(в) n мушкараца тако да сваки муж добије исти број као и његова жена.

Овако смо пребројавање различитих начина распоређивања n мушкараца на n празних места између жена (тако да ниједан муж не седи до своје жене) свели на одређивање броја M_n пермутација $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ скупа $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ које задовољавају следећа ограничења:

$$p_i \neq i, \quad p_i \neq i+1 \quad \text{за } i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad \text{и} \qquad p_n \neq n, \quad p_n \neq 1.$$

Бројеви M_n се називају *редуковани бројеви распоређивања* (енг. *reduced menáges numbers*). Формула за M_n је дата са:

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

и доказ ове чињенице (помоћу Принципа укључења-искључења) може се наћи у [12, Пример 4.5]. То је доказ француског математичара Тушара (фра. J. Touchard) из 1934. године.

И за редуковане бројеве распоређивања важе две рекурентне везе:

$$M_n = \frac{(n^2-2n) \cdot M_{n-1} + n \cdot M_{n-2} - 4(-1)^n}{n-2} \qquad \text{за } n \geqslant 4, \qquad M_2 = 0,\ M_3 = 1.$$

$$(n-1) \cdot M_{n+1} = (n^2 - n + 1) \cdot (M_n + M_{n-1}) + n \cdot M_{n-2} \qquad \text{за } n \geqslant 4, \quad M_2 = 0,\ M_3 = 1,\ M_4 = 2.$$

На основу ових формула можемо израчунати редуковане бројеве распоређивања M_n:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M_n	0	1	2	13	80	579	4 738	43 387	439 792	...

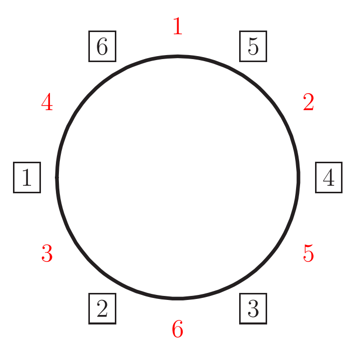
Табела 3.2: Редуковани бројеви распоређивања M_n.

То је низ A000179 у [43].

Укупан број различитих распореда седења n брачних парова око округлог стола тако да мушкарци и жене седе наизменично и да нигде не седи муж до своје жене једнак је $2n! \cdot M_n$. То је низ A059375 у [43].

Илуструјмо ово за $n = 6$. Придружена матрица за редуковане бројеве распоређивања M_n је:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{1} & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



[2]Иако се у већини комбинаторних задатака при распоређивању за округли сто узима да је битан распоред људи, а не тачно ко где седи, овде није таква ситуација, него је битно ко је заузео које место. Округао сто је овде да би и две особе са крајева низа биле суседне!

Елементи у квадратићима одређују пермутацију са ограничењима $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, или краће 3 6 5 2 1 4. Тој пермутацији одговара распоред седења за столом који је представљен на претходној слици десно (број сваке жене је у квадратићу, док је број сваког мушкарца представљен црвеном бојом).

3.1.5. Историјат

Ово поглавље ћемо завршити са још мало историјских података, али и увођењем ознака које ћемо користити у остатку ове главе.

Ирвин Каплански (енг. Irving Kaplansky) је приступио проблему на други начин и дао неколико генерализација ова два проблема ([20], [21]) 1939. и 1943. године. Општи метод пребројавања пермутација са ограничењима, тзв. Теорију топовских полинома (енг. "Rook polynomials"; у [38] су Главе 7 и 8 посвећене овој методи) су заједно развили Ирвин Каплански и Џон Риордан (енг. John Riordan) кроз серију радова (први од њих је био [22] 1946. године). Ноа Менделсон (енг. Noah S. Mendelsohn) је у [34, 35] посматрао одређене типове пермутација са слабим ограничењима и неке посебне типове пермутација са јаким ограничењима. Он је користио технику диференцног оператора (енг. difference operator) и преводио је рекурентне везе за операторске полиноме (енг. operator polynomials) у асимптотске редове (енг. asymptotic series). Рене Лагранж (фра. René Lagrange [28]) је испитивао неке специјалне случајеве пермутација са јаким ограничењима, тачније пермутације које задовољавају услов $|p(i)-i| \leqslant d$, где је d био неки од бројева 1, 2, ор 3. Ричард Стенли (енг. Richard P. Stanley) је у својој двотомној легендарној књизи "Enumerative Combinatorics", [39, Примери 4.7.7, 4.7.15 и 4.7.16], испитивао исте те типове помоћу Метода матрица преноса (енг. "Transfer-matrix Method") као и технике коју је он звао Факторизација у слободним моноидима (енг. "Factorization in Free Monoids"; више о овоме поред [39] можете наћи и у [31]). Његов рад је изузетно значајан јер је он први развио технику која је могла да се примени у више различитих (мањих) случајева. Он је добијао функције генератрисе датих низова, као и неке закључке везане за те функције генератриса. Драгош Цветковић и Слободан Симић су у [17] посматрали низове се ограничењима $|a_i - a_{i+1}| \leqslant 1$ и дали њихову везу са теоријом графова.

У новије време, Норвежанин Торлајв Клове (нор. Torleiv Kløve) у [25] добио решење неких симетричних случајева, $1 \leqslant d \leqslant 6$, а и пронашао је вредности за $n \leqslant 30$ и $d \leqslant 10$. Његов метод је незнатна модификација наше методе, али захваљући тој модификацији он је успео да оде даље у раду од нас, али само за симетричне случајеве. У раду [26] је мало модификовао приступ и користио је Стенлијеву Методу матрица преноса (енг. Stanley's "Transfer-matrix Method") такође засновану на развоју перманента и дао је процену степена имениоца одговарајућих функција генератриса које су рационалне. Алоис Панхолцер (нем. Alois Panholzer [37]) је приступио пребројавању ових пермутација са ограничењима помоћу коначних аутомата и дао је асимптотску процену понашања ових низова. Олаф Крафт и Мартин Шефер (енг. Olaf Krafft, Martin Schaefer) су у [27] нашли затворену формулу пермутације са јаким ограничењима скупа $\mathbb{N}_n$ које задовољавају услов $|p(i)-i| \leqslant k$, где важи $k+2 \leqslant n \leqslant 2k+2$. И Панхолцер и Клове и Крафт и Шефер су начинили значајан напредак у пребројавању пермутација са ограничењима, али само у симетричним случајевима. Ми ћемо нашом техником отићи даље и на несиметричне случајеве, као и на случајеве са још додатним ограничењима.

Дерик Хенри Лемер (енг. Derrick Henry Lehmer) је у [29] дао следећу класификацију неких скупова пермутација са јаким ограничењима:

- $R_1^{(k)}$ – након пермутације ниједан елемент није отишао k места лево или десно,
- $R_2^{(k)}$ – ако посматрамо елементе на кружници (тј. да су 1 и n суседни) да након пермутације ниједан елемент није отишао k места лево или десно,
- $R_3^{(k)}$ – ако посматрамо елементе на кружници да након пермутације елементи могу да иду само у смеру казаљки на сату и да ниједан елемент није отишао за више од k места,

- $R_4^{(k)}$ – ако посматрамо елементе у линији да након пермутације елемент n иде на прво место, а сви остали елементи се померају удесно за не више од k места,
- $R_5^{(k)}$ – након пермутације ниједан елемент није отишао k места лево или десно, али сваки елемент мора да се помери са свог места.

Такође, он је описао неких 6 техника за пребројавање неких специјалних случајева пермутација са јаким ограничењима. Ставише, он је приметио следеће тврђење које ће нам користити.

ТЕОРЕМА 3.1.6. Скупови $R_2^{(k)}$ и $R_3^{(2k+1)}$ су исте кардиналности, тј. важи $\left|R_2^{(k)}\right| = \left|R_3^{(2k+1)}\right|$.

Доказ. Нека скупу $R_2^{(k)}$ одговара $n \times n$ матрица A, а скупу $R_3^{(2k+1)}$ одговара $n \times n$ матрица B. Приметимо да се матрица B добија од матрице A тако што последњих k колона доведемо на првих k места, а остале колоне оставимо иза њих у истом редоследу у ком су биле. Ова чињеница заједно са Теоремом 3.1.2 даје да је $\operatorname{per} A = \operatorname{per} B$. Коначно, са Теоремом 3.1.5 добијамо да је $\left|R_2^{(k)}\right| = \operatorname{per} A = \operatorname{per} B = \left|R_3^{(2k+1)}\right|$. □

Ми ћемо у овој глави разматрати генерализације Лемерових пермутација у линији $R_1^{(k)}$ и $R_5^{(k)}$ ($R_4^{(k)}$ је специјални случај ових генерализација). Даље, са мањим модификацијама које проузрокују добијање већих система рекурентних једначина, пребројаћемо Лемерове пермутације на кругу, $R_3^{(k)}$. Према Теореми 3.1.6 имамо да је $\left|R_2^{(k)}\right| = \left|R_3^{(2k+1)}\right|$, што повлачи да смо нашом методом пребројали све типове Лемерових пермутација са јаким ограничењима.

У остатку ове главе даћемо везе ових пермутација са неким другим комбинаторним објектима, а илустроваћемо како и друге познате технике могу да се искористе за пребројавање ових пермутација. Описаћемо познате резултате, као и предности наше методе.

Сада ћемо увести ознаке $N(n;k,r,I)$, које ћемо користити у овој глави. Нека је $N(n;k,r,I)$ број пермутација са јаким ограничењима које задовољавају услове $-k \leqslant p(i)-i \leqslant r$ и $p(i)-i \notin I$. Са $N(n;k,r)$ ћемо скраћено означавати $N(n;k,r,\emptyset)$. Према дефиницији, имамо да је $|R_1^{(k)}| = N(n;k,k)$ и $|R_5^{(k)}| = N(n;k,k,\{0\})$.

У наредним поглављима увешћемо општу технику за одређивање бројева пермутација са ограничењима $N(n;k,r)$ и $N(n;k,r,I)$, а самим тим моћи ћемо да пребројимо Лемерове типове пермутација $R_1^{(k)}$ и $R_5^{(k)}$. Ово су све генерализације Лемеровог типа $R_1^{(k)}$. За Лемерове $|R_1^{(k)}|$, симетричне случајеве $k=r$ са $k=1,2$, има доста познатих резултата [28, 29, 39, 42, **?**], а и Клове у [25, 26] испитује само симетричне случајеве до $k=10$.

Лагранж у [28] и Томеску у [42, Проблем 12.16] уводе појам растојања међу пермутацијама у скупу S_n као следећи израз

$$d(f,g) = \max_{i=1,\ldots,n} |f(i)-g(i)|,$$

где су $f, g \in S_n$. Зато се пермутације у случају $k=r$ често називају и пермутације дужине n са растојањем k (енг. permutation of length n within distance k).

Ова техника иде даље у односу на познате: у потпуности смо описали поступак и за решавање асиметричних случајева, као и асиметричних случајева са више (али правилно задатих) недозвољених позиција. Овај поступак генерише систем линеарних рекурентних једначина, на основу кога из матрице система S можемо у неким случајевима добити везу са композицијама са ограничењима. Ову технику ћемо илустровати на доста примера. Показаћемо и да је компјутерска сложеност технике много боља од развијања перманента $\operatorname{per} A$. Помоћу програма који је базиран на овој техници, додали смо стотињак низова у Слоуновој енциклопедији целобројних низова [43] (енг. Sloane's online encyclopedia of integer sequences).

3.2. Метода матрица преноса

У основи Методе матрица преноса (енг. Transfer Matrix Method) је веза између степена A^n матрице суседства A диграфа D и шетњи у диграфу D. То тврђење је део фолклора теорије графова, што би рекао Ричард Стенли у [39]. Више о овој проблематици може се наћи у [18][поглавље 7.5]. Поменимо и да је Метода матрица преноса у суштини исто што и Теорија коначних Марковљевих ланаца у Вероватноћи. Методу матрица преноса су са великим успехом користили физичари за проучавање фазних прелаза у статистичкој механици.

Метода матрица преноса, као и Принцип укључења-искључења и Мебијусова формула инверзије, има једноставне теоријске темеље, али веома широк опсег примењивости. Теоријска позадина може се поделити на два дела – комбинаторни и алгебарски. Прво ћемо разматрати комбинаторни део. Ту ће нам од суштинског значаја бити Теорема 1.5.1. Други део Методе матрица преноса се састоји од примене линеарне алгебре на анализу понашања функција $A_{ij}(n)$ (њих смо увели у Дефиницији 1.5.6). У том циљу увешћемо функцију генератрисе

$$F_{ij}(D,\lambda) = \sum_{n\geqslant 0} A_{ij}(n)\cdot\lambda^n.$$

За Методу матрица преноса суштинско је следеће тврђење. Његов доказ можете наћи у [39][Теорема 4.7.2].

ТЕОРЕМА 3.2.1. За функцију генератрисе $F_{ij}(D,\lambda)$ важи

$$F_{ij}(D,\lambda) = \frac{(-1)^{i+j}\det(I-\lambda A : j,i)}{\det(I-\lambda A)},$$

где $(B : j,i)$ означава матрицу која се добије када уклонимо j-ту врсту и i-ту колону матрице B.

Стога је $F_{ij}(D,\lambda) = \dfrac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}$ рационална функцтија по λ чији је степен, $\deg P - \deg Q$, строго мањи од вишеструкости n_0 сопствене вредности $\lambda = 0$ матрице A. □

Један специјални случај претходне теореме је посебно елегантан. Означимо

$$C_D(n) = \sum_{\ell} w(\ell),$$

где сума иде по свим затвореним шетњама у D дужине n. Например, $C_D(1) = \operatorname{tr} A$ (овде $\operatorname{tr} A$ означава траг матрице A).

ПОСЛЕДИЦА. 3.2.2. Нека је $Q(\lambda) = \det(I-\lambda A)$. Тада важи

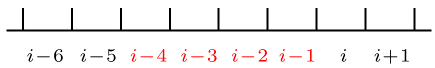
$$\sum_{n\geqslant 1} C_D(n)\lambda^n = -\frac{\lambda Q'(\lambda)}{Q(\lambda)}\,.$$

Сада ћемо илустровати Методу матрица преноса на неколико примера.

ПРИМЕР 3.2.1. Одредити помоћу методе матрица преноса колико има пермутација које задовољавају ограничења $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 2$ и $p(i) - i \neq -1, 1$.

Решење. На први поглед изгледа да је Метода матрица преноса неупотребљива, јер је за одређивање тренутне вредности $p(i)$ у пермутацији у конструкцији потребно знати све раније додељене вредности: $p(1), p(2), \ldots, p(i-1)$. Међутим није тако.

Прво приметимо да $p(i)$ може узети само 3 вредности, тј. $p(i) \in \{i-2, i, i+2\}$. Даље, ниједна од ових вредности није могла бити додељена $p(i-5)$. Стога је потребно да знамо које су вредности пермутације само у 4 претходне позиције (видети Слику 3.2).



Слика 3.2. Битне позиције у пермутацији у конструкцији.

Направићемо диграф D довољно великим да садржи сву потребну преисторију пермутације у конструкцији. Ту Стога за његове чворове узећемо $v_i(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{-2, 0, 2\}^4$. Та четворка одређује да је у пермутацији

$$p(i-4) - (i-4) = \alpha, \qquad p(i-3) - (i-3) = \beta, \qquad p(i-2) - (i-2) = \gamma, \qquad p(i-1) - (i-1) = \delta.$$

Ипак диграф D неће имати свих $3^4 = 81$ чворова, него само 27 чворова. За сваки од њих ћемо ставити која му уређена четворка одговара, како изгледа пермутација у кострукцији (ту • представља раније заузете позиције, _позиције које ће касније бити одређене, док су 1,2,3,4 последња 4 елемента у конструкцији), као и са којим чворовима је тај чвор повезан оријентисаном граном:

$v_1(2, 2, -2, -2)$	••3412__	$\rightarrow$	v_5, v_6
$v_2(2, 0, -2, 2)$	••321__4	$\rightarrow$	v_{13}, v_{14}
$v_3(2, 0, -2, 0)$	••3214__	$\rightarrow$	v_{15}, v_{16}
$v_4(2, -2, 2, -2)$	•2•41_3_	$\rightarrow$	v_{19}
$v_5(2, -2, -2, 2)$	•23•1__4	$\rightarrow$	v_{24}, v_{25}
$v_6(2, -2, -2, 0)$	•23•14__	$\rightarrow$	v_{26}, v_{27}
$v_7(0, 2, 2, -2)$	••14_23_	$\rightarrow$	v_1
$v_8(0, 2, 0, -2)$	••1432__	$\rightarrow$	v_2, v_3
$v_9(0, 0, 2, 2)$	••12__34	$\rightarrow$	v_7
$v_{10}(0, 0, 2, 0)$	••12_43_	$\rightarrow$	v_8
$v_{11}(0, 0, 0, 2)$	••123__4	$\rightarrow$	v_9, v_{10}
$v_{12}(0, 0, 0, 0)$	••1234__	$\rightarrow$	v_{11}, v_{12}
$v_{13}(0, -2, 2, 2)$	•21•__34	$\rightarrow$	v_{17}
$v_{14}(0, -2, 2, 0)$	•21•_43_	$\rightarrow$	v_{18}
$v_{15}(0, -2, 0, 2)$	•21•3__4	$\rightarrow$	v_{20}, v_{21}
$v_{16}(0, -2, 0, 0)$	•21•34__	$\rightarrow$	v_{22}, v_{23}
$v_{17}(-2, 2, 2, -2)$	1••4_23_	$\rightarrow$	v_1
$v_{18}(-2, 2, 0, -2)$	1••432__	$\rightarrow$	v_2, v_3
$v_{19}(-2, 2, -2, 2)$	1•3•_2_4	$\rightarrow$	v_4, v_5
$v_{20}(-2, 0, 2, 2)$	1••2__34	$\rightarrow$	v_7
$v_{21}(-2, 0, 2, 0)$	1••2_44_	$\rightarrow$	v_8
$v_{22}(-2, 0, 0, 2)$	1••23__4	$\rightarrow$	v_9, v_{10}
$v_{23}(-2, 0, 0, 0)$	1••234__	$\rightarrow$	v_{11}, v_{12}
$v_{24}(-2, -2, 2, 2)$	12••__34	$\rightarrow$	v_{17}
$v_{25}(-2, -2, 2, 0)$	12••_43_	$\rightarrow$	v_{18}
$v_{26}(-2, -2, 0, 2)$	12••3__4	$\rightarrow$	v_{20}, v_{21}
$v_{27}(-2, -2, 0, 0)$	12••34__	$\rightarrow$	v_{22}, v_{23}

Матрица суседства овог графа је:

$$A = \begin{bmatrix}
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0
\end{bmatrix}.$$

Њен карактеристични полином је

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^{27} - \lambda^{26} - \lambda^{25} - \lambda^{23} + \lambda^{22} + \lambda^{21},$$

а за именилац из Теореме 3.2.1 важи

$$\det(I - \lambda A) = 1 - \lambda - \lambda^2 - \lambda^4 + \lambda^5 + \lambda^6 = (1-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda-\lambda^2)(1+\lambda^2)$$

Почетни чворови у шетњама могу бити само:

$$v_1, v_2, v_3, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}$$

јер почињу са ••. Завршни чворови у шетњама могу бити само:

$$v_1, v_3, v_6, v_8, v_{12}, v_{16}, v_{18}, v_{23}, v_{27}$$

јер се завршавају са __.

Зато коначно имамо да је тражена функција генератрисе:

$$A(n+3) = \sum_{i \in \{1,2,3,7,8,9,10,11,12\}} \sum_{j \in \{1,3,6,8,12,16,18,23,27\}} (A^n)_{ij} = \frac{4 + 2\lambda + 3\lambda^2 + 2\lambda^3}{1 - \lambda - \lambda^3 - \lambda^4}.$$

Даље исто као и у Примеру 3.4.9 можемо одредити број пермутација са ограничењима. ■

3.2.1. Факторизација у слободним моноидима

Прво ћемо увести потребну терминологију.

ДЕФИНИЦИЈА 3.2.1. Нека $\mathcal{A}$ је коначан скуп, који називамо *алфабет*. *Реч* је коначан низ $a_1 a_2 \dots a_n$ елемената из $\mathcal{A}$, укључујући и празну реч ε. *Дужина* речи $u = a_1 a_2 \dots a_n$ је $\ell(u) = n$ и посебно $\ell(1) = 0$.

Скуп свих речи алфабета $\mathcal{A}$ означимо са $\mathcal{A}^*$. Скуп $\mathcal{A}^*$ са операцијом конкатенације (спајања) речи зовемо *слободни моноид* на скупу $\mathcal{A}$.

Нека је $\mathcal{B}$ подскуп скупа $\mathcal{A}$ (по могућству коначан) и нека је $\mathcal{B}^*$ подмоноид од $\mathcal{A}$ генерисан са $\mathcal{B}$, тј. $\mathcal{B}^*$ се састоји од свих речи $u_1 u_2 \dots u_n$, где су $u_i \in \mathcal{B}$. Кажемо да је $\mathcal{B}^*$ *слободно генерисан* са $\mathcal{B}$ ако свака реч $u \in \mathcal{B}^*$ може на јединствен начин да се запише као $u_1 u_2 \dots u_n$, где су $u_i \in \mathcal{B}$.

Ако имамо функцију тежине на алфабету $w\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, онда уведимо тежину речи $u = a_1 a_2 \dots a_n$ као

$$w(u) = w(a_1) \cdot w(a_2) \cdot \ldots \cdot w(a_n).$$

Посебно $w(\varepsilon) = 1$.

За подскуп $\mathcal{C}$ скупа $\mathcal{A}^*$ дефинишемо функцију генератрисе

$$\mathcal{C}(\lambda) = \sum_{u \in \mathcal{C}} w(u) \lambda^{\ell(u)}.$$

Сада смо спремни за наредно тврђење.

ТЕОРЕМА 3.2.3. Нека је $\mathcal{B}$ подскуп скупа $\mathcal{A}^*$, који слободно генерише $\mathcal{B}^*$. Тада важи

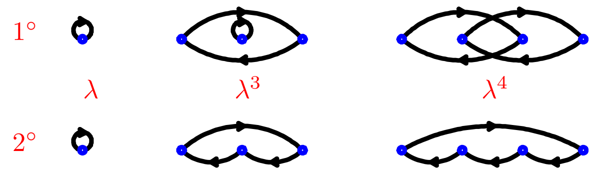
$$\mathcal{B}^*(\lambda) = \frac{1}{1 - \mathcal{B}(\lambda)}.$$

ПРИМЕР 3.2.2. Одредимо слободне генераторе и одговарајуће функције генератриса за пермутације са ограничењима:

1° $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 2$ и $p(i) - i \neq -1, 1$.

2° $-1 \leqslant p(i) - i \leqslant 3$ и $p(i) - i \neq 1$.

Решење. У оба случаја имамо само 3 генератора:



Слика 3.3. Генератори пермутација.

Одатле добијамо да они имају исту функцију генератрисе:

$$A(\lambda) = \big(1 - (\lambda + \lambda^3 + \lambda^4)\big)^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda - \lambda^3 - \lambda^4}\,.$$

Даље исто као и у примерима 3.4.8 и 3.4.9 можемо одредити број пермутација са ограничењима. ■

Видимо да се ова функција генератрисе разликује од оне добијене у претходном примеру (разлог је што Метода матрица преноса даје померен низ), али је иста као и у примерима 3.4.8 и 3.4.9.

3.3. Пермутације $p(i) - i \leqslant r$

Пермутације које задовољавају услов $p(i) - i \leqslant r$, за све $i \in \mathbb{N}_n$, где је $r < n$, сусрећемо у [42, задатак 12.18] и у [**?**]. Тим пермутацијама придружујемо $n \times n$ матрицу $M = (a_{ij})$ дефинисану са

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако је} \quad j - i \leqslant r, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Означимо са $N(n; r)$ број пермутација које задовољавају услов $p(i) - i \leqslant r$. Имамо да важи $N(n; r) = \operatorname{per} M$. Развијањем перманента по првој врсти матрице M добијамо рекурентну везу $N(n; r) = (r + 1) \cdot N(n - 1; r)$. Користећи ову рекурентну везу до $N(r + 1; r) = (r + 1)!$ (број свих пермутација скупа $\mathbb{N}_{r+1}$) долазимо до

$$N(n; r) = (r + 1)^{n-r-1} \cdot N(r + 1; r) = (r + 1)^{n-r-1} \cdot (r + 1)! = (r + 1)^{n-r} \cdot r!$$

У [**?**, Теорема 3] је анализиран проблем броја инверзија таквих пермутација техником q–детерминанти.

3.4. Пермутације $-k \leqslant p(i) - i \leqslant r$

Сада ћемо наставити са развијањем перманента (али у општем случају, не специјалним случајевима као што смо имали у Примеру 3.1.3, где нам је било $n = 5$). Уводимо општу технику за израчунавање $N(n; k, r)$, броја пермутација које задовољавају услов $-k \leqslant p(i) - i \leqslant r$ за све $i \in \mathbb{N}_n$, при чему је $k \leqslant r < n$. Наша техника се састоји од 5 корака:

1. Формирамо $\mathcal{C}$, скуп свих комбинација од $k+1$ елемената скупа $\mathbb{N}_{k+r+1}$ које садрже елемент $k+r+1$.
2. Придружујемо целобројни низ $a_C(n)$ свакој комбинацији $C \in \mathcal{C}$.
3. Примењујемо пресликавање φ (које ће бити дефинисано касније) на сваку комбинацију.
4. Формирамо систем линеарних рекурентних једначина са константним коефицијентима:
$$a_C(n-1) = \sum_{C' \in \varphi(C)} a_{C'}(n).$$
5. Решавањем овог система добијамо $N(n; k, r) = a_{(r+1, r+2, \ldots, r+k+1)}(n)$.

Сада ћемо детаљније описати сваки од ових корака и показаћемо да је $N(n; k, r)$ баш једнако $a_{(r+1, r+2, \ldots, r+k+1)}(n)$.

ДЕФИНИЦИЈА 3.4.1. Скуп $\mathcal{C}$ означава скуп свих комбинација са $k+1$ елемената скупа $\mathbb{N}_{k+r+1}$, које садрже елемент $k+r+1$. Ове комбинације ћемо приказивати као строго растуће $(k+1)$-торке.

ПРИМЕР 3.4.1. Одредити све такве комбинације за $k = r = 2$.

Решење. Све комбинације са 3 елемента скупа $\mathbb{N}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ које садрже елемент 5 (представљене у инверзном лексикографском редоследу) су:

$$(3,4,5), \quad (2,4,5), \quad (2,3,5), \quad (1,4,5), \quad (1,3,5), \quad (1,2,5).$$

У наредним примерима ћемо користити једноставнију нотацију:

$$345, \qquad 245, \qquad 235, \qquad 145, \qquad 135, \qquad 125.$$

Како се у наредном кораку свакој од ових пермутација придружује по један низ који се касније јавља у систему рекурентних једначина, ми ћемо у овом случају имати 6 низова, што повлачи да ћемо имати и систем од 6 линеарних рекурентних једначина са константним коефицијентима (тачније сви коефицијенти су 0 или 1). ∎

ДЕФИНИЦИЈА 3.4.2. Скуп $\mathcal{C}$ ћемо разбити на два подскупа:

$$\mathcal{C}_1 = \{C \in \mathcal{C} \mid 1 \in C\} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{C}_2 = \{C \in \mathcal{C} \mid 1 \notin C\}.$$

Дефинишимо пресликавање:

$$\varphi(C) = \begin{cases} \varphi_1(C), & C \in \mathcal{C}_1; \\ \varphi_2(C), & C \in \mathcal{C}_2, \end{cases}$$

при чему су пресликавања $\varphi_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$ и $\varphi_2 : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}^{k+1}$ дата са:

$$\varphi_1\big((1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1})\big) = (c_2 - 1, c_3 - 1, \ldots, c_k - 1, c_{k+1} - 1, k + r + 1)$$

и

$$\varphi_2\big((c_1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1})\big) = (C_1, C_2, \ldots, C_k, C_{k+1}),$$

при чему комбинацију $C_i \in \mathcal{C}$ добијамо из комбинације $C = (c_1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1})$ тако што обришемо координату c_i, смањимо све остале координате за 1, померимо све координате са већим индексом за једно место улево и ставимо елемент $k+r+1$ на крај:

$$C_i = (c_1 - 1, \ldots, c_{i-1} - 1, c_{i+1} - 1, \ldots, c_{k+1} - 1, k+r+1).$$

Приметимо да је $\varphi_1(C) = C_1$.

ПРИМЕР 3.4.2. Одредити $\varphi(135)$ и $\varphi(245)$.

Решење. Прва комбинација 135 припада скупу $\mathcal{C}_1$ јер садржи елемент 1. Када 3 и 5 умањимо за 1 добијамо 2 и 4 и још треба 5 дописати на крај: $\varphi(135) = \varphi_1(135) = 245$

Комбинација $235 \in \mathcal{C}_2$ јер не садржи елемент 1. Стога на њу примењујемо пресликавање φ_2 које комбинацију од $k+1 = 3$ елемената слика у уређену тројку комбинација (C_1, C_2, C_3). Објаснимо како се добија нпр. C_2. Другу координату, 4, обришемо, остале 2 и 5 умањимо за 1 и добијамо 1 и 4 и на крај допишемо 5. Тако смо добили да је $C_2 = 145$. Слично добијамо и $C_1 = 345$ и $C_3 = 135$. Стога је: $\varphi(245) = \varphi_2(245) = (345, 145, 135)$. ∎

Формирајмо систем линеарних рекурентних једначина:

$$a_C(n) = \sum_{C' \in \varphi(C)} a_{C'}(n-1).$$

Користимо пресликавања φ_1 и φ_2 да би добили систем који се састоји од $\binom{k+r}{k}$ линеарних рекурентних једначина (од сваке комбинације добијамо по једну једначину). Тако од $\varphi_1(C) = C'$ добијамо линеарну рекурентну једначину

$$a_C(n-1) = a_{C'}(n),$$

док од $\varphi_2(C) = (C_1, C_2, \ldots, C_{k+1})$ добијамо линеарну рекурентну једначину

$$a_C(n-1) = a_{C_1}(n) + a_{C_2}(n) + \cdots + a_{C_{k+1}}(n).$$

Почетни услови су:

$$a_C(0) = \begin{cases} 1, & C = (r+1, r+2, \ldots, r+k+1) \\ 0, & C \neq (r+1, r+2, \ldots, r+k+1). \end{cases}$$

Овако добијени систем можемо решити стандардним методама базираним на функцијама генератриса. Показаћемо да је $N(n;k,r) = a_{(r+1,r+2,\ldots,r+k+1)}(n)$. Даље, из матрице овог система S можемо одредити $N(n;k,r)$ као елемент у првој врсти и првој колони матрице S^n. Тај број одговара броју затворених путеба у оријентисаном графу G чија је матрица суседства S. Ове чињенице ћемо користити када будемо одређивали компјутерску сложеност наше технике. Такође, у неким специјалним случајевима даћемо још једно комбинаторно тумачење броја $N(n;k,r)$: то је број композиција са елементима из неког скупа – том приликом ћемо користити матрицу S, односно одговарајући граф G.

ТЕОРЕМА 3.4.1. Важи $N(n;k,r) = a_{(r+1,r+2,\ldots,r+k+1)}(n)$.

Доказ. Прво ћемо увести низ матрица $\mathcal{M}$ које одговарају низовима $a_C(n)$. Затим ћемо свакој матрици из $\mathcal{M}$ придружити одговарајућу комбинацију из $\mathcal{C}$ (доказ ове теореме се базира на бијекцији $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{C}$. Означимо са $\mathcal{M}$ скуп свих $n \times n$ матрица $M = (m_{ij})$ које задовољавају следеће услове:

1) првих $k+1$ врста почињу са јединицама и завршавају се са нулама: за $i = 1, \ldots, k+1$ и $j = 1, \ldots, d_i$ је $m_{ij} = 1$, док је $m_{ij} = 0$ за $j > d_i$, при чему је $d_i \geqslant 1$;

2) $d_{k+1} = k + r + 1$;

3) ако је $1 \leqslant i < i' \leqslant k+1$ онда је $d_i < d_{i'}$;

4) за елементе у последњих $n - (k+1)$ врста важи: $m_{ij} = 1$ за $-k \leqslant j - i \leqslant r$ и $m_{ij} = 0$ у супротном.

Дефинишимо пресликавање $f : \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ са $f(M) = (d_1, d_2, \ldots, d_{k+1})$. Функција f је бијекција између ова 2 скупа.

Подсетимо се да смо придружили $n \times n$ матрицу $A = (a_{ij})$ задату са

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако је} \quad -k \leqslant j - i \leqslant r; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

пермутацијама са јаким ограничењима које задовољавају услов $-k \leqslant p(i) - i \leqslant r$. Као што смо показали у Теореми 3.1.5, важи $N(n;k,r) = \operatorname{per} A$. Приметимо да матрици $A \in \mathcal{M}$ код које је $d_i = r + i$, при чему је $1 \leqslant i \leqslant k+1$ одговара комбинација $(r+1, r+2, \ldots, r+k+1)$ која је прва по инерзном лексикографском редоследу.

Још треба да приметимо да рекурентне једначине из четвртог корака наше технике одговарају развоју перманента матрица из скупа $\mathcal{M}$ по првој врсти (φ_1) или по првој колони (φ_2). Ова чињеница нас доводи до финалног закључка:

$$N(n;k,r) = \operatorname{per} A = a_{(r+1,r+2,\ldots,r+k+1)}(n). \qquad \square$$

Нашу технику ћемо илустровати на неколико примера.

ПРИМЕР 3.4.3. Одредити број пермутација скупа $\mathbb{N}_n$ које задовољавају $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 2$.

Решење. Ово је случај $\underline{k = r = 2}$. Ове пермутације се називају и пермутације дужине n унутар растојања 2, тј. то су све пермутације p које су на растојању 2 од идентичне пермутације: $d(p, \varepsilon) \leqslant 2$.

Како је $k + r + 1 = 5$ то су све 3-елементне комбинације из скупа $\mathbb{N}_{k+r+1} = \{1,2,3,4,5\}$ су:

$$\mathcal{C} = \{345, 245, 235, 145, 135, 125\}.$$

Када применимо пресликавања φ на ове комбинације имамо:

$$\begin{aligned} \varphi_2(345) &= (345, 245, 235), \\ \varphi_2(245) &= (345, 145, 135), \\ \varphi_2(235) &= (245, 145, 125), \\ \varphi_1(145) &= 345, \\ \varphi_1(135) &= 245, \\ \varphi_1(125) &= 145, \end{aligned}$$

одакле добијамо систем линеарних рекурентних једначина:

$$\begin{array}{rcccccc} a_{345}(n-1) & = & a_{345}(n) & + & a_{245}(n) & + & a_{235}(n), \\ a_{245}(n-1) & = & a_{345}(n) & + & a_{145}(n) & + & a_{135}(n), \\ a_{235}(n-1) & = & a_{245}(n) & + & a_{145}(n) & + & a_{125}(n), \\ a_{145}(n-1) & = & a_{345}(n), & & & & \\ a_{135}(n-1) & = & a_{245}(n), & & & & \\ a_{125}(n-1) & = & a_{145}(n) & & & & \end{array}$$

са почетним условима $a_{345}(0) = 1$, $a_{245}(0) = 0$, $a_{235}(0) = 0$, $a_{145}(0) = 0$, $a_{135}(0) = 0$ и $a_{125}(0) = 0$. Уведимо једноставније ознаке $a_{345}(n) = a_n$, $a_{245}(n) = b_n$, $a_{235}(n) = c_n$, $a_{145}(n) = d_n$, $a_{135}(n) = e_n$ и $a_{125}(n) = f_n$. Тада добијамо прегледнији систем рекурентних једначина:

$$\begin{array}{rcccccc} a_{n+1} & = & a_n & + & b_n & + & c_n, \\ b_{n+1} & = & a_n & + & d_n & + & e_n, \\ c_{n+1} & = & b_n & + & d_n & + & f_n, \\ d_{n+1} & = & a_n, & & & & \\ e_{n+1} & = & b_n, & & & & \\ f_{n+1} & = & d_n. & & & & \end{array}$$

Почетни услови су $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$.

Један од главних разлога за увођење претходне смене је прелажење са система рекурентних једначина на систем линеарних једначина: низу који је означен малим латиничним словима придружићемо функцију генератрисе чија је ознака исто, али велико слово (нпр. $a_n \leftrightarrow A(z)$, $b_n \leftrightarrow B(z)$, итд.). Тако добијамо следећи систем:

$$\begin{aligned}
\frac{A(z)-1}{z} &= A(z)+B(z)+C(z),\\
\frac{B(z)}{z} &= A(z)+D(z)+E(z),\\
\frac{C(z)}{z} &= B(z)+D(z)+F(z),\\
\frac{D(z)}{z} &= A(z),\\
\frac{E(z)}{z} &= B(z),\\
\frac{F(z)}{z} &= D(z).
\end{aligned}$$

Ово је систем линеарних једначина $\big($по промењљивим $A(z), B(z), \ldots, F(z)\big)$ и када га решимо добијамо део решења које нама треба:

$$A(z) = \frac{1-z}{1-2z-2z^3+z^5}\,.$$

Из имениоца ове функције генератрисе $1-2z-2z^3+z^5$, можемо одредити линеарну рекурентну једначину са константним коефицијентима $a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-3} + a_{n-5} = 0$, тј.

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-3} - a_{n-5}.$$

Број пермутација, a_n, које задовољавају услов $|p(i)-i| \leqslant 2$, за све $i \in \mathbb{N}_n$ је у потпуности одређен својом функцијом генератрисе $A(z) = \dfrac{1-z}{1-2z-2z^3+z^5}$ а на основу ње можемо добити и првих неколико чланова овог низа:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
a_n	1	1	2	6	14	31	73	172	400	932	2 177	…

Табела 3.3: Број пермутација које задовољавају услов $|p(i)-i| \leqslant 2$.

Ово је низ A002524 у [43]. ■

Напомена. У [42, Проблем 12.17], је добијен једноставнији систем:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1},\\
b_n &= a_{n-1} + b_{n-1},\\
c_n &= b_{n-1} + d_{n-1},\\
d_n &= a_{n-1} + e_{n-1},\\
e_n &= a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Наша техника за добијање система рекурентних једначина је генерална и она не даје оптималан систем (са минималним бројем једначина).

ПРИМЕР 3.4.4. Одредити матрицу система S и одговарајући граф G за пермутације из Примера 3.4.3.

Решење. Из система рекурентних једначина

$$\begin{array}{lclclcl} a_{n+1} & = & a_n & + & b_n & + & c_n, \\ b_{n+1} & = & a_n & + & d_n & + & e_n, \\ c_{n+1} & = & b_n & + & d_n & + & f_n, \\ d_{n+1} & = & a_n, & & & & \\ e_{n+1} & = & b_n, & & & & \\ f_{n+1} & = & d_n, & & & & \end{array}$$

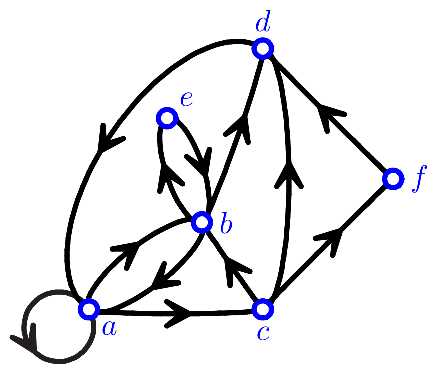
добијамо матрицу овог система: $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Почетни услови су $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$, па стога имамо да је:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \end{bmatrix} = S^n \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

На основу ове једнакости имамо да је број пермутација a_n, које задовољавају услов $|p(i) - i| \leqslant 2$ једнак елементу на позицији $(1, 1)$ у матрици S^n. Ово је још један метод за одређивање броја a_n.

