



Univerzitet u Nišu  
Građevinsko-arhitektonski fakultet

# **Analiza graničnog stanja upotrebljivosti pešačkih mostova u pogledu vibracija indukovanih pešacima**

doktorska disertacija

**mr Marija Spasojević-Šurdilović, dipl.inž.grad**

Niš, avgust 2013.

# SADRŽAJ

<b>1. Uvod</b>	1
<b>2. Modeliranje sile usled kretanja pešaka</b>	5
<b>2.1 Delovanje izazvano pešacima</b>	5
2.1.1 Dejstvo usled hoda	6
2.1.2 Delovanje usled trčanja i skakanja	10
2.1.3 Delovanje grupe pešaka	11
2.1.3.1 Gustina pešaka	11
2.1.3.2 Lock-in efekat	15
<b>2.2 Modeli opterećenja indukovanog hodom</b>	16
2.2.1 Model vertikalnog opterećenja	16
2.2.2 Model horizontalnog opterećenja	19
2.2.3 Modeli opterećenja u preporukama i standardima	20
<b>3. Kriterijumi konfora i granične vrednosti</b>	24
<b>3.1 Granične vrednosti za frekvencije prema internacionalnim standardima i preporukama</b>	25
<b>3.2 Proračun ubrzanja i granične vrednosti za ubrzanja prema internacionalnim standardima i preporukama</b>	26
3.2.1 Analiza ubrzanja	26
3.2.2 Granične vrednosti za ubrzanja prema internacionalnim standardima i preporukama	27
<b>4. Modeliranje grednih rasponskih konstrukcija i analiza vibracija indukovanih pešacima</b>	31
<b>4.1 Kontinualni sistemi-rešenja problema vibracija</b>	32
4.1.1 Opšta razmatranja prinudnih prigušenih vibracija	32
4.1.2 Definisane poremećajnih sila	35
4.1.3 Rešenja za analizu odgovora konstrukcija	36
4.1.3.1 Nosač sa jednim poljem	40
4.1.3.2 Nosač sa dva jednaka polja	42
4.1.3.3 Nosač sa tri jednaka polja	45
4.1.4 Uticaj mase pokretnog opterećenja na promenu osnovne frekvencije kontinualnih sistema	47
4.1.4.1 Postavka i rešenje problema	48
4.1.4.2 Primeri datih rešenja za nosače sa jednim, dva i tri jednaka polja	49
4.1.4.2.1 Slučaj a – dodatna masa na dužini $\lambda$	49
4.1.4.2.2 Slučaj b – nailazak jednakorasodeljene mase	50

4.1.4.2.3 Slučaj c – koncentrisana masa	50
4.1.4.3 Dinamički modeli grednih nosača sa dodatim masama i odgovajajuća analitička rešenja za promenu osnovne frekvencije	51
4.1.4.4 Grafički prikaz promene osnovne frekvencije nosača usled dodatih masa	53
<b>4.2 Diskretni sistemi-rešenja problema vibracija</b>	<b>58</b>
4.2.1 Opšta razmatranja prinudnih prigušenih vibracija	58
4.2.2 Slobodne prigušene vibracije	61
4.2.3 Definisane poremećajne sile na diskretnom sistemu	62
4.2.3.1 Pokretno koncentrisano opterećenje	62
4.2.3.2 Pokretno kontinualno opterećenje	63
4.2.4 Prvi način definisanja i rešavanja problema	64
4.2.4.1 Pokretno koncentrisano opterećenje	66
4.2.4.2 Nailazak kontinualnog opterećenja	67
4.2.4.3 Prelazanje kontinualnog opterećenja	68
4.2.4.4 Odlazak kontinualnog opterećenja	69
4.2.4.5 Pokretno kontinualno opterećenje na dužini $\lambda_p$	69
4.2.5 Drugi način definisanja i rešavanja problema	71

<b>5. Dinamička analiza nekih karakterističnih pešačkih mostova sa aspekta prihvatljivosti vibracija</b>	<b>74</b>
<b>5.1 Test primeri</b>	<b>74</b>
5.1.1 Izbor poprečnog preseka superstrukture mosta	74
5.1.2 Poređenja rezultata analize vibracija za kontinualne i diskretne sisteme	76
5.1.2.1 Most sa jednim otvorom	77
5.1.2.2 Most sa dva otvorom	79
<b>5.2 Betonski most</b>	<b>81</b>
5.2.1 Kratak opis konstrukcija mosta	81
5.2.2 Analiza vibracija	83
<b>5.3 Drveni most</b>	<b>93</b>
5.3.1 Kratak opis konstrukcija mosta	93
5.3.2 Analiza vibracija	95
<b>5.4 Spregnuti most (čelik-beton)</b>	<b>107</b>
5.4.1 Kratak opis konstrukcija mosta	107
5.4.2 Analiza vibracija	109
5.4.2.1 Opterećenje od pešaka	112
5.4.2.2 Opterećenje od grupe pešaka	118
5.4.2.3 Opterećenje od kolone pešaka	119
5.4.2.4 Izuzetna opterećenja	122

5.4.2.4.1 Vandalsko delovanje .....	122
5.4.2.4.2Prelaženje vozila (eksperimentalni podaci i matematičke simulacije) .....	124
<b>6. Zaključak</b> .....	<b>131</b>
<b>Bibliografija</b> .....	<b>134</b>

# 1. UVOD

## 1.1 Uvod u problematiku

Poslednjih godina trend u projektovanju pešačkih mostova su vitkije i lagane konstrukcije većih raspona. Razvoj građevinskih materijala koji omogućavaju veću nosivost, omogućio je da se proračunom zasnovanim na statičkoj analizi, uz kontrolu graničnih stanja nosivosti, dobijaju konstrukcije male mase i krutosti. Kao posledica toga, dolazi do smanjenja prirodnih frekvencija mosta, što rezultira većom osetljivošću na dinamička opterećenja.

Dinamička delovanja su u novije vreme vrlo retko bila uzrok oštećenja, ili pada konstrukcija pešačkih mostova, sa izuzetkom mosta u Canton-u u Kini [59] 1994.godine, ali njihovo dejstvo na komfor i emocionalne reakcije pešaka se ni u kom slučaju ne sme zanemariti. Naime, ljudsko telo predstavlja mehanički sistem permanentno izložen velikom broju prirodnih ritmova (srčani ritam, alfa moždani talasi, kretanje idr.), koji je posebno osetljiv na vibracije niskih frekvencija. S obzirom da delovi ljudskog tela ulaze u rezonancu pri vibracijama opsega do 100 Hz, zbog relativnog pomeranja delova tela, rezonancije ispod 10 Hz izazivaju posebnu neugodnost za ljude, uzrokujući neprijatne oscilacije u abdominalnom delu tela. Imajući u vidu da se prirodne frekvencije pešačkih mostovi uglavnom nalaze u opsegu do 10 Hz, to, iz pomenutih razloga, njihovo pobuđivanje može imati negativne efekte na korisnike. Ljudska osetljivost na vibracije je pored frekvencije uslovljena i drugim fizičkim faktorima, kao što su ubrzanje i vreme izloženosti uticaju, tako da je u osnovi, kriterijum prihvatljivosti vibracija u funkciji frekvencije, i uglavnom je izražen u jedinicama ubrzanja. Za slučaj vertikalnih vibracija, ubrzanje od 0.5 do 1 m/s<sup>2</sup>, dakle 5-10 % gravitacionog ubrzanja Zemlje (*g*), je prihvatljivo. Ljudi su osetljiviji na horizontalne vibracije i u tom smislu, prihvatljivo ubrzanje je reda 1-2% *g*. Takođe, treba pomenuti i da amplitude pomeranja veće od 10 mm u vertikalnom pravcu, odnosno 2 mm u horizontalnom, prete pojavom sinhronizacije značajnog broja pešaka tzv. «lock-in» efekta, što dovodi do značajnih pobuđenja konstrukcije. Opterećenje izazvano pešacima je najčešće dinamičko delovanje kod pešakih mostova. Generalno gledano, glavna karakteristika ovog dinamičkog opterećenja je mali intezitet, što znači da bi aplikacija istog kod masivnih i krutih konstrukcija teško izazvala značajnije vibracije. Međutim, kako su estetski zahtevi, zajedno sa tehnološkim razvojem i razvojem savremenih tehničkih rešenja, doprineli gradnji vitkih i fleksibilnih konstrukcija, tako su i sami pešački mostovi postali osetljiviji na dinamička opterećenja od pešaka. Samim tim, detaljnije dinamičke analize postale su neophodne pri projektovanju ovih konstrukcija. Prvi detaljno zabeležen slučaj kolapsa konstrukcije pešačkog mosta izloženog dinamičkom opterećenju od pešaka, je pad mosta u Broughton-u u Velikoj Britaniji, 1831.godine, dok je marširajućim korakom preko njega prelazilo 60 vojnika [34]. Posebnu pažnju stručne i naučne javnosti na važnost analize stanja upotrebljivosti pešačkih mostova s obzirom na vibracije indukovane pešacima, skrenuo je slučaj čuvenog Milenijumskog mosta u Londonu, 2000.godine [18] i Solferino mosta u Parizu [66] nekoliko godina kasnije.

Očekivana vrsta pešačkog saobraćaja, kao i kategorija učesnika u saobraćaju, u mogome utiču na sam proračun dinamičkih odgovora. Naime, pešački mostovi koji povezuju slabo naseljena područja svakako će manje biti izloženi dejstvu opterećenja od pešaka u odnosu na one sa veoma gustim protokom pešaka, najčešće locirane u urbanim zonama. Takođe, pešački mostovi koju su u blizini školskih, ili zdravstvenih centara, za korisnike će imati osetljiviju kategoriju stanovništva, za razliku od onih koji se npr. nalaze u zonama namenjenim sportu i rekreaciji.

Precizniji pristup provere stanja upotrebljivosti u pogledu vibracija podrazumeva analizu dinamičkog odgovora konstrukcije pod dejstvom projektovanog opterećenja, tj. opterećenja koje prouzrokuje najveći odgovor, pobuđujući konstrukciju pri njenoj osnovnoj prirodnoj frekvenciji. To znači da tokom proračuna konstrukcije, a u zavisnosti od njene vrste i namene, projektanti treba da predvide dinamičko ponašanje mosta, koje podrazumeva osetljivost konstrukcije na dinamička opterećenja, odnosno intenzitet vibracija, kao i stanje napona i deformacija pri tome.

Analiza vibracija mostova sa bilo kojeg važnijeg aspekta povezana je gotovo uvek sa znatnim praktičnim poteškoćama. To se naročito odnosi na rešavanje diferencijalnih jednačina, a pogotovu frekventne jednačine. Problem postaje znatno kompleksniji kada se radi o gredama promenljivog poprečnog preseka, o analizi u neelastičnoj oblasti, o komplikovanim spoljnim opterećenjima, itd. U svim takvim slučajevima, pri oceni vremenske zavisnosti pomeranja posmatrane konstrukcije, pri datom vremenski promenljivom opterećenju, koriste se približne metode. Za inženjersku praksu vrlo je važna analiza kvalitativne, a naročito kvantitativne promene neke dinamičke veličine pri proizvoljnoj, ili određenoj promeni uzroka njenog nastajanja, odnosno pri promeni izvesnog parametra. Analiza problema koja se zasniva na približnim metodama, bilo da se radi o simplifikovanom dinamičkom modelu mosta, odnosno pokretnog opterećenja, ili pak numeričkom postupku, po pravilu je uvek znatno zametnija od iste takve analize koja se sprovodi prema analitičkim rešenjima u zatvorenom obliku.