Сада ћемо нацртати оријентисани граф G чија је матрица инциденције S (теме a одговара низу a_n, b низу b_n, итд.):



G

Број a_n је једнак броју (затворених) путева у диграфу G дужине n од темена a до темена a.

На пример, за $n = 3$ имамо $a_3 = 6$ и ти путеви су:

$$a-a-a-a, \quad a-a-b-a, \quad a-b-a-a, \quad a-b-d-a, \quad a-c-b-a, \quad a-c-d-a.$$

За $n = 4$ је $a_4 = 14$ јер имамо следеће путеве: $a-a-a-a-a$, $a-a-a-b-a$, $a-a-b-a-a$, $a-a-b-d-a$, $a-a-c-b-a$, $a-a-c-d-a$, $a-b-a-a-a$, $a-b-a-b-a$, $a-b-d-a-a$, $a-b-e-b-a$, $a-c-b-a-a$, $a-c-b-d-a$, $a-c-d-a-a$, $a-c-f-d-a$ (подсетимо се да је пут потпуно одређен низом чворова $v_0, v_l, v_2, \ldots, v_n$ кроз које пролази).

Ови путеви ће имати значајну улогу касније код повезивања пермутација са ограничењима са одређеним типовима композиција. ■

Сада ћемо нашу технику илустровати кроз још 3 примера.

ПРИМЕР 3.4.5. $\underline{k = 2,\ r = 3}$: пермутације скупа $\mathbb{N}_n$ за које је $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 3$. $k + r + 1 = 6$.

$$\mathcal{C} = \{456, 356, 346, 256, 246, 236, 156, 146, 136, 126\}.$$

$$
\begin{array}{ll}
\varphi_2(456) = (456, 356, 346), & \\
\varphi_2(356) = (456, 256, 246), & \varphi_1(156) = 456, \\
\varphi_2(346) = (356, 256, 236), & \varphi_1(146) = 356, \\
\varphi_2(256) = (456, 156, 146), & \varphi_1(136) = 256, \\
\varphi_2(246) = (356, 156, 136), & \varphi_1(126) = 156, \\
\varphi_2(236) = (256, 156, 126), &
\end{array}
$$

одакле добијамо систем линеарних рекурентних једначина:

$$
\begin{array}{lcllcl}
a_{456}(n-1) & = & a_{456}(n) + a_{356}(n) + a_{346}(n), & & & \\
a_{356}(n-1) & = & a_{456}(n) + a_{256}(n) + a_{246}(n), & a_{156}(n-1) & = & a_{456}(n), \\
a_{346}(n-1) & = & a_{356}(n) + a_{256}(n) + a_{236}(n), & a_{146}(n-1) & = & a_{356}(n), \\
a_{256}(n-1) & = & a_{456}(n) + a_{156}(n) + a_{146}(n), & a_{136}(n-1) & = & a_{256}(n), \\
a_{246}(n-1) & = & a_{356}(n) + a_{156}(n) + a_{136}(n), & a_{126}(n-1) & = & a_{156}(n), \\
a_{236}(n-1) & = & a_{256}(n) + a_{156}(n) + a_{126}(n), & & &
\end{array}
$$

са почетним условима $a_{456}(0) = 1$ и $a_C(0) = 0$ за $C \neq 456$.

Број пермутација, $a_{456}(n)$, које задовољавају услов $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 3$, за све $i \in \mathbb{N}_n$ одређен је следећом функцијом генератрисе:

$$
A(z) = \frac{1 - z^2 - z^3 - z^5}{1 - 2z^2 - 3z^3 - 4z^4 - 5z^5 - z^6 + 2z^7 + z^8 + z^9 + z^{10}}
$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$a_{456}(n)$	1	1	2	6	18	46	115	301	792	2 068	5 380	...

Табела 3.4: Број пермутација које задовољавају услов $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 3$.

Ово је низ A072827 у [43]. ■

ПРИМЕР 3.4.6. $k = 2,\ r = 4$: пермутације скупа $\mathbb{N}_n$ за које је $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 4$.
$k + r + 1 = 7$. $\mathcal{C} = \{567, 467, 457, 367, 357, 347, 267, 257, 247, 237, 167, 157, 147, 137, 127\}$.
Сада ћемо избећи израчунавања и само ћемо дати коначне резултате. Број пермутација, $a_{567}(n)$, које задовољавају услов $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 4$, за све $i \in \mathbb{N}_n$ одређен је функцијом генератрисе:

$$
A(z) = \frac{1 - z^2 - 2z^3 - 2z^4 - 2z^6 + z^7 + z^9}{1 - z - 2z^2 - 4z^3 - 6z^4 - 10z^5 - 12z^6 + 4z^7 + 6z^8 + 6z^9 + 2z^{11} + 2z^{12} - z^{14} - z^{15}}
$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$a_{567}(n)$	1	1	2	6	18	54	146	391	1081	3 004	8 320	...

Табела 3.5: Број пермутација које задовољавају услов $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 4$.

Ово је низ A072850 у [43]. ■

ПРИМЕР 3.4.7. $k = 3,\ r = 3$: пермутације скупа $\mathbb{N}_n$ за које је $-3 \leqslant p(i) - i \leqslant 3$. Уобичајено се за њих каже да су то пермутације дужине n са растојањем мањим од 3 од почетне пермутације ε. У овом случају имамо $k + r + 1 = 7$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} \;=\; \{&4567, 3567, 3467, 3457, 2567, 2467, 2457, 2367, 2357, 2347, \\
&1567, 1467, 1457, 1367, 1357, 1347, 1267, 1257, 1247, 1237\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\varphi_2(4567) = (4567, 3567, 3467, 3457) & \varphi_1(1567) = 4567, \\
\varphi_2(3567) = (4567, 2567, 2467, 2457) & \varphi_1(1467) = 3567,
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_2(3467) &= (3567, 2567, 2367, 2357) & \varphi_1(1457) &= 3467,\\
\varphi_2(3457) &= (3567, 2467, 2367, 2347) & \varphi_1(1367) &= 2567,\\
\varphi_2(2567) &= (4567, 1567, 1467, 1457) & \varphi_1(1357) &= 2467,\\
\varphi_2(2467) &= (3567, 1567, 1367, 1357) & \varphi_1(1347) &= 2367,\\
\varphi_2(2457) &= (3467, 1467, 1367, 1347) & \varphi_1(1267) &= 1567,\\
\varphi_2(2367) &= (2567, 1567, 1267, 1257) & \varphi_1(1257) &= 1467,\\
\varphi_2(2357) &= (2467, 1467, 1267, 1247) & \varphi_1(1247) &= 1367,\\
\varphi_2(2347) &= (2367, 1367, 1267, 1237) & \varphi_1(1237) &= 1267,
\end{aligned}
$$

одакле добијамо систем линеарних рекурентних једначина:

$$
\begin{array}{lcllllllll}
a_{4567}(n-1) & = & a_{4567}(n) & + & a_{3567}(n) & + & a_{3467}(n) & + & a_{3457}(n), \\
a_{3567}(n-1) & = & a_{4567}(n) & + & a_{2567}(n) & + & a_{2467}(n) & + & a_{2457}(n), \\
a_{3467}(n-1) & = & a_{3567}(n) & + & a_{2567}(n) & + & a_{2367}(n) & + & a_{2357}(n), \\
a_{3457}(n-1) & = & a_{3467}(n) & + & a_{2467}(n) & + & a_{2367}(n) & + & a_{2347}(n), \\
a_{2567}(n-1) & = & a_{4567}(n) & + & a_{1567}(n) & + & a_{1467}(n) & + & a_{1457}(n), \\
a_{2467}(n-1) & = & a_{3567}(n) & + & a_{1567}(n) & + & a_{1367}(n) & + & a_{1357}(n), \\
a_{2457}(n-1) & = & a_{3467}(n) & + & a_{1467}(n) & + & a_{1367}(n) & + & a_{1347}(n), \\
a_{2367}(n-1) & = & a_{2567}(n) & + & a_{1567}(n) & + & a_{1267}(n) & + & a_{1257}(n), \\
a_{2357}(n-1) & = & a_{2467}(n) & + & a_{1467}(n) & + & a_{1267}(n) & + & a_{1247}(n), \\
a_{2347}(n-1) & = & a_{2367}(n) & + & a_{1367}(n) & + & a_{1267}(n) & + & a_{1237}(n), \\
a_{1567}(n-1) & = & a_{4567}(n), \\
a_{1467}(n-1) & = & a_{3567}(n), \\
a_{1457}(n-1) & = & a_{3467}(n), \\
a_{1367}(n-1) & = & a_{2567}(n), \\
a_{1357}(n-1) & = & a_{2467}(n), \\
a_{1347}(n-1) & = & a_{2367}(n), \\
a_{1267}(n-1) & = & a_{1567}(n), \\
a_{1257}(n-1) & = & a_{1467}(n), \\
a_{1247}(n-1) & = & a_{1367}(n), \\
a_{1237}(n-1) & = & a_{1267}(n),
\end{array}
$$

са почетним условима $a_{4567}(0) = 1$ и $a_C(0) = 0$ за $C \neq 4567$.

Број пермутација, $a_{456}(n)$, које задовољавају услов $-3 \leqslant p(i) - i \leqslant 3$, за све $i \in \mathbb{N}_n$ одређен је функцијом генератрисе:

$$
A(z) = \frac{1 - z - 2z^2 - 2z^4 + z^7 + z^8}{1 - 2z - 2z^2 - 10z^4 - 8z^5 + 2z^6 + 16z^7 + 10z^8 + 2z^9 - 4z^{10} - 2z^{11} - 2z^{13} - z^{14}}
$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$a_{456}(n)$	1	1	2	6	24	78	230	675	2 069	6 404	19 708	...

Табела 3.6: Број пермутација које задовољавају услов $|p(i) - i| \leqslant 3$.

Ово је низ A002526 у [43]. ■

3.4.1. Поређења наше технике са другим методама

Сада ћемо извршити нека поређења ове методе са другим постојећим. Менделсон [35] и Лемер [29] су такође добијали системе рекурентних једначина развијањем перманената у њиховим конкретним примерима. Али они нису описали генерални поступак за добијање тих рекурентних једначина. Штавише, Лемер је написао „сваки од ових перманената може се даље развијати и процес се наставља све док добијамо ‚нове' матрице" (енг. "each of these permanents in turn can be so expanded and the process continued until no 'new' matrices occur" [29]), док је Менделсон рекао (r овде представља број 1 у врсти при развоју перманента) „за фиксирано $r \geqslant 5$, израчунавање диференцних једначина постаје непрактично и чак и да се те једначине добију, оне би биле тако компликоване да изгледа као да не би могле да се употребе за добијање експлицитне формуле" (енг. "for fixed $r \geq 5$, the calculation of the difference equations becomes impracticable, and even if these equations were attained, they would be so complicated that it seems unlikely they would be of any use for obtaining explicit formulae" [35]). Ми смо описали процес добијања „нових" матрица и решили смо доста случајева у којима је било $r \geqslant 5$.

Ричард Стенли је развио општу технику „Метода матрица преноса" (енг. "Transfer-matrix Method"), али и њене могућности су ограничене. Он је написао у [39, Пример 4.7.16] „коришћење методе матрица преноса уме да буде веома незграпно, док је метод факторизације у слободним моноидима веома елегантан" (енг. "to use the transfer-matrix method would be quite unwieldy, but the factorization method is very elegant"). У том примеру није тешко наћи низ оријентисаних графова који су генератори датих пермутација, али већ нпр. у случају $k = 2$ и $r = 3$ је тешко (ако не и немогуће) наћи све генераторе, као и извршити израчунавања која следе након тога. Ми, на основу наше технике (видети Пример 3.4.5), знамо да је у овом случају функција генератрисе за број пермутација које задовољавају услов $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant r$ једнака

$$A(z) = \frac{1 - z^2 - z^3 - z^5}{1 - 2z^2 - 3z^3 - 4z^4 - 5z^5 - z^6 + 2z^7 + z^8 + z^9 + z^{10}}.$$

Одатле можемо предвидети проблеме у методи факторизације у слободним моноидима: бројилац функције генератрисе $A(z)$, $1 - z^2 - z^3 - z^5$, не може се добити као именилац у суми простих геометријских прогресија.

Такође Стенли каже за метод факторизације у слободним моноидима „иако овај метод има ограничене примене, када ради то је веома елегантно и једноставно" (енг. "while this method has limited application, when it does work it is extremely elegant and simple"; [39, стр. 247]).

Насупрот томе наша метода ради и у случајевима у којима методе матрица преноса и факторизације у слободним моноидима не дају резултате.

Навешћемо и најбитније разлике између наше технике и „Метода матрица преноса", што део рецензената није могао да увиди. „Метода матрица преноса" ради са детерминантама (тј. карактеристичним полиномима матрица суседства неких диграфа), док се наша техника базира на развоју перманента матрице. „Метода матрица преноса" полази од диграфа, израчунава његов карактеристични полином, док наша техника почиње од $(0, 1)$-матрице A која одговара пермутацији са ограничењима, затим помоћу одговарајућих пресликавања које примењујемо на комбинације долазимо до система линеарних рекурентних једначина и из тог система добијамо функцију генератрисе за низ који броји колико има пермутација са ограничењима. Диграф који добијамо из система линеарних рекурентних једначина је једноставнији од онога који се добија у „Методу матрица преноса" (има мање чворова) и он нам служи само да успоставимо везу са композицијама са ограничењима.

У следећем поглављу ћемо наставити даље и дати генерализацију пермутација са ограничењима којима смо се бавили у претходном поглављу.

3.4. Пермутације $-k \leqslant p(i) - i \leqslant r,\ p(i) - i \notin I$

У овом поглављу ћемо пребројавати пермутације које задовољавају услове

$$-k \leqslant p(i) - i \leqslant r \qquad \text{и} \qquad p(i) - i \notin I$$

за све $i \in \mathbb{N}_n$, при чему је $k \leq r < n$, и скуп I је фиксиран подскуп скупа $\{-k+1, -k+2, \ldots, r-1\}$. Узећемо да скуп I садржи тачно x елемената, $|I| = x$ (то ће нам бити од значаја касније када делимо скуп $\mathcal{C}_2$). И овде је то генерализација Лемеровог типа $R_5^{(k)}$ и скоро исти резон се примењује. Поново ћемо се бавити асиметричним случајевима, као и случајевима који имају више забрањених позиција него обични деранжмани. Касније ћемо случај $k=1$ повезати са бројем композиција броја n са сабирцима из коначног скупа $P=\mathbb{N}_{k+r} \setminus (r+1-I)$, где $\alpha \pm I$ означава скуп $\alpha \pm I = \{\alpha \pm i \mid i \in I\}$.

Нека $N(n;k,r,I)$ означава број пермутација са јаким ограничењима $-k \leqslant p(i)-i \leqslant r$ и $p(i)-i \notin I$. Тим пермутацијама придружујемо $n \times n$ матрицу $A=(a_{ij})$ дефинисану са:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако је} \quad -k \leq j-i \leq r,\ j-i \notin I \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Према Теореми 3.1.5 имамо да важи $N(n;k,r,I) = \operatorname{per} A$. Да бисмо израчунали овај перманент поделићемо скуп $\mathcal{C}$ на 2 дисјунктна скупа

$$\mathcal{C}_1 = \{C \in \mathcal{C} \mid 1 \in C\} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{C}_2 = \{C \in \mathcal{C} \mid 1 \notin C\},$$

али ћемо и $\mathcal{C}_2$ поделити на $x+1$ дисјунктних скупова

$$C_2^m = \{C \in \mathcal{C}_2 \mid m \text{ елемената из } C \text{ је у скупу } r+1-I\}$$

(за $m=0,1,\ldots,x$). Затим уводимо пресликавања $\varphi_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$ и $\varphi_2^m : \mathcal{C}_2^m \to \mathcal{C}^{k+1-m}$, $(m=0,1,\ldots,x)$, која су дефинисана са:

$$\varphi_1\big((1,c_2,\ldots,c_k,c_{k+1})\big) = \{(c_2-1,c_3-1,\ldots,c_k-1,c_{k+1}-1,k+r+1)\}$$

(ово пресликавање одговара развоју по првој врсти, док наредна одговарају развојима по првој колони матрице),

$$\varphi_2^m\big((c_1,c_2,\ldots,c_k,c_{k+1})\big) = \left\{D_1', D_2', \ldots, D_{k+1-m}'\right\},$$

где скуп $\left\{D_1', D_2', \ldots, D_{k+1-m}'\right\}$ добијамо из скупа $\varphi_2(C) = \{D_1, D_2, \ldots, D_k, D_{k+1}\}$ (обратимо пажњу да је овде $C=(c_1,c_2,\ldots,c_k,c_{k+1})$ и φ_2 је пресликавање које смо увели у поглављу 5.3) када обришемо све комбинације D_y које одговарају елементима c_y за које је испуњен услов $c_y \in r+1-I$. Поново ћемо искористити ова пресликавања да би добили систем од $\binom{k+r}{k}$ линеарних рекурентних једначина (за сваку комбинацију добијамо једну једначину): ако смо имали $\varphi_1(C)=\{D\}$ онда добијамо линеарну рекурентну једначину

$$a_C(n) = a_D(n-1),$$

а ако имамо $\varphi_2^m(C) = \{D_1', D_2', \ldots, D_{k+1-m}'\}$ онда добијамо линеарну рекурентну једначину

$$a_C(n) = a_{D_1'}(n-1) + a_{D_2'}(n-1) + \cdots + a_{D_{k+1-m}'}(n-1).$$

Ове рекурентне једначине одговарају развојима перманента матрица из $\mathcal{M}$ по првој врсти (у случају φ_1) или по првој колони (у свим случајевима φ_2^m; приметимо да када прескочимо неки елемент c_y, то одговара елементу 0 који се налази у првој колони).

Из добијеног система можемо одредити функцију генератрисе и/или линеарну рекурентну једначину за $N(n;k,r,I)$.

Горњим разматрањима смо практично увели следећу теорему. Њен доказ изостављамо, јер иде потпуно аналогно као и доказ Теореме 3.4.1.

ТЕОРЕМА 3.4.2. Важи $N(n;k,r,I) = a_{(r+1,r+2,\ldots,r+k+1)}(n)$. □

Претходни поступак илустроваћемо на неколико примера.

ПРИМЕР 3.4.8. $k=1,\ r=3,\ I=\{1\}$: $(r+1-I)=\{3\}$. $P=\{1,3,4\}$.
Комбинације са $k+1=2$ елемента скупа $\mathbb{N}_{k+r+1}=\mathbb{N}_5=\{1,2,3,4,5\}$ које садрже елемент 5 су:

$$\mathcal{C} = \{(4,5),(3,5),(2,5),(1,5)\}.$$

$$\mathcal{C}_1 = \{(1,5)\}, \quad \mathcal{C}_2^0 = \{(4,5),(2,5)\}, \quad \mathcal{C}_2^1 = \{(3,5)\}.$$

$$\varphi_2^0\big((4,5)\big) = \big((4,5),(3,5)\big), \quad \varphi_2^1\big((3,5)\big) = (2,5), \quad \varphi_2^0\big((2,5)\big) = \big((4,5),(1,5)\big), \quad \varphi_1\big((1,5)\big) = (4,5).$$

Уведимо смене

$$a_{(4,5)}(n) = a_n, \quad a_{(3,5)}(n) = b_n, \quad a_{(2,5)}(n) = c_n \quad \text{и} \quad a_{(1,5)}(n) = d_n$$

и долазимо до система линеарних рекурентних једначина:

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \quad b_n = c_{n-1}, \quad c_n = a_{n-1} + d_{n-1}, \quad d_n = a_{n-1}.$$

Почетни услови су $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = d_0 = 0$. Из овог система долазимо до линеарне рекурентне једначине $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, а можемо добити и функцију генератрисе $A(z) = \dfrac{1}{1 - z - z^3 - z^4}$. ■

ПРИМЕР 3.4.9. $\underline{k = 2,\ r = 2,\ I = \{-1, 1\}}$: $(r + 1 - I) = \{2, 4\}$.
Све комбинације са 3 елемента скупа $\{1,2,3,4,5\}$ које садрже 5 су:

$$\mathcal{C} = \{(3,4,5),(2,4,5),(2,3,5),(1,4,5),(1,3,5),(1,2,5)\}.$$

$$\mathcal{C}_1 = \{(1,4,5),(1,3,5),(1,2,5)\},$$

$$\mathcal{C}_2^0 = \emptyset, \quad \mathcal{C}_2^1 = \{(3,4,5),(2,3,5)\}, \quad \mathcal{C}_2^2 = \{(2,4,5)\}.$$

$$\varphi_2^1\big((3,4,5)\big) = \big((3,4,5),(2,3,5)\big), \quad \varphi_2^2\big((2,4,5)\big) = (1,3,5) \quad \varphi_2^1\big((2,3,5)\big) = \big((1,4,5),(1,2,5)\big),$$

$$\varphi_1\big((1,4,5)\big) = (3,4,5), \qquad \varphi_1\big((1,3,5)\big) = (2,4,5), \qquad \varphi_1\big((1,2,5)\big) = (1,4,5),$$

одакле добијамо систем линеарних рекурентних једначина:

$$a_n = a_{n-1} + c_{n-1}, \qquad b_n = e_{n-1}, \qquad c_n = d_{n-1} + f_{n-1},$$

$$d_n = a_{n-1}, \qquad e_n = b_{n-1}, \qquad f_n = d_{n-1}.$$

Почетни услови су $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$. Број пермутација, a_n, које задовољавају услове $|p(i) - i| \leqslant 2$ и $|p(i) - i| \neq 1$, за све $i \in \mathbb{N}_n$ једнак је као и у претходном примеру. ■

ПРИМЕР 3.4.10. $\underline{k = 2,\ r = 3,\ I = \{-1, 2\}}$: пермутације скупа $\mathbb{N}_n$, које задовољавају услове $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 3$ и $p(i) - i \neq -1, 2$. Тада је скуп $I = \{-1, 2\}$, одакле је $(r + 1 - I) = \{2, 5\}$. Све комбинације са $k + 1 = 3$ елемента скупа $\mathbb{N}_{k+r+1} = \mathbb{N}_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$ које садрже елемент 6 су:

$$\mathcal{C} = \{456, 356, 346, 256, 246, 236, 156, 146, 136, 126\}.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \{156, 146, 136, 126\},\\
\mathcal{C}_2^0 &= \{346\},\\
\mathcal{C}_2^1 &= \{456, 356, 246, 236\},\\
\mathcal{C}_2^2 &= \{256\}.
\end{aligned}$$

$$\varphi_2^0(346) = \{356, 256, 236\};$$

$$\varphi_2^1(456) = \{456, 346\}, \qquad \varphi_2^1(356) = \{456, 246\}, \qquad \varphi_2^1(246) = \{156, 136\}, \qquad \varphi_2^1(236) = \{156, 126\};$$

$$\varphi_2^2(256) = \{146\};$$

$$\varphi_1(156) = \{456\}, \qquad \varphi_1(146) = \{356\}, \qquad \varphi_1(136) = \{256\}, \qquad \varphi_1(126) = \{156\}.$$

Одавде добијамо систем линеарних рекурентних једначина:

$$\begin{array}{rcl}
a_{456}(n+1) & = & a_{456}(n)+a_{346}(n)\\
a_{356}(n+1) & = & a_{456}(n)+a_{246}(n)\\
a_{346}(n+1) & = & a_{356}(n)+a_{256}(n)+a_{236}(n)\\
a_{256}(n+1) & = & a_{146}(n)\\
a_{246}(n+1) & = & a_{156}(n)+a_{136}(n)\\
a_{236}(n+1) & = & a_{156}(n)+a_{126}(n)\\
a_{156}(n+1) & = & a_{456}(n)\\
a_{146}(n+1) & = & a_{356}(n)\\
a_{136}(n+1) & = & a_{256}(n)\\
a_{126}(n+1) & = & a_{156}(n),
\end{array}$$

са почетним условима $a_{456}(0)=1$ и $a_C(0)=0$ за $C\neq 456$. Решавањем одговарајућег система долазимо до функције генератрисе:

$$A(z)=\frac{1-z^5}{1-z-z^3-z^4-4z^5+z^6-z^7+z^9+z^{10}}.$$

Број пермутација, $a_{456}(n)$, које задовољавају услове $-2\leqslant p(i)-i\leqslant 3$ и $p(i)-i\neq -1,2$, за све $i\in\mathbb{N}_n$ одређен је његовом функцијом генератрисе $A(z)$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$a_{456}(n)$	1	1	1	2	4	9	15	25	46	84	156	...

Табела 3.7: Број пермутација које задовољавају услове $-2\leqslant p(i)-i\leqslant 3$ и $p(i)-i\neq -1,2$.

Ово је низ A080004 у [43]. ■

3.4. Парне и непарне пермутације

Сада ћемо пребројавати парне и непарне ($\pi=0$ за парне и $\pi=1$ за непарне) пермутације које задовољавају услове

$$-k\leqslant p(i)-i\leqslant r \qquad \text{и} \qquad p(i)-i\notin I$$

за све $i\in\mathbb{N}_n$, при чему је $k\leq r<n$, и скуп I је фиксиран подскуп скупа $\{-k+1,-k+2,\dots,r-1\}$. Узећемо да скуп I садржи тачно x елемената, $|I|=x$ (то ће нам бити од значаја касније када делимо скуп $\mathcal{D}_2$).

И овде је то генерализација Лемеровог типа $R_5^{(k)}$ и скоро исти резон се примењује. Поново ћемо се бавити асиметричним случајевима, као и случајевима који имају више забрањених позиција него обични деранжмани. Матрице које се добијају Лапласовим развојем имају правилну структуру – то су тзв. тракасте матрице (енг. band matrices). Матрица је *тракаста* ако је ретка матрица (енг. sparse matrix; то су матрице које су углавном попуњене са нулама) код које се сви ненула елементи налазе у једној дијагоналној траци, која се састоји од главне дијагонале и нула или више дијагонала које се налазе са сваке од страна главне дијагонале (ти бројеви дијагонала са сваке од страна су коначни унапред фиксирани бројеви). Лапласов развој пермането тракастих матрица се своди на систем линеарних рекурентних једначина. Овим пермутацијама ћемо се и касније бавити у поглављу са коначним аутоматима.

Наша техника се састоји од 6 корака:

1. Формирамо $\mathcal{C}$, скуп свих комбинација од $k+1$ елемената скупа $\mathbb{N}_{k+r+1}$ које садрже елемент $k+r+1$.
2. Формирамо $\mathcal{D}$, скуп свих уређених парова $D=(C,\pi)$, где је $C \in \mathcal{C}$ и $\pi \in \{0,1\}$.
3. Придружујемо целобројни низ $a_D(n)$ сваком уређеном пару $D \in \mathcal{D}$.
4. Примењујемо пресликавање φ (које ће бити дефинисано касније) на сваки уређени пар.
5. Формирамо систем линеарних рекурентних једначина са константним коефицијентима (касније ћемо видети да ове једначине одговарају Лапласовом развоју перманента матрице A):
$$a_D(n) = \sum_{D' \in \varphi(D)} a_{D'}(n-1).$$
6. Решавањем овог система добијамо:
$N(n;k,r,I;0) = a_{((r+1,r+2,\ldots,r+k+1),0)}(n)$ и $N(n;k,r,I;1) = a_{((r+1,r+2,\ldots,r+k+1),1)}(n)$.

Сада ћемо детаљније описати сваки од ових корака и показаћемо да је $N(n;k,r,I;\pi)$ баш једнако $a_{((r+1,r+2,\ldots,r+k+1),\pi)}(n)$.

У Дефиницији 3.4.1 смо дефинисали комбинације и илустровали смо их у Примеру 3.4.1. Сада ћемо наставити да уводимо потребне појмове. У дефиницији 3.4.2 смо разбили скуп $\mathcal{C}$ на дисјунктне подскупове, али ради комплетности овог поглавља, то ћемо поновити и у Дефиницији 3.4.3. Подсетимо се и да са $\alpha \pm I$ означавамо скуп $\alpha \pm I = \{\alpha \pm i \mid i \in I\}$.

ДЕФИНИЦИЈА 3.4.3. Поделимо скуп $\mathcal{C}$ на 2 дисјунктна подскупа:
$$\mathcal{C}_1 = \{C \in \mathcal{C} \mid 1 \in C\} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{C}_2 = \{C \in \mathcal{C} \mid 1 \notin C\},$$
а затим поделимо скуп $\mathcal{C}_2$ на $x+1$ дисјунктних подскупова:
$$\mathcal{C}_2^m = \{C \in \mathcal{C}_2 \mid m \text{ елемената из } C \text{ је у } r+1-I\}, \quad (m=0,1,\ldots,x).$$

Са $\mathcal{C}^{k+1-m}$ означићемо Декартов производ $\mathcal{C}^{k+1-m} = \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \cdots \times \mathcal{C}$, где се $\mathcal{C}$ јавља $(k+1-m)$ пута.

Нека је са B означен скуп $B=\{0,1\}$.

Уведимо скуп уређених парова $\mathcal{D} = \{(C,\pi) \mid C \in \mathcal{C}, \pi \in B\}$ и њега поделимо, аналогно као и $\mathcal{C}$, на дисјунктне подскупове:
$$\mathcal{D}_1 = \{(C,\pi) \mid C \in \mathcal{C}_1, \pi \in B\}, \qquad \mathcal{D}_2 = \{(C,\pi) \mid C \in \mathcal{C}_2, \pi \in B\},$$
$$\mathcal{D}_2^m = \{(C,\pi) \mid C \in \mathcal{C}_2^m, \pi \in B\}, \quad (m=0,1,\ldots,x).$$

За свако $D \in \mathcal{D}_2$ дефинишемо уређену $(k+1)$-торку
$$SD = (D_1, D_2, \ldots, D_k, D_{k+1})$$
на следећи начин. Добијамо сваку од комбинација $C_i \in \mathcal{C}$ полазећи од почетне комбинације $C = (c_1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1})$ (обратимо пажњу да је $D \in \mathcal{D}$ облика $D=(C,\pi)$!) тако што обришемо c_i, смањимо све остале координате за 1, померимо све координате са већим индексом за једно место улево и допишемо $k+r+1$ на крај:
$$C_i = (c_1-1, \ldots, c_{i-1}-1, c_{i+1}-1, \ldots, c_{k+1}-1, k+r+1).$$
За координату парности имамо једноставнију везу:
$$\pi_i = \begin{cases} \pi, & i \text{ је непарно,} \\ 1-\pi, & i \text{ је парно,} \end{cases}$$
тј. ако је i непарно координата парности остаје иста, а ако је i парно координата парности се мења.

Слично као у SD имамо да је D_1 за свако $D \in \mathcal{D}_1$ једнако:

$$D_1 = \big((c_2-1, c_3-1, \ldots, c_k-1, c_{k+1}-1, k+r+1), \pi\big)$$

(у овом случају координата парности π остаје иста).

Сада, добијамо уређену $(k+1-m)$-торку $SD' = \big(D'_1, D'_2, \ldots, D'_{k+1-m}\big)$ од уређене $(k+1)$-торке $SD = (D_1, D_2, \ldots, D_k, D_{k+1})$ тако што обришемо све уређене парове $D_y = (C_y, \pi_y)$ који одговарају елементу c_y за који важи услов $c_y \in r+1-I$.

Коначно, уведимо пресликавање

$$\varphi(D) = \begin{cases} \varphi_1(D), & D \in \mathcal{D}_1 \\ \varphi_2^m(D), & D \in \mathcal{D}_2^m, \end{cases}$$

при чему $\varphi_1 : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}$ (ако $1 \in C$) и $\varphi_2^m : \mathcal{D}_2^m \to \mathcal{D}^{k+1-m}$ (ако $1 \notin C$), за $m = 0, 1, \ldots, x$, и дефинисане са:

$$\varphi_1(D) = D_1, \qquad \varphi_2^m(D) = SD'.$$

Последња два услова, тј. како је дефинисано пресликавање φ (при чему је φ_1 ако $1 \in C$ и φ_2^m ако $1 \notin C$), можемо да распишемо као:

$$\varphi_1\big(((1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}), \pi)\big) = \{((c_2-1, c_3-1, \ldots, c_k-1, c_{k+1}-1, k+r+1), \pi)\}$$

(у овом случају координата парности π остаје иста) и

$$\varphi_2^m\big(((c_1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}), \pi)\big) = SD'.$$

Пресликавање φ користимо да би добили систем од $2 \cdot \binom{k+r}{k}$ линеарних рекурентних једначина (добијамо једну једначину за сваки уређени пар из $\mathcal{D}$, тј. две једначине за сваку комбинацију из $\mathcal{C}$ – једна одговара парним пермутацијама, а друга непарним): ако имамо $\varphi_1(D) = D'$, онда добијамо линеарну рекурентну једначину:

$$a_D(n+1) = a_{D'}(n),$$

а ако имамо $\varphi_2^m(D) = (D'_1, D'_2, \ldots, D'_{k+1-m})$, онда добијамо линеарну рекурентну једначину:

$$a_D(n+1) = a_{D'_1}(n) + a_{D'_2}(n) + \cdots + a_{D'_{k+1-m}}(n).$$

Почетни услови су: $a_{((r+1,r+2,\ldots,r+k+1),0)}(0) = 1$ и $a_D(0) = 0$ за све $D \neq ((r+1, r+2, \ldots, r+k+1), 0)$.

Овај систем можемо решити, на пример стандардном методом која користи функције генератриса. Такође из овог система можемо добити функцију генератрисе и линерану рекурентну једначину (она следи и из имениоца функције генератрисе) за низ $N(n;k,r,I;\pi)$. Показаћемо да важи $N(n;k,r,I;0) = a_{((r+1,r+2,\ldots,r+k+1),0)}(n)$ и $N(n;k,r,I;1) = a_{((r+1,r+2,\ldots,r+k+1),1)}(n)$.

Даље, на основу матрице овог система, S, можемо одредити $N(n;k,r,I;\pi)$ као елемент у првој врсти и првој колони матрице S^n, тј. он је једнак броју затворених путева у диграфу G коме је матрица суседства баш матрица S (због ове обсервације знамо да можемо применити и Методу матрица преноса на матрицу S). Ове напомене ћемо искористити у следећем поглављу, где се бавимо компјутерском сложеношћу наше технике.

Дефинишимо сада главно тврђење у овом поглављу.

ТЕОРЕМА 3.4.3. За парне пермутације важи $N(n;k,r,I;0) = a_{((r+1,r+2,\ldots,r+k+1),0)}(n)$, а за непарне пермутације важи $N(n;k,r,I;1) = a_{((r+1,r+2,\ldots,r+k+1),1)}(n)$.

Доказ.

Успоставићемо бијекцију која свакој комбинацији $C = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \mathcal{C}$ придружује матрицу $M_C = f(C)$. Уведимо скуп $\mathcal{M}_t$ (за фиксирано t) матрица M_C које одговарају низовима $a_{D_0}(n)$ и $a_{D_1}(n)$, где је $D_0 = (C, 0)$ и $D_1 = (C, 1)$.

Нека матрица $M_C = (m_{ij})$ задовољава следеће услове:

1) првих $k+1$ врста на почетку имају нуле и јединице, а на крају само нуле:
   за $i=1,\ldots,k+1$ важи $m_{ij}=\begin{cases}1, & j+r-c_i\notin I\\ 0, & j+r-c_i\in I\end{cases}$ за $j=1,\ldots,c_i$
   и $m_{ij}=0$ за $j>c_i$;

2) елементи у последњих $t-(k+1)$ врста задовољавају: $m_{ij}=1$ за $-k\leqslant j-i\leqslant r$, $j-i\notin I$ и $m_{ij}=0$ у осталим случајевима.

Означимо са $\mathcal{M}_t$ скуп свих $t\times t$ $(t>r)$ матрица M_C за $C\in\mathcal{C}$.

Из матрице $M_C\in\mathcal{M}_t$, можемо одредити одговарајућу комбинацију $C=(c_1,c_2,\ldots,c_k)\in\mathcal{C}$: нека c_i представља колону у којој се налази последња јединица у i-тој врсти матрице M_C, $i=1,2,\ldots,k+1$.

Дакле, пресликавање $f:\mathcal{C}\to\mathcal{M}_t$, дефинисано са $f(C)=M_C$ је бијекција.

Пермутацијама са ограничењима $-k\le p(i)-i\le r$ и $p(i)-i\notin I$ можемо придружити $n\times n$ матрицу $A=(a_{ij})$ која је дефинисана са:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{ако је} \quad -k\le j-i\le r,\ j-i\notin I,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Као што смо показали у Теореми 3.1.5 број свих пермутација (и парних и непарних заједно) које задовољавају услове $-k\leqslant p(i)-i\leqslant r$ и $p(i)-i\notin I$ једнак је $\operatorname{per}A$. Приметимо да је $A\in\mathcal{M}_n$ са $c_i=r+i$, за $1\leqslant i\leqslant k+1$, те је стога комбинација из $\mathcal{C}$ која одговара A једнака $(r+1,r+2,\ldots,r+k+1)$.

Сада, приметимо да рекурентне једначине из корака 5. (са стране 53) наше технике одговарају развоју перманента матрице из $\mathcal{M}_t$ по првој врсти (у случају φ_1) или по првој колони (у свим случајевима φ_2^m; приметимо да када прескочимо елемент c_y, то одговара 0 елементу у првој колони). Током овог развијања још треба да водимо рачуна о парности пермутације у конструкцији.

Сваки корак у конструкцији пермутације одређује позицију најмањег од преосталих елемената пермутације. Нека q означава број већ искоришћених елемената у конструкцији пермутације са ограничењима. Уведимо монотоно растући низ w позиција у пермутацији којима још увек нису додељене вредности: $w=(w_1,w_2,\ldots,w_{n-q})$, при чему је $w_1<w_2<\ldots<w_{n-q}$.

Ако перманент развијамо по првој врсти (и тад ми имамо само једну 1 у првој колони), то одговара у пермутацији $p(w_1)=q+1$ и парност пермутације у конструкцији се не мења, јер немамо ниједну нову инверзију.

Ако перманент развијамо по првој колони и ако имамо 1 у i-том реду (тј. на позицији $(i,1)$ у матрици A је 1), то одговара $p(w_i)=q+1$. Тада имамо $i-1$ бројева: $p(w_1),p(w_2),\ldots,p(w_{i-1})$ који чине инверзију са $p(q+i)=q+1$ (јер ниједан од тих бројева још увек није додеље, па ће стога сви они бити већи од $q+1$). Дакле, парност пермутације у конструкцији зависи од парности i:

- ако је i парно, онда имамо непаран број $(i-1)$ инверзија, па треба да променимо парност пермутације у конструкцији, $\pi'=1-\pi$;

- ако је i непарно, онда имамо паран број $(i-1)$ инверзија, па не треба да мењамо парност пермутације у конструкцији, $\pi'=\pi$.

На основу свега тога следи главни закључак:

$$N(n;k,r,I;0)=a_{((r+1,r+2,\ldots,r+k+1),0)}(n) \qquad N(n;k,r,I;1)=a_{((r+1,r+2,\ldots,r+k+1),1)}(n).$$

$\square$

Илустроваћемо ово тврђење на неколико примера. У првом од њих илуструјемо везу између Лапласовог развоја перманента и функције φ, а у следећа два ћемо у потпуности применити технику из овог поглавља да бисмо добили број парних (односно непарних) пермутација са ограничењима.

ПРИМЕР 3.4.11. Ако развијемо перманент матрице $M_{345}\in\mathcal{M}_6$ по елементу 1 на позицији

$(3,1)$ добијамо матрицу $M_{235} \in \mathcal{M}_5$:

$$M_{345} = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad M_{235} = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

У том случају је $i = 3,\ j = 1$, па у пермутацији у конструкцији имамо да је $p(3) = 1$ и да се парност не мења (јер је $i = 3$ непаран). Сада је $q = 1$ и $w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) = (1, 2, 4, 5, 6)$.

Даље, ако развијемо перманент матрице $M_{235} \in \mathcal{M}_5$ по елементу 1 на позицији $(2,1)$ долазимо до матрице $M_{145} \in \mathcal{M}_4$:

$$M_{235} = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad M_{145} = \begin{array}{c} \\ 1\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

У том случају је $i = 2,\ j = 1$, па у пермутацији у конструкцији имамо да је $p(w_i) = q + j$, што даје: $p(2) = 2$ и парност се мења (јер је $i = 2$ паран). Сада је $q = 2$ и $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (1, 4, 5, 6)$.

Матрицз $M_{125} = \begin{array}{c} \\ 1\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ одговара парној пермутацији $p' = 1234$ (када преостале бројеве сведемо на скуп $\mathbb{N}_4$ – то је смањени облик из Дефинције 2.1.1) која одређује непарну пермутацију $(p(w_i) = q + j)$: $p(1) = 3$, $p(4) = 4$, $p(5) = 5$, $p(6) = 6$, тј. $p = 321456$.

Такође, матрица $M_{125} = \begin{array}{c} \\ 1\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ одговара непарној пермутацији $p' = 1432$ (сведено на $\mathbb{N}_4$, тј. смањени облик) која одређује парну пермутацију $(p(w_i) = q + j)$: $p(1) = 3$, $p(4) = 6$, $p(5) = 5$, $p(6) = 4$, тј. $p = 321654$.

Ако развијемо перманент матрице $M_{235} \in \mathcal{M}_5$ по елементу 1 на позицији $(3,1)$ добијамо матрицу $M_{125} \in \mathcal{M}_4$:

$$M_{235} = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad M_{125} = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

У том случају је $i = 3,\ j = 1$, па у пермутацији у конструкцији имамо да је $p(4) = 2$ и парност се не мења (јер је $i = 3$ непаран). Сада је $q = 1$ и $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) = (1, 2, 5, 6)$.

Матрицз M_{125} одговара парној пермутацији $p' = 1234$ (смањени облик) која одређује парну пермутацију $p(1) = 3$, $p(2) = 4$, $p(5) = 5$, $p(6) = 6$, тј. $p = 341256$. ■

ПРИМЕР 3.4.12. Одредимо број парних (непарних) пермутација скупа $\mathbb{N}_n$, које задовољавају услов $-1 \le p(i) - i \le 1$ за све $i \in \mathbb{N}_n$. Уобичајено се ове пермутације називају пермутације дужине n са растојањем 1 (енг. permutation of length n within distance 1).

У овом случају је $k = r = 1$, тј. $k + r + 1 = 3$ и $\mathcal{C} = \{23, 13\}$.
$\varphi_2(23, 0) = \{(23, 0), (13, 1)\}$, $\varphi_1(13, 0) = \{(23, 0)\}$, $\varphi_2(23, 1) = \{(23, 1), (13, 0)\}$, $\varphi_1(13, 1) = \{(23, 1)\}$, одакле добијамо систем линеарних рекурентних једначина:

$$\begin{aligned} a_{(23,0)}(n+1) &= a_{(23,0)}(n) + a_{(13,1)}(n), \\ a_{(13,0)}(n+1) &= a_{(23,0)}(n), \\ a_{(23,1)}(n+1) &= a_{(23,1)}(n) + a_{(13,0)}(n), \\ a_{(13,1)}(n+1) &= a_{(23,1)}(n), \end{aligned}$$

са почетним условима $a_{(23,0)}(0) = 1$, $a_{(13,0)}(0) = 0$, $a_{(23,1)}(0) = 0$, $a_{(13,1)}(0) = 0$. Ако уведемо смену $a_{(23,0)}(n) = a_n$, $a_{(13,0)}(n) = b_n$, $a_{(23,1)}(n) = c_n$ и $a_{(13,1)}(n) = d_n$, добијамо једноставнији запис:

$$a_{n+1} = a_n + d_n, \qquad b_{n+1} = a_n, \qquad c_{n+1} = c_n + b_n, \qquad d_{n+1} = c_n.$$

Почетни услови су $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = d_0 = 0$.

Један од главних разлога за увођење претходне смене је прелажење са система рекурентних једначина на систем линеарних једначина: низу који је означен малим латиничним словима придружићемо функцију генератрисе чија је ознака исто, али велико слово (нпр. $a_n \leftrightarrow A(z)$, $b_n \leftrightarrow B(z)$, итд.). Тако добијамо следећи систем:

$$\frac{A(z) - 1}{z} = A(z) + D(z), \quad \frac{B(z)}{z} = A(z), \quad \frac{C(z)}{z} = C(z) + B(z), \quad \frac{D(z)}{z} = C(z)$$

Ово је систем линеарних једначина $\big($променљиве су $A(z), B(z), C(z), D(z)\big)$ и део његовог решења који нас занима је:

$$A(z) = \frac{1 - z}{1 - 2z + z^2 - z^4}, \qquad C(z) = \frac{z^2}{1 - 2z + z^2 - z^4}\,.$$

Из имениоца ових функција генератриса $1 - 2z + z^2 - z^4$, можемо наћи линеарне рекурентне једначине:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-4} \qquad \text{и} \qquad c_n = 2c_{n-1} - c_{n-2} + c_{n-4}.$$

Решавањем ових једначина добијамо општи члан ових низова:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(F_{n+1} + x_n\right), \qquad c_n = \frac{1}{2}\left(F_{n+1} - x_n\right),$$

где F_n означава n-ти Фибоначијев број, а $x_n = \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$ (A010892 у [43]).

Бројеве парних пермутација, a_n, и бројеве непарних пермутација, c_n, који задовољавају ограничење $|p(i) - i| \leqslant 1$, за све $i \in \mathbb{N}_n$ можемо одредити из претходних рекурентних формула или из њихових функција генератриса $A(z)$ и $C(z)$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_n	1	1	1	1	2	4	7	11	17	27	44	...
c_n	0	0	1	2	3	4	6	10	17	28	45	...

Табела 3.8: Број парних и непарних пермутација које задовољавају $|p(i) - i| \leqslant 1$.

Ови низови су A005252 и A024490 у [43]. ■

ПРИМЕР 3.4.13. Одредимо број парних (непарних) пермутација скупа $\mathbb{N}_n$, које задовољавају одграничење $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$.

У овом случају је $k = r = 2$, тј. $k + r + 1 = 5$, скуп забрањених позиција $I = \{-1, 1\}$, што повлачи да је $(r + 1 - I) = \{2, 4\}$. Скуп свих комбинација $\mathcal{C} = \{345, 245, 235, 145, 135, 125\}$ је подељен на скупове:

$$\mathcal{C}_1 = \{145, 135, 125\}, \qquad \mathcal{C}_2^0 = \emptyset, \qquad \mathcal{C}_2^1 = \{345, 235\}, \qquad \mathcal{C}_2^2 = \{245\}.$$

$$\begin{array}{ll} \varphi_2^1(345,0)=\{(345,0),(235,0)\}, & \varphi_2^1(345,1)=\{(345,1),(235,1)\}, \\ \varphi_2^2(245,0)=\{(135,0)\}, & \varphi_2^2(245,1)=\{(135,1)\}, \\ \varphi_2^1(235,0)=\{(145,1),(125,0)\}, & \varphi_2^1(235,1)=\{(145,0),(125,1)\} \\ \varphi_1(145,0)=\{(345,0)\}, & \varphi_1(145,1)=\{(345,1)\}, \\ \varphi_1(135,0)=\{(245,0)\}, & \varphi_1(135,1)=\{(245,1)\}, \\ \varphi_1(125,0)=\{(145,0)\}, & \varphi_1(125,1)=\{(145,1)\}. \end{array}$$

Ако уведемо смену $a_{(345,0)}(n)=a_n$, $a_{(245,0)}(n)=b_n$, $a_{(235,0)}(n)=c_n$, $a_{(145,0)}(n)=d_n$, $a_{(135,0)}(n)=e_n$, $a_{(125,0)}(n)=f_n$, $a_{(345,1)}(n)=g_n$, $a_{(245,1)}(n)=h_n$, $a_{(235,1)}(n)=i_n$, $a_{(145,1)}(n)=j_n$, $a_{(135,1)}(n)=k_n$ и $a_{(125,1)}(n)=\ell_n$ добијамо систем линеарних рекурентних једначина:

$$\begin{array}{ll} a_{n+1}=a_n+c_n, & g_{n+1}=g_n+i_n, \\ b_{n+1}=e_n, & h_{n+1}=k_n, \\ c_{n+1}=j_n+f_n, & i_{n+1}=d_n+\ell_n \\ d_{n+1}=a_n, & j_{n+1}=g_n, \\ e_{n+1}=b_n, & k_{n+1}=h_n, \\ f_{n+1}=d_n, & \ell_{n+1}=j_n, \end{array}$$

са почетним условима $a_0=1$ и $b_0=c_0=\cdots=\ell_0=0$.

Из овог система добијамо функције генератриса:

$A(z)=\frac{1-z-z^4}{1-2z+z^2-2z^4+2z^5-z^6+z^8}$ и $G(z)=\frac{z^3}{1-2z+z^2-2z^4+2z^5-z^6+z^8}$.

Из имениоца ових функција генератриса

$$1-2z+z^2-2z^4+2z^5-z^6+z^8=(1-z)(1+z)(1+z^2)(1-z+z^2)(1-z-z^2),$$

добијамо линеарну рекурентну једначину $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+2a_{n-4}-2a_{n-5}+a_{n-6}-a_{n-8}$, а иста важи и за g_n.

Решавањем ове једначине добијамо опште чланове ових низова:

$$a_n=\frac{1}{10}\left(L_{n+2}+y_n+z_n\right), \qquad g_n=\frac{1}{10}\left(L_{n+2}+y_n-z_n\right),$$

где L_n означава n-ти Лукасов број, $y_n=2\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}$ и $z_n=\begin{cases}5, & n\equiv_6 0,1,2\\ 0, & n\equiv_6 3,4,5,\end{cases}$ тј. $z_n=5$, ако број n даје остатак 0, 1 или 2 при дељењу са 6, а $z_n=0$, ако n даје остатак 3, 4 или 5 при дељењу са 6.

Бројеве парних пермутација, a_n, и бројеве непарних пермутација, g_n, које задовољавају ограничења $|p(i)-i|\leqslant 2$ и $p(i)-i\neq -1,1$ можемо одредити на основу претходних формула или њихових функција генератриса $A(z)$ и $G(z)$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_n	1	1	1	1	2	3	5	8	13	20	32	...
g_n	0	0	0	1	2	3	4	7	12	20	32	...

Табела 3.9: Број парних и непарних пермутација које задовољавају $p(i)-i\in\{-2,0,2\}$.

■

3.5. Везе са другим комбинаторним објектима

3.5.1. Пребројавање $R_4^{(k)}$ и композиције

Прво ћемо урадити пример који ће бити од суштинске важности за успостављање везе између пермутација са ограничењима и композицијама.

ПРИМЕР 3.5.1. <u>$k=1$</u>: Све комбинације са $k+1=2$ елемента скупа $\mathbb{N}_{r+2}=\{1,2,\dots,r+2\}$ су: $(r+1,r+2),(r,r+2),\dots,(1,r+2)$.

$$\varphi_2\big((r+1,r+2)\big)=\big((r+1,r+2),(r,r+2)\big)$$

$$\varphi_2\big((r,r+2)\big)=\big((r+1,r+2),(r-1,r+2)\big)$$

$$\vdots$$

$$\varphi_2\big((2,r+2)\big)=\big((r+1,r+2),(1,r+2)\big)$$

$$\varphi_1\big((1,r+2)\big)=(r+1,r+2)$$

одакле добијамо систем линеарних рекурентних једначина:

$$a_{(r+1,r+2)}(n)=a_{(r+1,r+2)}(n-1)+a_{(r,r+2)}(n-1)$$

$$a_{(r,r+2)}(n)=a_{(r+1,r+2)}(n-1)+a_{(r-1,r+2)}(n-1)$$

$$\vdots$$

$$a_{(2,r+2)}(n)=a_{(r+1,r+2)}(n-1)+a_{(1,r+2)}(n-1)$$

$$a_{(1,r+2)}(n)=a_{(r+1,r+2)}(n-1)$$

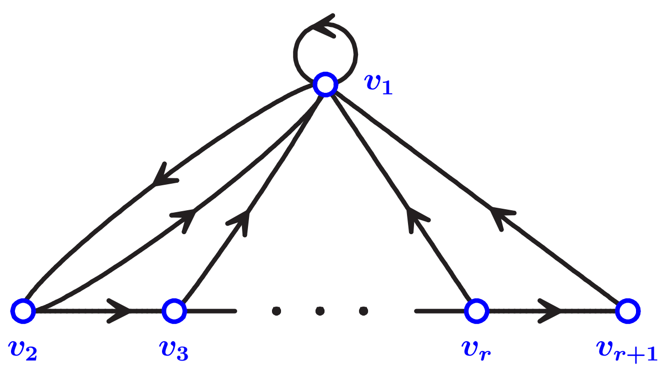
Ако $a_{(r+1,r+2)}(n)$ заменимо са a_n, долазимо до $(r+1)$-Фибоначијевих бројева (енг. Fibonacci $(r+1)$-step numbers – видети [**?**]; Линч их у [32] зове као и ми):

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_{n-r-1}$$

са почетним условима $a_0=1$, $a_i=2^{i-1}$ за $i=1,\dots,r$. За $r=1$ добијамо обичне Фибоначијеве бројеве, за $r=2$ Трибоначијеве бројеве, за $r=3$ Тетраначијеве бројеве итд.

Њихова функција генератрисе је $A(z)=\dfrac{1}{1-z-z^2-\cdots-z^{r+1}}$.

Низ a_n представља и број композиција броја n на сабирке из скупа $P=\{1,2,\dots,r+1\}$, што ћемо показати из диграфа $G=D(S)$ који је показан на Слици 3.4 и који одговара матрици система линеарних рекурентних једначина S.



Слика 3.4: Диграф $G=D(S)$.

Свака 1 у композицији одговара шетњи a_1a_1 дужине 1 у G, свака 2 одговара шетњи $a_1a_2a_1$ дужине 2, свака 3 одговара шетњи $a_1a_2a_3a_1$ дужине 3, $\dots$ и свака $r+1$ шетњи $a_1a_2\dots a_ra_{r+1}a_1$ дужине $r+1$. Већ смо видели да је a_n једнако елементу на позицији $(1,1)$ у матрици S^n, што је по Теореми 1.5.2 једнако броју шетњи дужине n од чвора a_1 до чвора a_1. На основу претходног следи да је број композиција броја n на сабирке из скупа $\{1,2,3,\dots,r+1\}$ једнак броју пермутација из S_n које задовољавају ограничење $1\leqslant p(i)-i\leqslant r$. ■

Диграф $G=D(S)$ из претходног примера имаће и важну улогу касније када ове резултате генерализујемо у Теореми 3.5.2). Пре тога ћемо на основу резултата претходног примера пребројати пермутације са ограничењима Лемеровог типа $(R_4^{(r+1)},n)$.

ТЕОРЕМА 3.5.1. Број пермутација Лемеровог типа $(R_4^{(r+1)}, n)$, са елементима из скупа $\mathbb{N}_n$ (елемент n долази на прво место и сви остали не могу да се помере удесно за више од $r+1$ места – видети [29] или овде страну 36) једнак је броју пермутација које задовољавају услов $-1 \leqslant p(i) - i \leqslant r$, за све $i \in \mathbb{N}_{n-1}$. Тај број је баш $(r+1)$-Фибоанчијев број.

Доказ. Означимо скуп свих пермутација које задовољавају услов $-1 \leq p(i) - i \leq r$, за све $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ са $(R_1^{(1,r)}, n-1)$. Успоставимо бијекцију

$$\Phi : (R_4^{(r+1)}, n) \to (R_1^{(1,r)}, n-1)$$

на следећи начин:

$$\Phi\big((n, p_2, p_3, \ldots, p_n)\big) = (p_2, p_3, \ldots, p_n).$$

У Примеру 3.5.1 показали смо да је број пермутација које задовољавају услов $-1 \leqslant p(i) - i \leqslant r$ једнак $(r+1)$-Фибоначијевом броју. □

ТЕОРЕМА 3.5.2. Број композиција броја n на сабирке из коначног скупа P једнак је броју пермутација са ограничењима $-1 \leqslant p(i) - i \leqslant r$ и $p(i) - i \notin I$, где је $I = \{0, 1, \ldots, r-1, r\} \setminus (-1 + P)$ при чему је r највећи елемент скупа P умањен за 1.

Доказ. Повезаћемо пермутације са ограничењима код којих је $k = 1$ са композицијама броја n на сабирке из датог скупа P. Када у диграфу $G = D(S)$, ког смо добили у Примеру 3.5.1, уклонићемо све гране (a_q, a_1) које одговарају бројевима q из скупа $1 + I$ (тиме нестаје и шетња $a_1 a_2 \ldots a_q a_1$, која одговара сабирку q у композицијама). Тиме смо добили подграф $H = (V, E')$ диграфа $G = (V, E)$ са истим скупом чворова V, док му је скуп грана $E' \subseteq E$. Чвор a_q одговара комбинацији $(r+1-q, r+2) \in \mathcal{C}$ из наше технике, те одатле добијамо $E' = E \setminus \{(a_q, a_1) \mid q \in 1 + I\}$ и да је скуп P задат са $P = \mathbb{N}_{r+1} \setminus (1 + I)$.

Такође, имамо и везу у супротном смеру – од скупа P долазимо до скупа I на следећи начин: $I = \{0, 1, \ldots, r-1, r\} \setminus (-1 + P)$ (где за r узимамо највећи елемент скупа P умањен за 1).

Тиме смо успоставили обострано једнозначну кореспонденцију између композиција броја n на сабирке из коначног скупа P и пермутација са ограничењима $-1 \leqslant p(i) - i \leqslant r$ и $p(i) - i \notin I$. □

Напомена. Напоменимо да ово није бијекција између пермутација са ограничењима и композиција са ограничењима, што ћемо видети и из наредних примера: и пермутацијама које задовољавају услове $-1 \leqslant p(i) - i \leqslant 3$ и $p(i) - i \neq 1$ и пермутацијама које задовољавају услове $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 2$ и $p(i) - i \neq \pm 1$ одговарају композиције броја n у сабирке из коначног скупа $\{1, 3, 4\}$.

ПРИМЕР 3.5.2. Одредити број композиција броја n на сабирке из скупа $P = \{1, 3, 4\}$.

Решење. Према Теореми 3.5.2 добијамо да у овом случају важи

$$k = 1, \quad k + r = 4 \ \Rightarrow \ r = 3, \qquad P = \{1, 3, 4\} \ \Rightarrow \ -1 + P = \{0, 2, 3\},$$

па је $I = \{0, 1, \ldots, r-1, r\} \setminus (-1 + P) = \{1\}$.

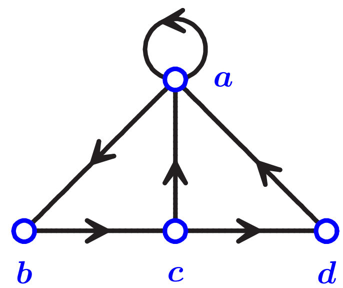
Стога композицијама броја n на сабирке из скупа $P = \{1, 3, 4\}$ одговарају пермутације са ограничењима $-1 \leqslant p(i) - i \leqslant 3$ и $p(i) - i \notin I$, тј. $p(i) - i \neq 1$. Са овим пермутацијама смо се срели у Примеру 3.4.8 и на основу система линеарних рекурентних једначина који смо тада добили долазимо до диграфа G_1, који је представљен на Слици 3.5.

Даље знамо да је број пермутација a_n са датим ограничењима једнак броју затворених шетњи дужине n од чвора a до чвора a у диграфу G_1. Свакој 1 у одговарајућим композицијама одговара шетња aa дужине 1, свакој 3 одговара шетња $abca$ дужине 3 и свакој 4 одговара шетња $abcda$ дужине 4. Стога је a_n једнако и броју композиција броја n у сабирке из скупа $P = \{1, 3, 4\}$.

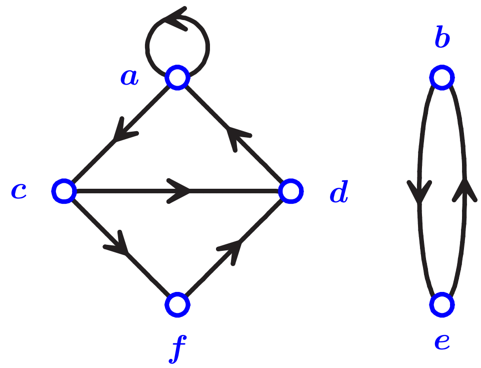
пермутација	12345	12534	14235	15234	31245	41235
композиција	1+1+1+1+1	1+1+3	1+3+1	1+4	3+1+1	4+1

Табела 3.10. Веза пермутација и композиција са сабирцима из $P = \{1, 3, 4\}$.

Нпр. за $n = 5$ имамо $a_5 = 6$ пермутација скупа $\mathbb{N}_5$ које задовољавају $p(i) - i \in \{-1, 0, 2, 3\}$. Њима одговарају композиције броја $n = 5$ у сабирке из скупа $P = \{1, 3, 4\}$. Одговарајућа бијекција је приказана у Табели 3.10. ■



Слика 3.5. Диграф G_1.



Слика 3.6. Диграф G_2.

ПРИМЕР 3.5.3. Одредити композиције које одговарају пермутацијама скупа $\mathbb{N}_n$ уз услов $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$.

Решење. Услов $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$ можемо записати као $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 2$ и $p(i) - i \notin \{-1, 1\}$, па је ово случај $k = 2,\ r = 2,\ I = \{-1, 1\}$ и њиме смо се бавили у Примеру . Тада смо добили да је број ових пермутација једнак броју пермутација из Примера 3.4.8. Ипак на основу ова два система линеарних рекурентних једначина (који имају чак и различит број једначина!) резултују различитим диграфима G_1 и G_2, који су представљени на сликама 3.5 и 3.6.

У диграфу G_2, свакој 1 одговара шетња aa дужине 1, свакој 3 одговара шетња $acda$ дужине 3 и свакој 4 одговара шетња $acfda$ дужине 4. Приметимо да ту чворови b и e нису повезани са чвором a, те стога одмах знамо да је $b_n = e_n = 0$ за све n.

пермутација	12345	12543	14325	14523	32145	34125
композиција	1+1+1+1+1	1+1+3	1+3+1	1+4	3+1+1	4+1

Табела 3.11. Веза пермутација и композиција са сабирцима из $P = \{1, 3, 4\}$.

Веза ових пермутација и композиција из скупа $P = \{1, 3, 4\}$ је приказана у Табели 3.11. ■

Са пермутацијама из овог примера ћемо се срести и у наредном потпоглављу у Примеру 3.5.4, када ћемо успоставити бијекцију између пермутација са ограничењима и подскупова са ограничењима.

3.5.2. Пребројавање $N(n; k, r, I)$ и подскупови

У овом потпоглављу ћемо за композицију пермутација p и q користити мултипликативну ознаку $p \cdot q$, уместо уобичајеније $p \circ q$, ради једноставнијег записа када имамо композицију више пермутација. Такође, са $\mathcal{A}_k$ означићемо скуп свих подскупова $A \subseteq \mathbb{N}_n$ који не садрже 2 елемента чија је разлика једнака k. Увешћемо и генерализацију претходних подскупова – са $\mathcal{B}_{d,m}$ означићемо скуп свих подскупова $B \subseteq \mathbb{N}_n$ који не садрже 2 елемента чија је разлика из скупа $\{d, 2d, \ldots, md\}$. Наћи ћемо бијекцију између скупа $\mathcal{A}_k$ и скупа свих пермутација скупа $\mathbb{N}_{n+k}$ за које важи $p(i) - i \in \{-k, 0, k\}$. У неким посебним случајевима даћемо и другу комбинаторне интерпретације скупова $\mathcal{A}_k$ и $\mathcal{B}_{d,m}$: показаћемо да њима одговарају композиције броја n на сабирке из неког коначног скупа.

Прво ћемо показати једно помоћно тврђење, које ћемо користити при доказима главних резултата овог потпоглавља.

ЛЕМА 3.5.3. За композицију транспозиција важи $\tau_{i,j} \cdot \tau_{k,\ell} \neq \tau_{k,\ell} \cdot \tau_{i,j}$ ако и само ако је $|\{i,j\} \cap \{k,\ell\}| = 1$.

Доказ. Означимо $\pi_1 = \tau_{i,j} \cdot \tau_{k,\ell}$ и $\pi_2 = \tau_{k,\ell} \cdot \tau_{i,j}$. Имамо суштински 3 различита случаја.

1° $|\{i,j\} \cap \{k,\ell\}| = 2$: тада је $\{i,j\} = \{k,\ell\}$, па како за произвољну транспозицију важи $\tau \circ \tau = \varepsilon$, добијамо да је $\pi_1 = \pi_2 = \varepsilon$.

2° $|\{i,j\} \cap \{k,\ell\}| = 0$: тада је $\pi_1(i) = j$, $\pi_1(j) = i$, $\pi_1(k) = \ell$, $\pi_1(\ell) = k$, док је за остале вредности $\pi_1(m) = m$. Такође важи $\pi_2(k) = \ell$, $\pi_2(\ell) = k$, $\pi_2(i) = j$, $\pi_2(j) = i$, док је за остале $\pi_2(m) = m$. Тиме смо добили да је и у овом случају $\pi_1 = \pi_2$.

3° $|\{i,j\} \cap \{k,\ell\}| = 1$: без умањења општости можемо узети да је $j = k$. Тада је $\pi_1 = \tau_{i,j} \cdot \tau_{j,\ell}$ и $\pi_2 = \tau_{j,\ell} \cdot \tau_{i,j}$. Даље, важи $\pi_1(i) = j$, $\pi_1(j) = \ell$, $\pi_1(\ell) = i$, док је за остале $\pi_1(m) = m$. Такође важи $\pi_2(i) = \ell$, $\pi_2(j) = i$, $\pi_2(\ell) = j$, док је за остале $\pi_2(m) = m$. Како је $\pi_1(i) = j \neq \ell = \pi_2(i)$, добијамо да да је у овом случају $\pi_1 \neq \pi_2$.

Тиме је ово тврђење показано. □

Сада прелазимо на главни резултат.

ТЕОРЕМА 3.5.4. Бијекција између скупа $\mathcal{A}_k$ и скупа свих пермутација из $\mathbb{N}_{n+k}$ које задовољавају услов $p(j) - j \in \{-k, 0, k\}$ за свако $j \in \mathbb{N}_{n+k}$ дата је са:

$$f(A) = \varepsilon \cdot \prod_{i \in A} \tau_{i,i+k}.$$

Доказ. Прво ћемо показати да је овако уведена функција f добро дефинисана.

Како је $A \in \mathcal{A}_k$, онда за свако $i \in \mathbb{N}_n$ важи $\{i, i+k\} \not\subseteq A$, тј. другим речима i и $i+k$ не могу истовремено бити у скупу A. Одатле имамо да за $i, j \in A$, $i \neq j$ важи $\{i, i+k\} \cap \{j, j+k\} = \emptyset$, па по Леми 3.5.3 имамо да за $i \neq j$ важи

$$\tau_{i,i+k} \cdot \tau_{j,j+k} = \tau_{j,j+k} \cdot \tau_{i,i+k},$$

што повлачи добру дефинисаност.

Покажимо да је овако уведена функција f инјекција, тј. "1-1".

Уочимо $A_1 \neq A_2$. Нека је $\pi_1 = f(A_1)$ и $\pi_2 = f(A_2)$. Нека је $j \in \mathbb{N}_n$ најмањи елемент који припада тачно једном од скупова A_1 и A_2. Без умањења општости узмимо да је $j \in A_1$ и $j \notin A_2$. Како је $A_1 \in \mathcal{A}_k$, из $j \in A_1 \Rightarrow j - k \notin A_1 \Rightarrow j - k \notin A_2$ (ова друга импликација следи из чињенице да је j најмањи елемент који припада тачно једном од скупова A_1 и A_2). На основу тога следи да је $\pi_1(j) = j + k$, док је $\pi_2(j) = j$, чиме смо показали да је $\pi_1 \neq \pi_2$, тј. да је ова функција "1-1".

Покажимо да је овако уведена функција f сурјекција, тј. "на".

Сваку пермутацију π можемо представити као композицију транспозиција (то је Теорема 1.1.4). Означимо минимално представљање пермутације преко композиције транспозиција са Z. Композиција транспозиција је минималне дужине ако и само ако мултиграф који се добија када граном спојимо елементе које мењамо у транспозицији не садржи контуру, тј. ако је он шума (то је Теорема 1.1.6). Другим речима, претходна чињеница каже да се у Z свака транспозиција јавља највише једном.

Нека је i најмањи природан број, такав да се $\tau_{i,i+k}$ јавља у минималном запису M. Нека се и $\tau_{i+k,i+2k}, \ldots, \tau_{i+(m-1)k,i+mk}$ јављају у M, а $\tau_{i+mk,i+(m+1)k}$ се не јавља у M. Покажимо да мора бити $m = 1$.

Претпоставимо супротно, да је $m \geqslant 2$. Онда је минимални запис M пермутације π или $M_{\mathrm{I}} = \ldots \cdot \tau_{i,i+k} \cdot \ldots \cdot \tau_{i,i+k} \cdot \ldots$ или $M_{\mathrm{II}} = \ldots \cdot \tau_{i,i+k} \cdot \ldots \cdot \tau_{i,i+k} \cdot \ldots$

Ако је $\pi = M_{\mathrm{I}}$, онда постоји $n \geqslant 2$ такво да је $\pi(i + nk) = i$. Али онда за ту вредност $i + nk$ имамо да је

$$|\pi(i + nk) - (i + nk)| = |i - (i + nk)| = nk > k,$$

па за пермутацију π не важи услов да је за свако j испуњено $\pi(j) - j \in \{-k, 0, k\}$.

Ако је $\pi = M_{\mathrm{II}}$, онда постоји $n \geqslant 2$ такво да је $\pi(i) = i + nk$. Али онда за ту вредност i имамо да је

$$|\pi(i) - i| = |(i + nk) - i| = nk > k,$$

па за пермутацију π не важи услов да је за свако j испуњено $\pi(j) - j \in \{-k, 0, k\}$.

Тиме смо показали да ако је π пермутација скупа $\mathbb{N}_{n+k}$ за коју је $\pi(j) - j \in \{-k, 0, k\}$ за свако $j \in \mathbb{N}_{n+k}$, онда у њеном минималном запису M преко транспозиција не могу истовремено бити и $\tau_{i,i+k}$ и $\tau_{i+k,i+2k}$. Стога за сваку пермутацију π постоји скуп $A \in \mathcal{A}_k$: ако је $\pi = \varepsilon \cdot \prod\limits_{i \in I} \tau_{i,i+k}$, онда за скуп A можемо узети баш скуп I, тј. $A = I$. Тиме је комплетиран доказ да је функција f и "на".

На основу свега претходног следи да је функцијом $f(A) = \varepsilon \cdot \prod_{i \in A} \tau_{i,i+k}$ успостављена бијекција између скупа $\mathcal{A}_k$ и скупа свих пермутација из $\mathbb{N}_{n+k}$ које задовољавају услов $p(j) - j \in \{-k, 0, k\}$ за свако $j \in \mathbb{N}_{n+k}$. □

Илуструјмо ово тврђење на једном примеру.

ПРИМЕР 3.5.4. Одредити подскупове $A \subseteq \mathbb{N}_3$ који не садрже два елемента чија је разлика једнака 2.

Решење. Како је $\mathbb{N}_{n-2} = \mathbb{N}_3$ добијамо да је $n = 5$.

Према Теореми 3.5.4 имамо да таквим подскуповима одговарају пермутације скупа $\mathbb{N}_n = \mathbb{N}_5$ са ограничењима $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 2$ и $p(i) - i \notin \{-1, 1\}$ (са њима смо се срели у примерима и). Представићемо сваку од тих пермутација p преко минималне композиције транспозиција, а затим ћемо из сваке од тих транспозиција узети мањи број и убацити га у подскуп A.

пермутација	12345	12543	14325	14523	32145	34125
комп.трансп.	ε	$\tau_{3,5}$	$\tau_{2,4}$	$\tau_{2,4} \circ \tau_{3,5}$	$\tau_{1,3}$	$\tau_{1,3} \circ \tau_{2,4}$
подскуп	$\emptyset$	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$

Табела 3.12. Веза пермутација и подскупова без разлика 2.

Веза ових пермутација и подскупова који немају елементе који се разликују за 2 је приказана у Табели 3.12. У Примеру смо успоставили везу ових пермутација и композиција са сабирцима из скупа $\{1, 3, 4\}$, тако да смо преко ова два примера добили везу и ова 2 комбинаторна објекта. ■

ПРИМЕР 3.5.5. Одредити број подскупова без разлика 3 (тј. $k = 3$).

Решење. Према Теореми 3.5.4 имамо да таквим подскуповима са $n - 3$ елемената одговарају пермутације скупа $\mathbb{N}_n$ са ограничењима $p(i) - i \in \{-3, 0, 3\}$, што можемо записати као $-3 \leqslant p(i) - i \leqslant 3$ и $p(i) - i \notin \{-2, -1, 1, 2\}$, па имамо да је $k = r = 3$, $I = \{-2, -1, 1, 2\}$.

Коришћењем наше технике за пребројавање пермутација долазимо до система линеарних рекурентних једначина:

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \quad b_n = c_{n-1} + d_{n-1}, \quad c_n = e_{n-1} + f_{n-1}, \quad d_n = g_{n-1} + h_{n-1},$$

$$e_n = a_{n-1}, \quad f_n = c_{n-1}, \quad g_n = e_{n-1}, \quad h_n = g_{n-1},$$

са почетним условима $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = g_0 = h_0 = 0$.
Решавањем овог система долазимо до функције генератрисе:

$$A(z) = \frac{1 - z^2}{1 - z - z^2 + z^3 - z^4 - z^5 - z^6 + z^7 + z^8}.$$

Број пермутација, a_n, које задовољавају услов $p(i) - i \in \{-3, 0, 3\}$, за све $i \in \mathbb{N}_n$ одређен је његовом функцијом генератрисе $A(z)$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
a_n	1	1	1	2	4	8	12	18	27	45	75	125	200	320	512	832	...

Табела 3.14: Број пермутација које задовољавају услов $p(i) - i \in \{-3, 0, 3\}$.

Ово је померени низ A006500 у [43].

Нпр. за $n-3=4$ имамо да је $a_n = a_7 = 12$ те стога само 4 подскупа ($2^4 - a_6 = 4$) из партитивног скупа скупа $\mathbb{N}_4$ који садрже елементе који се разликују за 3: $\{1,4\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$. Дакле, 12 тражених подскупова су: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$.

Одговарајуће пермутације скупа $\mathbb{N}_n = \mathbb{N}_7$ су: ε, $\tau_{1,4}$, $\tau_{2,5}$, $\tau_{3,6}$, $\tau_{4,7}$, $\tau_{1,4}\cdot\tau_{2,5}$, $\tau_{1,4}\cdot\tau_{3,6}$, $\tau_{2,5}\cdot\tau_{3,6}$, $\tau_{2,5}\cdot\tau_{4,7}$, $\tau_{3,6}\cdot\tau_{4,7}$, $\tau_{1,4}\cdot\tau_{2,5}\cdot\tau_{3,6}$ анд $\tau_{2,5}\cdot\tau_{3,6}\cdot\tau_{4,7}$.

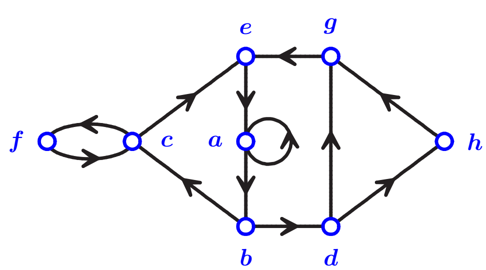
У наредној таблици њих ћемо повезати са одговарајућим подскуповима без разлика 3, као и са одговарајућим композицијама са ограничењима.

пермутација	1234567	4231567	1534267	1264537	1237564	4531267
комп.трансп.	ε	$\tau_{1,4}$	$\tau_{2,5}$	$\tau_{3,6}$	$\tau_{4,7}$	$\tau_{1,4}\circ\tau_{2,5}$
подскуп	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{1,2\}$
композиција	1+1+1+1+1+1+1	4+1+1+1	1+4+1+1	1+1+4+1	1+1+1+4	5+1+1

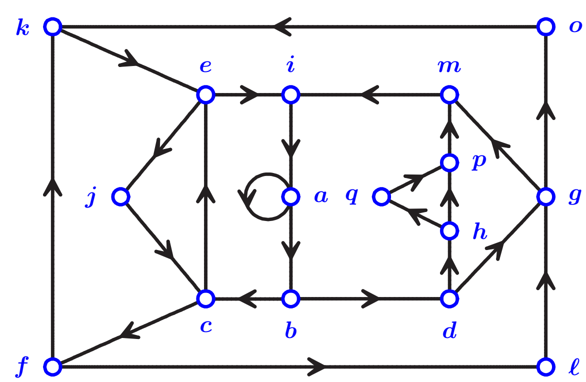
пермутација	4261537	1564237	1537264	1267534	4561237	1567234
комп.трансп.	$\tau_{1,4}\cdot\tau_{3,6}$	$\tau_{2,5}\cdot\tau_{3,6}$	$\tau_{2,5}\cdot\tau_{4,7}$	$\tau_{3,6}\cdot\tau_{4,7}$	$\tau_{1,4}\cdot\tau_{2,5}\cdot\tau_{3,6}$	$\tau_{2,5}\cdot\tau_{3,6}\cdot\tau_{4,7}$
подскуп	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3,4\}$
композиција	4+2+1	1+5+1	1+4+2	1+1+5	6+1	1+6

Табела 3.15. Веза пермутација, композиција и подскупова без разлика 3.

Из одговарајућег диграфа $G = D(S)$ приказаног на Слици 3.7 видимо да a_n представља и број композиција броја n на сабирке из скупа $\{1,2,4,5,6\}$, уз ограничење да сабирак 2 може да иде само након сабирка 2 или 4. Композиције су повезане са одговарајућим пермутацијама са ограничењима $p(i) - i \in \{-3,0,3\}$, као и скуповима без разлика 3 у Табели 3.15. ■



Слика 3.7. Диграф $G = D(S)$ за $k = 3$.



Слика 3.8. Диграф $G = D(S)$ за $k = 4$.

ПРИМЕР 3.5.6. Одредити број подскупова без разлика 4 (тј. $k = 4$).

Решење. Према Теореми 3.5.4 имамо да таквим подскуповима са $n-4$ елемената одговарају пермутације скупа $\mathbb{N}_n$ са ограничењима $p(i)-i \in \{-4,0,4\}$, што можемо записати као $-4 \leqslant p(i)-i \leqslant 4$ и $p(i) - i \notin \{-3,-2,-1,1,2,3\}$, па имамо да је $k = r = 4$, $I = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$.

Коришћењем наше технике за пребројавање пермутација долазимо до система линеарних рекурентних једначина:

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \quad b_n = c_{n-1} + d_{n-1}, \quad c_n = e_{n-1} + f_{n-1}, \quad d_n = g_{n-1} + h_{n-1},$$

$$e_n = a_{n-1}, \quad f_n = c_{n-1}, \quad g_n = e_{n-1}, \quad h_n = g_{n-1},$$

са почетним условима $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = g_0 = h_0 = 0$.
Решавањем овог система долазимо до функције генератрисе:

$$A(z) = \frac{1 - z^2 - z^3 + z^4 - z^6}{1 - z - z^2 + 2z^4 - 2z^5 - 2z^6 - 2z^8 + 2z^9 + 2z^{10} - z^{12} + z^{13} + z^{14}}.$$

Број пермутација, a_n, које задовољавају услов $p(i) - i \in \{-4, 0, 4\}$, за све $i \in \mathbb{N}_n$ одређен је његовом функцијом генератрисе $A(z)$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
a_n	1	1	1	1	1	2	4	8	16	24	36	54	81	135	225	375	...