Do danas, čak i primenom savremenih analitičkih metoda, na sva pitanja u vezi sa dinamičkim ponašanjem konstrukcija pešačkih mostova, ne može se odgovoriti sa potpunom tačnošću. Međutim, neke od njih, kao i one predložene u ovom radu, mogu predstavljati veliku pomoć u proceni dinamičkog ponašanja, što jeste preduslov za savremen i prihvatljiv princip projektovanja i, uz primenu savremenih tehnologija, izradu modernih i kvalitetnih pešačkih mostova.

Osnovi cilj naučnog istraživanja u ovoj tezi je da se kroz teorijsku analizu vibracija, ukaže na mogućnosti izbegavanja prekomernih pobuđenja konstrukcija pešačkih mostova. Realizacija cilja sprovodi se kroz dinamičku analizu prinudnih vibracija prema predloženim algoritmima i time vrši ocena ponašanja pešačkih mostova karakterističnih grednih sistema, sa jednim, ili više polja, variranjem relevantnih parametara oscilatornog sistema. U te parametre spadaju, pre svega, krutost i masa rasponske konstrukcije mosta, modeli pobuđujućih sila (pokretne koncentrisane sile i pokretno parcijalno jednako raspodeljeno opterećenje) u karakterističnim konstelacijama

njihovog pojedinačnog, ili zajedničkog delovanja. Pri tome, dobijeni rezultati se upoređuju sa rezultatima analiza sprovedenih prema nekoliko svetskih standarda za ovu oblast. Uz postojeća saznanja i zaključke ovog rada, projektantima treba da se omogući sagledavanje relevantnih parametara i aspekta u fenomenu vibracija, na koje treba uticati tehničkim rešenjima konstrukcija pešačkih mostova, kako bi se obezbedila optimalna funkcionalnost ovih objekata.

## 1.2 Organizacija teze

U doktorskoj tezi pod naslovom **Analiza graničnog stanja upotrebljivosti pešačkih mostova u pogledu vibracija indukovanih pešacima**, navedena problematika je sistematizovana i izložena kroz sledeća poglavlja:

1. *Uvod*
2. *Modeliranje sile usled kretanja pešaka*
3. *Kriterijumi konfora i granične vrednosti*
4. *Modeliranje grednih rasponskih konstrukcija i analiza vibracija indukovanih pešacima*
5. *Dinamička analiza nekih karakterističnih pešačkih mostova sa aspekta prihvatljivosti vibracija*
6. *Zaključak*

U poglavlju **1** je kroz **uvodno izlaganje** dat koncizan uvid u opštu problematiku vibracija pešačkih mostova izazvanih pešacima, gde se vibracije aktuelizuju kao jedno od graničnih stanja upotrebljivosti. Takođe, u ovom poglavlju je dat i **cilj istraživanja** kao i **organizacija teze**.

U poglavlju **2 Modeliranje sile usled kretanja pešaka**, uz koncizan pregled literature, detaljno su obrađena delovanja usled hoda, trčanja, ili skakanja, tzv. vandalskih delovanja, a takođe su objašnjeni mehanizmi nastanka fenomena indukcije spontane sinhronizacije pešaka, tzv. lock-in efekata. Prikazani su značajniji modeli opterećenja prema dostupnoj literaturi, kao i internacionalnim standardima i preporukama.

U poglavlju **3 Kriterijumi konfora i granične vrednosti**, pored osvrta na ljudsku percepciju vibracija, kao i osetljivosti na njih, dati su kriterijumi konfora i granične vrednosti za frekvencije i ubrzanja prema internacionalnim standardima i preporukama.

U poglavlju **4 Modeliranje grednih rasponskih konstrukcija i analiza vibracija indukovanih pešacima**, za gredne sisteme pešačkih mostova, data su rešenja problema vibracija u zatvorenom obliku, uz prethodno definisanje poremećajnih sila, a za sisteme konstantnih i promenljivih masa i krutosti na savijanje duž raspona superstrukture mosta. Takođe su priložena i analitička rešenja za promenu osnovne frekvencije kontinualnih sistema usled uticaja mase pokretnog opterećenja.

U poglavlju **5 Dinamička analiza nekih karakterističnih pešačkih mostova sa aspekta prihvatljivosti vibracija** je, u odeljku **5.1 Test primeri**, izvršeno poređenje rezultata analize vibracija za kontinualne i odgovarajuće diskretne sisteme. Takođe, za tri pešačka mosta različitih konstrukcijskih sistema i ugrađenih materijala, izvršena je dinamička analiza odgovora konstrukcija, prema algoritmima predloženim u poglavlju 4. Rezultati su prikazani u vidu simuliranih oscilograma, a dobjene vrednosti upoređene su sa graničnim vrednostima prema važećim standardima. Izvršena je dinamička analiza i za izuzetna opterećenja (vandalsko opterećenje, prelaženje vozila). Rezultati dobijeni simulacijom prelaženja vozila preko spregnutog mosta, upoređeni su sa eksperimentalno određenim podacima.

Poglavlje **6** obuhvata završne napomene i opšte **zaključke** u vezi sa problematikom tretiranom u tezi, pošto su posebni zaključci i komentari sadržani u ostalim poglavljima.



## 2. Modeliranje sile usled kretanja pešaka

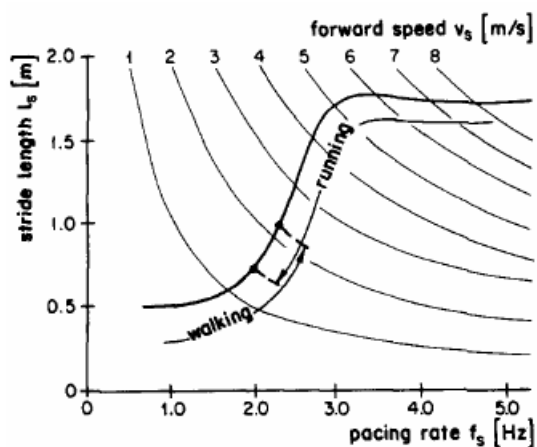
### 2.1 Delovanje izazvano pešacima

Opterećenje izazvano pešacima nastaje usled različitih aktivnosti kao što su hodanje, trčanje, skakanje, ali i tzv. vandalska opterećenja. Svako od ovih opterećenja ima drugačiju krivu promene u vremenu (sl.2.1.2), kao i frekvencije u kojima se mogu pojaviti oscilacije. Opseg frekvencija normalnog hoda je, grubo rečeno, između 1.5 i 2.5 Hz. Opsezi tipičnih frekvencija trčanja, hodanja i skakanja dati su u tabeli 2.1.1.

Tabela 2.1.1 Veličine grupa pešaka i opsezi frekvencija tipičnih vrsta kretanja [57]

Aktivnost	Veličina grupe br. pešaka	Opseg učestalosti aktivnosti, Hz (koraka/s)	
		Normalni opseg	Mereni opseg
Hodanje	1, 2 i 4	1.6 – 2.2	1.0 – 3.0
Trčanje	1, 2 i 4	2.2 – 3.2	1.6 – 4.0
Skakanje	1, 4 i 8	2.0 – 3.0	1.4 – 4.0
Hodanje sa poskakivanjem	1, 2 i 4	2.0 – 2.6	1.6 – 3.4
Trčanje u mestu	1, 2 i 4	2.2 – 3.2	1.4 – 4.0

I pored toga što imaju istu frekvenciju hoda, dužine koraka pojedinaca razlikuju se usled njihovih međusobnih razlika u telesnoj visini, i time i dužini noge. Dužina noge uslovljava dužinu koraka i stoga pojedinci hodaju sporije, ili brže od drugih [64], [76].

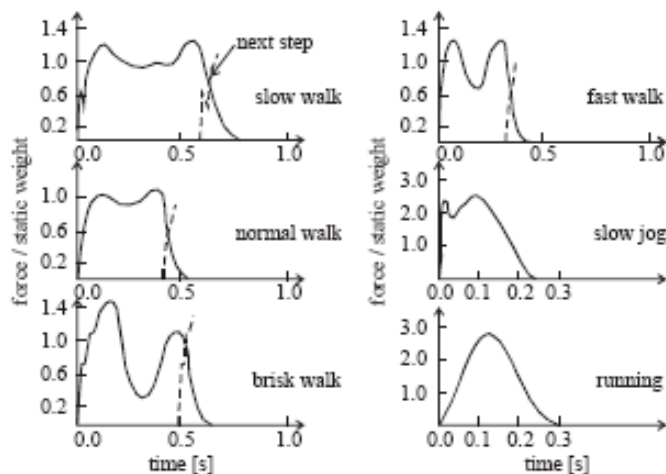


Slika 2.1.1 Veza između frekvencije hoda, brzine i dužine koraka [76]

	$f_s$	$v_s$	$l_s$
	[Hz]	[m/s]	[m]
lagan hod	1.7	1.0	0.60
normalan hod	2.0	1.5	0.75
brz hod	2.3	2.3	1.00
normalno trčanje	2.5	3.1	1.25
brzo trčanje	>3.2	5.5	1.75

Tabela 2.1.2 Tipične vrednosti frekvencije hoda, brzine i dužine koraka [4]

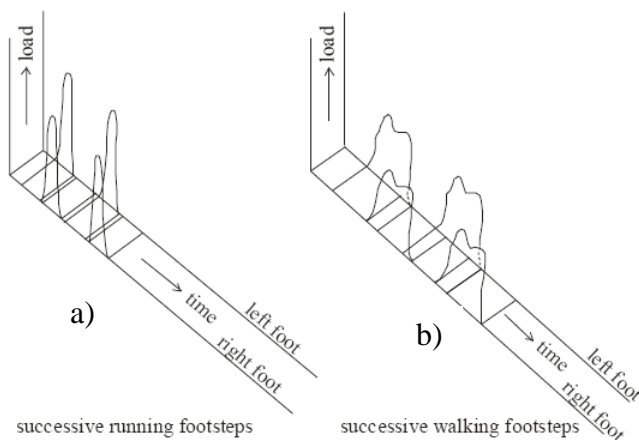
Slika 2.1.1 pokazuje vezu između frekvencije hoda, brzine i dužine koraka kod neometanog hodanja i trčanja, dok su neke relevantne vrednosti frekvencija, brzina i dužine koraka date su u tabeli 2.1.2.



Slika 2.1.2 Promena sile u vremenu za različite vrste kretanja pešaka [77]

### 2.1.1 Dejstvo usled hoda

Opterećenje indukovano hodom je periodično pobuđenje čiji intenzitet uglanom zavisi od frekvencije hoda pešaka i njegove težine. Galbraith i Barton [32] su merili vertikalnu silu usled kretanja pešaka (od sporog hoda do trčanja) po aluminijumskoj platformi i pri tome, zapazili su da se oblik zapisa vertikalne sile u vremenu razlikuje od oblika zapisa sile usled trčanja, po tome što ima samo jedan pik (sl.2.1.3).

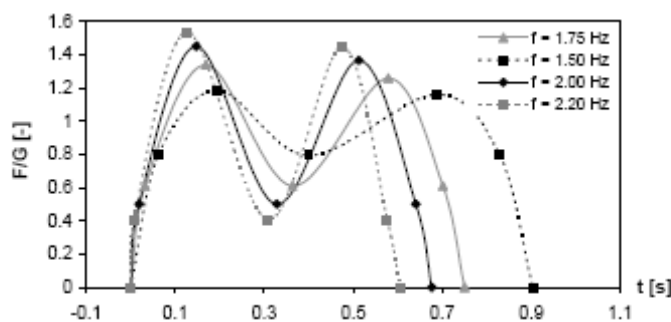


Slika 2.1.3 Promena sile usled: a) trčanja i b) hodanja [32].

Kako je stopalo uvek u kontaktu sa podlogom, opterećenje ne nestaje u potpunosti ni u jednom trenutku vremena. Tokom kretanja, težina tela se prebacuje sa jednog stopala na drugo, tako da se krive opterećenja za jedno i drugo stopalo preklapaju (sl.2.1.3b). S druge strane, prilikom trčanja postoje kraći intervali vremena kada su oba stopala iznad podloge, što dovodi do sile intenziteta jednakom nuli na vremenskom zapisu (sl.2.1.3a). Vertikalna komponenta opterećenja je veća od horizontalne, ali lateralna i longitudinalna komponenta takođe mogu izazvati problematične vibracije kod vitkih mostova, specijalno ukoliko se razvije interakcija pešak-most.

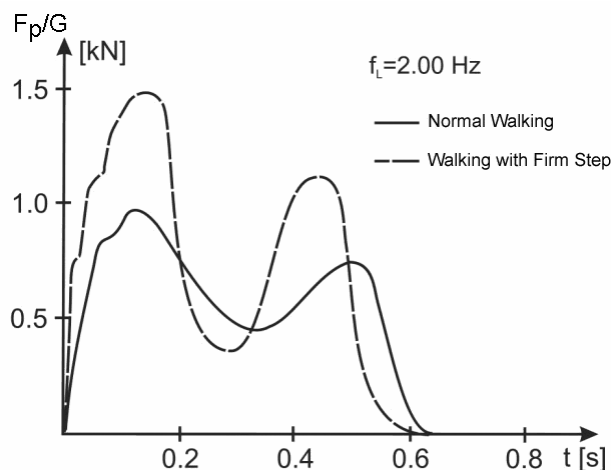
### Vertikalna komponenta sile

Normalni hodu indukuje silu čija vertikalna komponenta, za jedno stopalo, je sedlastog, odnosno leptirastog oblika sa dva dominantna maksimuma. Prvi je uzrokovan udarom pete o podlogu, dok drugi nastaje usled otiskivanja. Maksimumi rastu sa uvećanjem frekvencije hoda (sl.2.1.4). Ovaj oblik ima tendenciju prelaska u polu-sinusoidalni oblik sa promenom aktivnosti od hoda ka trčanju (sl.2.3a).



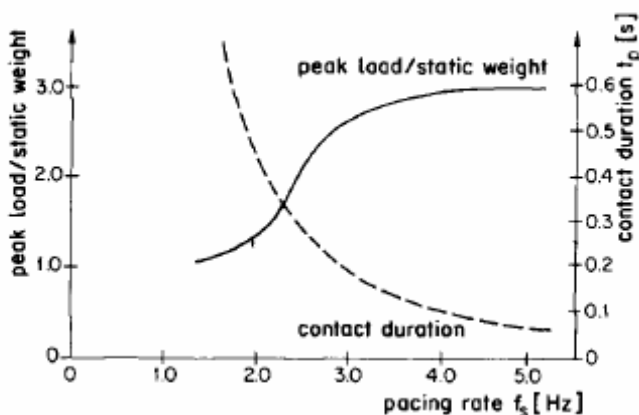
Slika 2.1.4 Vertikalno opterećenje za različite frekvencije hoda [44]

U slučaju tvrdih đonova, udarac pete o podlogu izaziva veoma oštre pikove na pomenutoj leptirolikoj krivoj opterećenja.



Slika 2.1.5 Vertikalna reakcija podloge: normalan hod i hod sa čvrstim korakom [4]

Odnos između frekvencije hoda, vremenskog perioda kontakta sa podlogom i maksimuma opterećenja prikazan je na slici 2.1.6.



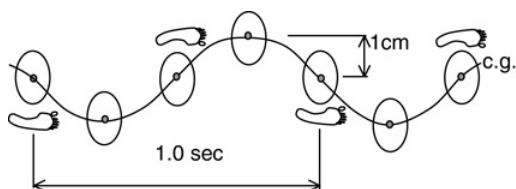
Slika 2.1.6 Period kontakta i odnos maksimuma opterećenja i težine u odnosu na  $f_s$  [76]

U slučaju veoma sporog hoda sa frekvencijom manjom od 1 Hz (veliki period kontakta sa podlogom) dinamička opterećenja su jednaka statičkim usled telesne težine pešaka. Kod brzog hoda sa frekvencijom od 2 do 2.5 Hz, dinamičko opterećenje postaje 1.5 puta veće od statičkog. U slučaju veoma brzog trčanja ( $f_s > 3.5$  Hz), maksimum dinamičkog opterećenja je tri puta veći od težine pešaka.

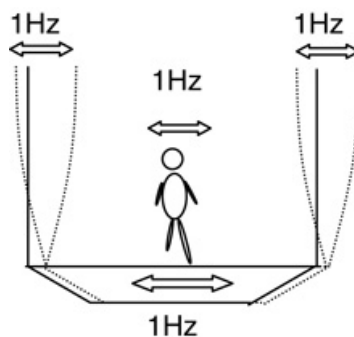
### Horizontalna komponenta sile

Horizontalne komponente sile u podužnom i poprečnom pravcu su mnogo manjeg intenziteta od vertikalne komponente, ali se, svakako, ne mogu zanemariti s obzirom da i one mogu biti izvor problema vezanih za prkomerne vibracije.

Iako je dobro poznato da je frekvencija hoda prosečno 2 Hz, manje je poznato da 10% vertikalnog opterećenja “radi” bočno pri hodu [4]. Težište ljudskog tela pomera se bočno pri prelasku, tokom koračanja, sa jednog stopala na drugo, što indukuje lateralnu dinamičku silu (sl.2.1.7). Ukratko, lateralna sila (poprečni pravac) je uzrokovana bočnim oscilacijama tela (sl.2.1.8).

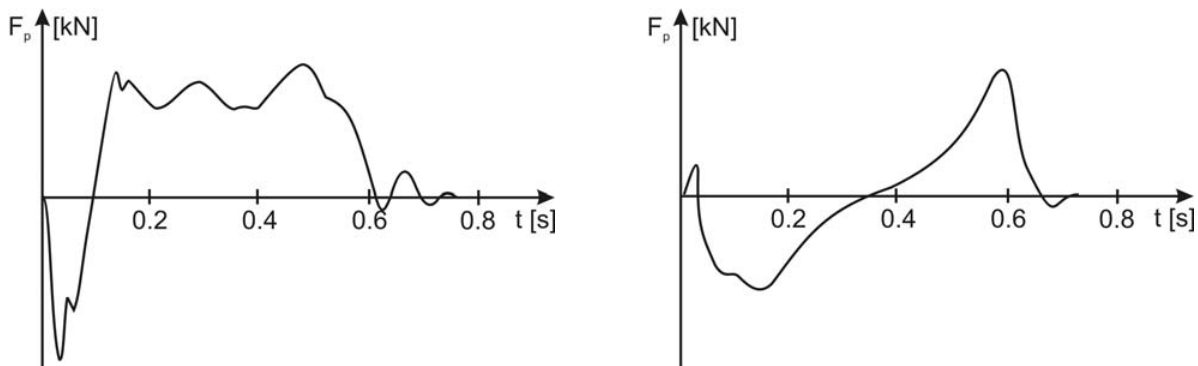


Slika 2.1.7 Pomeranje težišta tela tokom hoda [50]



Slika 2.1.8. Mehanizam lateralnih vibracija [50]

Slika 2.1.9 pokazuje vremenski tok horizontalne reakcije podloge na nepokretnoj površini. Za razliku od vertikalne sile, horizontalne sile su periodične sa frekvencijom upola manjom od frekvencije hoda.

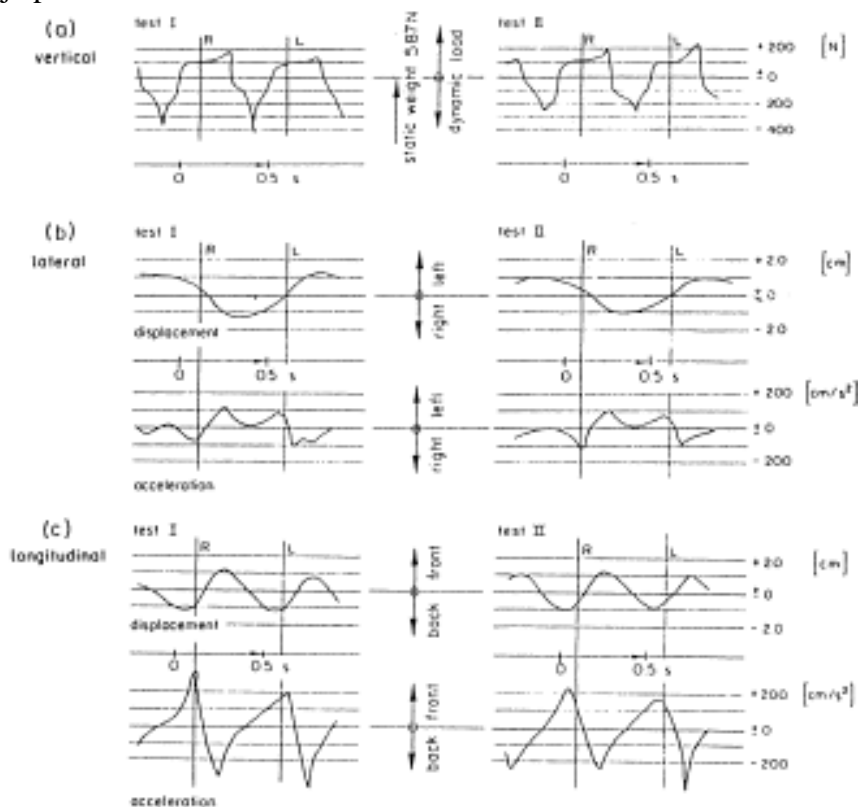


a)

b)

Slika 2.1.9 Reakcija podloge usled hoda: a) lateralna, b) longitudinalna [64]

Longitudinalna sila (podužni pravac) nastaje usled potiskivanja podloge (gazišta mosta) i otiskivanja od nje pri hodu.