Табела 3.16: Број пермутација које задовољавају услов $p(i) - i \in \{-4, 0, 4\}$.

Ово је померени низ A031923 у [43].

На основу горњег система рекурентних једначина долазимо и до диграфа $G = D(S)$ који је приказан на Слици 3.8. Одатле долазимо до 2 различите интерпретације са композицијама:

- a_n је једнак броју композиција броја n на сабирке из скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, са ограничењима:
  - 2 може да следи само 5, 6 или 8;
  - 3 може да следи само 2, 3 или 5;
  - ако се појављује сабирак 4, онда мора бити паран број узастопних 4.
- a_n је једнак броју обојених композиција броја n на сабирке из скупа $\{1, 3, 5, 6, 7, 8, 10\}$, са ограничењима:
  - 7 може бити црвене и беле боје;
  - 8 може бити црвене, плаве и беле боје;
  - сви остали сабирци су само црвени;
  - 3 може да следи само 3, 5, 10, црвену 7 или црвену 8. ■

Директна последица Теореме 3.5.4 је и следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 3.5.5. Број подскупова $A \subseteq \mathbb{N}_n$ који не садрже 2 елемента чија је разлика једнака k, тј. $|\mathcal{A}_k|$, једнак је елементу $s_{11}^{(n)}$ у првој врсти и првој колони матрице S^n, где је матрица $S = [s_{ij}]$ облика $2m \times 2m$, при чему је $m = 2^{k-1}$, дата са:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i \leqslant m,\ j = 2i - 1, \\ 1, & i \leqslant m,\ j = 2i, \\ 1, & i > m,\ j = 2(i - m) - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказ. Доказ се састоји из неколико делова. Прво се покаже да комбинација које се сликају једне у друге има 2^k. Ту се направи бинарно стабло код којих лево дете одговара комбинацији која се добија при развијању перманента по 1 која се налази 6 у свом реду, а десно дете по 1 која се налази 11 у свом реду. Треба показати да је ово стабло (тј. да не може да се дође до исте комбинације на различите начине). Затим се посматра у шта се сликају листови овог стабла (не треба показати само да се сликају баш у комбинације које се налазе у овом стаблу, него треба тачно видети у коју да би добили матрицу S). У ту сврху уводимо пресликавање низа 11 и 6 у низ 11 и 6 на следећи начин: 11 на почетку се обрише и допише се 6 на крају (практично ако имамо неколико 6 на почетку њих можемо избрисати због петље која се налази код корена стабла). □

Коначно ћемо дати генерализацију Теореме 3.5.4. Доказ је у основи сличан.

ТЕОРЕМА 3.5.6. Бијекција између скупа $\mathcal{B}_{d,m}$ и скупа свих пермутација из $\mathbb{N}_{n+md}$ које задовољавају услов $p(j) - j \in \{-d, 0, md\}$ за свако $j \in \mathbb{N}_{n+md}$ дата је са:

$$f(B) = \varepsilon \cdot \prod_{i \in B} (\tau_{i+(m-1)d, i+md} \cdot \tau_{i+(m-2)d, i+(m-1)d} \cdot \dots \cdot \tau_{i+d, i+2d} \cdot \tau_{i, i+d}).$$

Доказ. Прво ћемо показати да је овако уведена функција f добро дефинисана.
Како је $B \in \mathcal{B}_{d,m}$, онда за свако $i \in \mathbb{N}_n$ у скупу B може бити највише 1 од бројева из скупа $\{i, i+d, i+2d, \ldots, i+(m-1)d, i+md\}$. Одатле имамо да за произвољне $i, j \in A$, $i \neq j$ важи $\{i, i+d, i+2d, \ldots, i+(m-1)d, i+md\} \cap \{j, j+d, j+2d, \ldots, j+(m-1)d, j+md\} = \emptyset$, па по Леми 3.5.3 имамо да за $i \neq j$ важи

$$\tau_{i+(m-1)d,i+md} \cdot \tau_{i+(m-2)d,i+(m-1)d} \cdot \cdots \cdot \tau_{i,i+d} \cdot \tau_{j+(m-1)d,j+md} \cdot \tau_{j+(m-2)d,j+(m-1)d} \cdot \cdots \cdot \tau_{j,j+d} =$$

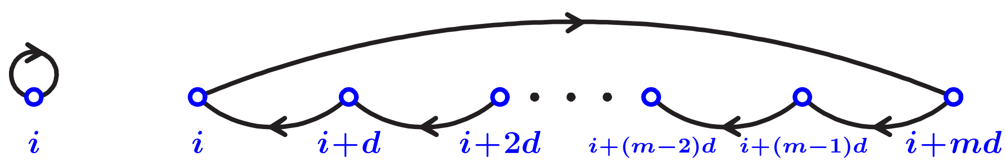
$$\tau_{j+(m-1)d,j+md} \cdot \tau_{j+(m-2)d,j+(m-1)d} \cdot \cdots \cdot \tau_{j,j+d} \cdot \tau_{i+(m-1)d,i+md} \cdot \tau_{i+(m-2)d,i+(m-1)d} \cdot \cdots \cdot \tau_{i,i+d}$$

што повлачи добру дефинисаност.

Покажимо да је овако уведена функција f инјекција, тј. "1-1".
Уочимо $B_1 \neq B_2$. Нека је $\pi_1 = f(B_1)$ и $\pi_2 = f(B_2)$. Нека је $j \in \mathbb{N}_n$ најмањи елемент који припада тачно једном од скупова B_1 и B_2. Без умањења општости узмимо да је $j \in B_1$ и $j \notin B_2$. Како је $B_1 \in \mathcal{B}_{d,m}$, из $j \in B_1 \;\Rightarrow\; j-d \notin B_1 \;\Rightarrow\; j-d \notin B_2$ (ова друга импликација следи из чињенице да је j најмањи елемент који припада тачно једном од скупова B_1 и B_2). На основу тога следи да је $\pi_1(j) = j + md$, док је $\pi_2(j) = j$, чиме смо показали да је $\pi_1 \neq \pi_2$, тј. да је ова функција "1-1".

Покажимо да је овако уведена функција f сурјекција, тј. "на".

Свака пермутација π је генерисана са само 2 врсте генератора (за дефиницију генератора видети потпоглавље 3.2.1. Факторизацији у слободним моноидима): фиксне тачке $\pi(i) = i$ и циклуси дужине $m+1$ дати са $\pi(i) = i + md$, $\pi(i+md) = i+(m-1)d$, $\pi(i+(m-1)d) = i+(m-2)d$, $\ldots$, $\pi(i+2d) = i+d$, $\pi(i+d) = i$. Ови генератори су представљени на наредној слици.



Слика 3.9: Генератори пермутација за које важи $\pi(i) - i \in \{-d, 0, md\}$.

За сваку пермутацију π постоји скуп $B \in \mathcal{B}_{d,m}$ који се састоји од свих најмањих елемената циклуса дужине $m+1$. Тада ће бити $\pi = \varepsilon \cdot \prod_{i \in B} (\tau_{i+(m-1)d,i+md} \cdot \tau_{i+(m-2)d,i+(m-1)d} \cdot \cdots \cdot \tau_{i+d,i+2d} \cdot \tau_{i,i+d})$.
Тиме је комплетиран доказ да је функција f и "на".

На основу свега претходног следи да је функцијом f успостављена бијекција између скупа $\mathcal{B}_{d,m}$ и скупа свих пермутација из $\mathbb{N}_{n+md}$ које задовољавају услов $p(j) - j \in \{-d, 0, md\}$ за свако $j \in \mathbb{N}_{n+md}$. $\square$

Директна последица претходног тврђења је и следећа теорема.

ТЕОРЕМА 3.5.7. Нека је логичка функција $B(i)$ дата на следећи начин: $B(i) = \perp$ ако у бинарном запису броја $i-1$, $(i-1)_2 = (b_{md-1} b_{md-2} \ldots b_1 b_0)_2$, постоје позиције s и $s+d$ такве да је $b_s = 0$ и $b_{s+d} = 1$; иначе је $B(i) = \top$.
За i за које је $B(i) = \top$, уведимо следећу функцију:

$$\begin{aligned} F(i-1) &= F((b_{md-1} b_{md-2} \ldots b_1 b_0)_2) \\ &= (b_{md-2} \ldots b_{(m-1)d} \overline{b}_{(m-1)d-1} b_{(m-1)d-2} \ldots b_d \overline{b}_{d-1} b_{d-2} \ldots b_1 b_0 \overline{b}_{md-1})_2, \end{aligned}$$

тј. на свакој d-тој позицији (гледано са десна) комплементираћемо бит $(\overline{b}_{d-1}, \overline{b}_{2d-1}, \ldots, \overline{b}_{md-1})$, а затим ћемо бит $\overline{b}_{md-1}$ са крајње десне позиције пребацити на крајњу леву позицији (тиме се остали битови померају за 1 позицију у лево).

Матрица $T = [t_{ij}]$ облика $2^{md} \times 2^{md}$ задата је са:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i \leqslant 2^{md-1},\ j = 2i-1,\ B(i) = \top \\ 1, & i \leqslant 2^{md-1},\ j = 2i,\ B(i) = \top \\ 1, & i > 2^{md-1},\ (j-1)_2 = F(i-1),\ B(i) = \top \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрица S облика $(m+1)^d \times (m+1)^d$ је подматрица матрице T, која се добија од T када обришемо све редове и колоне који имају само 0 елементе.

Број $|\mathcal{B}_{d,m}|$ једнак је елементу $s_{11}^{(k)}$ у првој врсти и првој колони матрице S^n.

Доказ. Како је $k = d$, а $r = md$ то ћемо у нашој методи радити са $(k+1)$-комбинацијама скупа $\mathbb{N}_{k+r+1} = \{1, 2, \ldots, md+d+1\}$ које као последњи елемент имају $md+d+1$. Такође, имамо да је $I = \{-d+1, -d+2, \ldots, -1, 1, 2, \ldots, md-1\}$, па је $r+1-I = \{2, 3, \ldots, md, md+2, md+3, \ldots, md+d\}$, тј. имамо само само 3 врсте пресликавања φ:

$$\varphi_2^{k-1}(C) = (D_1, D_2), \qquad \varphi_2^k(C) = D_2, \qquad \varphi_1(C) = D,$$

које, добијамо на следећи начин:

- D_1 – обришемо елемент $md+1$ из комбинације C, све остале координате умањимо за 1 и на крај допишемо $md+d+1$;
- D_2 – обришемо елемент $md+d+1$ из комбинације C, све остале координате умањимо за 1 и на крај допишемо $md+d+1$;
- D – обришемо елемент 1 из комбинације C, све остале координате умањимо за 1 и на крај допишемо $md+d+1$.

Стога видимо да ћемо у врстама матрице S које одговарају комбинацијама које се јављају при коришћењу наше технике имати или 1 или 2 јединице.

Прво ћемо успоставити бијекцију између бинарних низова дужине md код којих нема позиција s и $s+d$ таквих да је $b_s = 0$ и $b_{s+d} = 1$ и свих комбинација које се могу добити пресликавањима $varphi$ почев од почетне комбинације $(md+1, md+2, \ldots, md+d+1)$.

Нека је $2^{h-1} \leqslant i-1 \leqslant 2^h$. Тада у бинарном запису броја $i-1$ имамо да је $b_{h-1} = 1$, а $b_h = b_{h+1} = \ldots = b_{md-1} = 0$. Низ $(b_{h-1}, b_{h-2}, \ldots, b_1, b_0)$ у потпуности одређује комбинацију C из наше технике (скраћено ћемо овај низ записивати само као низ цифара $\overline{b_{h-1}b_{h-2}\ldots b_1 b_0}$, што је уобичајени бинарни запис). Ако нема ниједну 1 то је $(md+1, md+2, \ldots, md+d+1)$ и она је почетна комбинација (корен стабла). Од ње добијамо комбинације које одговарају било ком другом низу на следећи начин: када дође бит b (почев од прве 1 слева, тј. од $b_{h-1} = 1$ па до последњег b_0) добијамо следећу комбинацију тако што обришемо $\begin{cases} md+1, & \text{ако је } b = 0 \\ md+d+1, & \text{ако је } b = 1, \end{cases}$ све остале елементе умањимо за 1 и допишемо $md+d+1$ као последњи елемент.

Нпр, за $m = d = 3$ бинарном запису 10110 одговара низ комбинација

$$\{10,11,12,13\} \xrightarrow{1} \{9,10,11,,13\} \xrightarrow{0} \{8,10,12,13\} \xrightarrow{1} \{7,9,11,13\} \xrightarrow{1} \{6,8,10,13\} \xrightarrow{0} \{5,7,12,13\},$$

тј. бинарном запису 10110 придружујемо комбинацију $\{5, 7, 12, 13\}$.

Дакле, комбинацијама које не садрже $md+1$ одговарају бинарни низови код којих је $b_{d-1} = 1$ (и таман следећа бинарна цифра, коју треба да допишемо на крај низа, не може бити 0!) и оне се могу сликати само по другом правилу $\varphi_2^k(C) = D_2$.

Низовима којима је $b_\ell = 1$ прва 1 (слева) одговарају комбинације које почињу са елементом $md+1-\ell$. Ову чињеницу ћемо искористити да покажемо да је гореуведено пресликавање бинарних записа у комбинације „1-1“.

Претпоставимо да добијамо исту комбинацију са 2 различита низа. Због претходног, обе морају имати прву 1 (слева) на истој позицији, нека је то ℓ. Нека се низови $(b_\ell, \ldots, b_0)$ и $(b'_\ell, \ldots, b'_0)$ разликују на првом биту (слева) b_f, где за f важи $0 \leqslant f < \ell$. Без умањења општости можемо узети да је $b_f = 1$, а $b'_f = 0$. Али тада низ $(b'_\ell, \ldots, b'_0)$ генерише комбинацију која садржи елемент

$md - f$, док низ $(b_\ell, \ldots, b_0)$ генерише комбинацију која не садржи елемент $md - f$. Тиме смо показали да се 2 различита бинарна низа дужине md сликају у 2 различите комбинације.

Потребно је да покажемо и да се комбинације које садрже 1 сликају у неку већ раније добијену комбинацију.

Како за комбинацију која почиње са 1 важи да је први бит (слева) $b_{md-1} = 1$ и како за одговарајуће бинарне низове важи $b_{s+d} = 1 \Rightarrow b_s = 1$, добијамо да код бинарног низа b који одговара овој комбинацији важи $b_{md-1} = b_{(m-1)d-1} = \ldots = b_{d-1} = 1$.

Уочимо низ b' такав да је $b_{md-1} = b_{(m-1)d-1} = \ldots = b_{d-1} = 0$, док за остале битове важи $b'_x = b_x$. Покажимо да ако низу b одговара комбинација C, онда новодобијеном низу b' одговара комбинација $C' = C \cup \{md+1\} \setminus \{1\}$.

Низови b и b' се већ разликују на првом биту (са лева). Стога, након првог корака низу $\overline{b}_{md-1} = 1$ одговара комбинација $\{md, md{+}1, \ldots, md{+}d{-}1, md{+}d{+}1\}$, док низу $\overline{b}'_{md-1} = 0$ одговара комбинација $\{md, md+2, md+3, \ldots, md+d+1\}$, тј. можемо рећи да након првог корака низу b одговара комбинација $C_1 \cup \{md\}$, а низу b' комбинација $C_1 \cup \{md{+}d\}$. Нека је $\varphi(C_1) = (D_1, D_2)$. У другом кораку битови b_{md-2} и b'_{md-2} су једнаки. Ако за њих важи да је $b_{md-2} = b'_{md-2} = 0$, онда је $C_2 = D_1$, а ако је $b_{md-2} = b'_{md-2} = 1$, онда је $C_2 = D_2$. На основу тога добијамо да низу $\overline{b_{md-1}b_{md-2}}$ одговара комбинација $C_2 \cup \{md-1\}$, док низу $\overline{b'_{md-1}b'_{md-2}}$ одговара комбинација $C_2 \cup \{md+d-1\}$. Настављајући овај поступак, након d корака низу $\overline{b_{md-1}b_{md-2}\ldots b_{md-d}}$ одговара комбинација $C_d \cup \{md-d+1\}$, док низу $\overline{b'_{md-1}b'_{md-2}\ldots b'_{md-d}}$ одговара комбинација $C_d \cup \{md+1\}$. У $(d+1)$-ом кораку се битови поново разликују: $b_{md-d-1} = 1$, а $b'_{md-d-1} = 0$, па ће низу $\overline{b_{md-1}b_{md-2}\ldots b_{md-d-1}}$ одговарати комбинација $C_d {\cup} \{md{-}d\}$, док ће низу $\overline{b'_{md-1}b'_{md-2}\cdots b'_{md-d-1}}$ одговарати комбинација $C_d \cup \{md+d\}$. Настављањем овог поступка након w корака имамо да делу низа b одговара комбинација $C_w {\cup} \{md{+}1{-}w\}$, док делу низа b' одговара комбинација $C_w {\cup} \{md{+}d{-}((w{-}1) \bmod d)\}$.

На основу претходног добијамо да ако продужимо претходни поступак до последњег, (md)-тог корака, добијамо да ако низу b одговара комбинација C, онда низу b' одговара комбинација $C' = C \cup \{md+1\} \setminus \{1\}$. Првим делом операције F (комплементирањем сваког d-тог бита) ми смо од низа b добили низ b' и од комбинације C смо добили комбинацију C' коју смо већ имали раније. Последњи део операције F (пребацивањем бита 0 са крајње десне на крајњу леву позицију) одговара добијању комбинације D_1 од комбинације C' (како смо C' имали раније и како је $\varphi_2^{k-1}(C) = (D_1, D_2)$, то смо и D_1 имали раније). Тиме смо показали да су и слике комбинација које садрже 1 неке комбинације које смо већ раније добили. Штавише, имамо да је $(j-1)_2 = b' = F(b) = F(i-1)$.

Даље, ако комбинација не садржи број 1, онда размотримо које комбинације се могу добити од ње. Ако бинарном запису броја $i-1$ допишемо 0 са десне стране и добијемо број $j-1$ онда важи $(j-1)_2 = (i-1)_2 \cdot 10_2$, односно у декадном систему је $(j-1) = (i-1) \cdot 2$, тј. $j = 2i - 1$. Ако бинарном запису броја $i-1$ допишемо 1 са десне стране и добијемо број $j-1$ онда важи $(j-1)_2 = (i-1)_2 \cdot 10_2 + 1_2$, односно у декадном систему је $(j-1) = (i-1) \cdot 2 + 1$, тј. $j = 2i$.

На основу претходних чињеница, следи да смо матрицу $T = [t_{ij}]$ исправно попунили. Ако је $B(i) = \text{false}$ у одговарајућој врсти ћемо имати све елементе једнаке 0 (овим бинарним низовима не одговарају комбинације које се могу добити нашом техником).

Остаје још да одредимо ког је облика матрица S (која се добије када избацимо све врсте које одговарају неисправним низовима). Одредимо колико има исправних низова. Посматрајмо поднизове

$$\begin{array}{rrcrrr} b_{(m-1)d}, & b_{(m-2)d}, & \ldots, & b_{2d}, & b_d, & b_0; \\ b_{(m-1)d+1}, & b_{(m-2)d+1}, & \ldots, & b_{2d+1}, & b_{d+1}, & b_1; \\ \vdots & & & & & \vdots \\ b_{md-1}, & b_{(m-1)d-1}, & \ldots, & b_{3d-1}, & b_{2d-1}, & b_{d-1}. \end{array}$$

У сваком од њих након првог елемента 1 (слева) и сви наредни елементи морају бити једнаки 1 (због $b_{s+d} = 1 \Rightarrow b_s = 1$), па сваки од тих низова можемо (независно од других) одредити на $m+1$ начина, што даје укупно $(m+1)^d$ различитих исправних низова, тј. толико ће матрица S имати врста и колона. □

У циљу бољег разумевања претходних резултата илустроваћемо их наредним примером.

ПРИМЕР 3.5.7. Одредити број подскупова који не садрже 2 елемента чија разлика припада скупу $\{2, 4, 6\}$.

Решење. Према Теореми 3.5.6 имамо да $\{2,4,6\} \Rightarrow k = d = 2$, $r = dm = 6$, $I = \{-1,1,2,3,4,5\}$. Стога, траженим подскуповима са $n - md$ елемената одговарају пермутације скупа $\mathbb{N}_n$ са ограничењима $p(i) - i \in \{-2,0,6\}$. Одатле добијамо да су све комбинације које се јављају у нашој техници (полазећи од иницијалне 789):

$$\mathcal{C} = \{789, 679, 589, 569, 479, 459, 389, 369, 349, 279, 259, 239, 189, 169, 149, 129\}$$

и њима ће одговарати рекуретни низови у систему рекурентних једначина.

Коришћењем наше технике за пребројавање пермутација долазимо до система линеарних рекурентних једначина (одговарајући диграф $G = D(S)$ је приказан на Слици 3.10):

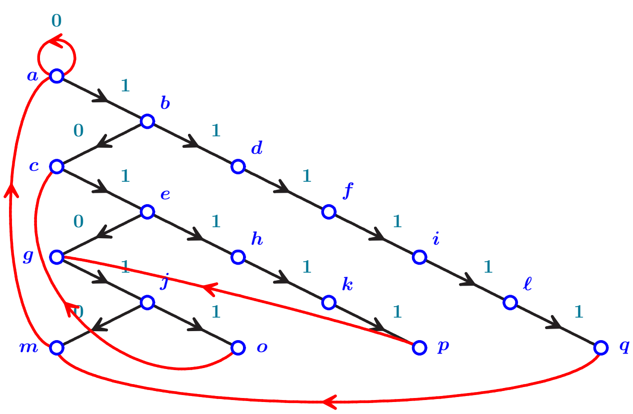
$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \quad b_n = c_{n-1} + d_{n-1}, \quad c_n = e_{n-1}, \quad d_n = f_{n-1},$$

$$e_n = g_{n-1} + h_{n-1}, \quad f_n = i_{n-1}, \quad g_n = j_{n-1}, \quad h_n = k_{n-1},$$

$$i_n = \ell_{n-1}, \quad j_n = m_{n-1} + o_{n-1}, \quad k_n = p_{n-1}, \quad \ell_n = q_{n-1},$$

$$m_n = a_{n-1}, \quad o_n = c_{n-1}, \quad p_n = g_{n-1}, \quad q_n = m_{n-1},$$

уз почетне услове $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = \ldots = q_0 = 0$.



Слика 3.10. Диграф $G = D(S)$ за $d = 2$ и $m = 3$.

Уколико уклонимо петљу код чвора a и гране које излазе из чворова m, o, p, q добијамо бинарно стабло BT (то није потпуно бинарно стабло, јер неки унутрашњи чворови имају само десног сина). Комбинација (и такође одговарацући чвор v) пресликавају се у бинарни низ према следећем правилу:

> Полазећи од корена стабла a идемо ка чвору v најкраћим путем и сваки пут када идемо левом граном запишемо **0**, а сваки пут када идемо десном граном запишемо **1** (ако на крају имамо мање од md битова, дописаћемо потребан број нула на почетак, тј. са лева).

На пример, комбинацији 369 одговара чвор h (и низ h_n у систему рекурентних једначина). Најкраћи пут од корена a до h је

$$a - b - c - e - h$$

(ту идемо десно, лево, десно, десно), па је одговарајући низ битова једнак **1011**. Али тај низ има мање од $m \cdot d = 3 \cdot 2 = 6$ битова, па дописујемо 2 нуле на почетак. Коначно, добили смо бинарни низ **001011**.

Веза између свих комбинација, одговарајућих бинарних низова и рекурентних низова који се јављају у систему рекурентних једначина дата је у Табели 3.17.

комбинација	789	679	589	569	479	459	389	369
бинарни низ	000000	000001	000010	000011	000101	000111	001010	001011
рекур. низ	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n	g_n	h_n

комбинација	349	279	259	239	189	169	149	129
бинарни низ	001111	010101	010111	011111	101010	101011	101111	111111
рекур. низ	i_n	j_n	k_n	ℓ_n	m_n	o_n	p_n	q_n

Табела 3.17. Веза између комбинација, бинарних низова и рекурентних низова.

Решавањем горњег система долазимо до a_n, који представља и број подскупова без разлика 2, 4 и 6, а и број пермутација са ограничењем $p(i)-i \in \{-2,0,6\}$. Његова функција генератрисе је: $A(z) = \dfrac{1-z^5-z^8}{1-z-z^5+z^6-z^7-2z^8+z^9-z^{10}+z^{13}+z^{16}}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
a_n	1	1	1	1	1	1	1	2	4	6	9	12	16	20	25	35	49	70	100	...

Табела 3.18: Број пермутација које задовољавају услов $p(i)-i \in \{-2,0,6\}$.

На основу $A(z)$ можемо одредити и низ a_n који је представљен у Табели 3.18. То је низ A224808 у [43]. ■

Када покушавамо да редукујемо систем лиеарних рекурентних једначина из наше методе у неким од ових случајева, долазимо до следећег система лиеарних рекурентних једначина:

$$\begin{aligned} x_{2k}(n+1) &= x_k(n) \\ x_{2k+1}(n+1) &= x_k(n) + x_{2^{d-1}+k}(n) \end{aligned} \tag{$*$}$$

за $k = 0, 1, \ldots, 2^{d-1}-1$.

У [5] смо решили систем ($*$) у потпуности и ти резултати ће бити сада укључени (за сличне системе могу се применити методе из [24]). Решење специјалног случаја система ($*$) је дато у Леми 3.5.8, коју користимо да би добили решење општег случаја система ($*$), што је учињено у Теореми 3.5.9.

Прво ћемо увести одређену нотацију.

ДЕФИНИЦИЈА 3.5.1. Природан број $n < 2^d$ се може представити у бинарном запису као $n_2 = (b_{d-1}b_{d-2}\ldots b_1b_0)_2$, уколико важи $b_i \in \{0,1\}$ и $n = \sum_{s=0}^{d-1} b_s \cdot 2^s$.

Бинарну операцију $\oplus$ уводимо као $x \oplus y = x + y \pmod d$.

За сваку позицију s, $0 \leqslant s \leqslant d-1$, уводимо функцију

$$f_s(a,b,r) = \begin{cases} 1, & a_s = b_{s\oplus r} \\ 0, & a_s = 1, b_{s\oplus r} = 0 \\ t, & a_s = 0, b_{s\oplus r} = 1, s < d-r \\ t+1, & a_s = 0, b_{s\oplus r} = 1, s \geq d-r. \end{cases}$$

ЛЕМА 3.5.8. Нека је задат систем од 2^d линеарних рекурентних једначина које су облика $x_{2k}(n+1) = x_k(n)$ и $x_{2k+1}(n+1) = x_k(n) + x_{2^{d-1}+k}(n)$ фор $k = 0, 1, \ldots, 2^{d-1}-1$, нека важи $0 \leqslant a, b \leqslant 2^d - 1$ и за неко фиксирано a је $x_a(0) = 1$, док за све остале $b \neq a$ важи $x_b(0) = 0$.

Тада за $n = d \cdot t + r$, $0 \leqslant r \leqslant d-1$, важи једнакост:

$$x_b(n) = \prod_{s=0}^{d-1} f_s(a,b,r).$$

Доказ. Показаћемо да ово решење задовољава почетне услове, као и једначине и првог и другог типа датог система.

1° почетни услови

За $n = 0 = d \cdot 0 + 0$ је $r = 0$, па је и $s \oplus r = s \oplus 0 = s$.

Ако је $b = a$, онда на свакој позицији s важи $a_s = b_s$, па је $f_s(a,a,0) = 1$, што повлачи

$$x_a(0) = \prod_{s=0}^{d-1} 1 = 1.$$

Ако је $b \neq a$, онда постоји позиција s на којој се бинарни записи a_2 и b_2 разликују.

Ако је $a_s = 1$ и $b_s = 0$, то одмах повлачи да је $f_s(a, b, 0) = 0$.

Ако је $a_s = 0$ и $b_s = 1$, како важи и $s < d = d - r$, имамо да је $f_s(a, b, 0) = t = 0$.

Када је $b \neq a$ у оба случаја добијамо да је $f_s(a, b, 0) = 0$ за неко s, што повлачи да је $x_b(0) = 0$.

2° $x_{2k}(n+1) = x_k(n)$

Нека је $b = 2k$, за $k < 2^{d-1}$.

За бинарне записе

$$(k)_2 = (b_{d-1}, b_{d-2}, \ldots, b_1, b_0) \qquad \text{и} \qquad (2k)_2 = (b'_{d-1}, b'_{d-2}, \ldots, b'_1, b'_0)$$

важи да се $(2k)_2$ добија од $(k)_2$ цикличним померањем у лево за једну позицију, тј. $b'_{s\oplus 1} = b_s$. И повећањем са n на $n+1$ се и остатак при дељењу са d повећава за 1 по модулу d, тј. $r' = r \oplus 1$. Сада ћемо у доказивању једнакости $x_{2k}(n+1) = x_k(n)$ ићи по случајевима:

- Ако је $a_s = b_{s\oplus r} \Rightarrow a_s = b_{s\oplus r} = b'_{(s\oplus r)\oplus 1} = b'_{s\oplus(r\oplus 1)} \Rightarrow f_s(a, k, r) = f_s(a, 2k, r\oplus 1) = 1$.
- Ако је $a_s = 1$, $b_{s\oplus r} = 0 \Rightarrow a_s = 1$, $0 = b_{s\oplus r} = b'_{(s\oplus r)\oplus 1} = b'_{s\oplus(r\oplus 1)} \Rightarrow f_s(a, k, r) = f_s(a, 2k, r\oplus 1) = 0$.
- Ако је $a_s = 0$, $b_{s\oplus r} = 1$, $s < d - r - 1 \Rightarrow a_s = 0$, $1 = b_{s\oplus r} = b'_{s\oplus(r\oplus 1)}$, $s < d - (r\oplus 1) \Rightarrow f_s(a, k, r) = f_s(a, 2k, r\oplus 1) = t$.
- Ако је $a_s = 0$, $b_{s\oplus r} = 1$, $s \geqslant d - r$, $r \neq d - 1 \Rightarrow a_s = 0$, $1 = b_{s\oplus r} = b'_{s\oplus(r\oplus 1)}$, $s \geqslant d - (r + 1) \Rightarrow f_s(a, k, r) = f_s(a, 2k, r\oplus 1) = t + 1$.
- Ако је $r = d-1$, онда је $r\oplus 1 = 0$, али и тада важи претходна једнакост, мада са другачијим резоновањем:
  ако је $a_s = 0$, $b_{s\oplus(d-1)} = 1$, $s \geqslant d-(d-1) = 1$, $f_s(a, k, r) = t+1 \Rightarrow a_s = 0$, $1 = b_{s\oplus r} = b'_{s\oplus(r\oplus 1)} = b'_{s\oplus 0}$, $s \leqslant d - 0 = d$, па је $f_s(a, 2k, r\oplus 1) = t' = t + 1$, јер је $n' = n + 1 = d\cdot t + (d-1) + 1 = d\cdot(t+1) + 0$ и опет смо добили да је $f_s(a, k, r) = f_s(a, 2k, r\oplus 1) = t + 1$.
- Ако је $a_s = 0$, $b_{s\oplus r} = 1$, $s = d - r - 1 \Rightarrow 1 = b_{s\oplus r} = b'_{s\oplus(r\oplus 1)}$, али са друге стране имамо да је $b'_{s\oplus(r\oplus 1)} = b'_0 = 0$, јер је то последња цифра у бинарном запису парног броја $2k$. Тиме смо добили да овај случај није могућ.

Како смо у свим случајевима добили да је $f_s(a, k, r) = f_s(a, 2k, r\oplus 1)$, то повлачи и да је

$$x_k(n) = \prod_{s=0}^{d-1} f_s(a, k, r) = \prod_{s=0}^{d-1} f_s(a, 2k, r\oplus 1) = x_{2k}(n+1).$$

3° $x_{2k+1}(n+1) = x_k(n) + x_{2^{d-1}+k}(n)$

Нека је $b = 2k+1$, за $k < 2^{d-1}$.

За бинарне записе $\quad (k)_2 = (b_{d-1}, b_{d-2}, \ldots, b_0)$,

$$(2^{d-1}+k)_2 = (b''_{d-1}, b''_{d-2}, \ldots, b''_0), \qquad (2k+1)_2 = (b'_{d-1}, b'_{d-2}, \ldots, b'_0)$$

важи да је $b_{d-1} = 0$, $b'_{d-1} = 1$, $b_s = b'_s = 0$ за $s < d-1$, док се $(2k+1)_2$ добија од $(2^{d-1}+k)_2$ цикличним померањем у лево за једну позицију, тј. $b'_{s\oplus 1} = b''_s$. Исто као и раније је $r' = r\oplus 1$. Сада ћемо у доказивању једнакости $x_{2k+1}(n+1) = x_k(n) + x_{2^{d-1}+k}(n)$ ићи по случајевима:

- Ако је $a_s = b_{s\oplus r}$, $r \neq d-1 \Rightarrow a_s = b_{s\oplus r} = b''_{s\oplus r} = b'_{(s\oplus r)\oplus 1} = b'_{s\oplus(r\oplus 1)}$
  $$\Rightarrow f_s(a, k, r) = f_s(a, 2^{d-1}+k, r) = f_s(a, 2k+1, r+1) = 1.$$
- Ако је $a_s = 1$, $b_{s\oplus r} = 0$, $r \neq d-1 \Rightarrow a_s = 1$, $0 = b_{s\oplus r} = b''_{s\oplus r} = b'_{(s\oplus r)\oplus 1} = b'_{s\oplus(r\oplus 1)}$
  $$\Rightarrow f_s(a, k, r) = f_s(a, 2^{d-1}+k, r) = f_s(a, 2k+1, r+1) = 0.$$
- Ако је $s = d - r - 1$, $a_s = 1$, онда имамо да
  $a_s = 1$, $b_{s\oplus r} = b_{d-1} = 0 \Rightarrow f_s(a, k, r) = 0$;
  $a_s = 1$, $b''_{s\oplus r} = b''_{d-1} = 1 \Rightarrow f_s(a, 2^{d-1}+k, r) = 1$;
  $a_s = 1$, $1 = b''_{s\oplus r} = b'_{(s\oplus r)\oplus 1} = b'_0 \Rightarrow f_s(a, 2k+1, r\oplus 1) = 1$.

- Ако је $a_s = 0$, $b_{s\oplus r} = 1$, $s < d-r-1 \Rightarrow a_s = 0$, $1 = b_{s\oplus r} = b''_{s\oplus r} = b'_{s\oplus(r\oplus 1)}$, $s < d-(r\oplus 1)$
$$\Rightarrow f_s(a,k,r) = f_s(a, 2^{d-1}+k, r) = f_s(a, 2k+1, r\oplus 1) = t.$$
- Ако је $a_s = 0$, $b_{s\oplus r} = 1$, $s \geqslant d-r \Rightarrow a_s = 0$, $1 = b_{s\oplus r} = b''_{s\oplus r} = b'_{s\oplus(r\oplus 1)}$, $s \geq d-(r+1)$
$$\Rightarrow f_s(a,k,r) = f_s(a, 2^{d-1}+k, r) = f_s(a, 2k+1, r\oplus 1) = t+1.$$
- Ако је $s = d-r-1 < d-r$, $a_s = 0$, онда имамо
$a_s = 0$, $b_{s\oplus r} = b_{d-1} = 0 \Rightarrow f_s(a,k,r) = 1$;
$a_s = 0$, $b''_{s\oplus r} = b''_{d-1} = 1 \Rightarrow f_s(a, 2^{d-1}+k, r) = t$;
$a_s = 0$, $1 = b''_{s\oplus r} = b'_{(s\oplus r)\oplus 1} = b'_0$, $s \leqslant d-0 \Rightarrow f_s(a, 2k+1, r\oplus 1) = t' = t+1$, јер је $n' = n+1 = d\cdot t + (d-1) + 1 = d\cdot(t+1) + 0$.

За $s = d-r-1$ и $a_{d-r-1} = 1$ добили смо $f_s(a,k,r) = 0 \Rightarrow x_k(n) = 0$, а како је $f_s(a, 2^{d-1}+k, r) = f_s(a, 2k+1, r\oplus 1)$ за све позиције $s \neq d-r-1$, имамо да је $x_{2^{d-1}+k}(n) = x_{2k+1}(n+1)$, па важи једнакост $x_{2k+1}(n+1) = x_k(n) + x_{2^{d-1}+k}(n)$.

За $s = d-r-1$ и $a_{d-r-1} = 0$ добили смо $f_s(a,k,r) = 1$, $f_s(a, 2^{d-1}+k, r) = t$, $f_s(a, 2k+1, r\oplus 1) = t+1$, док је $f_s(a,k,r) = f_s(a, 2^{d-1}+k, r) = f_s(a, 2k+1, r\oplus 1)$ за све позиције $s \neq d-r-1$, те имамо да је

$$\begin{aligned}
x_k(n) + x_{2^{d-1}+k}(n) &= \prod_{s=0}^{d-1} f_s(a,k,r) + \prod_{s=0}^{d-1} f_s(a, 2^{d-1}+k, r) \\
&= f_{d-r-1}(a,k,r) \cdot \prod_{\substack{0 \leqslant s \leqslant d-1 \\ s \neq d-r-1}} f_s(a,k,r) + f_{d-r-1}(a, 2^{d-1}+k, r) \cdot \prod_{\substack{0 \leqslant s \leqslant d-1 \\ s \neq d-r-1}} f_s(a, 2^{d-1}+k, r) \\
&= 1 \cdot \prod_{\substack{0 \leqslant s \leqslant d-1 \\ s \neq d-r-1}} f_s(a, 2k+1, r\oplus 1) + t \cdot \prod_{\substack{0 \leqslant s \leqslant d-1 \\ s \neq d-r-1}} f_s(a, 2k+1, r\oplus 1) \\
&= (1+t) \cdot \prod_{\substack{0 \leqslant s \leqslant d-1 \\ s \neq d-r-1}} f_s(a, 2k+1, r\oplus 1) = \prod_{s=0}^{d-1} f_s(a, 2k+1, r\oplus 1) = x_{2k+1}(n+1).
\end{aligned}$$

У оба случаја смо добили да је $x_{2k+1}(n+1) = x_k(n) + x_{2^{d-1}+k}(n)$. □

Илустроваћемо ову Теорему касније, у Примеру 3.5.8. Сада, прелазимо на општи случај система $(*)$.

ТЕОРЕМА 3.5.9. Нека је дат систем од 2^d линеарних рекурентних једначина које су облика $x_{2k}(n+1) = x_k(n)$ и $x_{2k+1}(n+1) = x_k(n) + x_{2^{d-1}+k}(n)$ за $k = 0, 1, \ldots, 2^{d-1}-1$, уз почетне услове $x_0(0) = y_0$, $x_1(0) = y_1$, $\ldots$, $x_{2^d-1}(0) = y_{2^d-1}$, за произвољне реалне бројеве $y_0, y_1, \ldots, y_{2^d-1}$.
Тада за $n = d\cdot t + r$, $0 \leqslant r \leqslant d-1$ важи:

$$x_b(n) = \sum_{a=0}^{2^d-1} \left(y_a \cdot \prod_{s=0}^{d-1} f_s(a,b,r) \right).$$

Доказ. Овај резултат је директна последица Леме 3.5.8 и основних својстава система линеарних рекурентних једначина. □

У следећем примеру ћемо илустровати Лему 3.5.8 за случај $d = 3$ и $a = 4$.