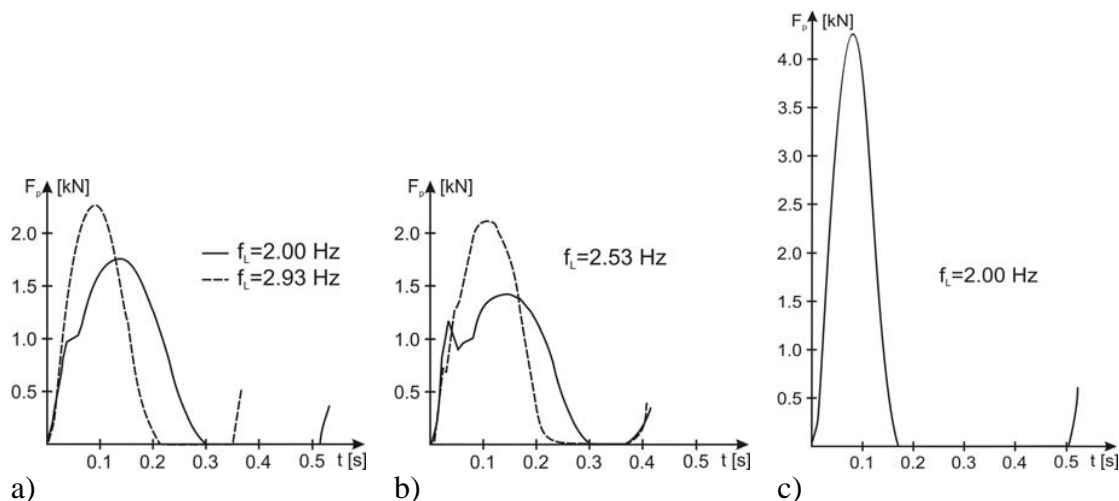
Slika 2.1.10 Merena promena sile i ubrzanja nastalih usled hoda frekvencije 2 Hz :a) vertikalna komponenta b) lateralna komponenta, c) longitudinalna komponenta [4]

## 2.1.2 Delovanja usled trčanja i skakanja

Trčanje se karakteriše diskontinualnim kontaktom sa podlogom. Sila postaje jednaka nuli kada se kontakt sa podlogom prekida. U poređenju sa hodanjem, sila indukovana trčanjem više zavisi od individualnog stila trčanja. Često je trajanje prelaska džogera preko mosta relativno kratko da bi ostavilo dovoljno vremena za pojavu fenomena rezonancije, ali, svakako, i u tako kratkom periodu može izazvati nelagodnost kod ostalih korisnika na mostu [66].

### Vertikalna komponenta sile

Dok vertikalno opterećenje indukovano hodanjem karakterišu dva maksimuma, opterećenje indukovano trčanjem ima samo jedan. Njega karakteriše naglo povećanje i smanjenje. Maksimum se uvećava i postaje sve uži sa povećanjem frekvencije hoda, a samim tim se i faza kontakta smanjuje. Usled udarca pete o podlogu, opterećenje može da poraste od 3 do 5 puta u odnosu na telesnu težinu.



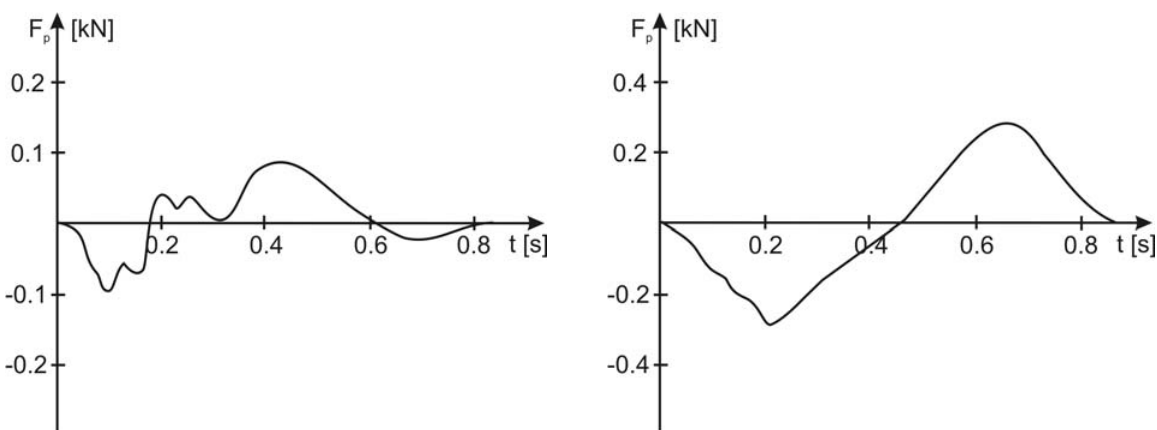
Slika 2.1.11 Reakcija podloge: a) trčanje sa različitim frekvencijama, b) trčanja zavisno od stila, c) skakanje [4]

Izvestan broj autora radio je na određivanju sile indukovane individualnim vandalskim ponašanjima pešaka [8], [24], [56], [73] i [74].

Sile indukovane skakanjem su, radi poređenja, takođe prikazane na sl.2.1.11. One su slične onima indukovanim trčanjem, ali imaju više amplitude. Skakanje nije normalan vid aktivnosti na pešačkim mostovima, ali kao sistematsko pobuđenje (vandalizam) trebalo bi da se uzme u obzir. Vibracije uzrokovane skakanjem imaju širi opseg frekvencija pobuđenja, od 1 Hz do 3.5 Hz.

### Horizontalna komponenta sile

Prema Schneider-u [64], lateralna komponenta sile je, zbog veće lateralne stabilnosti prilikom trčaja, upola manje od sile uzrokovane hodanjem. Takođe, rizik od pojave lock-in efekta je ništavna s obzirom da je kontakt između pešaka i konstrukcije manji kod trčanja, nego kod hodanja. Kao i pri hodanju, lateralna reakcija podloge je periodična, sa frekvencijom upola manjom od frekvencije trčanja, s obzirom da sila menja pravac pri svakom koraku.



a)

b)

Slika 2.1.12 Reakcija podloge usled trčanja [64]: a) lateralna komponenta, b) longitudinalna komponenta

Neka eksperimentalna istraživanja potvrdila su postojanje horizontalne sile i pri skakanju [73], pri čemu je longitudinalna komponenta značajnije veća od transverzalne.

### 2.1.3 Delovanje grupe pešaka

Vrsta pešačkog saobraćaja koji se odvija na mostu u mnogome utiče na dinamički odgovor konstrukcije, koji postaje mnogo komplikovaniji kada su pešački mostovi izloženi simultanom delovanju više pešaka. Pri velikim gustinama pešaka sloboda pojedinca da izabere sopstveni način hoda je ograničena. Naime, svaki korisnik ima svoje karakteristike (frekvenciju, brzinu, težinu), tako da, u zavisnosti od broja osoba prisutnih na mostu, dolazi do manje, ili veće međusobne sinhronizacije pešaka. Pri određenim uslovima, može doći do tzv. lock-in efekta, kada pojedinci počinju da se kreću rezonantnom frekvencijom konstrukcije.

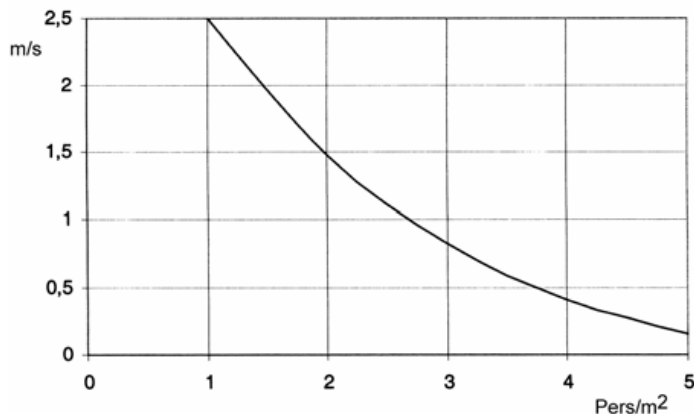
#### 2.1.3.1 Gustina pešaka

Gustina pešaka u mnogome utiče na brzinu kretanja individue i zato je veoma važna za dinamičku analizu. Odnos između brzine kretanja pešaka i njihove gustine prikazan je na slici 2.13. Gustina pešaka može se sračunati prema sledećim izrazima:

$$q = \frac{\lambda}{v_s \cdot b_{eff}} \text{ [peš/m}^2\text{]} \quad (2.1.1)$$

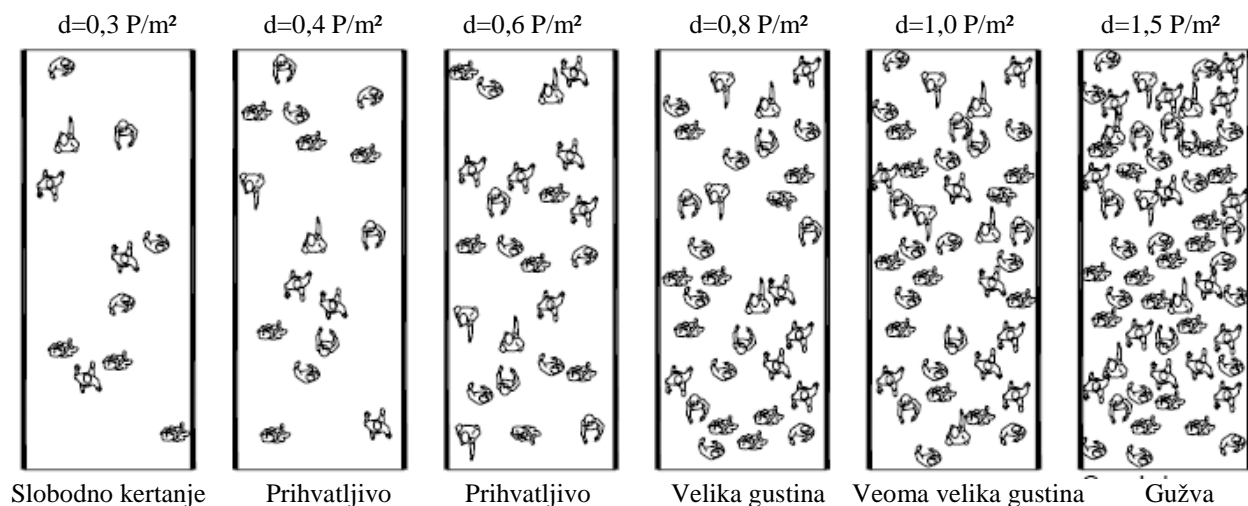
$$q = \frac{N_r}{b_{eff} \cdot L} \text{ [peš /m}^2\text{]} \quad (2.1.2)$$

gde je  $\lambda$  nivo nailaska pešaka [peš/s],  $v_s$  je brzina hoda [m/s],  $b_{eff}$  je efektivna širina mosta [m],  $N_r$  je broj pešaka na mostu i  $L$  je dužina mosta [m].



Slika. 2.1.13 Odnos između gustine pešaka i brzine njihovog kretanja [54]

Glavna karakteristika kretanja pešaka u koloni male gustine je da sloboda pokreta pojedinca nije ograničena. Prema Oeding-u [53], u koloni, gde je gustina pešaka od 0.3 peš/m<sup>2</sup> to 0.6 peš/m<sup>2</sup>, pešaci se mogu nesmetano kretati svojom sopstvenom frekvencijom hoda. Ukoliko se gustina pešaka povećava, pojedinac više nije u mogućnosti da se kreće svojom sopstvenom frekvencijom i brzinom hoda. Takođe, može doći i do sinhronizacije frekvencije, faze i brzine kretanja pešaka i kretanja mostovske konstrukcije.