ПРИМЕР 3.5.8. Решити систем

$$x_0(n+1) = x_0(n), \qquad x_1(n+1) = x_0(n) + x_4(n),$$
$$x_2(n+1) = x_1(n), \qquad x_3(n+1) = x_1(n) + x_5(n),$$
$$x_4(n+1) = x_2(n), \qquad x_5(n+1) = x_2(n) + x_6(n),$$

$$x_6(n+1) = x_3(n), \qquad x_7(n+1) = x_3(n) + x_7(n),$$

са почетним условима $x_4(0) = 1$ и $x_b(0) = 0$ за $b \neq 4,\ 0 \leqslant b \leqslant 2^d - 1 = 7$.

Решење. Разматраћемо свако b понаособ.

- За $a = 4$ и $b = 0$ имамо да бинарни запис $0_2 = 000$ има више нула од бинарног записа $4_2 = 100$, па ће по Дирихлеовом принципу бар на једној позицији бити $a_s = 1$ и $b_{s \oplus r} = 0$. Тада за свако n важи $x_0(n) = 0$. Ови закључци важе кад год бинарни запис $(b)_2$ има више нула од $(a)_2$!

- За $a = 4_2 = 100$ и $b = 1_2 = 001$ ако је $r = 0$ или $r = 2$ постојаће позиција s таква да је $a_s = 1$ и $b_{s \oplus r} = 0$ (за $r = 0$, тј. кад нема померања, $a_2 = 1$ и $b_2 = 0$; а за $r = 2$, тј. кад има померања за 2 удесно, $a_2 = 1$ и $b_{2 \oplus 2} = b_1 = 0$). Тада за $n \equiv 0 \pmod 3$ и $n \equiv 2 \pmod 3$ важи $x_0(n) = 0$. Када је $r = 1$ имамо да је

$$\begin{array}{lcl} a_0 = b_{0\oplus 1} = b_1 = 0 & \Rightarrow & f_0(a,b,1) = 1, \\ a_1 = b_{1\oplus 1} = b_2 = 0 & \Rightarrow & f_1(a,b,1) = 1, \\ a_2 = b_{2\oplus 1} = b_0 = 1 & \Rightarrow & f_2(a,b,1) = 1 \end{array}$$

  те имамо да је $x_b(n) = x_1(n) = f_0(a,b,1) \cdot f_1(a,b,1) \cdot f_2(a,b,1) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ за $n \equiv 1 \pmod 3$. Дакле, добили смо да важи

$$x_1(n) = \begin{cases} 0, & n = 3t \\ 1, & n = 3t+1 \\ 0, & n = 3t+2. \end{cases}$$

- За $a = 4_2 = 100$ и $b = 3_2 = 011$ ако је $r = 0$ имамо да је $a_2 = 1$ и $b_{2\oplus 0} = b_2 = 0$.
  Тада за $n \equiv 0 \pmod 3$ важи $x_3(n) = 0$.
  Када је $r = 1$ имамо да је

$$\begin{array}{lcl} a_0 = 0,\ b_{0\oplus 1} = b_1 = 1 \text{ и } s = 0 < 3 - 1 = d - r & \Rightarrow & f_0(a,b,1) = t, \\ a_1 = b_{1\oplus 1} = b_2 = 0 & \Rightarrow & f_1(a,b,1) = 1, \\ a_2 = 1,\ b_{2\oplus 1} = b_0 = 1 & \Rightarrow & f_2(a,b,1) = 1 \end{array}$$

  те имамо да је $x_b(n) = x_3(n) = f_0(a,b,1) \cdot f_1(a,b,1) \cdot f_2(a,b,1) = t \cdot 1 \cdot 1 = t$ за $n \equiv 1 \pmod 3$.
  Када је $r = 2$ имамо да је

$$\begin{array}{lcl} a_0 = 0,\ b_{0\oplus 2} = b_2 = 0 & \Rightarrow & f_0(a,b,1) = 1, \\ a_1 = 0,\ b_{1\oplus 2} = b_0 = 1 \text{ и } s = 1 \geqslant 3 - 2 = d - r & \Rightarrow & f_1(a,b,1) = t+1, \\ a_2 = 1,\ b_{2\oplus 1} = b_0 = 1 & \Rightarrow & f_2(a,b,1) = 1 \end{array}$$

  те имамо да је $x_b(n) = x_3(n) = 1 \cdot (t+1) \cdot 1 = t+1$ за $n \equiv 2 \pmod 3$.
  Дакле, добили смо да важи

$$x_3(n) = \begin{cases} 0, & n = 3t \\ t, & n = 3t+1 \\ t+1, & n = 3t+2. \end{cases}$$

- За $a = 4_2 = 100$ и $b = 7_2 = 111$ ако је $r = 0$ имамо $x_7(n) = t \cdot t \cdot 1 = t^2$ за $n \equiv 1 \pmod 3$. Када је $r = 1$ имамо да је $x_7(n) = t \cdot t \cdot 1 = t^2$ за $n \equiv 1 \pmod 3$.
  Када је $r = 2$ имамо да је $x_7(n) = t \cdot (t+1) \cdot 1 = t(t+1)$ за $n \equiv 2 \pmod 3$.
  Дакле, добили смо да важи

$$x_7(n) = \begin{cases} t^2, & n = 3t \\ t^2, & n = 3t+1 \\ t(t+1), & n = 3t+2. \end{cases}$$

- Аналогним поступком добијамо да је

$$x_2(n) = \begin{cases} 0, & n = 3t \\ 0, & n = 3t+1 \\ 1, & n = 3t+2, \end{cases} \qquad x_4(n) = \begin{cases} 1, & n = 3t \\ 0, & n = 3t+1 \\ 0, & n = 3t+2, \end{cases}$$

$$x_5(n) = \begin{cases} t, & n = 3t \\ t, & n = 3t+1 \\ 0, & n = 3t+2, \end{cases} \qquad x_6(n) = \begin{cases} t, & n = 3t \\ 0, & n = 3t+1 \\ t, & n = 3t+2. \end{cases}$$

Све ове низове можемо наћи у [43]: x_0 је A000004, x_1 је померен A079978, x_2 и x_4 су A079978, x_3 је A087509, x_5 је померен A087508, x_6 је померен A087509, x_7 је A008133. ■

Овај специјални случај може бити решен помоћу функција генератриса, као што је рађено остатку ове тезе, а и у [24]. Иако функције генератрисе комбиноване са Крамеровим формулама за решавање система могу бити употребљене за решавање система $(*)$ у општем случају, мислимо да су резултати које смо добили у Леми 3.5.8 и Теореми 3.5.9 много једноставнији.

Наредно тврђење даје везу система разматраних у претходним теоремама и пермутација са ограничењима из [2] (њима се бавимо у већем делу ове главе). Теорему ћемо дати без доказа, али ћемо је илустровати на једном примеру.

ТЕОРЕМА 3.5.10. Нека C_{md+1-q} означава број комбинација код којих је најмањи елемент једнак $md+1-q$, за $q = 0, 1, \ldots, md$, и које се могу добити полазећи од почетне комбинације $(r+1, r+2, \ldots, r+k+1)$ коришћењем наше технике (развијене у [2]) за пребројавање пермутација које задовољавају услове $p(i) - i \in W$, $W = \{-d, -d+1, \ldots, md\} \setminus \{-d, 0, md\}$. Број C_{md+1-q} је једнак

$$C_{md+1-q} = \sum_{b=0}^{2^d-1} x_b(q) = \sum_{b=0}^{2^d-1} \prod_{s=0}^{d-1} f_s(2^{d-1}, b, r),$$

при чему је $q = d \cdot t + r$ и f_s функција уведена у Дефиницији 3.5.1.

Штавише за $q \geqslant 1$, комбинација код којих је најмањи елемент једнак $md+1-q$ и које се функцијом φ сликају у 2 комбинације има $\sum_{b=0}^{2^{d-1}-1} x_b(q)$, док се остале комбинације функцијом φ сликају у тачно 1 комбинацију. □

Илуструјмо ову теорему за случај $d = 3$ и $m = 2$ (тада је $k = d = 3$ и $r = md = 6$).

ПРИМЕР 3.5.9. Одредити број пермутација које задовољавају услов $p(i) - i \in W$, где је $W = \{-3, -2, \ldots, 5, 6\} \setminus \{-3, 0, 6\} = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Према Теореми 3.5.6 то је и $|\mathcal{B}_{3,2}|$, број свих подскупова $B \subseteq \mathbb{N}_n$ који не садрже 2 елемента чија је разлика из скупа $\{3, 6\}$.

Решење. Из $W = \{-3, -2, \ldots, 5, 6\} \setminus \{-3, 0, 6\} \Rightarrow I = \{-3, 0, 6\}$, односно $r+1-I = 7-I = \{10, 7, 1\}$.

Скуп $\mathcal{C}$ се састоји од свих комбинација скупа $\mathbb{N}_{k+r+1} = \{1, 2 \ldots, 10\}$, које имају $k+1 = 4$ елемента и садрже број $k+r+1 = 10$. Скуп $\mathcal{C}$ има $|\mathcal{C}| = \binom{9}{3} = 84$ елемента, али велики број њих није битан за нашу технику, јер се оне не могу добити полазећи од почетне комбинације $(7, 8, 9, 10)$ и примењујући функције φ. Ради лакшег означавања ових комбинација на графу (Слика 3.11), представљаћемо их без заграда, а број 10 ћемо писати као A (као што је у хексадекадном систему).

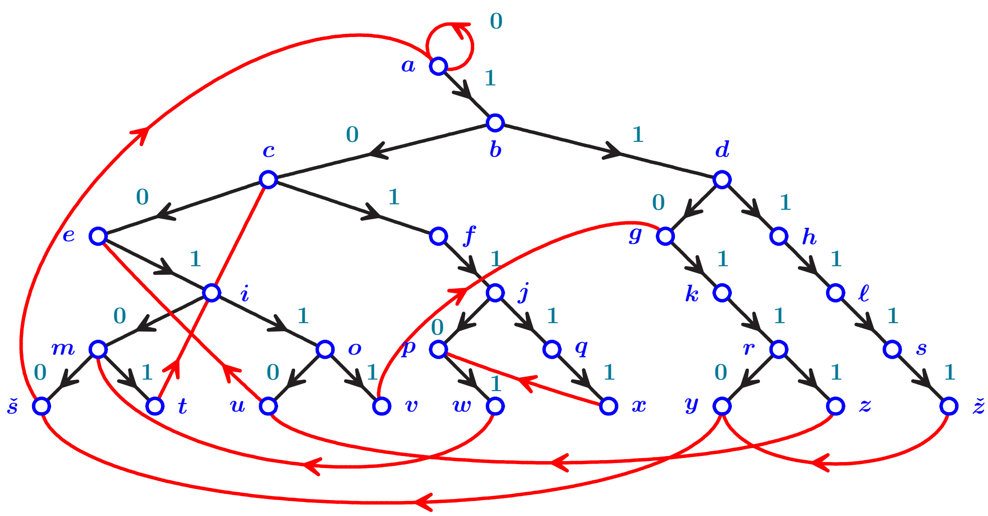
Веза између свих комбинација, одговарајућих бинарних низова и рекурентних низова који се јављају у систему рекурентних једначина дата је у Табели 3.19.

комбинација	$789A$	$678A$	$579A$	$567A$	$489A$	$468A$	$459A$	$456A$	$378A$
бинарни низ	000000	000001	000010	000011	000100	000101	000110	000111	001001
рекур. низ	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n	g_n	h_n	i_n

комбинација	$357A$	$348A$	$345A$	$279A$	$267A$	$249A$	$246A$	$237A$	$234A$
бинарни низ	001011	001101	001111	010010	010011	010110	010111	011011	011111
рекур. низ	j_n	k_n	ℓ_n	m_n	o_n	p_n	q_n	r_n	s_n

комбинација	$189A$	$168A$	$159A$	$156A$	$138A$	$135A$	$129A$	$126A$	$123A$
бинарни низ	100100	100101	100110	100111	101101	101111	110110	110111	111111
рекур. низ	$\check{s}_n$	t_n	u_n	v_n	w_n	x_n	y_n	z_n	$\check{z}_n$

Табела 3.19. Веза између комбинација, бинарних низова и рекурентних низова.



Слика 3.11. Диграф $G = D(S)$ за $d = 3$ и $m = 2$.

У Примеру 3.5.8 смо добили вредности свих низова x_b који се јављају у Теореми 3.5.10.

За $q = 3t$ имамо да је

$$\begin{aligned} C_{md+1-q} &= x_0(q) + x_1(q) + x_2(q) + x_3(q) + x_4(q) + x_5(q) + x_6(q) + x_7(q) \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 1 + t + t + t^2 = (t+1)^2, \end{aligned}$$

за $q = 3t + 1$ је

$$C_{md+1-q} = 0 + 1 + 0 + t + 0 + t + 0 + t^2 = (t+1)^2,$$

за $q = 3t + 2$ је

$$C_{md+1-q} = 0 + 0 + 1 + (t+1) + 0 + 0 + t + t(t+1) = (t+1)(t+2).$$

Дакле, добијамо да комбинација које почињу са $md + 1 - q$ има:

$$C_{md+1-q} = \begin{cases} (t+1)^2, & q = 3t \\ (t+1)^2, & q = 3t+1 \\ (t+1)(t+2), & q = 3t+2. \end{cases}$$

Ово је низ A008133 у [43].

Од тога је оних које се функцијом φ сликају у 2 комбинације има

$$\begin{cases} 0, & q = 3t \\ t+1, & q = 3t+1 \\ t+2, & q = 3t+2. \end{cases}$$

Сада ћемо описати све ове комбинације у зависности од вредности q.

За $q = 0$ имамо $(0+1)^2 = 1$ комбинацију која почиње са $md + 1 - q = 7$. То је почетна комбинација $(7, 8, 9, 10)$.

За $q = 1$ имамо $(0+1)^2 = 1$ комбинацију која почиње са 6: $(6,7,8,10)$ и она се са φ слика у 2 комбинације.

$$\varphi_2^2\big((6,7,8,10)\big) = \big((5,7,9,10),(5,6,7,10)\big).$$

За $q = 2$ имамо $(0+1)\cdot(0+2) = 2$ комбинације које почињу са 5: $(5,7,9,10)$, $(5,6,7,10)$ и обе се са φ сликају у 2 комбинације.

$$\varphi_2^2\big((5,7,9,10)\big) = \big((4,8,9,10),(4,6,8,10)\big),$$

$$\varphi_2^2\big((5,6,7,10)\big) = \big((4,5,9,10),(4,5,6,10)\big).$$

За $q = 3$ имамо $(1+1)^2 = 4$ комбинације које почињу са 4: $(4,8,9,10)$, $(4,6,8,10)$, $(4,5,9,10)$, $(4,5,6,10)$ и ниједна од њих се са φ не слика у 2 комбинације:

$$\varphi_2^3\big((4,8,9,10)\big) = (3,7,8,10), \qquad \varphi_2^3\big((4,6,8,10)\big) = (3,5,7,10),$$

$$\varphi_2^3\big((4,5,9,10)\big) = (3,4,8,10), \qquad \varphi_2^3\big((4,5,6,10)\big) = (3,4,5,10).$$

За $q = 4$ имамо $(1+1)^2 = 4$ комбинације које почињу са 3: $(3,7,8,10)$, $(3,5,7,10)$, $(3,4,8,10)$, $(3,4,5,10)$ и само прве две се са φ сликају у 2 комбинације:

$$\varphi_2^2\big((3,7,8,10)\big) = \big((2,7,9,10),(2,6,7,10)\big), \qquad \varphi_2^3\big((3,4,8,10)\big) = (2,3,7,10),$$

$$\varphi_2^2\big((3,5,7,10)\big) = \big((2,4,9,10),(2,4,6,10)\big), \qquad \varphi_2^3\big((3,4,5,10)\big) = (2,3,4,10).$$

За $q = 5$ имамо $(1+1)\cdot(1+2) = 6$ комбинација које почињу са 2: $(2,7,9,10)$, $(2,6,7,10)$, $(2,4,9,10)$, $(2,4,6,10)$, $(2,3,7,10)$, $(2,3,4,10)$, од којих 3: $(2,7,9,10)$, $(2,6,7,10)$, $(2,3,7,10)$ се са φ сликају у 2 комбинације.

За $q = 6$ имамо $(2+1)^2 = 9$ комбинација које почињу са 1: $(1,8,9,10)$, $(1,6,8,10)$, $(1,5,9,10)$, $(1,5,6,10)$, $(1,3,8,10)$, $(1,3,5,10)$, $(1,2,9,10)$, $(1,2,6,10)$, $(1,2,3,10)$ (и ове све сликају у по једну од претходно набројаних комбинација).

Све заједно имамо

$$1+1+2+4+4+6+9 = 27 = (m+1)^d$$

комбинација значајних за нашу технику.

Као матрица редукованог система рекуратних једначина добија се матрица S која је облика $(m+1)^d \times (m+1)^d$. Подсетимо се да степеновањем S можемо одредити све чланове низа a_n!

Даље, функција генератрисе која одговара овим пермутацијама са ограничењима је рационална функција $P(z)/Q(z)$, чији именилац $Q(z)$ има степен мањи или једнак од $(m+1)^d$, тј. $\deg Q(z) \leqslant (m+1)^d$, што је значајно мање од $\binom{(m+1)d}{d}$.

У овом конкретном случају је $\deg Q(z) = 24 \leqslant 27 = (m+1)^d$, јер је

$$A(z) = \frac{1+z^3-z^4-z^5+z^6-2z^7-z^8-z^9-2z^{10}-z^{12}-z^{13}-z^{15}}{1-z+z^3-2z^4+2z^6-4z^7-2z^9-2z^{10}-4z^{12}+2z^{13}-2z^{15}+4z^{16}+2z^{18}+2z^{19}+z^{21}+z^{22}+z^{24}}.$$

Именилац рационалне функције $A(z)$ је $(z-1)(z^2+z+1)(z^3+z-1)(z^{18}+3z^{15}+7z^{12}+9z^9+7z^6+3z^3+1)$ а бројилац је $2-(z+1)(z^2-z+1)(z^{12}+z^{10}+z^7+z^6+z^5+z^4-2z^3+1)$. Тих 27, односно 24 (јер се нешто скраћује), је значајно мање од $|\mathcal{C}| = \binom{(m+1)d}{d} = \binom{9}{3} = 84$. Тај број представља и колико нам треба елемената да бисмо могли да одредимо рекурентну везу.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
a_n	1	1	1	1	1	1	1	2	4	8	12	18	27	36	48	64	96	144	216	...

Табела 3.20: Број пермутација које задовољавају услов $p(i) - i \in \{-2,-1,1,2,3,4,5\}$.

Број пермутација које задовољавају услов $p(i) - i \in \{-2,-1,1,2,3,4,5\}$ је низ a_n представљен у Табели 3.20, који има функцију генератрисе $A(z)$, и то је низ A224810 у [43]. ■

3.6. Рачунарска сложеност

Сада ћемо упоређивати компјутерску сложеност наше технике и неких директних техника за одређивање броја пермутација са ограничењима јаког типа.

Можемо одредити број пермутација дужине n тако што генеришемо свих $n!$ пермутација и онда пребројимо само оне које задовољавају дате услове. Такође можемо број тих пермутација одредити и развијањем перманента $\operatorname{per} A$ према дефиницији. Оба ова начина захтевају $O(n!)$ операција.

Насупрот, ми можемо одредити број тих пермутација као елемент у првој врсти и првој колони матрице S^n, где је S матрица придружена систему линеарних рекурентних једначина. S^n можемо израчунати помоћу узастопних квадрирања [15], за шта нам је потребно $O(\log_2 n)$ операција. Дакле, наша техника одређује број пермутација са ограничењима ефикасније него директне технике издвајања пермутација или развијања перманента $\operatorname{per} A$.

Стенлијева Метода матрица преноса има исту компјутерску сложеност $O(\log_2 n)$. Наша техника даје боље резултате, јер за мале вредности k и r величина матрице S је мања од величине матрице суседства A из [39, Пример 4.7.7] (ред матрице A је близак са $(k+r+1)^2$), а и може се применити у неким случајевима у којима Метода матрица преноса не даје резултате.

Све функције генератриса које добијамо нашом техником су рационалне. То је битно, јер на основу тога знамо да за сваки од низова који одговарају броју пермутација са ограничењима јаког типа постоји линеарна рекурентна веза (реда који једнак степену имениоца функције генератрисе). Све те функције генератриса добијамо решавањем система који се састоји од $\binom{k+r}{k}$ линеарних рекурентних једначина. Зато је горња граница за степен d имениоца ових рационалних функција једнака:

$$d \leqslant \binom{k+r}{k}.$$

Стога је довољно да израчунамо (грубом силом) коначан број вредности, конкретно $\binom{k+r}{k}$ њих, и онда на основу њих можемо одредити функцију генератрисе, тј. и цео низ.

У случају парних и непарних пермутација са ограничењима систем се састоји од $2\cdot\binom{k+r}{k}$ линеарних рекурентних једначина. Зато је горња граница за степен d имениоца ових рационалних функција једнака:

$$d \leqslant 2\cdot\binom{k+r}{k}.$$

3.7. Шта даље?

Природно се поставља питање како бисмо могли да наставимо истраживање комбинаторних објеката са ограничењима. Две идеје које смо разрађивали, али које чекају време да би биле формиране у облику радова, су кружне пермутације са ограничењима и варијације са ограничењима. Њима смо се, у неким конкретним случајевима, бавили у [3], користећи коначне аутомате (то је описано у наредној глави). Сада ћемо укратко навести како би се могла уопштити наша техника развијена у [2] на ове случајеве.

3.7.1. Кружне пермутације

За број пермутација са ограничењима у кружном случају (то су Лемерове пермутације $R_3^{(k)}$) познато је неколико резултата.

Ричард Стенли је помоћу његове „Методе матрица преноса“ (енг. “Transfer-matrix Method”), у [39, Пример 4.7.7] решио случај $k = 2$. У том примеру је нашао број пермутација са ограничењима које задовољавају услов $p(i)-i \equiv 0, 1, 2 \pmod{n}$, за све $i \in \mathbb{N}_n$. Ми смо у [3] пребројали исте пермутације користећи коначне аутомате (види Пример 4.2.3). Група Јапанских математичара (енг. L. Li, T. Tomoda, S. Midorikawa, T. Horibata) је у [30] решила случај $k = 3$ развијајући перманенте. Ми смо се изборили и са тим случајем користећи коначне аутомате, али због обимности поступка, те резултате нисмо публиковали.

Наша техника развијена у [2] може се уопштити, тако што би се уместо комбинација из $\mathcal{C}$ које одређују рекурентне једначине користили уређени парови комбинација (из $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$) уз још 2 низа који одговарају овим комбинацијама из $\mathcal{C}$.

Такође, ради бржег израчунавања, у овом поступку се користе и многи међурезултати технике из [2] (тј. и сви остали низови, поред a_n, које добијамо у систему линеарних рекурентних једначина).

3.7.2. Варијације са ограничењима

Овде би модификација била у томе што би користили функцију Per која је дефинисана на матрицама произвољних димензија, уместо обичног перманента per који је дефинисан само на квадратним матрицама (видети Дефиницију 3.1.1). На сличан начин би долазили до система линеарних рекурентних једначина, али би ти системи и овде (као и код кружног случаја) били значајно компликованији.

4. Примене коначних аутомата

4.1. Коначне машине и аутомати

Коначна машина представља апстрактни модел уређаја са коначном унутрашњом меморијом који се може формално дефинисати у оквиру следеће дефиниције.

ДЕФИНИЦИЈА 4.1.1. *Коначна машина* M представља уређену шесторку (S, U, I, f, g, s^*):

- S коначан скуп *стања*;
- U коначан скуп *улазних симбола*;
- I коначан скуп *излазних симбола*;
- f *функција прелаза*, где $f : S \times U \longrightarrow S$, тј. за свако $s \in S$ и свако $u \in U$ функција f пару (s, u) додељује неко ново стање $f(s, u)$;
- g *функција излаза*, где $g : S \times U \longrightarrow I$, тј. за свако $s \in S$ и свако $u \in U$ функција g пару (s, u) додељује неки излазни симбол $g(s, u)$;
- s^* *почетно стање*, где $s^* \in S$.

Сада се понашање овако дефинисане машине може описати на следећи начин. Машина се на почетку налази у стању s^*. У дискретним временским тренуцима она мења своје стање тако што у сваком од њих на машину делује неки улазни симбол из U. Овај симбол изазива промену стања машине, у складу са функцијом прелаза f, и она при томе генерише неки излазни симбол из I, у складу са функцијом излаза g. Прецизније, ако се у неком тренутку машина налази у стању $s \in S$ и на њу делује улазни симбол $u \in U$, тада она прелази у ново стање $f(s, u)$ и даје излазни симбол $g(s, u)$.

Коначни аутомати представљају специјалну врсту коначних машина, која је од посебног значаја због своје уске повезаности са појмовима формалног језика и формалне граматике.

Коначна машина (S, U, I, f, g, s^*) представља *коначан аутомат* ако је $I = \{0, 1\}$ и излаз који она у неком тренутку генерише зависи искључиво од стања у које у том тренутку прелази, а не и од начина како се до тог стања дошло. Прецизније речено, за свако стање аутомата важи да, увек када аутомат у њега прелази као у следеће стање, генерише исти излазни симбол (1 или 0). Зато код дијаграма прелаза коначног аутомата све гране које улазе у исти чвор имају исти излазни симбол у својим ознакама.

Стања за која важи да када аутомат у њих прелази даје увек излаз 1, зову се *прихватајућа* (или *коначна*) стања аутомата. Очигледно да је код коначног аутомата функција излаза g у потпуности имплицитно задата скупом свих прихватајућих стања. Наиме, нека је $f(s, u) = s'$. Тада је $g(s, u) = 1$ ако и само ако је s' прихватајуће стање. Зато се појам коначног аутомата може алтернативно формално дефинисати на следећи начин.

ДЕФИНИЦИЈА 4.1.2. *Коначан аутомат* A представља уређену петорку (S, U, f, P, s^*):

- S коначан скуп *стања*;
- U коначан скуп *улазних симбола* (или *алфабет*);
- f *функција прелаза*, где $f : S \times U \longrightarrow S$;
- P скуп *прихватајућих стања*, где је $P \subseteq S$;
- s^* *почетно стање*, где $s^* \in S$.

Коначан аутомат $A = (S, U, f, P, s^*)$ се може задати на начине како се уобичајено задаје једна коначна машина: коришћењем скуповно-табличне репрезентације, у којој се табеларно приказују вредности функције f, и помоћу дијаграма прелаза који се поједностављује у складу са особеностима концепта аутомата. Наиме, у његовом дијаграму се изостављају излазни симболи у ознакама грана, тј. ознаке грана чине само одговарајући улазни симболи, док се прихватајућа стања графички означавају двоструким заокруживањем.

Иако је коначан аутомат специјалан случај коначне машине, његова главна улога није да, услед деловања неког улазног низа симбола, генерише одговарајући излазни низ, већ да испита да ли га тај улазни низ преводи из почетног стања у неко од прихватајућих стања или не. Ако улазни низ преводи аутомат у прихватајуће стање сматра се да аутомат „препознаје“ (или другачије речено„прихвата“) овај низ. Појам „препознавања“ улазног низа од стране неког аутомата може се формално дефинисати следећом дефиницијом.

ДЕФИНИЦИЈА 4.1.3. Нека је $A = (S, U, f, P, s^*)$ коначан аутомат и $x_1x_2 \dots x_n$ неки непразни низ симбола из скупа U. Аутомат A *препознаје* (*прихвата*) улазни низ $x_1x_2 \dots x_n$ ако постоји низ стања $s_0, s_1, \dots, s_n$ из S такав да је

$$\begin{aligned} s_0 &= s^*, \\ s_k &= f(s_{k-1}, x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n \\ s_n &\in P. \end{aligned}$$

Сваком непразном улазном низу $x_1x_2 \dots x_n$ одговара у дијаграму прелаза аутомата један оријентисани пут који полази од почетног чвора и кога чини n надовезаних грана са ознакама једнаким редом $x_1, x_2, \dots, x_n$. Чворови овог пута представљају низ стања кроз која аутомат пролази деловањем улазног низа. На основу Дефиниције 4.1.3 јасно је да је неки улазни низ прихваћен од стране аутомата ако и само ако се њему одговарајући пут у дијаграму прелаза завршава у чвору који одговара прихватајућем стању.

Напоменимо да ћемо даље сматрати да на аутомат може „деловати“ и празни улазни низ, не изазивајући при томе никакву реакцију аутомата. Овај низ се прихвата ако и само ако је почетно стање аутомата прихватајуће.

Скуп свих улазних низова које један аутомат A прихвата често се назива *језиком кога аутомат A прихвата* (*препознаје*) и означава се са $L(A)$. При томе се може сматрати да низови из $L(A)$ представљају *речи* овог језика над скупом улазних симбола U као *азбуком*.

Неко стање аутомата се назива *недостиживим* ако у његовом дијаграму прелаза не постоји оријентисани пут од почетног чвора до чвора који одговара овом стању (видети чвор s_5 из претходног примера). Оваква стања би се могла пронаћи генерисањем свих путева у дијаграму који иду од почетног чвора, и то коришћењем неког од познатих алгоритама за налажење путева у графу. Затим би се дијаграм аутомата могао редуковати једноставним уклањањем чворова свих недостиживих стања, заједно са гранама које у њих или из њих воде. Зато ћемо у даљим разматрањима претпоставити да аутомат не садржи ни једно недостиживо стање.

Два стања аутомата називамо *уједначивим* (или *еквивалентним*) ако за сваки улазни низ важи да ће, полазећи од једног или другог стања као од почетног, овај низ или у оба случаја бити прихваћен или у оба случаја неприхваћен (видети чворове s_1 и s_3 из претходног примера).

Овако вербално исказана дефиниција уједначивих стања може се и формално прецизније дефинисати на следећи начин.

Нека је задат коначан аутомат $A = (S, U, I, f, s_0, P)$. Означимо са U^* скуп свих могућих низова улазних симбола из U. При томе сматрамо да и празни низ, у ознаци ε, припада скупу U^*.

Појам функције прелаза можемо проширити тако што ћемо увести функцију $f^* : S \times U^* \longrightarrow S$ код које $f^*(s, x)$ представља стање у које ће аутомат прећи ако на њега делује улазни низ x полазећи од стања s. Важи да је $f^*(s, \varepsilon) = s$, тј. ако на неко стање делује празан низ аутомат остаје у том стању.

Сада се појам уједначивих стања може формално дефинисати у оквиру следеће дефиниције.

ДЕФИНИЦИЈА 4.1.4. Два стања s_1 и s_2 из S су *уједначива* (или *еквивалентна*), у ознаци $s_1 \equiv s_2$, ако за сваки улазни низ $x \in U^*$ важи да је $f^*(s_1, x) \in P$ ако и само ако $f^*(s_2, x) \in P$.

Напоменимо да из ове дефиниције непосредно следи да два различита стања s_1 и s_2 нису уједначива, у ознаци $s_1 \not\equiv s_2$, ако и само ако постоји улазни низ $x \in U^*$ такав да је $f^*(s_1, x) \in P$ и $f^*(s_2, x) \notin P$ или обрнуто. Специјално, ако $s_1 \in P$ и $s_2 \notin P$, тада s_1 и s_2 нису уједначива стања (јер је $f^*(s_1, \varepsilon) = s_1 \in P$ и $f^*(s_2, \varepsilon) = s_2 \notin P$). Другим речима, ниједно прихватајуће стање не може да буде уједначиво са неким неприхватајућим стањем!

Неприхватајуће стање које за свако слово алфабета остаје у том истом стању називамо *понор*.

Код концепта коначног аутомата који је до сада разматран деловање улаза на неко стање изазива увек прелазак у једно јединствено, унапред одређено стање. Међутим, може се посматрати и уопштенији концепт код кога се, при деловању улаза на стање, прецизира, не једно, него читав скуп стања у које би аутомат могао услед тога да пређе. Овакав тип математичких „машина“ назива се *недетерминистички коначан аутомат* и игра веома важну улогу у теорији формалних језика и граматика. Израз „недетерминистички“ се користи, јер се у извесним тренуцима не може тачно одредити шта ће бити његово следеће стање. Напоменимо, да избор следећег стања није случајан, па недетерминистичке аутомате не треба мешати са пробабилистичким. Због тога би појам коначног аутомата било погодније назвати *детерминистичким*.

Недетерминистички коначан аутомат се може формално дефинисати на следећи начин.

ДЕФИНИЦИЈА 4.1.5. *Недетерминистички коначан аутомат* NA представља уређену петорку (S, U, f, P, s^*), где је

- S коначан скуп *стања*;
- U коначан скуп *улазних симбола*;
- f *функција прелаза* таква да је $f : S \times U \longrightarrow \mathcal{P}(S)$, где је $\mathcal{P}(S)$ скуп свих подскупова од S, тј. за свако $s \in S$ и свако $u \in U$ функција f пару (s, u) додељује скуп $f(s, u) \subseteq S$;
- P скуп прихватајућих стања, где $P \subseteq S$;
- s^* почетно стање, где $s^* \in S$.

Вредност функције прелаза $f(s, u)$ значи да ће, деловањем улаза u на аутомат у стању s, он прећи у неко од стања из скупа $f(s, u)$, при чему то стање није унапред прецизирано. Ако је $f(s, u) = \emptyset$, сматра се да је аутомат „блокиран“ у стању s.

Очигледно је да детерминистички коначан аутомат представља специјалну врсту недетерминистичког аутомата код кога важи да је за свако $s \in S$ и свако $u \in U$ скуп $f(s, u)$ једночлан.

За дефинисање неког недетерминистичког аутомата може се користити, слично као код детерминистичког, скуповно-таблична репрезентација или одговарајући дијаграм прелаза. У табличном приказу функције прелаза f за свако стање s и улазни симбол u задаје се скуп следећих стања $f(s, u)$, док код дијаграма прелаза од чвора s до чвора сваког стања из скупа $f(s, u)$ постоји грана са ознаком u. Због тога овај дијаграм може у општем случају да садржи више од једне исто означене гране које излазе из истог чвора, као и чворове код којих за неки улаз уопште не постоје излазне гране њиме означене.

Јасно је да се код недетерминистичког аутомата за задати улазни низ не могу увек тачно прецизирати сва стања кроз која ће аутомат проћи деловањем овог низа, па ни завршно стање у које ће аутомат при томе бити доведен. У таквим случајевима једино се може одредити скуп свих стања у која улазни низ може да доведе аутомат, где тај скуп може бити и празан. Зато се појам прихваћеног низа код недетерминистичког аутомата мора уопштити. Наиме, недетерминистички аутомат прихвата неки улазни низ ако у скупу свих стања у која тај низ може да доведе аутомат постоји бар једно прихватајуће стање, што може формално да се искаже следећом дефиницијом.

ДЕФИНИЦИЈА 4.1.6. Нека је $NA = (S, U, f, P, s^*)$ недетерминистички коначан аутомат и $x_1x_2\ldots x_n$ неки непразни низ симбола из скупа U. Аутомат NA *препознаје* (*прихвата*) улазни низ $x_1x_2\ldots x_n$ ако постоји низ стања $s_0, s_1, \ldots, s_n$ из S такав да је

$$s_0 = s^*, \qquad s_k \in f(s_{k-1}, x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{и} \qquad s_n \in P.$$

Другим речима, улазни низ $x_1x_2\ldots x_n$ је прихваћен од стране недетерминистичког аутомата ако и само ако у његовом дијаграму постоји бар један пут који почиње у почетном чвору s^*, састоји се од n оријентисаних грана редом означених са $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и завршава се у чвору који одговара неком од прихватајућих стања.

Скуп свих речи које неки недетерминистички аутомат NA препознаје зове се *језик кога аутомат NA прихвата (препознаје)* и обележава са $L(NA)$. Два недетерминистичка аутомата NA_1 и NA_2 су *еквивалентна* ако је $L(NA_1) = L(NA_2)$.

С обзиром да је концепт недетерминистичког аутомата општији, могло би се очекивати да евентуално постоје неки скупови улазних низова који се могу препознати недетерминистичким аутоматом, али не могу и детерминистичким. Међутим, овакви скупови не постоје. Наиме, може се доказати да за сваки недетерминистички аутомат постоји одговарајући детерминистички такав да оба ова аутомата препозају исти језик.

4.2. Пребројавање пермутација помоћу аутомата

За сваки од наредних неколико типова пермутација (и варијација) са ограничењима конструисаћемо коначни аутомат који препознаје само такве пермутације и искористићемо те аутомате да бисмо пребројали колико има таквих пермутација.

На почетку ћемо разматрати пермутације које задовољавају ограничење $-k \leqslant p(i) - i \leqslant r$ (за произвољне природне бројеве k и r). Узећемо да смо у процесу конструисања пермутације са ограничењима и нека је делимично направљена пермутација

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & h-1 \\ p(1) & p(2) & \ldots & p(h-1) \end{pmatrix}.$$

Потребно је да одредимо вредност за $p(h)$.

Као прво, приметимо да избор h-тог елемента пермутације, $p(h)$, зависи само од статуса тренутног елемента h, претходних k елемената $(h-k, h-k+1, \ldots, h-1)$, као и следећих r елемената $(h+1, h+2, ..., h+r)$ пермутације у конструкцији (статус може бити да је тај елемент већ употребљен или да је неупотребљен).

Стања аутомата се састоје од $k+r+1$ координата који представљају претходних k елемената $(h-k, h-k+1, \ldots, h-1)$, тренутни елемент h и следећих r елемената $(h+1, h+2, ..., h+r)$

пермутације у конструкцији. Неки од тих координата су већ попуњене (тј. одговарајући бројеви су већ употребљени у досадашњој конструкцији пермутације – попуњене координате ћемо означавати са 1, а слободне са 0) и потребно је да попунимо још једну координату и да затим уклонимо прву координату и додамо једну на крај да бисмо добили ново стање аутомата. Ако је прва координата слободна, онда морамо њу да попунимо, јер нам је то последња прилика. Међу овако одређеним стањима има доста недостиживих стања (прецизније, сва достижива стања имају тачно k јединица) и њих ћемо одбацити приликом минимизације аутомата.

Овај поступак има доста сличности са методом коју је дао Блеквел (енг. D. Blackwell), а описана је у [29] или [18, стр. 216-7.]. Међутим, главна разлика је да Блеквелова метода даје асимптотско понашање броја тражених пермутација са ограничењима (тај број расте као и n-ти степен највеће сопствене вредности), док смо ми прецизно пребројали те пермутације. Такође, он је решио један специјалан случај (који је лако описати; он се своди на Фибоначијеве бројеве), док смо ми коришћењем коначних аутомата проблем решили у потпуности.

ПРИМЕР 4.2.1. Размотримо пермутацију са ограничењима, код које је задовољавен услов $-3 \leqslant p(i) - i \leqslant 4$ (тј. $k = 3$ и $r = 4$). Нека је делимично направљена пермутација

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 4 & 1 & 7 & 3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Ми треба да одредимо пету вредност пермутације, тј. тренутни елемент је $h = 5$, односно можемо рећи да одређујемо $p(5)$. Потребно је да опишемо ситуацију са елементима од 2 до 9 ($h - k = 5 - 3 = 2$ и $h + r = 5 + 4 = 9$). Већ смо искористили бројеве 4, 7 и 3 (искористили смо и 1, али нас он не занима, јер није између 2 и 9) и на координате стављамо 1, а на остале које одговарају неискоришћеним елементима (то су 2, 5, 6, 8 и 9) стављамо 0:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$
$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

Стање коначног аутомата које одговара овој ситуацији је 01100100. Прва координата (која одговара броју 2) је 0, тј. 2 није искоришћена и ово је последња шанса да попунимо ову координату. Дакле, $p(5)$ мора да узме вредност 2. Како је $p(5) - 5 = 2 - 5 = -3$, ми идемо 3 елемента улево (тј. наш аутомат може да пређе у следеће стање само ако му дође улазни симбол -3 из алфабета $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Након тога, делимично направљена пермутација је

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 4 & 1 & 7 & 3 & 2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Сада је потребно да одредимо шесту вредност, $p(6)$, тј. тренутни елемент који бирамо је $h = 6$. Потребно је да опишемо ситуацију са елементима од 3 до 10 ($h - k = 6 - 3 = 3$ и $h + r = 6 + 4 = 10$). Искористили смо бројеве 4, 7 и 3 (и на њихове координате стављамо 1), док су остали бројеви неискоришћени (ту су 0):

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$
$$\begin{array}{cccccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

Стање аутомата које одговара овој ситуацији је 11001000. Прва координата (која одговара броју 3) је 1, тј. 3 је већ искоришћен, па стога $p(6)$ може бити било који неискоришћени елемент: 5, 6, 8, 9 или 10 (одговарајуће улазне вредности из алфабета су -1, 0, 2, 3 или 4). ■

ТЕОРЕМА 4.2.1. Скуп стања коначног аутомата S се састоји од стања које имају $k + r + 1$ координата на којима је тачно k јединица, а остале су нуле (и последња координата је увек 0) и једног понор–стања, означеног са Q, које одговара немогућем стању за ову врсту пермутација са ограничењима.

Алфабет (коначан скуп улазних симбола) U је:

$$U = \{-k, -k + 1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, r - 1, r\}.$$

У овом случају постоји само једно прихватајуће стање – код њега је првих k координата попуњено (у овом случају смо искористили све бројеве који су мањи од h, тако да они чине једну пермутацију).

Почетно стање s^* је исто као и једино прихватајуће стање.

Функција прелаза (за $-k \leqslant x \leqslant r$) је дата са:

- $F(s_1, x) = Q$, ако је прва координата стања s_1 слободна и $x \neq -k$;
- $F(s_1, x) = Q$, ако је $(k+1+a)$-та координата стања s_1 попуњена;
- $F(s_1, x) = S_2$, ако је прва координата стања s_1 попуњена, а $(k+1+x)$-та је слободна. Стање s_2 се добија од стања S_1 тако што попунимо $(k+1+x)$-ту координату, затим уклонимо прву координату и допишемо координату 0 на крај.

Коначни аутомат $M = (S, U, F, P, s^*)$ препознаје само пермутације које задовољавају услов $-k \leqslant p(i) - i \leqslant r$.

Доказ. Попуњене и празне координате у сваком стању коначног аутомата се померају улево помоћу функције прелаза $f(s_1, x) = s_2$. То обезбеђује да се сваки број у пермутацији јавља не више од једанпут.

Како је код јединог прихватајућег стања првих k координата попуњено, то имамо да су сви бројеви мањи од тренутног елемента h искоришћени, тако да они чине једну пермутацију (бројева $1, 2, \ldots, h$).

Услов $-k \leqslant x \leqslant r$ за алфабет U обезбеђује да одговарајућа пермутација задовољава услов $-k \leqslant p(i) - i \leqslant r$. □

У Примеру 4.2.3 ћемо дати малу модификацију ове теореме за одређивање броја кружних пермутација са ограничењима, тачније Лемеровог типа $R_3^{(k)}$ – видети страну 36. У том случају ћемо имати и више од једног прихватајућег стања.

У следећој теореми конструишемо аутомат M који одговара пермутацијама са ограничењима из Поглавља Пребројавање $N(n; k, r, I)$. Разматраћемо пермутације које задовољавају услов $p(i) - i \in I$, за све $i \in \mathbb{N}_n$, где је I подскуп скупа $\{-k, -k+1, , -2, -1, 0, 1, 2, , r-1, r\}$. Изоставићемо доказ Теореме 4.2.2 (јер је суштински аналоган доказу Теореме 4.2.1). Како функционише ова теорема илуструјемо Примером 4.2.2.

ТЕОРЕМА 4.2.2. Скуп стања S, једино прихватајуће стање, почетно стање и функција прелаза F (за $x \in U$) су исти као и у Теореми 4.2.1.

Алфабет U се разликује: $U = I$.

Коначни аутомат $M = (S, U, F, P, s^*)$ препознаје само пермутације које задовољавају услов $p(i) - i \in I$.

У [4] смо генерализовали резултате из [1] тако што смо добили неке од примена коначних аутомата на пребројавање парних и непарних пермутација са ограничењима. Са мањим модификацијам успешно контролишемо који је знак пермутације у конструкцији.

ТЕОРЕМА 4.2.3. Скуп стања коначног аутомата S је скоро исти као у претходним теоремама, само што имамо још једну координату која контролише парност. Дакле, стања имају $k + r + 2$ координата, при чему на првих $k + r + 1$ има тачно k јединица, а остале су нуле (и последња од тих координата, $k + r + 1$-ва, је увек 0), док је последња $k + r + 2$-га координата П или Н у зависности од тога да ли је пермутација у конструкцији парна или непарна. Поред тога имамо и једно понор–стање, означено са Q, које одговара немогућем стању за ову врсту пермутација са ограничењима.

Алфабет (коначан скуп улазних симбола) U је: $U = I$, где је I неки унапред задати подскуп скупа $\{-k, -k+1, , -2, -1, 0, 1, 2, , r-1, r\}$.

У овом случају постоји само једно прихватајуће стање – код њега је првих k координата попуњено (у овом случају смо искористили све бројеве који су мањи од h, тако да они чине једну пермутацију), тј. ту су 1, на наредних $r+1$ координата су 0, а последња координата је П.

Почетно стање s^* је исто као и једино прихватајуће стање.

Функција прелаза (за $-k \leqslant x \leqslant r$) је дата са:

- $F(s_1, x) = Q$, ако је прва координата стања s_1 слободна и $x \neq -k$;
- $F(s_1, x) = Q$, ако је $(k+1+a)$-та координата стања s_1 попуњена;
- $F(s_1, x) = s_2$, ако је прва координата стања s_1 попуњена, а $(k+1+x)$-та је слободна. Стање s_2 се добија од стања s_1 тако што попунимо $(k+1+x)$-ту координату, затим уклонимо прву и последњу координату и допишемо 0 на предпоследњу координату и на крај ставимо П или Н по следећем правилу:
  – последња координата остаје иста као и у s_1 ако у s_1 има паран број 1 на позицијама почев од $(k+1+x)$-те координате;
  – последња координата остаје се мења у односу на s_1 (из П у Н и из Н у П) ако у S_1 има непаран број 1 на позицијама почев од $(k+1+x)$-те координате.

Коначни аутомат $M = (S, U, F, P, s^*)$ препознаје само парне пермутације које задовољавају услов $p(i) - i \in I$.

Доказ. Попуњене и празне координате у сваком стању коначног аутомата се померају улево помоћу функције прелаза $F(s_1, x) = s_2$. То обезбеђује да се сваки број у пермутацији јавља не више од једанпут.

Ако након $(k+1+x)$-те координате (она одговара елементу који је тренутни у пермутацији коју конструишемо) има паран број 1, тада тај нови број чини инверзију само са парним бројем већ постављених бројева (они су постављени пре текућег, а већи су од њега па чине инверзију!), па како он прави паран број инверзија, парност такве пермутације у конструкцији се не мења. Ако има непаран број 1, тада има и непаран број инверзија, па се парност пермутације мења.

Како је код јединог прихватајућег стања првих k координата попуњено, то имамо да су сви бројеви мањи од тренутног елемента h искоришћени, тако да они чине једну пермутацију (бројева $1, 2, \ldots, h$). Последња координата код јединог прихватајућег стања је П, па аутомат препознаје парне пермутације.

Услов $x \in U$, где је алфабет $U = I$ обезбеђује да одговарајућа пермутација задовољава услов $p(i) - i \in I$. □

Напомена. Ако хоћемо да конструишемо аутомат који препознаје непарне пермутације са ограничењима, једина разлика је у прихватајућем стању: код њега је првих k координата попуњено, тј. ту су 1, на наредних $r+1$ координата су 0, а последња координата је Н (уместо П). Нагласимо да се почетно стање s^* није променило!

У [1] смо навели неке од примена коначних аутомата на пребројавање пермутација са ограничењима, а у [3] и [4] смо отишли мало даље. Користили смо коначне аутомате за пребројавање n-варијација скупа $N_{n+t} = \{1, 2, \ldots, n+t\}$ које задовољавају услов $p(i) - i \in I$. Случај аутомата који препознаје варијације са ограничењима се у односу на претходно разматране аутомате за пермутације са ограничењима разликује само у прихватајућим стањима. Такође, код варијација са ограничењима могуће је да има више прихватајућих стања.

ТЕОРЕМА 4.2.4. Алфабет U, скуп стања S, почетно стање и функција прелаза F (за $x \in U$) су исти као и у Теореми 4.2.2.

Прихватајућа стања су сва стања код којих су координате од $(k+t+1)$-ве до $(k+r+1)$-ве слободне и које имају укупно k заузетих координата и које имају тачно k попуњених координата.

Коначни аутомат $M = (S, U, F, P, s^*)$ препознаје само n-варијације скупа $N_{n+t} = \{1, 2, \ldots, n+t\}$ које задовољавају услов $p(i) - i \in I$.

Доказ. Сва стања код којих су координате од $(k+t+1)$-ве до $(k+r+1)$-ве слободне имају особину да су сви бројеви, који су употребљени у генерисању дате варијације са ограничењима, елементи скупа N_{n+t}. Сва стања (сем Q) имају тачно k јединица, што нам обезбеђује да смо одабрали тачно n бројева. Како је алфабет $U = I$ биће испуњен и услов услов $p(i) - i \in I$. На основу свега тога следи да смо аутоматом M препознали једну n-варијацију скупа N_{n+t} која задовољава услов $p(i) - i \in I$.

Остали делови доказа иду исто као и у доказу Теореме 4.2.1, те их стога изостављамо. □

Све ове теореме илустроваћемо кроз неколико примера у наредном поглављу.

4.2.1. Примери

У првом од них одредићемо колико има пермутација за које важи $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$, за све $i \in \mathbb{N}_n$, тако што ћемо конструисати одговарајући аутомат M_1. Даћемо и везу ових аутомата са неким другим комбинаторним објектима (композицијама и подскуповима).

ПРИМЕР 4.2.2. Одредити колико има пермутација које задовољавају услов $p(i)-i \in \{-2, 0, 2\}$, за све $i \in \mathbb{N}_n$.

Решење. Како је најмањи елемент у $I = \{-2, 0, 2\}$ једнак -2 имамо да је $k = 2$, а како је највећи 2 имамо да је $r = 2$. Стога ће стања аутомата имати $k + r + 1 = 5$ координата.

Алфабет (коначан скуп улазних симбола) U у овом случају је: $U = I = \{-2, 0, 2\}$.

Стања коначног аутомата имају тачно $k = 2$ попуњених координата (на њима су уписане 1), а остале су празне (на њима су 0). Последња координата је увек празна (јер на ту позицију у претходном кораку нисмо никако могли да стигнемо). Скуп стања коначног аутомата је $S = \{a, b, c, d, e, f, Q\}$. У наредној табели даћемо везу између стања и попуњених и празних координата:

стања	a	b	c	d	e	f	Q
координате	11000	10100	10010	01100	01010	00110	

Табела 4.0. Скуп стања S.

У овом случају постоји само једно прихватајуће стање a – код њега је првих k координата попуњено (у овом случају смо искористили све бројеве који су мањи од h, тако да они чине једну пермутацију).

Почетно стање s^* је исто као и једино прихватајуће стање.

Функција прелаза $F(s, x)$ (за $x \in I = \{-2, 0, 2\}$ и $s \in S$) је дата у Табели 4.1.

	стања S						
улази x	a	b	c	d	e	f	Q
-2	Q	Q	Q	a	b	d	Q
0	a	Q	d	Q	Q	Q	Q
2	c	e	f	Q	Q	Q	Q

Табела 4.1. Функција прелаза $F(s, x)$.

Илуструјмо функцију прелаза на 2 конкретна примера стања.

Прво, посматрајмо стање аутомата c, које има координате 10010.

Улазни симбол -2 проузрокује промену стања аутомата са c на Q, јер је прва координата у 10010 попуњена (тј. 1).

Улазни симбол 0 проузрокује промену стања аутомата са c на d: од стања $c = 10010$ добијамо 10110 када попунимо тренутну позицију (то је 3. координата) и затим када уклонимо прву координату и на крај допишемо 0 добијамо $d = 01100$.

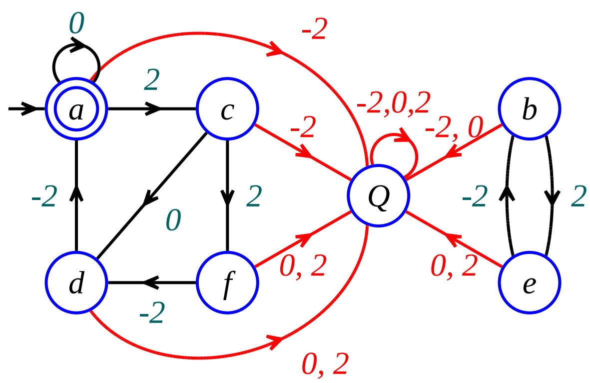
Улазни симбол 2 проузрокује промену стања аутомата са c на f: од стања $c = 10010$ добијамо

10011 када попунимо позицију која је 2 места десно од тренутне (то је 5. координата) и затим када уклонимо прву координату и на крај допишемо 0 добијамо $f = 00110$.

Мало другачија је ситуација са стањем f, које има координате 00110.

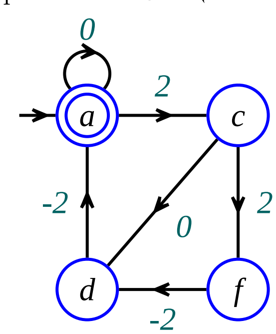
Код овог стања прва координата је празна (тј. 0) и морамо да је попунимо, па имамо прелазе $F(f, -2) = d$, $F(f, 0) = F(f, 2) = Q$.

Аутомат M_1 је приказан својим дијаграмом прелаза на Слици 4.1.



Слика 4.1. Дијаграм прелаза аутомата M_1.

Код аутомата M_1 имамо недостижива стања b и e, па њих можемо изоставити. Такође, добијамо јаснију представу, ако изоставимо и гране које воде у понор–стање Q, као и само стање Q. На тај начин дошли смо до новог аутомата M_2 који је недетерминистички (из неких стања са неким улазним симболима имамо 0 могућих стања у која можемо да пређемо). Ако ово посматрамо из угла Теорије графова, M_2 је подграф од M_1. Недетерминистички аутомат M_2 је приказан својим дијаграмом прелаза на Слици 4.2.



Слика 4.2. Дијаграм прелаза недетериминистичког аутомата M_2.

Дијаграм прелаза недетриминистичког аутомата M_2 са Слике 4.2 је један оријентисан граф. Према Теорији графова, конструкцији пермутације са ограничењима одговара једна затворена шетња дужине n од чвора a до чвора a. Означимо број шетњи дужине n од чвора v до чвора a са $v(n)$. За почетне услове, без умањења општости, можемо узети да путева дужине 0 има $a(0) = 1$ и $b(0) = c(0) = d(0) = e(0) = f(0) = 0$.

Број пермутација са ограничењима скупа $\mathbb{N}_n$ које задовољавају услов $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$ је једнак $a(n)$. Приметимо да свака затворена шетња има саставне делове

$$a - a, \qquad a - c - d - a \qquad \text{и/или} \qquad a - c - f - d - a.$$

Ова чињеница успоставља бијекцију између пермутација са ограничењем $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$, за $i \in \mathbb{N}_n$ и композиција броја n на сабирке из скупа $\{1, 3, 4\}$.

Нпр. ако је $n = 5$ имамо $a(5) = 6$ пермутација са ограничењем $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$ којима одговара 6 композиција $n = 5$ на сабирке из скупа $\{1, 3, 4\}$:

пермутације	12345,	12543,	14325,	14523,	32145,	34125
композиције	$1+1+1+1+1$,	$1+1+3$,	$1+3+1$,	$1+4$,	$3+1+1$,	$4+1$.

На основу дијаграма прелаза (или функција прелаза из Табеле 4.1) аутомата M_1 или M_2 можемо добити систем рекурентних једначина (ми ћемо посматрати M_2 јер има мање једначина).

Ако на почетку имамо 1 у пермутацији, то одговара улазу 0 у аутомату M_2, који не проузрокује промену стања. Ако на почетку имамо 3 у пермутацији, то одговара улазу 2 у аутомату M_2, који проузрокује промену из стања a у стање c. На основу овога имамо да је број затворених шетњи дужине $n+1$ из чвора a у чвор a једнак збиру броја затворених шетњи дужине n из чвора a у чвор a и броја шетњи дужине n из чвора c у чвор a. Тако смо добили једначину $a(n+1) = a(n)+c(n)$. На сличан начин, можемо добити комплетан систем рекурентних једначина:

$$a(n+1) = a(n) + c(n), \tag{4.2}$$

$$b(n+1) = d(n) + f(n), \tag{4.3}$$

$$d(n+1) = a(n), \tag{4.4}$$

$$f(n+1) = d(n), \tag{4.5}$$

са почетним условима $a(0) = 1$, $c(0) = 0$, $d(0) = 0$ и $f(0) = 0$.

Из једначине (4.4) добијамо $d(n) = a(n-1)$. Када то ставимо у једначину (4.3) налазимо $f(n) = a(n-2)$. Коначно, из једначине (4.3) следи $c(n) = a(n-2) + a(n-3)$. Одатле добијамо хомогену линеарну рекурентну једначину са константним коефицијентима:

$$a(n+1) = a(n) + a(n-2) + a(n-3),$$

са почетним условима $a(0) = 1$, $a(1) = 1$, $a(2) = 1$ и $a(3) = 2$.

Њена карактеристична једначина је $t^4 = t^3 + t + 1$. Она се може трансформисати у

$$(t^2+1)\cdot(t^2-t-1) = 0,$$

одакле одмах добијамо решења: $t_1 = i$, $t_2 = -i$, $t_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $t_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Стога је опште решење облика $a(n) = C_1 \cdot t_1^n + C_2 \cdot t_2^n + C_3 \cdot t_3^n + C_4 \cdot t_4^n$. Из почетних услова одређујемо вредности константи: $C_1 = \frac{2-i}{10}$, $C_2 = \frac{2+i}{10}$, $C_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{10}$ и $C_4 = \frac{3-\sqrt{5}}{10}$.
Како је

$$\frac{2-i}{10}\cdot i^n + \frac{2+i}{10}\cdot(-i)^n = \frac{2-i}{10}\cdot(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}) + \frac{2+i}{10}\cdot(\cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2}) = \frac{2}{5}\cdot\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{5}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$$

и како од последња 2 члана добијамо Лукасове бројеве L_{n+2} (види потпоглавље о њима са стране 19, као и Теорему 1.6.4)

$$\frac{3+\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{3-\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{5} = \frac{1}{5}L_{n+2},$$

добијамо да је општи члан овог низа једнак:

$$a(n) = \frac{1}{5}\left(L_{n+2} + 2\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

Са овим низом, као и низом $y(n) = 2\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}$ срешћемо се поново у Примеру 4.2.5.

Првих неколико чланова овог низа је дато у Табели 4.2. Ови бројеви чине низ A006498 у *Енциклопедији целобројних низова* [43].

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$a(n)$	1	1	1	2	4	6	9	15	25	40	64	104	169	273	441	714	1156

Табела 4.2. Низ $a(n)$, тј. A006498.

Овај низ има мноштво занимљивих комбинаторних особина (већ смо показали да је то број композиција на сабирке из скупа $\{1,3,4\}$), као што је да је збир $a(n)+a(n+2)=F_{n+3}$ или $a(2k)=(F_{k+1})^2$. Али њих нећемо показати, него ћемо успоставити везу са још једним комбинаторним објектима – подскуповима (то су уствари комбинације) са неким додатним ограничењима.

Према Теореми 1.1.4 имамо да се свака пермутација може представити као композиција идентичке пермутације ε и транспозиција. Пермутације са ограничењем $p(i)-i \in \{-2,0,2\}$, за $i \in \mathbb{N}_n$, могу се представити као композиције 2 транспозиције које немају заједнички елемент, нпр. ако је представљање $\tau_{i,j} \circ \tau_{k,l}$, онда су сва 4 броја i,j,k,l међусобно различити. Штавише, бројеви i и j (као и k и l) се разликују за 2. Ако узмемо мање од елемената из сваке транспозиције добићемо подскуп скупа $\mathbb{N}_{n-2}$ у коме не постоје 2 елемента чија је разлика једнака 2.

Нпр. ако је $n=5$ имамо $a(5)=6$ пермутација са ограничењем $p(i)-i \in \{-2,0,2\}$ којима се могу представити као композиције транспозиција, а њима одговара 6 подскупова скупа $\mathbb{N}_3=\{1,2,3\}$ који не садрже 2 елемента чија је разлика 2:

пермутације	12345,	12543,	14325,	14523,	32145,	34125
транспозиције	ε,	$\tau_{3,5}$,	$\tau_{2,4}$,	$\tau_{2,4} \circ \tau_{3,5}$,	$\tau_{1,3}$,	$\tau_{1,3} \circ \tau_{2,4}$
подскупови	$\emptyset$,	$\{3\}$,	$\{2\}$,	$\{2,3\}$,	$\{1\}$,	$\{1,2\}$.

Ово својство смо генерализовали у Теореми 3.5.4.

Бергум и Хогат (енг. Gerald E. Bergum, Verner E. Hoggat) су у [8] пребројавали скупове који не садрже 2 елемента чија је разлика 2, али је Владимир Балтић први који је успоставио везу са другим комбинаторним објектима. ■

У наредном примеру ћемо генералисати Теорему 4.2.1 на кружни случај, који је компликованији. Слично, одређиваћемо број пермутација скупа $\mathbb{N}_n$ које задовољавају услов да је $p(i)-i \equiv 0,1,\ldots,r \pmod{n}$. Ова промена услова се одражава у томе да сада $p(n)$ може узети још неке вредности са почетка, тј. може бити и $p(n) \in \{1,2,\ldots r\}$, може бити и $p(n-1) \in \{1,2,\ldots r-1\}$ и тако даље, до $p(n-r+1)=1$.

Стога су нам потребне додатне координате, које контролишу које су од првих r позиција слободне (њих ће попунити каснији елементи). Њих ћемо у Табели 4.3 представити црвеном бојом и подвучено.

У наредном примеру одредићемо колико има пермутација са ограничењима које задовољавају услов $p(i)-i \equiv 0,1,2 \pmod{n}$, за све $i \in \mathbb{N}_n$. Овај проблем је познат. У [39][Пример 4.7.7] је дато решење помоћу Методе матрица преноса. Ми ћемо овде дати решење тако што ћемо конструисати одговарајући аутомат M.

ПРИМЕР 4.2.3. Колико има пермутација за које важи $p(i)-i \equiv 0,1,2 \pmod{n}$, за $i \in \mathbb{N}_n$?

Решење. Како је најмањи елемент у $I=\{0,1,2\}$ једнак 0 имамо да је $k=0$, а како је највећи 2 имамо да је $r=2$.

Алфабет (коначан скуп улазних симбола) U у овом случају је: $U=\{\mathrm{I},\mathrm{II},0,1,2\}$. Улаз I (односно II) проузрокује попуњавање прве (друге) додатне координате, што се може десити само при крају конструисања пермутације:

- II, који одговара $p(h)=2$, може доћи само у последњем кораку (тј. кад је $h=n$);
- I, који одговара $p(h)=1$, може доћи или у последњем ($h=n$) или у претпоследњем кораку ($h=n-1$).

Приметимо да улаз II може доћи само након I или ситуације где је у првом кораку попуњена прва координата, тј. $p(1)=1$.

Стања a, b, c и d су почетна стања при конструкцији аутомата (a је почетно стање, док су стања b, c и d након првог корака конструкције пермутације). Сва остала стања коначног аутомата имају тачно $k=2$ попуњених координата (на њима су уписане 1), а остале су празне (на њима су 0). Последња координата је увек празна (јер на ту позицију у претходном кораку нисмо никако могли да стигнемо). Скуп стања коначног аутомата је $S=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,Q\}$. У наредној табели даћемо везу између стања и попуњених и празних координата:

стања	a	b	c	d	e	f	g
координате	00 000	10 000	01 100	00 010	11 000	10 100	10 010

стања	h	i	j	k^1	l^1	m^0	Q
координате	01 100	01 010	00 110	11 000	10 100	11 000	

Табела 4.3. Скуп стања S.

Стања e, k^1 и m^0 имају потпуно исте координате (исте позиције су попуњене, односно празне). Ево у чему се она разликују. Није исто да ли смо неку од додатне 2 координате попунили раније или у последњим корацима. Ако смо имали улаз II конструкција пермутације се завршава у том кораку, док за улаз I она се мора завршити у том или наредном кораку. Стога m^0 означава да се та пермутација завршава у том кораку (тј. у 0 корака), k^1 означава да се пермутација може завршити у том или наредном кораку (тј. у највише 1 корака), док стање e, које нема горњи индекс, нема таквих ограничења.

Слична ситуација је са стањима f и l^1. Стање f смо добили тако што је у првом кораку попуњена прва координата, тј. $p(1) = 1$, док стање l^1 добијамо улазом I и конструкција пермутације се мора завршити у највише 1 корака.

И стања c и h имају исте координате (при оптимизацији аутомата она се могу спојити у једно стање, али смо их раздвојили да нагласимо разлику између стања c које настаје након првог корака и стања h до ког долазимо касније).

Скуп прихватајућих стања је $Y = \{a, b, e, k^1, m^0\}$. У њему имамо стања код којих је 0, 1 или 2 координате попуњене (почетно стање a узимамо за прихватајуће стање, јер често кажемо да постоји 1 пермутација дужине 0; стање b је прихватајуће и одговара идентичкој пермутацији у случају $n = 1$; стања e, k^1 и m^0 имају 2 координате попуњене, а раније смо објаснили у чему се разликују).

Почетно стање $s^* = a$.

Функција прелаза $F(s, x)$ (за $x \in U = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, 0, 1, 2\}$ и $s \in S$) је дата у Табели 4.4.

	стања S													
улази x	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	Q
I	Q	Q	k	l	Q	Q	Q	k	Q	l	Q	Q	Q	Q
II	Q	Q	Q	Q	Q	m	Q	Q	Q	Q	Q	m	Q	Q
0	b	e	Q	h	e	Q	f	Q	h	Q	m	Q	Q	Q
1	c	f	h	Q	Q	f	Q	h	Q	Q	Q	Q	Q	Q
2	d	g	i	j	Q	g	Q	i	Q	j	Q	Q	Q	Q

Табела 4.4. Функција прелаза $F(s, x)$.

На основу Табеле 4.4 добијамо следећи систем рекурентних једначина:

$$
\begin{aligned}
a(n+1) &= b(n) + c(n) + d(n),\\
b(n+1) &= e(n) + f(n) + g(n),\\
c(n+1) &= k(n) + h(n) + i(n),\\
d(n+1) &= l(n) + h(n) + j(n),\\
e(n+1) &= e(n),\\
f(n+1) &= m(n) + f(n) + g(n),\\
g(n+1) &= f(n),\\
h(n+1) &= k(n) + h(n) + i(n),\\
i(n+1) &= h(n),\\
j(n+1) &= l(n) + j(n),\\
k(n+1) &= m(n),\\
l(n+1) &= m(n),\\
m(n+1) &= \begin{cases} 1, & n = 0\\ 0, & n > 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

са почетним условима:
$a(0) = b(0) = e(0) = k(0) = m(0) = 1$ и $c(0) = d(0) = f(0) = g(0) = h(0) = i(0) = j(0) = l(0) = 0$.

Сада враћањем у назад добијамо да је

$$k(n) = l(n) = m(n) = 0, \qquad \text{за } n \geqslant 2$$

и $k(0) = k(1) = 1$, $l(0) = 0$, $l(1) = 1$, $m(0) = 1$, $m(1) = 0$.

Даље, налазимо да је $j(n) = 1$ за $j \geqslant 1$ и $j(0) = 0$. Затим, имамо да је

$$h(n) = F_{n+1}, \qquad i(n) = F_n, \qquad f(n) = F_n, \qquad g(n) = F_{n-1}, \qquad e(n) = 10.$$

Коначно, када то све заменимо у прве 4 рекурентне једначнине добијамо

$$d(n) = F_n + 1, \qquad c(n) = F_{n+1}, \qquad b(n) = F_n + 1, \qquad a(n) = 2 + F_{n-1} + F_{n+1}.$$

На основу Теореме 1.6.6 имамо да је Лукасов број $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, па долазимо до тога да је општи члан овог низа једнак:

$$a(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1\\ 2, & n = 2\\ 2 + L_n, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

■

Напомена. На сличан начин, само доста мукотрпнијим рачуном, може се решити проблем за $k = 3$. Решење у овом случају је дато са

$$a(n) = 2 + 6T_n + 8T_{n-1} + 2T_{n-2}, \qquad \text{за } n \geqslant 3$$

(овде T_n означава n-ти Трибоначијев број – видети Дефиницију 1.6.2).

ПРИМЕР 4.2.4. Одредити колико има парних (непарних) пермутација које задовољавају услов $-1 \leqslant p(i) - i \leqslant 1$, за све $i \in \mathbb{N}_n$.

Решење. Како је најмањи елемент у $I = \{-1, 0, 1\}$ једнак -1 имамо да је $k = 1$, а како је највећи 1 имамо да је $r = 1$. Стога ће стања аутомата имати $k + r + 2 = 4$ координате, од чега последња „води рачуна“ о парности пермутације (она је П или Н, док су остале 0 или 1).

Алфабет (коначан скуп улазних симбола) U у овом случају је: $U = I = \{-1, 0, 1\}$.

Стања коначног аутомата имају тачно $k = 1$ попуњених координата (на њима су уписане 1), а остале су празне (на њима су 0). Претпоследња координата је увек празна (јер на ту позицију у претходном кораку нисмо никако могли да стигнемо).

Скуп стања коначног аутомата је $S = \{a, b, c, d, Q\}$. У наредној табели даћемо везу између стања и попуњених и празних координата (то су прве 3 координате):

стања	a	b	c	d	Q
прве 3 координате	100	100	010	010	
последња координата	П	Н	П	Н	

Табела 4.5. Скуп стања S.

У овом случају постоји само једно прихватајуће стање a.

Почетно стање s^* је исто као и једино прихватајуће стање, тј. $s^* = a$.

Функција прелаза $F(s, x)$ (за $x \in I = \{-1, 0, 1\}$ и $s \in S$) је дата у Табели 4.6.

	стања S				
улази x	a	b	c	d	Q
-1	Q	Q	b	a	Q
0	a	b	Q	Q	Q
1	c	d	Q	Q	Q

Табела 4.6. Функција прелаза $F(s, x)$.

Илуструјмо функцију прелаза на 2 конкретна примера стања.

Прво, посматрајмо стање аутомата a, које има координате 100П.

Улазни симбол -1 проузрокује промену стања аутомата са a на Q, јер је прва координата у 100П попуњена (тј. 1).

Улазни симбол 0 проузрокује промену стања аутомата са a на a: од стања $a = 100П$ добијамо 110 када попунимо тренутну позицију (то је 2. координата) и затим када уклонимо прву координату и на крај допишемо 0 добијамо 100; како се парност пермутације није променила (јер додати елемент не чини инверзију ни са једним претходно одређеним), последња координата остаје П, па смо прешли у $a = 100П$.

Улазни симбол 1 проузрокује промену стања аутомата са a на c: од стања $c = 100П$ добијамо 101 када попунимо позицију која је 1 место десно од тренутне (то је 3. координата) и затим када уклонимо прву координату и на крај допишемо 0 добијамо 010, а парност се опет не мења, па смо прешли у стање $c = 010П$.

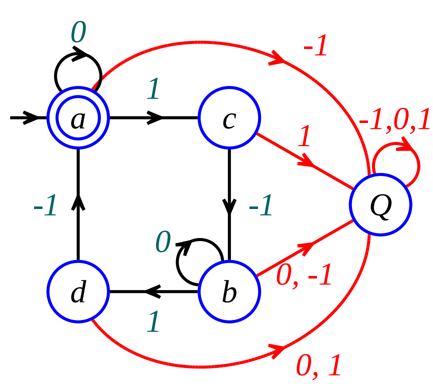
Мало другачија је ситуација са стањем c, које има координате 010П.

Код овог стања прва координата је празна (тј. 0) и морамо да је попунимо, па имамо прелазе $F(c, -1) = b,\ F(c, 0) = F(c, 1) = Q$.

Објаснимо мало детаљније како смо добили да је $F(c, -1) = b$.

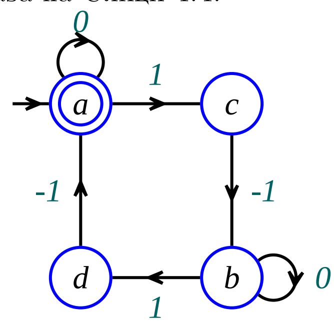
Улазни симбол -1 узрокује да од стања $c = 010П$ добијамо 110 када попунимо позицију која је 1 место лево од тренутне (то је 1. координата) и затим када уклонимо прву координату и на крај допишемо 0 добијамо 100; парност пермутације сада се променила (јер додати елемент $h-1$ чини инверзију са једним претходно уписаним h и то је једина инверзија коју проузрокује уписивање новог елемента), па се последња координата мења од П у Н, па смо прешли у $b = 100Н$.

Аутомат M је приказан својим дијаграмом прелаза на Слици 4.3.



Слика 4.3. Дијаграм прелаза аутомата M.

Код аутомата M имамо понор стање Q, па можемо изоставити гране које воде у Q, као и само стање Q. На тај начин дошли смо до новог аутомата M_2 који је недетерминистички он је приказан својим дијаграмом прелаза на Слици 4.4.



Слика 4.4. Дијаграм прелаза недетериминистичког аутомата M_2.

Слично као и у Примеру 4.2.2, означимо број шетњи дужине n од чвора v до чвора a са $v(n)$. Без умањења општости, можемо узети да путева дужине 0 има $a(0) = 1$ и $b(0) = c(0) = d(0) = 0$.

Број парних пермутација са ограничењима скупа $\mathbb{N}_n$ које задовољавају $p(i) - i \in \{-1, 0, 1\}$ је једнак $a(n)$. Приметимо да свака затворена шетња има саставне делове

$$a - a, \qquad a - c - b, \qquad b - b, \qquad \text{и/или} \qquad b - d - a.$$

Ова чињеница успоставља бијекцију између парних пермутација које задовољавају ограничење $p(i) - i \in \{-1, 0, 1\}$, за $i \in \mathbb{N}_n$ и композиција броја n на сабирке из скупа $\{1, 2\}$ које имају паран број 2.

Нпр. ако је $n = 5$ имамо 8 пермутација са ограничењем $-1 \leqslant p(i) - i \leqslant 1$: 12345, 12354, 12435, 13245, 13254, 21345, 21354 21435, али само $a(5) = 4$ од њих је парно и њима одговарају 4 композиције броја $n = 5$ на сабирке из скупа $\{1, 2\}$ које имају паран број 2:

пермутације	12345,	13254,	21354,	21435
композиције	$1+1+1+1+1$,	$1+2+2$,	$2+1+2$,	$2+2+1$.

На основу дијаграма прелаза (или функција прелаза из Табеле 4.6) аутомата M или M_2 можемо добити систем рекурентних једначина (ми ћемо посматрати M_2 јер има мање једначина). На сличан начин као у Примеру 4.2.2, можемо добити комплетан систем рекурентних једначина:

$$a(n+1) = a(n) + c(n), \tag{4.6}$$

$$b(n+1) = b(n) + d(n), \tag{4.7}$$

$$c(n+1) = b(n), \tag{4.8}$$

$$d(n+1) = a(n), \tag{4.9}$$

са почетним условима $a(0) = 1$, $b(0) = 0$, $c(0) = 0$ и $d(0) = 0$.

Из једначине (4.8) добијамо рекурентну везу $c(n) = b(n-1)$. Када то ставимо у једначину (4.6) налазимо $b(n-1) = a(n+1) - a(n)$. Даље, из једначине (4.9) следи $d(n) = a(n-1)$. Када последња 2 закључка уврстимо у једначину (4.7) добијамо хомогену линеарну рекурентну једначину са константним коефицијентима:

$$a(n+1) = 2a(n) - a(n-1) + a(n-3),$$

са почетним условима $a(0) = a(1) = a(2) = a(3) = 1$.

Њена карактеристична једначина је $t^4 = 2t^3 - t^2 + 1$. Она се може трансформисати у

$$(t^2 - t - 1) \cdot (t^2 - t + 1) = 0,$$

одакле добијамо решења: $t_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $t_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ и $t_4 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Опште решење је облика $a(n) = C_1 \cdot t_1^n + C_2 \cdot t_2^n + C_3 \cdot t_3^n + C_4 \cdot t_4^n$. Из почетних услова одређујемо вредности константи: $C_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{20}$, $C_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{20}$, $C_3 = \frac{3-i\sqrt{3}}{12}$ и $C_4 = \frac{3+i\sqrt{3}}{12}$.
Са мало сређивања добијамо да је општи члан овог низа једнак:

$$a(n) = \frac{1}{2}\left(F_{n+1} + x(n)\right),$$

где је F_{n+1} Фибоначијев број, док је низ $x(n)$ дат са $x(n) = \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$.

Низ $x(n)$ има мноштво различитих интерпретација:

- Овај низ је задат рекурентном релацијом $x(n) = x(n-1) - x(n-2)$, уз почетне услове $x(0) = x(1) = 1$.
- То је периодичан низ са периодом 6:

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n \equiv_6 0, 1 \\ 0, & n \equiv_6 2, 5 \\ -1, & n \equiv_6 3, 4. \end{cases}$$

- Може бити дат и формулом $x(n) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{(n+1)\pi}{3}$.
- $x(n) = U(n, \frac{1}{2})$, где је $U(n, x)$ Чебишевљев полином.
- $x(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{k}{n-k}(-1)^{n-k}$.
- $x(n) = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}(-1)^k$.
- $x(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+k+1}{2k+1}(-1)^k$.
- $x(n) = \prod\limits_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (1 - 4\cos^2\frac{k\pi}{n+1})$.
- То је низ A010892 у *Енциклопедији целобројних низова* [43].

Вратимо се сад на низ $a(n)$. Првих неколико чланова низа $a(n)$ је дато у Табели 4.7. Ови бројеви чине низ A005252 у *Енциклопедији целобројних низова* [43].

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$a(n)$	1	1	1	1	2	4	7	11	17	27	44	72	117	189	305	493	798
$\Delta(n)$	0	0	0	1	2	3	4	6	10	17	28	45	72	116	188	305	494
$\Delta_2(n)$	0	0	1	1	1	1	2	4	7	11	17	27	44	72	117	189	305

Табела 4.7. Низ $a(n)$, тј. A005252 са својим првим и другим разликама – $\Delta(n)$ и $\Delta_2(n)$.

И овај низ има мноштво занимљивих комбинаторних особина:

- Прве разлике низа дефинишемо као $\Delta(n) = a(n+1) - a(n)$, док су друге разлике прве разлике првих разлика $\Delta_2(n) = \Delta(n+1) - \Delta(n)$. Низ других разлика представља полазни низ померен за 2 (што се лепо види у Табели 4.7, а формално се може показати Принципом математичке индукције).
- $a(n+1)$ је број низова битова дужине n који не садрже изоловану 0, као и 00 (могу низове од 3 или више нула).

Илуструјмо ову ситуацију за неке мале вредности. За $n = 5$ имамо $a(6) = 7$ низова: 00000, 00001, 00011, 10000, 10001, 11000 и 11111, а за $n = 4$ имамо $a(5) = 4$ низа: 0000, 0001, 1000 и 1111 (ови низови одговарају распореду дечака и девојчица са Слике 4.5, при чему свакој 1 одговара дечак, а 0 девојчица – то је следећа комбинаторна интерпретација).