Slika 2.1.14 Različiti tipovi gustine pešaka [53]

Generalno, brzina kretanja pešaka se smanjuje sa povećanjem gustine saobraćaja. Pešak mora da prilagodi brzinu hoda kretanju mase. Prva restrikcija brzine nastaje pri gustini pešaka od 0.6 peš/m<sup>2</sup>, kada kretanje i postaje otežano. Pri gustini od 1.0 peš/m<sup>2</sup>, sloboda pokreta je znatno narušena, tako da pešaci moraju međusobno da usklađuju brzinu i frekvenciju hoda. U slučaju gustine od oko 1.5 peš/m<sup>2</sup>, pešaci počinju da se kreću u koloni, veoma malom brzinom, gde su mogući samo malim klizeći koraci, pri čemu je svojevoljno kretanje pešaka onemogućeno.



Treba naglasiti da se povećanje mase na mostu, naročito pri gustom pešačkom saobraćaju, odražava na promenu modalnih karakteristika sistema, kao i prigušenja. U odeljku 4.1.4, prikazana su rešenja za promenu (smanjenje) osnovne frekvencije mosta usled pridodatih masa.

Tabela 2.1.3 Klasifikacija gustine pešaka prema Oeding-u [53]

	Gustina pešaka [peš/m <sup>2</sup> ]	Karakteristike kretanja
1	$0 < q < 0.3$	Pešak se može kretati konforo i slobodno
2	$3 \leq q < 0.6$	Sloboda kretanja je delimično ograničena
3	$0.6 \leq q < 1.0$	Sloboda kretanja je ograničena
4	$q \geq 1.0$	Velika gužva, pojedinac nije više u mogućnosti da se kreće po svom nahodjenju

Razmatranje ponašanja mostovskim konstrukcija usled delovanja nastalih prelaskom gupe pešaka, definisano je u inženjerskim kodovima [13], [26] i dr., a posebno je važno da se ono predvidi u fazi proračuna. Za veći broj nezavisnih pešaka (bez posebne sinhronizacije) sa nivoom nailaska na most  $\lambda$  [peš/s], srednji dinamički odgovor u određenom preseku mosta izloženom dejstvu ove grupe pešaka može se dobiti multiplikacijom dejstva jednog pešaka faktorom  $k=(\lambda T)^{1/2}$ . Pti tome, T je vreme prelaska preko mosta [s] (može se predstaviti kao  $L/v$ , gde je L dužina mosta [m], a v je brzina kretanja pešaka [m/s]), a kako proizvod  $\lambda T$  predstavlja broj od N pešaka prisutnih na mostu u datom trenutku vremena, može se zaključiti da je broj sinhronizovanih  $\sqrt{N}$ , sa istom frekvencijom i različitim fazama [51]. Prema preporukama Sétra [34], na osnovu eksperimentalno utvrđenih podataka, za srednju i veću gustinu saobraćaja ekvivalent broju sinhronizovanih pešaka se određuje kao:

$$N_{eq} = 10.8\sqrt{N \cdot \xi} \quad (2.1.3)$$

gde je N broj pešaka na mostu (gustina pešaka  $\times$  efektivna površina mosta),  $\xi$  je relativno prigušenje, dok se veoma za veliku gustinu preporučuje:

$$N_{eq} = 1.85\sqrt{N} \quad (2.1.4)$$

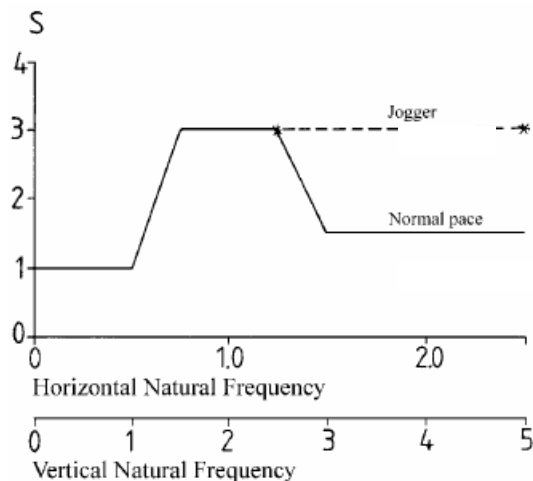
Generalno, problem vibracija usled prelaska grupe pešaka može se sagledati kroz više aspekata, kao što su: prelaženje manjih i sinhronizovanih grupa; prelaženje manjih nesinhronizovanih grupa i prelaženje neprekidne kolone pešaka [35].

Više autora se bavilo problemom opterećenja usled delovanja grupe pešaka (videti [22], [31], [41], [42] i [67]). Grundmann [34] je predložio koeficijent S, zavisan od prihvatljivog ubrzanja  $a= 0.7 \text{ m/s}^2$  prema BS 5400 [12], kojim se u proračun graničnog ubrzanja uvodi delovanje grupe pešaka za različite gustine pešačkog saobraćaja na mostu.

$$a_{gr} = S \cdot a \quad (2.1.5)$$

gde je  $S$  faktor sinhronizacije (videti sl.2.1.15),  $a$  je horizontalno, ili vertikalno ubrzanje usled prelaženja jednog pešaka, (videti odeljak 3.2)

Za mostove sa malom gustinom pešaka, odnosno sa očekivanim maksimumom od deset i manje pešaka u bilo kom trenutku, faktor sinhronizacije se može odrediti prema sledećem grafiku.



Slika 2.1.15 Faktor sinhronizacije za malu gustinu pešaka [34]

Ukoliko je protok pešaka na mostu mali ( $q \leq 0.6$  peš/m<sup>2</sup>) i pešaci su u mogućnosti da se slobodno kreću po površini mosta, faktor sinhronizacije se može naći prema sledećoj formuli za konstrukcije sa prvom osnovnom vertikalnom frekvencijom između 1.50 Hz i 2.50 Hz:

$$S = 0.225 \cdot N_r \quad (2.1.6)$$

Za frekvencije ispod 1.50 Hz i iznad 2.50 Hz, faktor se konzervativno može proceniti kao:

$$S = \sqrt{N_r} \quad (2.1.7)$$

Za frekvencije između 3.50 Hz i 4.50 Hz:

$$S = 0.225 \cdot 0.5 \cdot N_r \quad (2.1.8)$$

$$N_r = \lambda \cdot T_c \cdot K = q \cdot L \cdot b_{eff} \cdot K \quad (2.1.9)$$

gde je  $N_r$  broj pešaka na mostu,  $\lambda$  je nivo nailaska pešaka [peš/s],  $T_c$  je vreme prelaska preko mosta [s],  $K$  je težinski faktor usled različitih načina aplikacije opterećenja (prosta greda:  $K = 0.6$  prema [34]),  $L$  je dužina mosta [m],  $v_s$  je brzina kretanja [m/s],  $q$  je gustina pešaka [peš/m<sup>2</sup>],  $b_{eff}$  je efektivna širina mosta [m].

Za mostove sa protokom pešaka velike gustine  $q > 0.6$  peš/m<sup>2</sup>, faktor sinhronizacije se može sračunati prema relacijama (2.1.6), (2.1.7) i (2.1.8).

Prema Kramer-u [41], za prinudne vibracije mosta usled delovanja vremenski zavisne sile od jednog pešaka  $F(t)$ , koristi se koeficijent  $N_f$ , kojim se efekat sinhronizacije uvodi u račun na osnovu empirijskih faktora.

$$F_N(t) = N_f \cdot F(t) = N \cdot S \cdot R \cdot F(t) \quad (2.1.10)$$

gde je  $F(t)$  vremenski zavisna sila od jednog pešaka,  $N$  je broj pešaka na mostu,  $S = 0.275$  je empirijski faktor sinhronizacije (razlika između slobodnog i uslovljenog kretanja),  $R=0.465$  je empirijski faktor redukcije (razlika između raspodeljenog i koncentrisanog opterećenja).

Prema francuskim preporukama **Sétra Guide méthodologique passerelles piétones** [66], pešački mostovi se u zavisnosti od vrste i gustine saobraćaja koji se na njima odvija mogu podeliti na četiri klase.

### 2.1.3.2 Lock-In efekat

Lock-in efekat predstavlja svojevrsni fenomen pri kome grupa pešaka sa različitim frekvencijama i fazama kretanja, počinje postepeno da prilagođava frekvenciju hoda prirodnoj frekvenciji mosta i ulazi u fazu sa kretanjem konstrukcije. Naime, u slučaju pojave izraženijih vibracija na mostu, deo pešaka će u pokušaju održavanja ravnoteže, početi da se lagano pomera bočno, naizmenično u jednu i drugu stranu (tzv. mornarski hod). Ovo instiktivno ponašanje uzrokuje približavanje frekvencije hoda i faze, upravo frekvenciji mosta, tako da sile indukovane pešacima ulaze u rezonanciju sa konstrukcijom. Lock-in efekat se povećava sa amplitudom vibracija mosta, tako da broj pešaka koji učestvuju u korektivnom kretanju raste sa amplitudom vibracija mostovske konstrukcije [17], [18], [64]. Kako se vibracije mosta uvećavaju, tako početno slučajno pobuđenje usled delovanja grupe pešaka prerasta u rezonantno pobuđenje. Ova pojava postaje sve izraženija dok kritičan broj pešaka ne indukuje neprihvatljiv nivo vibracija.

Lock-in efekat nastaje brže za horizontalne, nego za vertikalne vibracije. Male bočne amplitude su dovoljne da izbace pešaka iz ravnoteže. Lateralne amplitude od 5 mm i frekvencija vibracija od 1 Hz u 40% slučajeva mogu dovesti do rezonacije [9].

Baumann i Bachmann [9] su primetili da sa vertikalnim amplitudama od 10-20 mm i frekvencijom hoda bliskoj frekvenciji vibracija, pešak nije u mogućnosti da se dalje kreće sa svojom inicijalnom frekvencijom. On počinje manje ili više da svoje pokrete prilagođava pokretima podloge. Prethodno još uvek nije potvrđeno eksperimentalno. Za lateralne vibracije, Bachmann [7] daje granično pomeranje od oko 2 mm, što je jasno potvrđeno u slučajevima Milenijumskog i Solférino mosta.

Kod mostova koji imaju osnovnu prirodnu frekvenciju 2 Hz, vertikalnom pomeranju od 10-20 mm odgovara ubrzanje od  $1.6 \text{ m/s}^2$ , što je veoma nekomforno i trebalo bi, sa aspekta kriterijuma ubotrebljivosti, da se izbegne.

## 2.2 Modeli opterećenja indukovanog hodom

Sila dobijena ekperimentalnim putem mora biti adekvatno analitički modelirana da bi se omogućila njena primena u proračunu vibracija pešačkih mostova. Do sada, u literaturi model vremenski zavisne sile indukovane pešacima je najviše eksploatisan. Pored toga, u vremenski zavisnom modelu sila može biti definisan kao deterministička, što podrazumeva uspostavljanje opšteg modela za različite pešačke aktivnosti, ali i kao probablistička, gde se u obzir uzima stohastička priroda parametara kretanja [79]. U svakom slučaju, matematičko modeliranje sile indukovane pešacima predstavlja zahtevan poduhvat i samim tim, podrazumeva i primenu izvesnih pretpostavki koje će u kasnijem izlaganju biti definisane. U daljem pregledu literature biće predstavljeni modeli opterećenja od pešaka, definisani kao determinističke sile.