Означимо број овакви низова са $e(n)$. Покажимо да ових низова има баш $a(n+1)$, тј. да важи $e(n) = a(n+1)$.

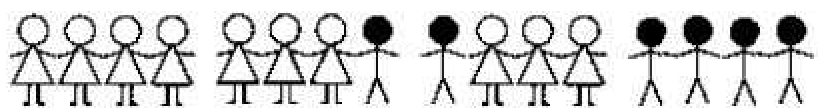
Одредимо колико има оваквих низова дужине $n+1$. Ако ти низови почињу са 1 има их $e(n)$. Ако почињу са 0 има их $e(n) - e(n-1) + e(n-3)$ – од низова који почињу са 0 и након тога немају 1 или 2 узастопне 0 $\big($њих има $e(n)\big)$ морамо одузети низове који почињу са 01 и након тога немају 1 или 2 узастопне 0 $\big($њих има $e(n-1)\big)$, али морамо додати и низове који почињу са 0001 (јер у низовима дужине n нема оних који почињу са 001) и након тога немају 1 или 2 узастопне 0 $\big($њих има $e(n-3)\big)$. Тако смо добили рекурентну једначину

$$e(n+1) = e(n) + e(n) - e(n-1) + e(n-3) = 2e(n) - e(n-1) + e(n-3).$$

Почетни услови су $e(1) = 1$ (1), $e(2) = 1$ (11), $e(3) = 2$ (000 и 111), $e(4) = 4$ (0000, 0001, 1000 и 1111). Како $e(n)$ задовољава исту рекурентну једначину као и $a(n)$, а почетни услови су померени за 1: $e(1) = a(2) = 1$, $e(2) = a(3) = 1$, $e(3) = a(4) = 2$, $e(4) = a(5) = 4$, добијамо да важи $e(n) = a(n+1)$.

До овог резултата смо могли да дођемо и помоћу коначног аутомата са Слике 4.6.

- Овај низ Гај назива twopins sequence. Конвеј и Гај (енг. John H. Conway, Richard K. Guy) у [14][стр. 205] дају још једну комбинаторну интерпретацију – $a(n+1)$ је број начина да се n деце распореди у врсту тако да девојчице иду у групама од бар по 3 заједно. На Слици 4.5 су приказана сва $a(5) = 4$ распореда четворо деце у врсту.

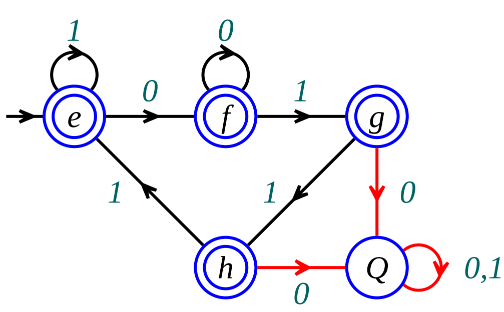


Слика 4.5: $a(5) = 4$ распореда 4 деце у врсту, са девојчицама у групама од бар 3.

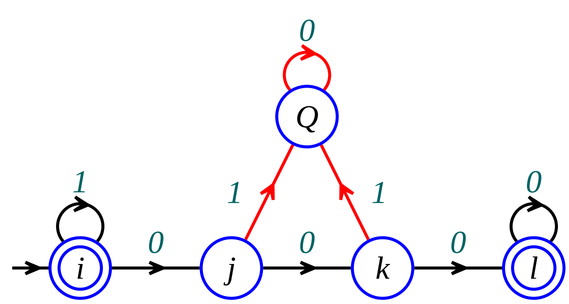
- $a(n+3)$ је број низова битова дужине n који избегавају и 010 и 0110 $\big($означимо број таквих низова са $i(n)\big)$.

  Нпр. за $n = 3$ отпада само 010, па имамо $i(3) = a(6) = 7 = 2^3 - 1$ низова, док за $n = 4$ отпадају 0010, 0100, 0101, 0110, 1010, па имамо $i(4) = a(7) = 11 = 2^4 - 5$ низова.

  До резултата да је $i(n) = a(n+3)$ можемо доћи помоћу коначног аутомата са Слике 4.7.



Слика 4.6: Аутомат за низ $e(n)$.



Слика 4.7: Аутомат за низ $i(n)$.

- $a(n) = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \binom{n-2k}{2k}$.

  Ову једнакост са биномним коефицијентима, најлакше показујемо ако имамо на уму интерпретацију са парним пермутацијама са ограничењем $-1 \leqslant p(i) - i \leqslant 1$. Те пермутације имају само инверзије облика $(h+1, h)$, тј. само неки узастопни елементи могу заменити места.

Већ смо видели да сваком низу од $n-2k$ јединица и двојки (то је баш композиција на ове сабирке) који има тачно $2k$ двојки узајамно једнозначно одговара пермутација са ограничењем $-1 \leqslant p(i)-i \leqslant 1$ које имају тачно $2k$ инверзија (зато су то парне пермутације): ако имамо 2 на позицији s и пре ње t јединица, онда она одређује инверзију $(s+t+1, s+t)$.

Илуструјмо то на примеру $a(5)=4$:

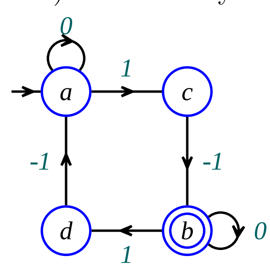
пермутације	12345,	13254,	21354,	21435
композиције	$1+1+1+1+1$,	$1+2+2$,	$2+1+2$,	$2+2+1$
низови	11111,	122,	212,	221,

овде нпр. 212 означава да су прва 2 елемента у инверзији, затим иде фиксна тачка, па на крају још једна инверзија, тј. баш добијамо пермутацију 21354.

Стога таквих пермутација има $\binom{n-2k}{2k}$.

На крају овог примера осврнућемо се на то како од аутомата M_2 са Слике 4.4 који је препознавао парне пермутације које задовољавају услов $-1 \leqslant p(i)-i \leqslant 1$, можемо добити аутомат M_1 који ће препознавати непарне пермутације које задовољавају услов $-1 \leqslant p(i)-i \leqslant 1$.

Једина разлика је у томе што једино прихватајуће стање више није a (које има координате 100П), него b (које има координате 100Н). Коначни аутомат M_1 је представљен на Слици 4.8.



Слика 4.8. Дијаграм прелаза недетериминистичког аутомата M_1.

Аналогно претходном разматрању добијамо да је општи члан овог низа једнак:

$$b(n) = \frac{1}{2}\left(F_{n+1} - x(n)\right).$$

До овог закључка можемо доћи и на основу чињенице да са $a(n)+b(n)$ бројимо све (и парне и непарне) пермутације које задовољавају услов $-1 \leqslant p(i)-i \leqslant 1$, а на основу Примера 3.5.1 и Теореме **??** имамо да је $a(n)+b(n) = F_{n+1}$.

У Табели 4.8 је дато првих неколико чланова низова $a(n)$, $b(n)$ и F_{n+1}. Бројеви $b(n)$ представљају низ A024490 у *Енциклопедији целобројних низова* [43].

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$a(n)$	1	1	1	1	2	4	7	11	17	27	44	72	117	189	305	493	798
$b(n)$	0	0	1	2	3	4	6	10	17	28	45	72	116	188	305	494	799
F_{n+1}	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597

Табела 4.8. Веза низова $a(n)$, $b(n)$ и F_{n+1}.

Ако упоредимо Табелу 4.7 и Табелу 4.8, видимо да је низ $b(n)$ једнак првим разликама низа $a(n)$, тј. $b(n) = \Delta_1(n+1)$.

Низ $b(n)$ пребројава композиције броја n на сабирке из скупа $\{1,2\}$ које имају непаран број сабирака једнаких 2. Од оних 8 пермутација са ограничењем $-1 \leqslant p(i)-i \leqslant 1$: 12345, 12354, 12435, 13245, 13254, 21345, 21354 21435, само је $b(5)=4$ од њих непарно и њима одговарају 4 композиције броја $n=5$ на сабирке из скупа $\{1,2\}$ које имају непаран број 2:

пермутације	12354,	12435,	13245,	21345
композиције	$1+1+1+2$,	$1+1+2+1$,	$1+2+1+1$,	$2+1+1+1$.

Аналогним расуђивањем као и малопре добијамо да је $b(n) = \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor} \binom{n-2k-1}{2k+1}$. ■

ПРИМЕР 4.2.5. Одредити колико има парних (непарних) пермутација које задовољавају услов $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$, за све $i \in \mathbb{N}_n$.

Решење. Са овим пермутацијама (без додатног услова парности пермутације) смо се срели у Примеру 4.2.2. Стога ће све бити слично као ту, само сва стања имају још једну додатну координату која води рачуна о парности.

Због $I = \{-2, 0, 2\}$ имамо да је $k = 2$ и $r = 2$, па ће стања аутомата имати $k + r + 1 = 5$ координата које су 0 или 1 и шесту координату која је П или Н.

Алфабет је: $U = I = \{-2, 0, 2\}$.

Стања коначног аутомата имају тачно $k = 2$ попуњених координата (на њима су уписане 1), а остале су празне (на њима су 0). Претпоследња координата је увек празна. Последња координата је П или Н. Скуп стања коначног аутомата је $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, Q\}$. У наредној табели даћемо везу између стања и попуњених и празних координата:

стања	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	Q
првих 5 коорд.	11000	11000	10100	10100	10010	10010	01100	01100	01010	01010	00110	00110	
последња коорд.	П	Н	П	Н	П	Н	П	Н	П	Н	П	Н	

Табела 4.9. Скуп стања S.

У овом случају постоји само једно прихватајуће стање a – код њега је првих k координата попуњено (1), остале су празне (0), док је последња П.

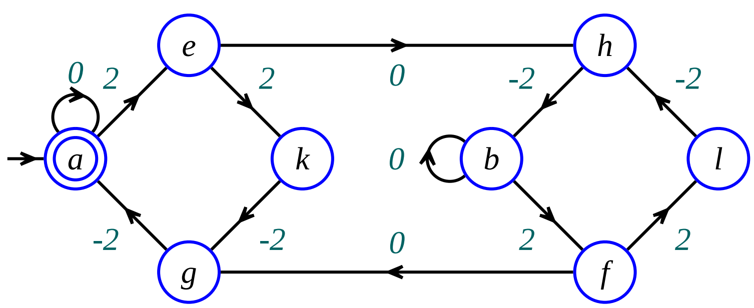
Почетно стање s^* је исто као и једино прихватајуће стање.

Функција прелаза $F(s, x)$ (за $x \in I = \{-2, 0, 2\}$ и $s \in S$) је дата у Табели 4.10.

	стања S												
улази x	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	Q
-2	Q	Q	Q	Q	Q	Q	a	b	c	d	g	h	Q
0	a	b	Q	Q	h	g	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q
2	e	f	i	j	k	l	Q	Q	Q	Q	Q	Q	Q

Табела 4.10. Функција прелаза $F(s, x)$.

Овде имамо недостижива стања c, d, i и j и њих можемо избацити, као и понор стање Q. На тај начин долазимо до недетерминистичког аутомата M_2 који је приказан на Слици 4.9.



Слика 4.9. Дијаграм прелаза недетериминистичког аутомата M_2.

На основу Табеле 4.10(или са Слике 4.9) долазимо до система рекурентних једначина:

$$a(n+1) = a(n) + e(n),$$

$$b(n+1) = b(n) + f(n),$$

$$c(n+1) = i(n),$$

$$d(n+1) = j(n),$$

$$e(n+1) = h(n) + k(n),$$

$$f(n+1) = g(n) + l(n),$$

$$g(n+1) = a(n),$$

$$h(n+1) = b(n),$$
$$i(n+1) = c(n),$$
$$j(n+1) = d(n),$$
$$k(n+1) = g(n),$$
$$l(n+1) = h(n),$$

са почетним условима:
$a(0) = 1$ и $b(0) = c(0) = d(0) = e(0) = f(0) = g(0) = h(0) = i(0) = j(0) = k(0) = l(0) = 0$.

Овај систем се своди на хомогену линеарну рекурентну једначину са константним коефицијентима:

$$a(n+1) = 2a(n) - a(n-1) + 2a(n-3) - 2a(n-4) + a(n-5) - a(n-7),$$

са почетним условима $a(0) = a(1) = a(2) = a(3) = 1$, $a(4) = 2$, $a(5) = 3$, $a(6) = 5$, $a(7) = 8$.

Њена карактеристична једначина је $t^8 = 2t^7 - t^6 + 2t^4 - 2t^3 + t^2 - 1$. Она се може трансформисати у

$$(t^2 - t - 1) \cdot (t^2 - t + 1) \cdot (t - 1) \cdot (t + 1) \cdot (t^2 + 1) = 0,$$

одакле добијамо решења: $t_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $t_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ и $t_4 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $t_5 = 1$, $t_6 = -1$, $t_7 = i$ и $t_8 = -i$.

Уврштавањем почетних услова и са мало сређивања добијамо да је општи члан овог низа једнак:

$$a(n) = \frac{1}{10}\left(L_{n+2} + y(n) + z(n)\right),$$

где представља L_{n+2} Лукасов број, док су низови $y(n)$ и $z(n)$ дати са $y(n) = 2\cos\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}$ и $z(n) = 5 \cdot \left\lfloor \dfrac{\{\frac{n+3}{6}\}}{3} \right\rfloor$ (овде $\lfloor x \rfloor$ означава цео део броја x, тј. највећи цео број који је мањи од или једнак са x, док је $\{x\}$ разломљени део броја x, тј. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$). Прегледнији приказ ова 2 низа имамо ако посматрамо које остатке дају при дељењу са 4, односно са 6:

$$y(n) = \begin{cases} 2, & n \equiv_4 0 \\ 1, & n \equiv_4 1 \\ -2, & n \equiv_4 2 \\ -1, & n \equiv_4 3 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad z(n) = \begin{cases} 5, & n \equiv_6 0,1,2 \\ 0, & n \equiv_6 3,4,5. \end{cases}$$

Решавањем рекурентне једначине добили смо да је $\frac{1}{10}z(n) = \frac{1}{6}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}(-1)^n$, али смо након сређивања свели на горњи облик који је једноставнији.

Првих неколико чланова низа $a(n)$ је дато у Табели 4.11. Ови бројеви чине низ A242073 у *Енциклопедији целобројних низова* [43].

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$a(n)$	1	1	1	1	2	3	5	8	13	20	32	52	85	137	221	357	578

Табела 4.11. Низ $a(n)$, тј. A242073.

На основу аутомата M_2 (са Слике 4.9) видимо да се све затворене шетње са почетком и крајем у a састоје од следећих шетњи (дужина 1, 3 и 4):

a–a, b–b (дуж. 1), a–e–h–b, b–f–g–a (дуж. 3), a–e–k–g–a, b–f–l–h–b (дуж. 4).

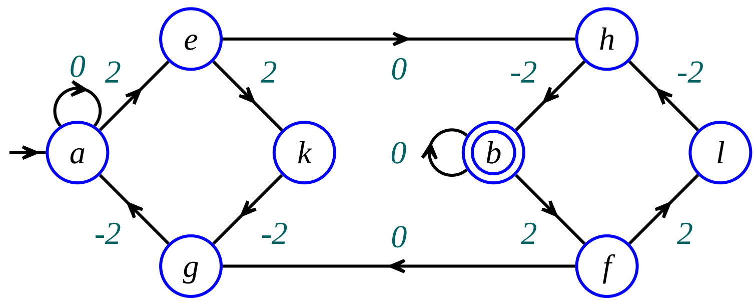
Приметимо да након сваке шетње $a - e - h - b$ дужине 3 мора да следи и шетња $b - f - g - a$ дужине 3 (не мора одмах, јер ту могу доћи шетње $b - b$ дужине 1 и $b - f - l - h - b$ дужине 4). На основу тога следи да можемо успоставити бијекцију између парних пермутација које задовољавају услов $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$, за $i \in \mathbb{N}_n$ и композиција броја n на сабирке из скупа $\{1, 3, 4\}$ које имају паран број 3.

Нпр. ако је $n = 7$ имамо $a(7) = 8$ парних пермутација са ограничењем $-1 \leqslant p(i) - i \leqslant 1$ и њима одговара 8 композиција броја $n = 7$ на сабирке из скупа $\{1, 3, 4\}$ које имају паран број 3:

пермутације	1234567,	1236745,	1256347,	1432765,
композиције	$1+1+1+1+1+1+1$,	$1+1+1+4$,	$1+1+4+1$,	$1+3+3$,

пермутације	1452367,	3214765,	3216547,	3412567
композиције	$1+4+1+1$,	$3+1+3$,	$3+3+1$,	$4+1+1+1$.

Ако у аутомату M_2 променимо да је једино прихватајуће стање b (које има координате 11000H), добијамо недетерминистички аутомат M_1 који препознаје непарне пермутације које задовољавају услов $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$, за све $i \in \mathbb{N}_n$. Аутомат M_1 је приказан на Слици 4.10.



Слика 4.10. Дијаграм прелаза недетериминистичког аутомата M_1.

На основу овог аутомата следи да можемо успоставити бијекцију између непарних пермутација које задовољавају услов $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$, за $i \in \mathbb{N}_n$ и композиција броја n на сабирке из скупа $\{1, 3, 4\}$ које имају непаран број 3.

Нпр. ако је $n = 7$ имамо $b(7) = 7$ непарних пермутација са ограничењем $-1 \leqslant p(i) - i \leqslant 1$ и њима одговара 7 композиција броја $n = 7$ на сабирке из скупа $\{1, 3, 4\}$ које имају непаран број 3:

пермутације	1234765,	1236547,	1254367,
композиције	$1+1+1+1+3$,	$1+1+1+3+1$,	$1+1+3+1+1$,

пермутације	1432567,	3214567,	3216745,	3412765
композиције	$1+3+1+1+1$,	$3+1+1+1+1$,	$3+4$,	$4+3$.

Сличним резоном као за $a(n)$ можемо добити и формулу за $b(n)$, што је број непарних пермутација које задовољавају услов $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$, за $i \in \mathbb{N}_n$:

$$b(n) = \frac{1}{10}\left(L_{n+1} + y(n) - z(n)\right).$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$b(n)$	0	0	0	1	2	3	4	7	12	20	32	52	84	136	220	357	578

Табела 4.12. Низ $b(n)$, тј. A242074.

Првих неколико чланова низа $b(n)$ је дато у Табели 4.12. Ови бројеви чине низ A242074 у *Енциклопедији целобројних низова* [43]. ■

ПРИМЕР 4.2.6. Одредити колико има n-варијација скупа $\mathbb{N}_{n+2}$ које задовољавају ограничење $p(i) - i \in \{-1, 2\}$, за све $i \in \mathbb{N}_n$.

Решење. Опет ћемо конструисати одговарајући аутомат M. У овом случају имамо $k = 1$, $r = 2$ и $t = 2$ (због $\mathbb{N}_{n+2}$), па ће стања имати $k+r+1 = 4$ координате од којих су $k = 2$ једнаке 1; прихватајућа су сва стања која имају 0 од $k+t+1 = 4$ до $k+r+1 = 4$ координате, тј. на 4. координати (а то су сва стања из S).

Алфабет је $U = I = -1, 2$.

Скуп стања коначног аутомата је $S = \{a, b, c, d, e, f, g, Q\}$. У наредној табели даћемо везу између стања и попуњених и празних координата:

стања	a	b	c	d	e	f	g	Q
координате	1000	0100	0010	1010	1100	0110	1110	

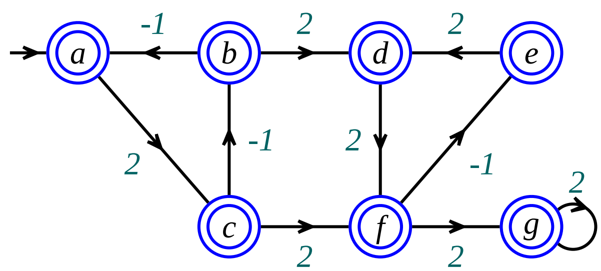
Табела 4.13. Скуп стања S.

Почетно стање је a. Сва стања изузев Q су прихватајућа стања.
Функција прелаза $F(s, x)$ (за $x \in U = \{-1, 2\}$ и $s \in S$) је дата у Табели 4.14.

	стања S							
улази x	a	b	c	d	e	f	g	Q
-1	Q	a	b	Q	Q	e	Q	Q
2	c	d	f	f	d	g	g	Q

Табела 4.14. Функција прелаза $F(s, x)$.

Коначни аутомат M је приказан на Слици 4.11.



Слика 4.11. Дијаграм прелаза коначног аутомата M.

На основу Табеле 4.14 (или са Слике 4.11) долазимо до система рекурентних једначина:

$$\begin{aligned}
a(n+1) &= c(n),\\
b(n+1) &= a(n) + d(n),\\
c(n+1) &= b(n) + f(n),\\
d(n+1) &= f(n),\\
e(n+1) &= d(n),\\
f(n+1) &= e(n) + g(n),\\
g(n+1) &= g(n),
\end{aligned}$$

са почетним условима:
$a(0) = b(0) = c(0) = d(0) = e(0) = f(0) = g(0) = 1.$

Из последње 4 једначине добијамо да је

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n+5}{3} \right\rfloor$$

(овде $\lfloor x \rfloor$ означава цео део броја x, тј. највећи цео број који је мањи од или једнак са x).

Даље, из прве и треће једначине добијамо рекурентну везу $a(n+2) = b(n) + f(n)$, а из друге $b(n+2) = a(n+1) + f(n)$, одакле добијамо $a(n+3) = a(n) + f(n+1) + f(n-1)$.

На основу тога добијамо да је општи члан низа:

$$a(n) = \begin{cases} k^2, & n = 3k-3\\ k^2, & n = 3k-2\\ k \cdot (k+1), & n = 3k-1. \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$b(n)$	1	1	2	4	4	6	9	9	12	16	16	20	25	25	30	36	36	42

Табела 4.15. Низ $a(n)$, тј. померени A008133.

Првих неколико чланова низа $a(n)$ је дато у Табели 4.15. Ови бројеви представљају померен низ A008133 у *Енциклопедији целобројних низова* [43] $\big(a(n) = \text{A008133}(n+3)$, тј. померен је за 3 члана у лево$\big)$. ■

ПРИМЕР 4.2.7. Одредити колико има n-варијација скупа $\mathbb{N}_{n+1}$ које задовољавају ограничење $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$, за све $i \in \mathbb{N}_n$.

Решење. У овом случају имамо $k = 2$, $r = 2$ и $t = 1$ (због $\mathbb{N}_{n+1}$). Опет ћемо конструисати одговарајући аутомат M.

Алфабет је $U = I = -2, 0, 2$.

Скуп стања коначног аутомата је $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, Q\}$. У наредној табели даћемо везу између стања и попуњених и празних координата:

стања	a	b	c	d	e	f	g	h	i	Q
координате	11000	10010	01100	00110	11010	01110	11100	10110	11110	

Табела 4.16. Скуп стања S.

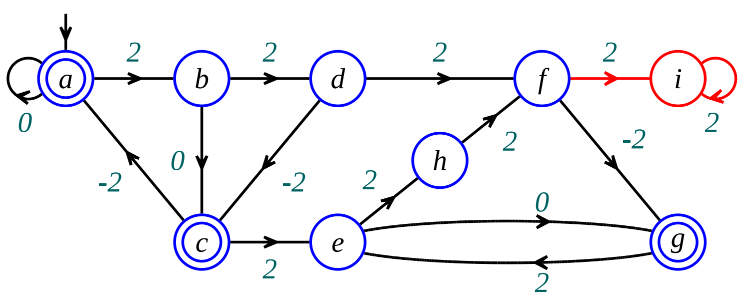
Почетно стање је a. Стања a, c и g су прихватајућа стања (зато што и на 4. и на 5. координати имају 0).

Функција прелаза $F(s, x)$ (за $x \in U = \{-2, 0, 2\}$ и $s \in S$) је дата у Табели 4.17.

	стања S									
улази x	a	b	c	d	e	f	g	h	i	Q
-2	Q	Q	a	c	Q	g	Q	Q	Q	Q
0	a	c	Q	Q	g	Q	Q	Q	Q	Q
2	b	d	e	f	h	i	e	f	i	Q

Табела 4.17. Функција прелаза $F(s, x)$.

Коначни аутомат M је приказан на Слици 4.12.



Слика 4.12. Дијаграм прелаза коначног аутомата M.

Понор стање i можемо изоставити (као и рекурентну једначину коју добијамо на основу њега – из ње би добили да је $i(n) = 0$). На основу Табеле 4.17 (или са Слике 4.12) долазимо до система рекурентних једначина:

$$a(n+1) = a(n) + b(n),$$

$$b(n+1) = c(n) + d(n),$$

$$c(n+1) = a(n) + e(n),$$

$$d(n+1) = c(n) + f(n),$$

$$e(n+1) = g(n) + h(n),$$

$$f(n+1) = g(n),$$

$$g(n+1) = e(n),$$

$$g(n+1) = f(n),$$

са почетним условима:
$a(0) = c(0) = g(0) = 1$ и $b(0) = d(0) = e(0) = f(0) = h(0) = 0$.

Сада ћемо помоћу функција генератриса прећи са система рекурентних једначина на систем линеарних једначина: низовима који су означени малим латиничним словима придружићемо функције генератрисе са истим великим словима (на пример $a(n) \leftrightarrow A(z)$, $b(n) \leftrightarrow B(z)$, итд.). Тако добијамо следећи систем:

$$\begin{aligned}
\frac{A(z)-1}{z} &= A(z)+B(z),\\
\frac{B(z)}{z} &= C(z)+D(z),\\
\frac{C(z)-1}{z} &= A(z)+E(z),\\
\frac{D(z)}{z} &= C(z)+F(z),\\
\frac{E(z)}{z} &= G(z)+H(z),\\
\frac{F(z)}{z} &= G(z),\\
\frac{G(z)-1}{z} &= E(z),\\
\frac{H(z)}{z} &= F(z).
\end{aligned}$$

Ово је систем линеарних једначина $\big($по промењљивим $A(z), B(z), \ldots, H(z)\big)$ и када га решимо добијамо део решења које нама треба:

$$A(z) = \frac{1+z^3}{1-z-z^2-2z^4+2z^5+z^6+z^7+z^8}.$$

Из имениоца ове функције генератрисе $1-z-z^2-2z^4+2z^5+z^6+z^7+z^8$, можемо добити линеарну рекурентну једначину са константним коефицијентима коју тражени низ $a(n)$ задовољава:
$a(n+8)-a(n+7)-a(n+6)-2a(n+4)+2a(n+3)+a(n+2)+a(n+1)+a(n) = 0$, тј.

$$a(n+8) = a(n+7)+a(n+6)+2a(n+4)-2a(n+3)-a(n+2)-a(n+1)-a(n).$$

Број n-варијација скупа $\mathbb{N}_{n+1}$, a_n, које задовољавају услов $p(i)-i \in \{-2,0,2\}$, за све $i \in \mathbb{N}_n$ је у потпуности одређен својом функцијом генератрисе $A(z)$. На основу ње можемо добити и првих неколико чланова овог низа:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_n	1	1	2	4	8	12	21	35	60	96	160	...

Табела 4.18: Број n-варијација скупа $\mathbb{N}_{n+1}$ које задовољавају услов $p(i)-i \in \{-2,0,2\}$.

Ово је низ A242072 у [43]. ■

Литература

[1] V. Baltić, "Applications of the finite state automata in the enumerative combinatorics", Proceedings of XXXVI Symposium on Operational Research, Ivanjica (2009), pp 155-158.

[2] V. Baltić, "On the Number of Certain Types of Strongly Restricted Permutations", Applicable Analysis and Discrete Mathematics, Vol. 4, No 1 (2010), p 119-135.

[3] V. Baltić, "Applications of the finite state automata for counting restricted permutations and variations", Yugoslav Journal of Operational Researches, **22** (2012), No **2**, 183-198.

[4] V. Baltić, "The counting of even and odd restricted permutations with the finite state automata", Proceedings of XXXIX Symposium on Operational Research, Tara (2012), pp 217-220.

[5] V. Baltić, D. Stevanović, "Counting of even and odd restricted permutations", Ars Mathematica Contemporanea, accepted.

[6] V. Baltić, "A note on the system of linear recurrence equations", FILOMAT, submited.

[7] V. Baltić, "Connections between restricted permutations, compositions and subsets", Ars Combinatoria, submited.

[8] G.E. Bergum, V.E. Hoggat, A combinatorial problem involving recursive sequences and tridiagonal matrices, *The Fibonacci Quarterly* **16** (1978), 113–118.

[9] N.L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 1999.

[10] M. Bóna, *Combinatorics of Permutations*, Chapman & Hall, 2004.

[11] R. Brualdi, D. Cvetković, A combinatorial approach to matrix theory and its applications, Chapman & Hall/CRC, 2009.

[12] C. A. Charalampides, *Enumerative Combinatorics*, Chapman & Hall/CRC, 2002.

[13] C.-O. Chow, T. Mansour, Counting derangements, involutions and unimodal elements in the wreath product $C_r \wr S_n$, Israel Journal of Mathematics 179 (2010) 425–448.

[14] J.H. Conway, R.K. Guy, *The book of numbers*, Springer-Verlag, 1995.

[15] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, Rivest, Ronald L; Stein, Clifford, *Introduction to algorithms*, The MIT Press, 2001.

[16] D. Cvetković, *Kombinatorna teorija matrica*, Naučna knjiga, Beograd, 1987.

[17] D. Cvetković, S. Simić, *On enumeration of certain types of sequences*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: matematika i fizika, No 412 – No 460, (1973), 159–164.

[18] D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of graphs*, 1979.

[19] S. Heubach and T.Mansour, Combinatorics of compositions and words, Chapman & Hall/CRC an imprint of Taylor & Francis LLC, 2009.

[20] I. Kaplansky, *On a generalization of the "problème des rencontres"*, Amer. Math. Monthly, 46, 1939, p. 159–161.

[21] I. Kaplansky, *Solution of the "problème des ménages"*, Bull. Amer. Math. Soc, 49, 1943, p. 784–785.

[22] I. Kaplansky, John Riordan, *The problem of the rooks and its applications"*, Duke Math. J, 13, 1946, p. 259–268.

[23] S. Kitaev, Patterns in permutations and words, Springer Verlag, 2011.

[24] S. Kitaev, T. Mansour, Linear recurrences and Chebyshev polynomials, The Fibonacci Quarterly (2005), Volume 43, No 3, 256-261.

[25] T. Kløve, *Spheres of permutations under the infinity norm - Permutations with limited displacement.* Reports in Informatics, Dept. of Informatics, Univ. Bergen, Report no. 376,
Online: `http://www.ii.uib.no/publikasjoner/texrap/pdf/2008-376.pdf`

[26] T. Kløve, Generating functions for the number of permutations with limited displacement, *The Electronic Journal of Combinatorics* **16** (2009), **#R104**.

[27] O. Krafft, M. Schaefer, On the number of permutations within a given distance, *The Fibonacci Quarterly* **40** (2002), 429–434.

[28] R.M. Lagrange, *Quelques résultats dans la métrique des permutations*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Paris, (3) t. 79, 1962, p. 199–241.

[29] D.H. Lehmer, *Permutations with strongly restricted displacements*, Combinatorial Theory and its appl, II (Proc. Colloq., Balatonfured, 1969), North-Holland, Amsterdam, 1970, p. 755-770.

[30] L. Li, T. Tomoda, S. Midorikawa and T. Horibata, A Counting Formula for the Number of Permutations with Constraints, *Z. angew. Math. Mech.* **76** (1996), S3, 495–496.

[31] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on words*, Cambridge University Press, 2002.

[32] Lynch, W.C, *The t-Fibonacci numbers and polyphase sorting*, The Fibonacci Quarterly, 8, 1970, p. 6–22.

[33] T. Mansour, Combinatorics of Set Partitions, Discrete Mathematics and its Applications, CRC Press, Boca Raton, FL, 2012.

[34] N.S. Mendelsohn, "The asymptotic series for a certain class of permutation problems", Canadian J. Math, 8, 1956, p. 234–244.

[35] N.S. Mendelsohn, "Permutations with confined displacements", Canadian Math. Bulletin, V.4, 1961, p. 29–38.

[36] H. Minc, *Permanents*, Addison–Wesley Publishing Company, 1978.

[37] A. Panholzer, On generalized Fibonacci Permutations, *Journal of Information & Optimization Sciences* **24** (2003), 591–610.

[38] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley & Sons, Inc, 1958.

[39] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Wadsworth, Vol. 1, 1986, p. 241–262.

[40] Д. Стевановић, В. Балтић, С. Симић, М. Ћирић, *Дискретна математика*, ДМС, Београд 2008.

[41] M. Tetiva, Subsets that make no difference d, *Mathematics Magazine* **84** (2011), No **4**, 300-301.

[42] I. Tomescu, *Problems in combinatorics and graph theory*, Wiley–Interscience Series in Discrete Mathematics, New York, 1985, p. 60, p. 292–295.

[43] *On-line encyclopedia of integer sequences*,
http://oeis.org

5. Прилози

5.1. Паскал и Мејпл кодови

У овом поглављу дајемо Паскал код, као и краћи опис улаза и излаза наших програма којим смо генерисали фајлове које смо касније користили у Мејплу.

Помоћу програма `radperm` смо направили извршни фајл (`exe`-фајл) за пребројавање пермутација са ограничењем $k \leqslant p(i) - i \leqslant r$ (без неких додатних услова). Извршни фајл као улаз тражи 2 броја, прво n које је овом програму представља збир $k + r$ из наше технике, а затим k и као изалаз даје 2 текстуалне датотеке (`txt`-фајлове), чија имена зависе од улазних података n и k: MATn_k.txt и SRJn_k.txt. У наставку наводимо потпун паскал код `radperm.pas`:

```
program radperm;
{Generise matrice i sisteme rekurentnih jednacina za
izracunavanje broja permutacije koje zadovoljavaju uslov
i-k<=p(i)<=i+l te objekte koristim u Maple-u}
uses crt,dos;
type nizi=array[0..20] of integer;
     nizniz=array[1..100] of nizi;
     matrica=array[1..100,1..100] of byte;
var n,k,uk:integer;
     komb:nizniz;
     c:char;

function binkoef(m,ll:integer):integer;
   begin
     if (ll<=0) or (m<=ll) then binkoef:=1
                          else binkoef:=binkoef(m-1,ll-1)+binkoef(m-1,ll)
   end;

procedure slkomb(nn,kk:integer; var kom:nizi; kraj:Boolean);
var r,s:integer;
   begin
     kraj:=false;
     if kom[1]=nn-kk+1 then kraj:=true
                      else begin
                         s:=kk+1;
                         repeat
```

```
                            s:=s-1
                         until kom[s]<nn-kk+s;
                         kom[s]:=kom[s]+1;
                         for r:=s+1 to kk do
                              kom[r]:=kom[r-1]+1;
                      end
   end;

procedure genkomb(var svekomb:nizniz);
{generise sve kombinacije skupa 1..n klase k u
inverznom leksikografskom poretku
i na kraju svake napisemo jos broj n+1}
var i,j:integer;
     komb:nizi;
     kr:Boolean;
   begin
     for i:=1 to k do svekomb[uk,i]:=i;
     svekomb[uk,k+1]:=n+1;
     komb:=svekomb[uk];
     for j:=uk-1 downto 1 do
        begin
        slkomb(n,k,komb,kr);
        for i:=1 to k+1 do svekomb[j,i]:=komb[i];
        end
   end;

procedure brojkomb(brkom:integer;var kom:nizi);
var i:integer;
   begin
     for i:=1 to k+1 do kom[i]:=komb[brkom,i]
   end;

function kombbroj(kom:nizi):integer;
var i,j,t,dg,gg:integer;
     kraj,iste:Boolean;
   begin
     kraj:=false;
     t:=n-1-kom[1];
     dg:=0;
     for i:=k-1 to t do dg:=dg+binkoef(i,k-1);
     gg:=dg+binkoef(t+1,k-1);    {gornja granica za brojac i}
     dg:=dg+1;    {donja granica za i}
     i:=dg;
     repeat
     if i=gg then begin
               kombbroj:=i;
               kraj:=true
               end
```

```
             else begin
               iste:=true;
               for j:=1 to k do iste:=iste and (komb[i,j]=kom[j]);
               if iste then
                      begin
                      kraj:=true;
                      kombbroj:=i
                      end
               end;
        i:=i+1;
        until kraj
      end;

    procedure difkomb(brkom:integer; var difk:nizi; var koldif:integer);
    {za prvih binkoef(n-1,k) vrsta imamo k+1 clan, dok poslednjih
    binkoef(n-1,k-1) vrsta (one sto pocinju sa 1) ima samo 1 clan!  }
    var i,j:integer;
        kom,pomkom:nizi;
      begin
        brojkomb(brkom,kom);
        if brkom>binkoef(n-1,k) then
            begin
            koldif:=1;
            for i:=2 to k+1 do pomkom[i-1]:=kom[i]-1;
            pomkom[k+1]:=n+1;
            difk[1]:=kombbroj(pomkom)
            end
          else begin
            koldif:=k+1;
            for j:=1 to k+1 do
              begin
              for i:=1 to k+1 do
                if i<j then pomkom[i]:=kom[i]-1
                    else if i>j then pomkom[i-1]:=kom[i]-1;
                    {ako je i=j onda ga samo preskoci jer
                    on po tom j "diferencira" }
              pomkom[k+1]:=n+1;
              difk[j]:=kombbroj(pomkom)
          end
        end
      end;

    procedure ispissvihkomb(svekomb:nizniz);    {kontrolna procedura}
    var i,j,inverz,kd:integer;
        dt:text;
        ss:string[12];
        snk,srk:string[2];
```

```
      dif:nizi;
    begin
      str(n,snk);str(k,srk);
      ss:=snk+'nad'+srk+'.txt';
      assign(dt,ss);
      rewrite(dt);
      for i:=1 to uk do
         begin
         inverz:=kombbroj(svekomb[i]);     {daje koja je komb po redu}
         difkomb(i,dif,kd);     {odredjuje "izvod" kombinacije}
         write(dt,i:3,'.  ');
         for j:=1 to k+1 do
           write(dt, svekomb[i,j]:2,' ');
         write(dt,' - ',inverz:2,' - ');     {provera rada proc kombbroj - dobro}
         for j:=1 to kd do
           write(dt, dif[j],' ');     {provera rada difkomb - dobro}
         writeln(dt);
         end;
      close(dt)
    end;

procedure gmatsrj;     {argumenti su joj globalne prom}
{generise matricu koja u A^n[1,1] daje a(n) i sistem rek.  jednacina}
var i,j,inverz,kd:integer;
      dts,dtm:text;
      ss,sm:string[12];
      snk,srk:string[2];
      dif:nizi;
    begin
      str(n,snk);str(k,srk);
      ss:='srj'+snk+'__'+srk+'.txt';
      assign(dts,ss);
      rewrite(dts);
      sm:='mat'+snk+'__'+srk+'.txt';
      assign(dtm,sm);
      rewrite(dtm);
      write(dtm,'s:=');
      write(dts,'rsolve(');
      for i:=1 to uk do
         begin
         write(dts,'a',i,'(n)=');
         difkomb(i,dif,kd);
         for j:=1 to kd do
           begin
           if i<uk then write(dtm,'(',i,',',dif[j],')=1,')
                   else write(dtm,'(',i,',',dif[j],')=1');  {u zadnjem ne treba ,}
           write(dts,'a',dif[j],'(n-1)');
```

```
          if j<kd then write(dts,'+')
          end;
        write(dts,',')
        end;
     write(dts,'a1(0)=1,');
     for i:=2 to uk do
        if i<uk then write(dts,'a',i,'(0)=0,')
                else write(dts,'a',i,'(0)=0');
     writeln(dtm,':');
     writeln(dtm,'A:=Matrix(',uk,',',uk,',s):');
     writeln(dtm,'B:=A^n:');
     write(dtm,'B[1,1] $ n=1..20;');
     write(dts,',');
     for i:=1 to uk do
        if i<uk then write(dts,'a',i,',')
                else write(dts,'a',i);
     write(dts,',''genfunc''(x));');
     close(dts);
     close(dtm)
   end;

begin
repeat
write('Unesi n (k+1) ');
readln(n);
write('Unesi k ');
readln(k);
{ukupno svih komb ima n nad k}
uk:=binkoef(n,k);
{n,k i uk su mi globalne promenljive u svim proc}
genkomb(komb);
{ispissvihkomb(komb);     proba rada procedura}
gmatsrj;
   repeat
     repeat until keypressed;
     c:=readkey
   until ((c='d') or (c='n'))
until c<>'d'
end {program}.
```

Рад овог програма ћемо илустровати тако што ћемо дати шта су текстуалне датотеке које се добију као излаз код улазних података $n = 4$ и $k = 2$: MAT4_2.txt и SRJ4_2.txt.