### 2.2.1 Model vertikalnog opterećenja

Posmatranjem pešaka u hodu može se zapaziti da svaki korak predstavlja jedan impuls, dok su koraci tokom kretanja niz impulsa pomenih duž puta i u vremenu (sl.2.2.1). Dakle, opterećenje od hoda je suma opterećenja uzrokovanog kontinualnim koracima, koje se može simulirati pulsacionim redom pojedinačnih opterećenja od koraka. Uz pretpostavku da je opterećenje oba stopala isto i da je vreme potrebno da stopalo nalegne na podlogu konstantno za određen režim hoda, opterećenje indukovano hodom je periodične prirode i može se podeliti na različite sinusoidalne oscilacije primenom Fourier-ove transformacije.

$$F(t) = F_0 + \sum_{i=1}^n F_i \cdot \sin(2\pi \cdot i \cdot f_s \cdot t - \varphi_i) \quad (2.2.1)$$

gde je:

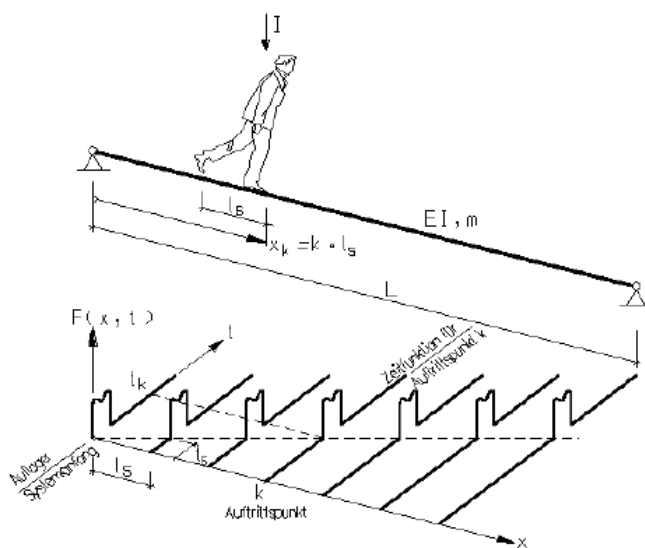
$F_0$  = statičko opterećenje (težina pešaka)

$F_i$  =komponenta opterećenja za frekvenciju  $i \cdot f_s$

$f_s$  =frekvencija hoda

$\varphi_i$  = fazni ugao komponente  $F_i$

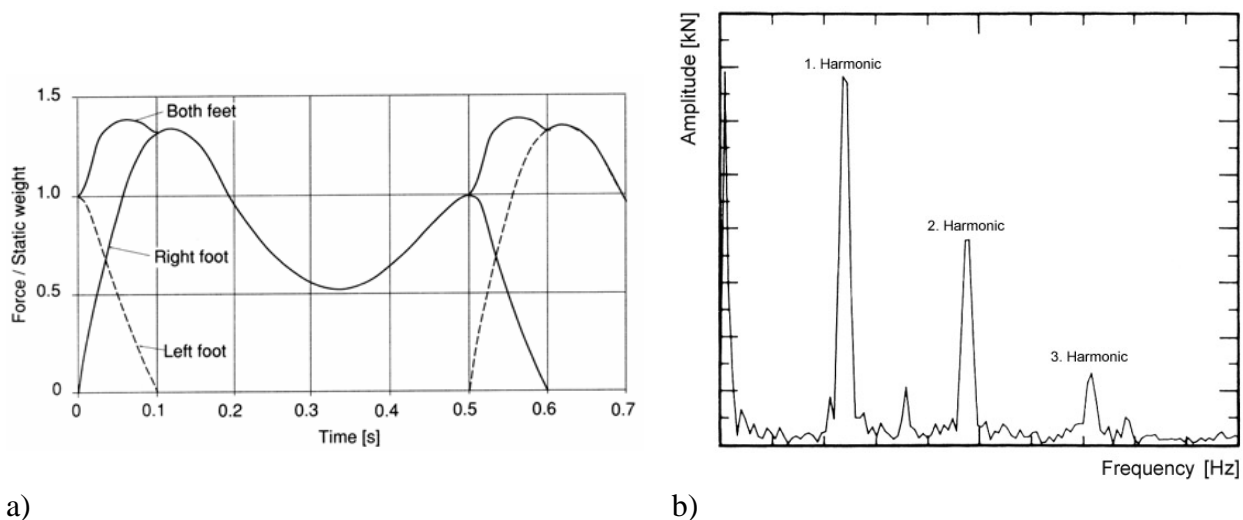
$n$  =broj razmatranih harmonika



Slika 2.2.1 Vertikalna komponenta sile indukovane kretanjem pešaka [68]

Slika 2.2.2 prikazuje, za vertikalno opterećenje indukovano hodom, rezultujuću vremensku istoriju, spektar amplituda i različite koeficijente opterećenja.

Broj harmonika koji treba uzeti u obzir zavisi od njihovih amplituda i dinamičkih uticaja. Mostovi se mogu pobuditi čak i drugim i trećim harmonikom. Odnos između amplitude sile i telesne težine pešaka se definiše pomoću dinamičkog faktora. Rezultati različitih istraživanja pokazuju da je dijapazon ovih vrednosti veoma širok ([7], [8], [10], [63], [73] i dr.), a neke od njih date su u tabeli 2.2.1. Dinamički faktori sile su određeni za kretanje po krutoj podlozi. Primetno je da prvi dinamički faktor znatno raste sa povećanjem frekvencije hoda, dok drugi ne pokazuje veliku zavisnost od frekvencije. Prema nekim autorima [4] prve tri komponente relevantne su za proračun.



a)

b)

Fig. 2.2.2 a) rezultujuća vertikalna sila indukovana hodom [5] b) Fourier-ov Spektar dobijen pomoću brze Fourier-ove transformacije (FFT) [62]

Bachmann [35] predstavlja vertikalno opterećenje (uzimajući u obzir prva tri harmonika) kao:

$$F_v = F_0 + F_{1,v} \cdot \sin(2\pi \cdot f_s \cdot t) + F_{2,v} \cdot \sin(4\pi \cdot f_s \cdot t - \varphi_2) + F_{3,v} \cdot \sin(6\pi \cdot f_s \cdot t - \varphi_3) \quad (2.2.2)$$

gde je:

$F_0$  = stalno opterećenje od pešaka,

$F_{i,v} = \alpha_i F_0$  = doprinos  $i$ -tog harmonika ukupnom opterećenju,

$f_s$  = frekvencija hoda,

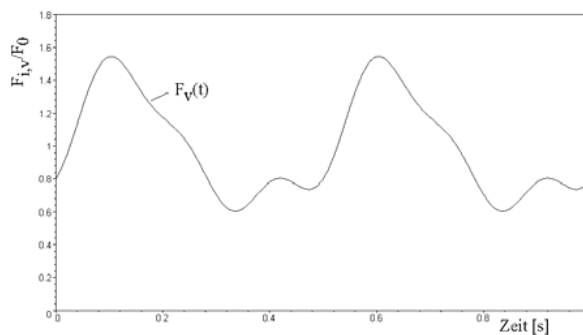
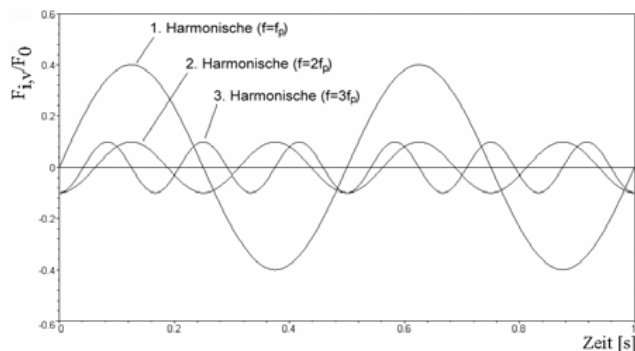
$\varphi_i$  = fazni ugao  $i$ -tog harmonika,

$\alpha_i$  = Fourier-ov koeficijent  $i$ -tog harmonika, tzv. dinamički faktor opterećenja.

Tabela 2.2.1 Preporučene vrednosti dinamičkih faktora za vertikalna opterećenja

Dinamički faktor	$F_{1,v}/F_0$	$F_{2,v}/F_0$	$F_{3,v}/F_0$
Blanchard et al. [10]	0.275 za $f_s < 4\text{Hz}$	-	-
Bachmann [4]	0.4 za $f_s = 2\text{Hz}$ 0.5 za $f_s = 2.4\text{Hz}$	0.1	0.1
Young [75]	$0.37(f_s - 0.95)$ 0.5	$0.054 + 0.0044 f_s$	$0.026 + 0.0050 f_s$
Sétra [66]	0.4 za $f_s = 2\text{Hz}$	0.1	0.1

Prema eksperimentima [4], [44], [64] fazni ugao zavisi od različitih parametara i ima veliki opseg vrednosti. Bachmann se odlučio za aproksimativne vrednosti  $\varphi_2 = \varphi_3 = \pi/2$ .



a)

b)

Slika.2.2.3 Vertikalne sile indukovane hodom: a) prva tri harmonika sa  $\pi_2 = \pi/2$  and  $\pi_3 = 3\pi/8$ , b) rezultujuća sila [6]

## 2.2.2 Model horizontalnog opterećenja

Spektar lateralne komponente sile pokazuje da su komponente opterećenja aplicirane sa pola frekvencije hoda i njenim multiplama. Uzimajući u obzir prva tri harmonika, Fourier-ovi koeficijenti lateralne komponente sile mogu se opisati kao:

$$F_h = F_{1,h} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{f_s}{2} \cdot t\right) + F_{2,h} \cdot \sin\left(4\pi \cdot \frac{f_s}{2} \cdot t - \varphi_2\right) + F_{3,h} \cdot \sin\left(6\pi \cdot \frac{f_s}{2} \cdot t - \varphi_3\right) \quad (2.2.3)$$

gde je:

$F_{i,h}$  = doprinos  $i$ -tog harmonika ukupnom opterećenju,

$f_s$  = frekvencija hoda,

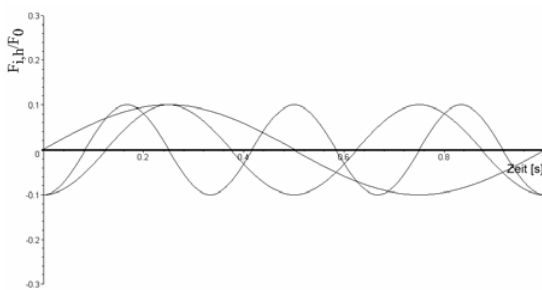
$\varphi_i$  = fazni ugao  $i$ -tog harmonika.

Preporučene vrednosti za lateralnu komponentu opterećenja date su u tabeli 2.5.

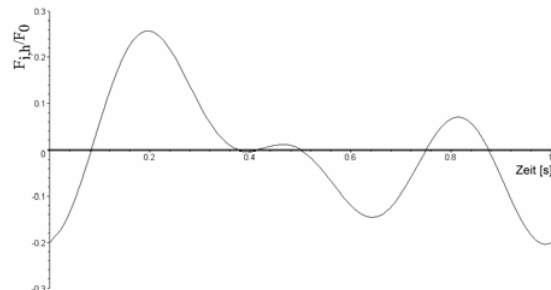
Table 2.2.2 Preporučene vrednosti dinamičkog faktora za lateralna opterećenja za  $f_s=2$  Hz

Dinamički faktor	$F_{1,h}/F_0$	$F_{2,h}/F_0$	$F_{3,h}/F_0$	$F_{4,h}/F_0$
Eurocode 1 [26]	0.1	-	-	
Schulze (prema [4])	0.039	0.01	0.043	0.12
Sétra [66]	0.05	0.01	0.05	0.05

Fazni ugao bi trebalo da se uzme kao  $\varphi_2 = \varphi_3 = \pi/2$ . Prema tome, odgovor rezultujuće sile prikazan je na slici 2.2.4.



a)



b)

Slika 2.2.4 Lateralna opterećenja indukovana hodom: a) prva tri harmonika za  $F_{i,h}/F_0 = 0,1$ , b) rezultujuća sila [35]

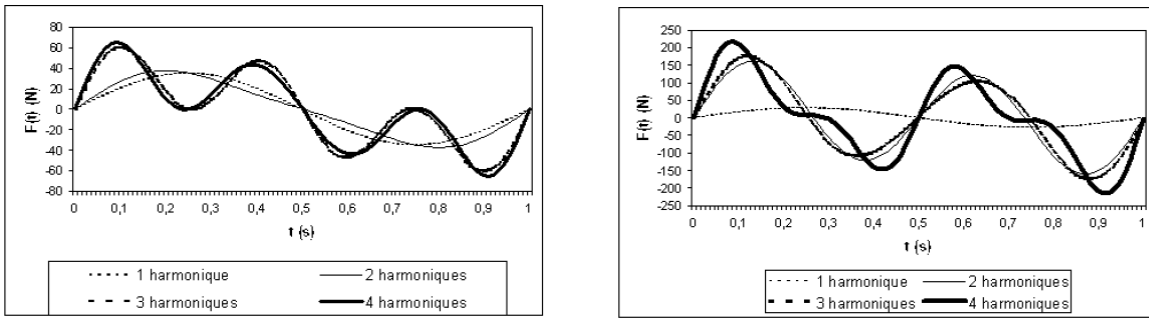
Francuske preporuke **Sétra Guide méthodologique passerelles piétones** [66] uzimaju u obzir prva četiri člana reda (2.2.4), da bi se dobila funkcija opterećenja kako u lateralnom, tako i u longitudinalnom pravcu, dovoljno bliska mereni opterećenjima od pešaka (sl 2.2.5).

$$F(t) = \sum_{i=\frac{1}{2}}^n G_i \cdot \sin(2\pi i f_m \cdot t) \quad (2.2.4)$$

gde je:

$G_i$  = doprinos  $i$ -tog harmonika ukupnom opterećenju

$f_m$  = frekvencija hoda



a)

b)

Slika 2.2.5 Opterećenje indukovano hodom  $f_s=2$  Hz: a) lateralna komponenta, b) longitudinalna komponenta [66]

U praksi, longitudinalna komponenta sile indukovane hodom ima vrlo mali uticaj na pešačke mostove.

### 2.2.3 Modeli opterećenja u preporukama i standardima

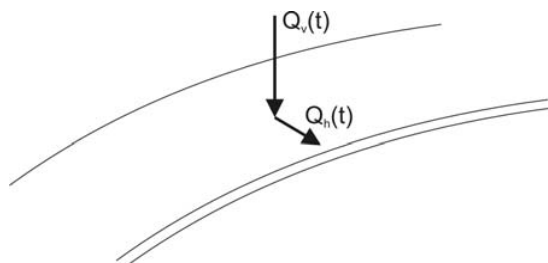
U prenorm of Eurocode 1, Part 1 'live loads on bridges', model opterećenja od jednog pešaka (ranije poznat kao DLM1), koji je takođe sadržan i u British Standard BS 5400, Part 2 [12] i Ontario Highway Bridge Design Code OHBDC ONT 83 [55], limitiran je na prvi harmonik sile  $F(t)$  (videti izraz 2.2.1). Dinamičko opterećenje sastoji se od pulsirajuće stacionarne sile sa dve komponente. To podrazumeva efekat pešaka težine 700 N, koji se kreće brzinom [m/s] koja iznosi 0.9 frekvencija hoda  $f_s$ , uzimajući u obzir prvi harmonik reakcije podloge i dinamički faktor za vertikalni pravac  $\alpha_1=0.275$  prema Blanchard [10].

$$\text{vertikalna komponenta: } Q_{pv} = 180 \cdot \sin(2\pi \cdot f_v \cdot t) \text{ [N]} \quad (2.2.5)$$

$$\text{lateralna komponenta: } Q_{ph} = 70 \cdot \sin(2\pi \cdot f_h \cdot t) \text{ [N]} \quad (2.2.6)$$

gde je  $f_v$  prirodna vertikalna frekvencija mosta blizu 2 Hz,  $f_h$  je prirodna lateralna frekvencija mosta blizu 1 Hz.





Slika 2.2.6 Dinamički model opterećenja od jednog pešaka [35]

Eurocode 5 [28] predviđa isti model opterećenja, s tim da je amplituda sile 280 N ( $\alpha_1=0.4$ , videti tabelu 2.2.1). Vertikalna komponenta za model opterećenja od jednog pešaka prema (2.2.5) je takođe sadržana u DIN-Fachbericht 102 [19].

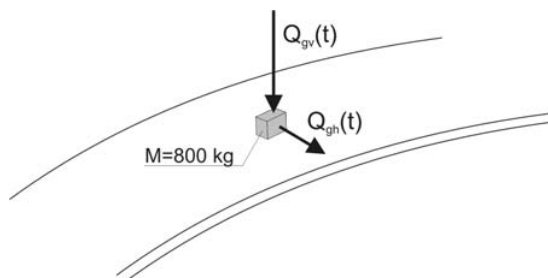
Generalno, frekvenciju treba birati tako da se podudara sa osnovnom frekvencijom konstrukcije i da opterećenje deluje na najnepovoljnijoj poziciji na mostu.

Stohastički pristup kod **modela opterećenja od grupe pešaka** (DLM2) opisuje efekat grupe sa ograničenim brojem pešaka (8-15 osoba) koji se kreću [35]. Sinhronizacija frekvencije hoda i faze uzeti su u obzir preko koeficijenata  $k_v$  i  $k_h$ .

$$\text{vertikalna komponenta: } Q_{gv} = 180 \cdot k_v(f_v) \cdot \sin(2\pi \cdot f_v \cdot t) \text{ [N]} \quad (2.2.7)$$

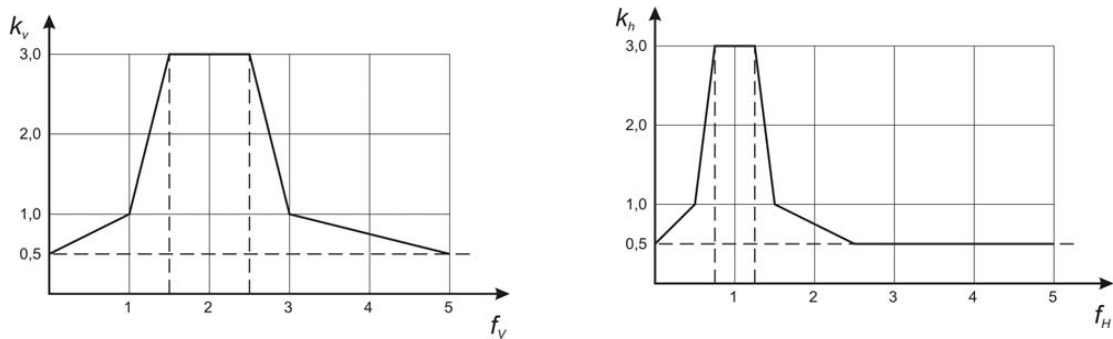
$$\text{lateralna komponenta: } Q_{gh} = 70 \cdot k_h(f_h) \cdot \sin(2\pi \cdot f_h \cdot t) \text{ [N]} \quad (2.2.8)$$

gde je  $f_v$  prirodna vertikalna frekvencija mosta blizu 2 Hz,  $f_h$  je prirodna lateralna frekvencija mosta blizu 1.5 Hz, a  $k_v$  i  $k_h$  su faktori sinhronizacije (sl.2.2.8).



Slika 2.2.7 Dinamički model opterećenja od grupe pešaka [35]

Dinamičko opterećenje od grupe pešaka trebalo bi da se primeni kao stacionarna pulsirajuća sila sa dve komponente, koje treba razmatrati posebno. Takođe, opterećenje treba da deluje na najnepovoljnijoj poziciji na mostu. Da bi se uveo uticaj pešaka na dinamičke karakteristike mosta, masa od 800 kg treba da deluje na istoj poziciji kao i sila.



a) b)  
Slika 2.2.8 Zavisnost koeficijenata  $k_v$  (a) i  $k_h$  (b) od prirodnih frekvencija  $f_v$  and  $f_h$  [35]

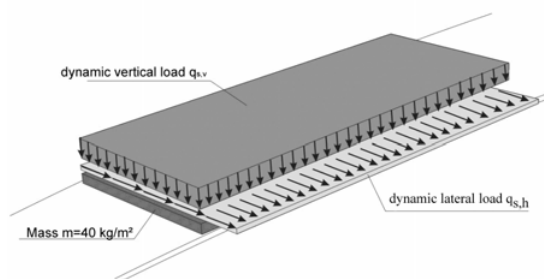
Koeficijentima  $k_v$  i  $k_h$  se u proračun uvodi efekat slučajne sinhronizacije pešaka u grupi. U razmatranje su, za sada, uzeti samo prvi harmonici (dinamički faktor za vertikalno opterećenje 0.4, dinamički faktor za lateralno opterećenje 0.1), ali se u daljnjem mogu uzeti i drugi harmonici (dinamički faktor za vertikalno opterećenje 0.2, dinamički faktor za lateralno opterećenje 0.05).

Dinamički **model opterećenja za kolonu pešaka** (DLM3) važi za pobuđujuću silu usled kolone pešaka gustine 0.6 peš/m<sup>2</sup> (sl.2.2.9). Treba ga uzimati odvojeno od modela opterećenja za grupu pešaka. Ukupan broj pešaka je  $N = 0.6 \cdot B \cdot L$ , gde je  $B$  efektivna širina mosta i  $L$  njegova dužina. Kolona pešaka deluje kao pulsirajuće kontinualno raspodeljeno površinsko opterećenje, sa vertikalnom i horizontalnom komponentom.

$$\text{vertikalna komponenta: } q_{s,v} = 12,6 \cdot k_v(f_v) \cdot \sin(2\pi \cdot f_v \cdot t) \text{ [N/m}^2\text{]} \quad (2.2.9)$$

$$\text{lateralna komponenta: } q_{s,h} = 3,2 \cdot k_h(f_h) \cdot \sin(2\pi \cdot f_h \cdot t) \text{ [N/m}^2\text{]} \quad (2.2.10)$$

gde je  $f_v$  prirodna vertikalna frekvencija mosta blizu 2 Hz,  $f_h$  je prirodna lateralna frekvencija mosta blizu 1.5 Hz, a  $k_v$  i  $k_h$  su faktori sinhronizacije (sl.2.2.8).