MAT4_2.txt:

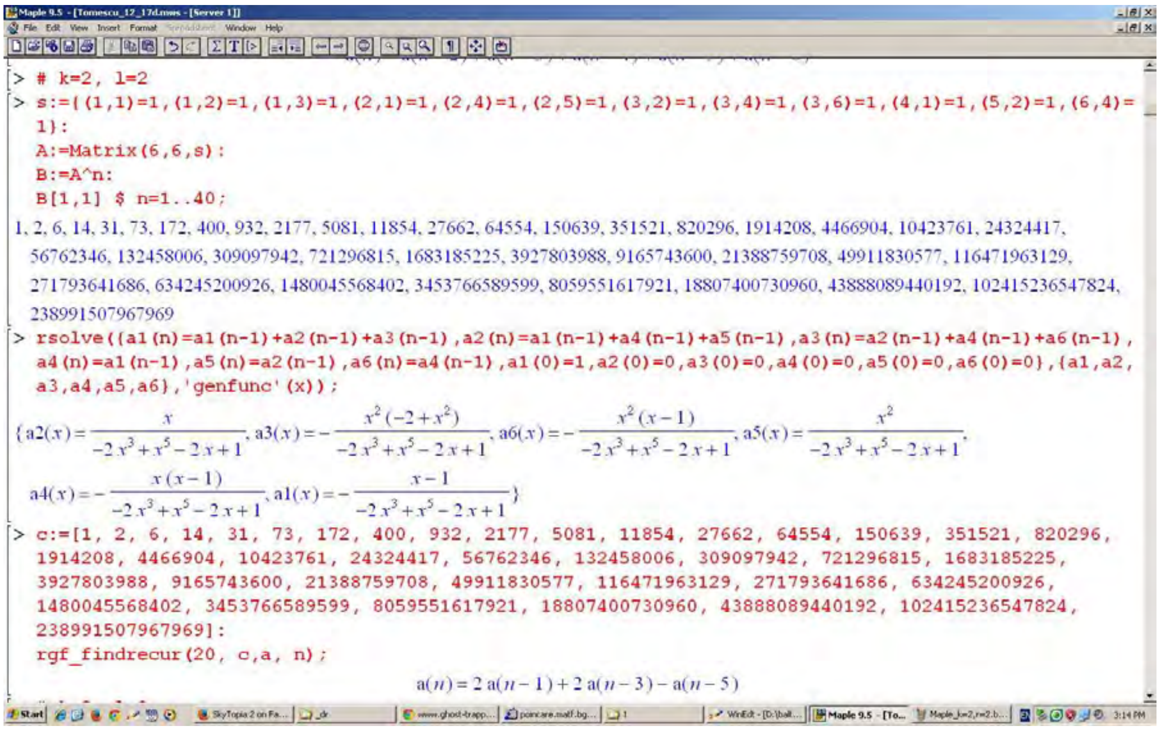
```
s:=(1,1)=1,(1,2)=1,(1,3)=1,(2,1)=1,(2,4)=1,(2,5)=1,(3,2)=1,(3,4)=1,(3,6)=1,(4,1)=1,
(5,2)=1,(6,4)=1:
A:=Matrix(6,6,s):
B:=A^n:
```

```
B[1,1] $ n=1..20;
```

SRJ4_2.txt:

```
rsolve({a1(n)=a1(n-1)+a2(n-1)+a3(n-1),a2(n)=a1(n-1)+a4(n-1)+a5(n-1),
a3(n)=a2(n-1)+a4(n-1)+a6(n-1),a4(n)=a1(n-1),a5(n)=a2(n-1),a6(n)=a4(n-1),
a1(0)=1,a2(0)=0,a3(0)=0,a4(0)=0,a5(0)=0,a6(0)=0},{a1,a2,a3,a4,a5,a6},'genfunc'(x));
```

Ови текстуални фајлови представљају команде у Мејплу, које смо користили за израчунавање броја пермуатција са ограничењима. Када смо садржај фајлова MAT4_2.txt и SRJ4_2.txt убацили у Мејпл, одредили смо број пермутација са ограничењем $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 2$ (добили смо и тај низ, као и одговарајућу функцију генератрисе):



Слика 5.1. Мејпл код за пермутације код којих је $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 2$.

У наставку ћемо описати уопштење претходног програма, које смо користили за израчунавање пермуатација са ограничењима $k \leqslant p(i) - i \leqslant r$ и $p(i) - i \notin I$. Процедуре и функције које су исте као у програму `radperm` нећемо наводити у потпуности него само декларацију, без тела процедура. Једина која се разликује је `gmatsrj` и њу ћемо дати у потпуности, као и цео главни програм.

Извршни фајл прво као улаз тражи 2 броја, k па r из наше технике, а затим k што је број елемената скупа I, па онда се уносе редом сви елементи скупа I. Овај програм као излаз даје 2 текстуалне датотеке (`txt`-фајлове), чија имена зависе од улазних података n и k: Mk_r_b.txt и Sk_r_b.txt. Овде b представља (децимални број) који кад се представи у бинарном запису добијамо позиције које су забрањене. У наставку наводимо паскал код `radperm3.pas`:

```
program radperm;
{Generise matrice i sisteme rekurentnih jednacina za
izracunavanje broja permutacije koje zadovoljavaju uslov
-k<=p(i)-i<=l uz uslov p(i)<>m gde je m iz nekog skupa
(po tome se razlikuje od _1.pas i _2.pas)
te objekte koristim u Maple-u}
```

```
uses crt,dos;
type nizi=array[0..20] of integer;
     nizniz=array[1..100] of nizi;
     matrica=array[1..100,1..100] of byte;
     dijag=set of 0..20;
var n,k,l,uk,brojac,brizb,iz:integer;
     komb:nizniz;
     c:char;
     izbac:dijag;

function binkoef(m,ll:integer):integer;
     ⋮

procedure slkomb(nn,kk:integer; var kom:nizi; kraj:Boolean);
     ⋮

procedure genkomb(var svekomb:nizniz);
     ⋮

procedure brojkomb(brkom:integer;var kom:nizi);
     ⋮

function kombbroj(kom:nizi):integer;
     ⋮

procedure difkomb(brkom:integer; var difk:nizi; var koldif:integer);
     ⋮

procedure ispissvihkomb(svekomb:nizniz);    {kontrolna procedura}
     ⋮

procedure gmatsrj; argumenti su joj globalne prom
{generise matricu koja u A^n[1,1] daje a(n) i sistem rek.  jednacina}
var i,j,inverz,kd,bin:integer;
     dts,dtm:text;
     ss,sm:string[12];
     sl,sk:string[1];
     siz:string[3];     {ovo je binarni zapis onga koji se izbacuje}
     dif:nizi;
   begin
     bin:=0;
     for i:=l downto -k do
        begin
        bin:=bin*2;
        if (l+1-i IN izbac) then bin:=bin+1;
        end;
     str(l,sl);str(k,sk);str(bin,siz);
```

```
ss:='s'+sk+'__'+sl+'__'+siz+'.txt';
assign(dts,ss);
rewrite(dts);
sm:='m'+sk+'__'+sl+'__'+siz+'.txt';
assign(dtm,sm);
rewrite(dtm);
write(dtm,'# k=',k,', l=',l,', izbaceni:  ');
write(dts,'# k=',k,', l=',l,', izbaceni:  ');
for i:=-k to l do if (l+1-i IN izbac) then
     begin
     write(dtm,i,' ');
     write(dts,i,' ');
     end;
writeln(dtm);writeln(dts);
write(dtm,'s:=');
write(dts,'rsolve(');
for i:=1 to uk do
   begin
   write(dts,'a',i,'(n)=');
   difkomb(i,dif,kd);
   if kd=0 then
        begin
        if i<uk then write(dtm,'(',i,',',1,')=0,')
                else write(dtm,'(',i,',',1,')=0'); u zadnjem ne treba ,
        write(dts,'a',i,'(n-1)');
        end
     else for j:=1 to kd do
        begin
        if i<uk then write(dtm,'(',i,',',dif[j],')=1,')
                else write(dtm,'(',i,',',dif[j],')=1'); u zadnjem ne treba ,

        write(dts,'a',dif[j],'(n-1)');
        if j<kd then write(dts,'+')
        end;
   write(dts,',')
   end;
write(dts,'a1(0)=1,');
for i:=2 to uk do
   if i<uk then write(dts,'a',i,'(0)=0,')
          else write(dts,'a',i,'(0)=0');
writeln(dtm,':');
writeln(dtm,'A:=Matrix(',uk,',',uk,',s):');
writeln(dtm,'B:=A^n:');
write(dtm,'B[1,1] $ n=1..40;');
write(dts,',');
for i:=1 to uk do
   if i<uk then write(dts,'a',i,',')
```

```
                else write(dts,'a',i);
      write(dts,',''genfunc''(x));');
      close(dts);
      close(dtm)
    end;

begin
repeat
write('Unesi k ');
readln(k);
write('Unesi l ');
readln(l);
n:=k+l;
{ukupno svih komb ima n nad k}
uk:=binkoef(n,k);
izbac:=[ ];
writeln('Koliko el.  ima skup brojeva koji su nedozvoljeni za p(i)-i?  ');
readln(brizb);
for brojac:=1 to brizb do
   begin
   write(brojac,'-ti broj koji je zabranjen ');
   readln(iz);
   izbac:=izbac+[l+1-iz];
   end;
{n,k,l,uk i izbac su mi globalne promenljive u svim proc}
genkomb(komb); {ispissvihkomb(komb);        proba rada procedura}
gmatsrj;
   repeat
     repeat until keypressed;
     c:=readkey
   until ((c='d') or (c='n'))
until c<>'d'
end program.
```

Рад овог програма ћемо илустровати тако што ћемо дати шта су текстуалне датотеке које се добију као излаз код улазних података $k = 2$, $l = 2$ и $I = \{-1, 1\}$: M2_2_10.txt и S2_2_10.txt.

M2_2_10.txt:

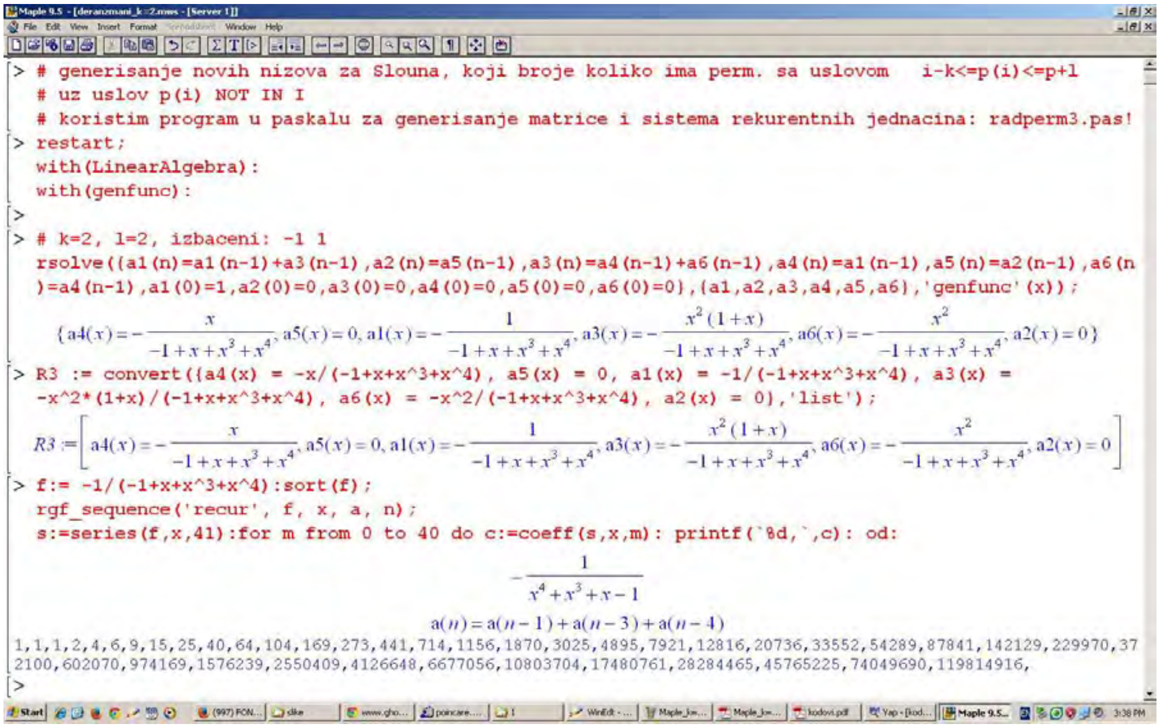
```
# k=2, l=2, izbaceni:  -1 1
s:=(1,1)=1,(1,3)=1,(2,5)=1,(3,4)=1,(3,6)=1,(4,1)=1,
(5,2)=1,(6,4)=1:
A:=Matrix(6,6,s):
B:=A^n:
B[1,1] $ n=1..40;
```

S2_2_10.txt:

```
# k=2, l=2, izbaceni:  -1 1
rsolve({a1(n)=a1(n-1)+a3(n-1),a2(n)=a5(n-1),a3(n)=a4(n-1)+a6(n-1),a4(n)=a1(n-1),
```

```
a5(n)=a2(n-1),a6(n)=a4(n-1),a1(0)=1,a2(0)=0,a3(0)=0,a4(0)=0,a5(0)=0,a6(0)=0},
{a1,a2,a3,a4,a5,a6},'genfunc'(x));
```

Опет ови текстуални фајлови представљају команде у Мејплу, које смо користили за израчунавање броја пермуатција са ограничењима. Када смо садржај фајлова M2_2_10.txt и S2_2_10.txt убацили у Мејпл, одредили смо број пермутација са ограничењем $-2 \leqslant p(i) - i \leqslant 2$, уз додатан услов $p(i) - i \notin \{-1, 1\}$, тј. пермутације за које важи $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$ (добили смо и тај низ, као и одговарајућу функцију генератрисе):



Слика 5.2. Мејпл код за пермутације код којих је $p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$.

5.2. Прилози у Енциклопедији целобројних низова

У овом поглављу наводимо низове бројева пермутација са ограничењима које задовољавају услове $-k \leqslant p(i) - i \leqslant r$ и $p(i) - i \notin I$. Њих смо одредили помоћу Мејпл програма који су базирани на нашој техници, додали у Слоунову енциклопедију целобројних низова [43] (енг. Sloane's online encyclopedia of integer sequences). У табелама, као и испод слике сваког од ових низова ћемо навести име низа у енциклопедији (почињу са A и затим следи шестоцифрен број), као и које су вредности k, r и I које га одређују (уколико I није наведено, подразумевамо да је $I = \emptyset$).

$p(i) - i \in \{-2, 0, 2\}$

5.2.1. Нови низови у Енциклопедији целобројних низова

Велики број низова смо придодали у Енциклопедију целобројних низова. У наредној табели дајемо име постојећег низа, као и која ограничења су у одговарајућим пермутацијама. У табели су низови сортирани према њиховом имену.

низ	**ограничења**
A072827	$k=2,\ r=3$
A072850	$k=2,\ r=4$
A072852	$k=2,\ r=5$
A072853	$k=2,\ r=6$
A072854	$k=3,\ r=4$
A072855	$k=3,\ r=5$
A072856	$k=4,\ r=4$
A079816	$k=1,\ r=5,\ I=\{1\}$
A079955	$k=1,\ r=5,\ I=\{0,2,3\}$
A079956	$k=1,\ r=5,\ I=\{0,1,4\}$
A079957	$k=1,\ r=5,\ I=\{0,1,3\}$
A079958	$k=1,\ r=5,\ I=\{3,4\}$
A079959	$k=1,\ r=5,\ I=\{2,4\}$
A079960	$k=1,\ r=5,\ I=\{2,3\}$
A079961	$k=1,\ r=5,\ I=\{1,4\}$
A079962	$k=1,\ r=5,\ I=\{1,3\}$
A079963	$k=1,\ r=5,\ I=\{1,2\}$
A079964	$k=1,\ r=5,\ I=\{0,4\}$
A079965	$k=1,\ r=5,\ I=\{0,3\}$
A079966	$k=1,\ r=5,\ I=\{0,2\}$
A079967	$k=1,\ r=5,\ I=\{4\}$
A079968	$k=1,\ r=5,\ I=\{3\}$
A079969	$k=1,\ r=5,\ I=\{2\}$
A079971	$k=1,\ r=4,\ I=\{2,3\}$
A079972	$k=1,\ r=4,\ I=\{1,2\}$
A079973	$k=1,\ r=4,\ I=\{0,3\}$
A079974	$k=1,\ r=4,\ I=\{0,2\}$
A079975	$k=1,\ r=4,\ I=\{3\}$
A079976	$k=1,\ r=4,\ I=\{2\}$
A079977	$k=1,\ r=3,\ I=\{0,2\}$
A079978	$k=1,\ r=2,\ I=\{0,1\}$
A079979	$k=r=3,\ I=\{-2,-1,0,1,2\}$
A079980	$k=r=3,\ I=\{-2,0,1,2\}$
A079981	$k=r=3,\ I=\{-2,0,1,2\}$
A079982	$k=r=3,\ I=\{-1,0,1,2\}$
A079983	$k=r=3,\ I=\{-2,1,2\}$
A079984	$k=r=3,\ I=\{-1,1,2\}$
A079985	$k=r=3,\ I=\{-1,0,1\}$
A079986	$k=r=3,\ I=\{-2,0,2\}$

низ	**ограничења**
A079987	$k=r=3,\ I=\{-1,0,2\}$
A079988	$k=r=3,\ I=\{0,1,2\}$
A079989	$k=r=3,\ I=\{1,2\}$
A079990	$k=r=3,\ I=\{-1,2\}$
A079991	$k=r=3,\ I=\{-1,1\}$
A079992	$k=r=3,\ I=\{-2,2\}$
A079993	$k=r=3,\ I=\{0,2\}$
A079994	$k=r=3,\ I=\{0,1\}$
A079995	$k=r=3,\ I=\{2\}$
A079996	$k=r=3,\ I=\{1\}$
A079997	$k=r=3,\ I=\{0\}$
A079998	$k=2,\ r=3,\ I=\{-1,0,1,2\}$
A079999	$k=2,\ r=3,\ I=\{0,1,2\}$
A080000	$k=2,\ r=3,\ I=\{-1,1,2\}$
A080001	$k=2,\ r=3,\ I=\{-1,0,2\}$
A080002	$k=2,\ r=3,\ I=\{-1,0,1\}$
A080003	$k=2,\ r=3,\ I=\{1,2\}$
A080004	$k=2,\ r=3,\ I=\{-1,2\}$
A080005	$k=2,\ r=3,\ I=\{-1,1\}$
A080006	$k=2,\ r=3,\ I=\{0,2\}$
A080007	$k=2,\ r=3,\ I=\{0,1\}$
A080008	$k=2,\ r=3,\ I=\{-1,0\}$
A080009	$k=2,\ r=3,\ I=\{2\}$
A080010	$k=2,\ r=3,\ I=\{1\}$
A080011	$k=2,\ r=3,\ I=\{-1\}$
A080012	$k=2,\ r=3,\ I=\{0\}$
A080013	$k=r=2,\ I=\{0,1\}$
A080014	$k=r=2,\ I=\{1\}$
A224808	$k=2,\ r=6,\ I=\{-2,0,6\}$
A224809	$k=2,\ r=4,\ I=\{-2,0,4\}$
A224810	$k=3,\ r=6,\ I=\{-3,0,6\}$
A224811	$k=2,\ r=8,\ I=\{-2,0,8\}$
A224812	$k=2,\ r=10,\ I=\{-2,0,10\}$
A224813	$k=2,\ r=12,\ I=\{-2,0,12\}$
A224814	$k=3,\ r=9,\ I=\{-3,0,9\}$
A224815	$k=4,\ r=8,\ I=\{-4,0,8\}$
A242072	n-варij. из $\mathbb{N}_{n+1},\ p(i)-i\in\{-2,0,2\}$
A242073	парне, $p(i)-i\in\{-2,0,2\}$
A242074	непарне, $p(i)-i\in\{-2,0,2\}$

Табела 5.1. Нови низови у Енциклопедији.

Прва 2 од ових низова су представљени на наредним сликама (како у потпуности изгледају у Енциклопедији целобројних низова).

This site is supported by donations to The OEIS Foundation.

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

Many excellent designs for a new banner were submitted. We will use the best of them in rotation.

Search Hints

(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

A072827 Number of permutations satisfying i-2<=p(i)<=i+3, i=1..n. 76

1, 2, 6, 18, 46, 115, 301, 792, 2068, 5380, 14020, 36581, 95413, 248786, 648714, 1691686, 4411530, 11503991, 29998953, 78228640, 203998184, 531969064, 1387222648, 3617479225, 9433351129, 24599481138, 64148406350, 167280683834 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

OFFSET	1,2
LINKS	R. H. Hardin, Table of n, a(n) for n=1..400 Vladimir Baltic, On the number of certain types of strongly restricted permutations, Applicable Analysis and Discrete Mathematics Vol. 4, No 1 (April, 2010), 119-135 Index entries for sequences related to linear recurrences with constant coefficients, signature (1,2,3,5,6,-1,-1,0,-1,-1).
FORMULA	Recurrence: a(n) = a(n-1)+2*a(n-2)+3*a(n-3)+5*a(n-4)+6*a(n-5)-a(n-6)-a(n-7)-a(n-9)-a(n-10). G.f.: (x^5+x^3+x^2-1)/(x^10+x^9+x^7+x^6-6*x^5-5*x^4-3*x^3-2*x^2-x+1).
CROSSREFS	Cf. A002524..A002529, A072827, A072850..A072856, A079955..A080014. Sequence in context: A054136 A232600 A140960 * A002529 A217526 A018027 Adjacent sequences: A072824 A072825 A072826 * A072828 A072829 A072830
KEYWORD	nonn,easy
AUTHOR	Vladimir Baltic, Jul 21 2002
STATUS	approved

Lookup | Welcome | Wiki | Register | Music | Plot 2 | Demos | Index | Browse | More | WebCam
Contribute new seq. or comment | Format | Transforms | Superseeker | Recent | More pages
The OEIS Community | Maintained by The OEIS Foundation Inc.

Content is available under The OEIS End-User License Agreement.

Слика 5.3. Низ A072827 – $k = 2$, $r = 3$.

This site is supported by donations to The OEIS Foundation.

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

Many excellent designs for a new banner were submitted. We will use the best of them in rotation.

Search Hints

(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

A072850 Number of permutations satisfying i-2<=p(i)<=i+4, i=1..n. 76

1, 2, 6, 18, 54, 146, 391, 1081, 3004, 8320, 22984, 63424, 175176, 484113, 1337721, 3695886, 10210702, 28209954, 77940078, 215337554, 594943087, 1643728129, 4541349672, 12547013504, 34665373744, 95774808224, 264610227072 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

OFFSET	1,2
LINKS	R. H. Hardin, Table of n, a(n) for n=1..400 Vladimir Baltic, On the number of certain types of strongly restricted permutations, Applicable Analysis and Discrete Mathematics Vol. 4, No 1 (April, 2010), 119-135
FORMULA	Recurrence: a(n) = a(n - 1) + 2*a(n - 2) + 4*a(n - 3) + 6*a(n - 4) + 10*a(n - 5) + 12*a(n - 6) - 4*a(n - 7) - 6*a(n - 8) - 6*a(n - 9) - 2*a(n - 11) - 2*a(n - 12) + a(n - 14) + a(n - 15). G.f.: - (x^9 + x^7 - 2*x^6 - 2*x^4 - 2*x^3 - x^2 + 1)/(x^15 + x^14 - 2*x^12 - 2*x^11 - 6*x^9 - 6*x^8 - 4*x^7 + 12*x^6 + 10*x^5 + 6*x^4 + 4*x^3 + 2*x^2 + x - 1)
CROSSREFS	Cf. A002524..A002529, A072827, A072850..A072856, A079955..A080014. Sequence in context: A120010 A132790 A214799 * A182899 A160175 A072852 Adjacent sequences: A072847 A072848 A072849 * A072851 A072852 A072853
KEYWORD	nonn
AUTHOR	Vladimir Baltic, Jul 25 2002
STATUS	approved

Lookup | Welcome | Wiki | Register | Music | Plot 2 | Demos | Index | Browse | More | WebCam
Contribute new seq. or comment | Format | Transforms | Superseeker | Recent | More pages
The OEIS Community | Maintained by The OEIS Foundation Inc.

Content is available under The OEIS End-User License Agreement .

Слика 5.4. Низ A072850 – $k = 2$, $r = 4$.

5.2.2. Коментари на постојеће низове у Енциклопедији

Поред новоуведених низова, који су описани у претходном потпоглављу, дали смо и коментаре, формуле или додали још нових чланова (везане за пермутације са ограничењима) на неколицину постојећих низова. У наредној табели дајемо име постојећег низа, као и која ограничења су у одговарајућим пермутацијама. У табели су низови сортирани према њиховом имену.

низ	**ограничења**
A000073	$k = 1,\ r = 2$
A000078	$k = 1,\ r = 3$
A001591	$k = 1,\ r = 4$
A001592	$k = 1,\ r = 5$
A001883	$\|p(i) - i\| > 1$
A001887	$p(i) - i \neq 0, 1, 2$
A003269	$k = 1,\ r = 3,\ I = \{1, 2\}$
A006498	$k = 1,\ r = 3,\ I = \{1\}$
A006500	$k = r = 3,\ I = \{-2, -1, 1, 2\}$
A017817	$k = 1,\ r = 3,\ I = \{0, 1\}$
A060945	$k = 1,\ r = 3,\ I = \{2\}$
A075851	$\|p(i) - i\| > 2$
A075852	$\|p(i) - i\| > 3$
A078509	$p(i) - i \neq 1, 2$
A121262	$k = 1,\ r = 3,\ I = \{0, 1, 2\}$

Табела 5.2. Коментарисани низови у Енциклопедији.

5.3. Биографија аутора

Владимир (Милорад) Балтић рођен је 8. септембра 1973. године у Београду.

Завршио је 1987. године као ђак генерације основну школу "Браћа Рибар" и носилац је Вукове дипломе.

Завршио је 1991. године београдску Математичку гимназију. Током средње школе из математике је учествовао на сва четири савезна такмичења (у I разреду је био пети, а од II до IV је био први у СФРЈ), а 1990. и 1991. пласирао се на Балканијаде у Бугарској и Румунији (друга и трећа награда) и Математичке Олимпијаде у Кини и Шведској (две бронзане медалје). Због тих резултата је добио Новембарску награду (1989.) и Октобарску награду града Београда за стваралаштво младих (1990.). Током студија математике учествовао је на неколико међународних такмичења, увек освајајући награде.

Од 4. - 30. јула 1995. је узео учешће у "Летњем истраживачком програму" који је био одржан на UIC-у (The University of Illinois at Chicago). У периоду од 10. X до 8. XII 1995. је боравио на стручној пракси у Бразилу (држава Сао Паоло) на Државном Универзитету у Кампинасу.

На Математичком факултету у Београду је школске 1993/94. уписао смер "Теоријска математика и примене" на коме је дипломирао 5. септембра 1997. са просеком 9,97. На Електротехничком факултету у Београду је магистрирао 23. јуна 2008. са просечном оценом 10,00 на тези "Инваријанте графова са применама" код проф. др Слободана Симића као ментора (формални ментор је био проф др Зоран Радосављевић).

Од 1997. до 1999. радио је на Математичком факултету у Београду (1997/8 и хонорарно на Електротехничком факултету у Београду). Школске 1999/2000. је добио место асистента приправника на Технолошко-металуршком факултету у Београду. Школске 2001/2002. и 2002/2003. је држао вежбе на Технолошко-металуршком факултету и радио хонорарно на Економском факултету. Од фебруара 2003. до 2007. је био запослен на Економском факултету у Београду. Од октобра 2007. је запослен као асистент на Факултету организационих наука у Београду.

Од 1991. године активно учествује у раду Републичке комисије за такмичења средњошколаца. Од 2003. до 2005. је био и председник те Комисије.

У јуну 2004. је био један од координатора (прегледача) на VIII Јуниорској балканској математичкој Олимпијади у Новом Саду. У јулу 2006. је био један од координатора (прегледача) на XLVII Међународној математичкој олимпијади у Словенији.

Од 2003. године је члан редакције математичког часописа "Тангента". Током 2008. године направио је пратеће слајдове за уџбеник аутора Ричарда Бруалдија (Ричард Бруалди) и Драгоша Цветковића "A COMBINATORIAL APPROACH TO MATRIX THEORY AND ITS APPLICATIONS" у издању Chapman & Hall/CRC Taylor & Francis Group, 2009.

Током 2002. и 2003. у Слоуновој енциклопедији целобројних низова је допринео са 60 оригиналних низова (A072827,A072850,A072852-A072856,A079955-A080014), као и мноштвом коментара, исправки, проширења, доказа и референци у већ постојећим.

`http://www.research.att.com/~njas/sequences/`

На основу његовог рада са Владетом Јововићем је марта 2004. године постављен проблем месеца на IBM-овом сајту:

`http://domino.research.ibm.com/Comm/wwwr_ponder.nsf/challenges/March2004.html`

Од 2002. до 2005. године је учествовао на пројекту 1625 "Нове математичке методе за криптографску заштиту и моделовање информација" (руководилац др Миодраг Михаљевић) Министарства за науку, технологије и развој. Током 2006. године је учествовао на пројекту 8061 "Модуларни софтверски пакет за дигитализацију текста са мултијезичким интерфејсом" (руководилац др Иван Аранђеловић) Министарства за науку, технологије и развој. Поред тога био је носилац и учесник више пројеката из методике наставе у периоду од 2007. до 2010. са Иваном Анићем, Михајлом Вељковићем, Владимиром Стојановићем, Богољубом Маринковићем.

Оженио се 30. IX 2007. године у цркви Лазарици у Крушевцу. Супруга Марија (лекар) му је подарила ћерку Анђелију 15. IX 2008. и сина Марка 15. IX 2011.

5.3.1. Библиографија

Владимир Балтић је аутор следећих научних радова:

1. **Vladimir Baltić**, Slobodan Simić, Velibor Tintor, *Some Remarks on Graph Equation* $G^2 = \overline{G}$, Publikacije Elektrotehnichkog fakulteta - serija Matematika, br. 5, (1994), p. 43-48.
   (Taj rad je citiran u: Marcus Schaefer, Daniel Stefankovich, *Solvability of Graph Inequalities*, SIAM. Journal on Discrete Mathematics, 19, (2005), pp. 728-743.)

2. Slobodan Simić, Ivan Gutman, **Vladimir Baltić**, *Some Graphs with extremal Szeged Index*, Mathematica Slovaca, 50, No. 1, (2000),p 1-15. (5 citata)

3. **Vladimir Baltić**, Applications of the finite state automata in the enumerative combinatorics, Proceedings of XXXVI Symposium on Operational Research, Ivanjica (2009), pp 155-158.

4. **Vladimir Baltić**, *On the number of certain types of strongly restricted permutations*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, Vol. 4, No 1 (2010), p 119-135.

5. **Vladimir Baltić**, "Applications of the finite state automata for counting restricted permutations and variations", Yugoslav Journal of Operational Researches, **22** (2012), No **2**, 183-198.

6. **Vladimir Baltić**, "The counting of even and odd restricted permutations with the finite state automata", Proceedings of XXXIX Symposium on Operational Research, Tara (2012), pp 217-220.

   Прихваћени или послати у часописе:

7. **Vladimir Baltić**, **Dragan Stevanović**, "Counting of even and odd restricted permutations", Ars Mathematica Contemporanea, accepted.

8. **Vladimir Baltić**, "A note on the system of linear recurrence equations", FILOMAT, accepted.

9. **Vladimir Baltić**, "Connections between restricted permutations, compositions and subsets", Ars Combinatoria, submited.

Владимир Балтић је аутор следећих књига:

1. Бранислав Боричић, Миодраг Ивовић, Драган Аздејковић, Јелена Станојевић, **Владимир Балтић**, *Збирка задатака из Математике (за студенте Економског факултета)*, Економски факултет, Београд 2003, 2004, 2005. и 2006.

2. Драган Стевановић, Марко Милошевић, **Владимир Балтић**, *ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА - основе комбинаторике и теорије графова*, збирка задатака, Друштво математичара Србије (Материјали за младе математичаре, свеска 43), Београд 2004.

3. **Владимир Балтић**, Душан Ђукић, Ђорђе Кртинић, Иван Матић, *ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ за математичка такмичења средношколаца у Србији*, збирка задатака, Друштво математичара Србије (Материјали за младе математичаре, свеска 49), Београд 2008.

4. Драган Стевановић, **Владимир Балтић**, Слободан Симић, Мирослав Ћирић, *ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА, Основи комбинаторике и теорије графова*, универзитетски уџбеник, Друштво математичара Србије, Београд 2008.

5. Мирјана Чангаловић, Весна Манојловић, **Владимир Балтић**, *ДИСКРЕТНЕ МАТЕМАТИЧКЕ СТРУКТУРЕ*, универзитетски уџбеник, ФОН, Београд 2009, 2014.

6. **Владимир Балтић**, *ДИСКРЕТНЕ МАТЕМАТИЧКЕ СТРУКТУРЕ - збирка испитних и домаћих задатака из 2008. и 2009. године*, ФОН, Београд 2010.

7. **Владимир Балтић**, Оливера Михић, *МЕТОДИЧКА ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 1*, ФОН, Београд 2010.

8. Мирјана Чангаловић, Весна Манојловић, **Владимир Балтић**, *ДИСКРЕТНЕ МАТЕМАТИЧКЕ СТРУКТУРЕ*, збирка задатака, ФОН, Београд 2014. (у припреми)

На научним скуповима је имао следећа саопштења (сва самостална):

1. *Different Methods for solving a Combinatorial Problem*, ПРИМ 2004, Будва, 31. мај – 4. јун 2004.
2. *Different Methods for solving a Geometricial Problem*, XI Конгрес математичара СЦГ, Петровац, 28. септембар – 3. октобар 2004.
3. *"On the number of certain types of restricted permutations"*, MAGT (International Mathematical Conference MAGT - Topics in Mathematical Analysis and Graph Theory), Београд, 1.–4. септембар 2006.
4. *Different Approaches to Enumeration of Restricted Permutations*, BALCOR 2007, Београд - Златибор, 17. септембар 2007.
5. *"Connections between restricted permutations and Fibonacci numbers"*, XII Конгрес математичара Србије, Нови Сад, 28. август – 2. септембар 2008.
6. *"Various methods for counting the number of restricted permutations"*, "The 3rd NOVI SAD ALGEBRAIC CONFERENCE", Нови Сад, 16.–21. август 2009.
7. *"Applications of the finite state automata in the enumerative combinatorics"*, SYMOPIS 2009, Ивањица, 21.–25. септембар 2009.
8. *Различити приступи пребројавању пермутација са ограничењима*, Математичке и информационе технологије – MIT 2011, Врњачка Бања, 28.–31. август 2011.
9. *"The counting of even and odd restricted permutations with the finite state automata"*, SYMOPIS 2012, Тара, 25.–28. септембар 2012.
10. *Applications of the Finite State Automata for Counting Subsets with Forbidden Differences*, BALCOR 2013, Београд - Златибор, 8. септембар 2013.

5.4. Изјаве аутора

На наредних неколико страна ставићемо неколико изјава аутора, као и резиме тезе (на српском и енглеском) са одговарајућим подацима о тези:

- Изјава о ауторству
- Изјава о истоветности штампане и елктронске верзије докторске дисертације
- Изјава о коришћењу
- Резиме на српском језику
- Резиме на енглеском језику.

Прилог 1.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Пермутације са ограничењима

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација, ни у целини, ни у деловима, није била предложена за добијање било које дипломе, према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

У Нишу, 11.05.2014.

Аутор дисертације: Владимир Балтић

Потпис докторанда:

Прилог 2.

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Име и презиме аутора: Владимир Балтић

Студијски програм: Математика

Наслов рада: Пермутације са ограничењима

Ментор: Драган Стевановић

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације истоветна електронској верзији, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 13.05.2014.

Аутор дисертације: Владимир Балтић

Потпис докторанда:

Прилог 3.

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла" да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Пермутације са ограничењима

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да подвучете само једну од шест понуђених лиценци; кратак опис лиценци је у наставку текста).

У Нишу, 13.05.2014.

Аутор дисертације:
Владимир Балтић

Потпис докторанда:

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	**монографска**
Тип записа, **ТЗ**:	**текстуални / графички**
Врста рада, **ВР**:	**докторска дисертација**
Аутор, **АУ**:	**Владимир М. Балтић**
Ментор, **МН**:	**Драган П. Стевановић**
Наслов рада, **НР**:	**Пермутације са ограничењима**
Језик публикације, **ЈП**:	**српски**
Језик извода, **ЈИ**:	**енглески**
Земља публиковања, **ЗП**:	**Србија**
Уже географско подручје, **УГП**:	**Србија**
Година, **ГО**:	**2014.**
Издавач, **ИЗ**:	**ауторски репринт**
Место и адреса, **МА**:	**Ниш, Вишеградска 33.**
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	**128 стр., граф. прикази**
Научна област, **НО**:	**математика**
Научна дисциплина, **НД**:	**дискретна математика**
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	**комбинаторика пребројавања; пермутације, тачно пребројавање, рекурентне једначине, перманенти, коначни аутомати**
УДК	**519.83:519.212.2 (043.3)**
Чува се, **ЧУ**:	**библиотека**
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	У овом раду се бавимо проучавањем различитих метода пребројавања великог броја комбинаторних објеката: пермутација, варијација, комбинација, подскупова уз нека додатна ограничења. Развили смо потпуно нов метод за пребројавање неких од ових објеката и успоставили везе међу неким од њих. Дали смо и осврт на алгоритамску сложеност новог метода и анализирали у чему је бољи од постојећих. Унели смо стотињак нових низова у Слоунову енциклопедију целобројних низова и дали коментаре на велики број постојећих низова.
Датум прихватања теме, **ДП**:	**26.12.2011.**
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан, ментор:	

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual / graphic**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Vladimir M. Baltić**
Mentor, **MN**:	**Dragan P. Stevanović**
Title, **TI**:	**Restricted permutations**
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2014**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**128 p. ; graphic representations**
Scientific field, **SF**:	**mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**discrete mathematics**
Subject/Key words, **S/KW**:	**enumeration combinatorics; permutations, exact enumeration, recurrence equations, permanents, finite state automata**
UC	**519.83:519.212.2 (043.3)**
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	In this thesis we study different methods of counting a large number of combinatorial objects: permutations, variations, combinations, subsets, with some additional restrictions. We have developed a completely new method for the enumeration of some of these objects and make connections among some of them. We estimate the algorithmic complexity of the new method and analyze what is better than existing ones. We have entered a hundred new sequences in Slone's Online encyclopedia of integer sequences and provided comments on the large number of existing sequences.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	**26.12.2011.**
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member, Mentor:	