Slika 2.2.9 Dinamički model opterećenja za kolonu pešaka [35]

Standard **Eurocode 1: Part 2** [26], definiše modele opterećenja za proračun drumskih, pešačkih i železničkih mostova. Poglavlje 5.7 se odnosi na dinamičke modele opterećenja indukovano pešacima. U zavisnosti od dinamičkih karakteristika konstrukcije, relevantne prirodne frekvencije rasponske konstrukcije treba odrediti iz odgovarajućeg modela konstrukcije. Dalje, stoji da sile uzrokovane pešacima sa frekvencijom identičnom jednoj od svojstvenih frekvencija mosta mogu rezultirati pojavom rezonance i moraju se uzeti u obzir za verifikaciju

graničnog stanja s obzirom na vibracije. Konačno, **Eurocode 1** zahteva da se definišu odgovarajući model opterećenja od pešaka kao i kriterijumi prihvatljivosti nivoa vibracija. Međutim, metode za modeliranje opterećenja od pešaka i određivanje nivoa vibracija ostavljene su projektantu.

**Eurocode 5, Part 2** [29] sadrži informacije relevantne za proračun drvenih mostova. Zahteva se proračun ubrzanja usled delovanja malih grupa i kolona pešaka i u vertikalnom i u horizontalnom pravcu, a verifikacija kriterijuma konfora potrebna je za mostove sa prirodnom frekvencijom manjom od 5Hz u vertikalnom i 2.5 Hz u horizontalnom pravcu. Eurocode 5: Annex B [16] sadrži pojednostavljen metod za određivanje vibracija uzrokovanih pešacima za jednostavne sisteme, dok je izbor modela opterećenja i analitičkih metoda za složenije konstrukcije ostavljen projektantima.

**ISO 10137 preporuke** [39] su razvijene od strane Internacionalne Organizacije za Standardizaciju sa ciljem predstavljanja principa predviđanja vibracija u fazi proračuna konstrukcije. Predloženi modeli opterećenja usled kretanja jednog pešaka za horizontalni i vertikalni pravac dati su u ISO 10137: Annex A kao vremenski promenljive sile  $F(t)$ , koje se mogu predstaviti preko Fourier-ovih redova u skladu sa relacijom (2.2.1). Pomenuti aneks takođe sadrži i predloge vrednosti dorinosa prvog i viših harmonika ukupnom opterećenju.

Delovanje grupe pešaka prvenstveno zavisi od njihove težine, maksimalne gustine osoba po jedinici površine podloge i od stepena koordinacije pešaka. Koordinacija se može predstaviti primenom faktora koordinacije  $C(N)$ , kojim se multiplicira prinudna sila  $F(t)$  :

$$F(t)_N = F(t) \cdot C(N) \quad (2.2.11)$$

gde je  $N$  broj pešaka u grupi.

Iako se izvestan broj autora [5], [22], [25], [52] i dr., bavio modeliranjem vandalskih opterećenja (trčanje, skakanje i dr.), mali broj preporuka i standarda sadrži propozicije za modeliranje ekstremnih dejstava. U standardu BS 6399-96 [14] dejstvo opterećenja usled skakanja pešaka opisuje se semi-sinusoidalnim modelom pulsirajuće sile. Nešto detaljnije preporuke za modeliranje vandalskih delovanja i delovanja grupe pešaka u zavisnosti od klase pešačkog mosta i procene rizika od pojve rezonance, sadržane su u francuskim preporukama **Sétra Guide méthodologique passerelles piétones** [66].

### 3. Kriterijumi konfora i granične vrednosti

Ljudsko telo predstavlja kompleksan nelinearan mehanički sistem sa više stepeni slobode čiji različiti delovi daju različite odgovore na pomeranja konstrukcija [78]. Inače, ljudsko telo je izloženo velikom broju prirodnih ritmova koji zavise od mnogih faktora, kao što su regulisanost sna, hormona, srčani ritam, alfa moždani talasi, kretanje, trčanje, govor, pevanje, treptanje i dr. Vibracije niskih frekvencija su posebno nekonforne za ljude, s obzirom da delovi ljudskog tela ulaze u rezonancu pri vibracijama opsega od 3 do 100 Hz. Pri najnižim od ovih frekvencija javljaju se neprijatne oscilacije u abdominalnom delu tela, dok ostali delovi tela počinju da osciluju pri frekvencijama višim od 10 Hz. Zbog relativnog pomeranja delova tela, rezonancije ispod 10 Hz izazivaju posebnu neugodnost za ljude, a duža izloženost istim, može imati i negativne uticaje na zdravlje.

Ljudska percepcija vibracija je subjektivna i zavisi od individualnih karakteristika i psiholoških uticaja, što potvrđuje i istraživanje Lippert-a [46], prema kome, ne samo da različiti pojedinci imaju različite reakcije na iste vibracije, već i ista osoba izložena više puta istim vibracijama, pokazuje različite reakcije. Osetljivost na vibracije je uslovljena fizičkim faktorima, kao što su frekvencija, ubrzanje i vreme izloženosti uticaju. Pored toga što je diskonfor uslovljen subjektivnom podnošljivošću vibracija, on u mnogome zavisi u od uslova okruženja. Tako npr., zvuci koji nastaju pri rezoniranju delova (opreme) mosta i vizuelni uticaji uslovljeni visinom mosta, ili odvijanjem saobraćaja ispod mosta, povećavaju preosetljivost i mogu provocirati nelagodnost. Osetljivost čoveka na vibracije je bila predmet većeg broja istraživanja [34], [37], [38], [45], [47], [64] i dr. Neki od generalnih zaključaka su da stohastičke vibracije uglavnom prouzrokuju veću nelagodnost nego periodične, ali i da se pešaci vremenom navikavaju na vibracije, tako da nivo prihvatljivost istih raste. U svom istraživanju, Leonadr-a [45] zaključuje da osobe koje su stacionarne na mostu, teže podnose vibracije od onih koje se kreću, a razlog tome je što su ljudi manje osetljivi na vibracije koje indukuju sami. Istraživanje Dieckmann-a, koji se bavio efektima oscilacija i rezonantnih vibracija na ljudsko telo, pokazalo je da je pešaka mnogo lakše izbaciti iz ravnoteže horizontalnim oscilacijama nego vertikalnim i zato je i osetljivost na horizontalne vibracije mnogo veća [35].

Kriterijumi upotrebljivosti u pogledu konfora prema međunarodnim propisima i regulativama se uglavnom odnose na izbegavanje određenih opsega prirodnih frekvencija, ili na određena ograničenja ubrzanja. Prema prvom konceptu, konstrukcije čije prirodne frekvencije izlaze iz opsega frekvencija opterećenja izazvanog pešacima, uglavnom nisu u riziku od pojave rezonantnih vibracija. Iz ovog razloga, mnogi internacionalni propisi daju opsege frekvencija za koje nije potreban dalji dinamički proračun (videti tabelu 3.1). Drugi pristup odnosi se na ograničenje vrednosti ubrzanja ukoliko prirodna frekvencija konstrukcije upada u opseg frekvencija opterećenja izazvanog pešacima. Tada međunarodni propisi nalažu dinamičku analizu. Rezultujuća ubrzanja konstrukcije su ograničena tako da obezbede konfor pešacima (videti tabelu 3.2)

U praksi, mnogi lagani pešački mostovi premašuju kriterijume graničnog stanja upotrebljivosti u pogledu prihvatljivosti vibracija, a da nikada nisu bili izvori nelagodnosti korisnika u dugom periodu korišćenja [61]. U mnogim slučajevima, korisnici uživaju u korišćenju datih konstrukcija, možda i delimično zbog njihove “živahnosti”.

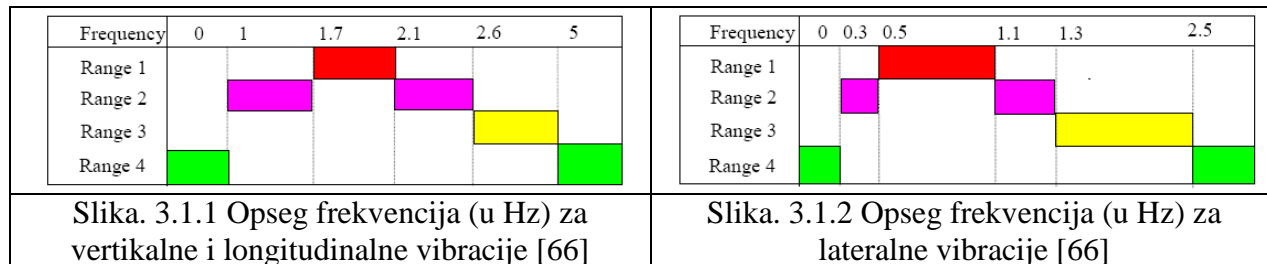
### 3.1 Granične vrednosti za frekvencije prema internacionalnim standardima i preporukama

Konstrukcije čije prirodne frekvencije izlaze iz opsega frekvencija opterećenja izazvanog pešacima, prema mnogim propisima i regulativama, nisu u riziku od pojave rezonantnih vibracija i za njih nije neophodan dalji dinamički tretman. U tabeli 3.1.1 dati su samo oni propisi koji nude granične vrednosti, ili određuju kritične opsege frekvencije oscilacija indukovanih pešacima u kojima se ne sme naći prirodna frekvencija mosta. Većina internacionalnih propisa se zadržava na prvom harmoniku iz Fourier-ove analize pešačkih opterećenja, dajući granicu za prirodnu frekvenciju mosta do 3 Hz. **Eurocode 5** i **BS 5400** obezbeđuju granice do 5 Hz, uzimajući u obzir i harmonike višeg reda za pobuđenje od pešaka, što je uputnije kod laganijih konstrukcija. Petersen [58], ostaje pri tome da harmonici višeg reda ne mogu izazvati bitne oscilacije u konstrukciji, zahvaljujući krutosti mosta (sa prirodnom frekvencijom preko 2.4 Hz) i manjim komponentama sile za više harmonike.

Tabela 3.1.1 Kritične frekvencije u međunarodnim propisima

Regulativa	Granične vrednosti	
	Vertikalne	Horizontalne
American Guide Spec. [35]	< 3 Hz	
Eurocode 2 (EN 1992-2) [27]	1.6 Hz - 2.4 Hz	0.8 Hz – 1.2 Hz
DIN-Fachbericht 102 [19]	1.6 Hz - 2.4 Hz, 3.5 Hz - 4.5 Hz	
Eurocode 5 (EN1995-2) [29 ]	< 5 Hz	< 2.5 Hz
Appendix 2 of Eurocode 0 [66]	< 5 Hz	
ISO/CD 10137 [39 ]	1.7 Hz– 2.3 Hz	
SIA 261 (Švajcarska) [65]	1.6 Hz – 4.5 Hz	< 1.3 Hz trans. pravac < 2.5 Hz long. pravac
BS 5400-2 (Velika Britanija) [13]	< 5 Hz	
Austroroads (Australija) [3]	1.5 Hz– 3 Hz	
Japanese Footbridge Design Code [40]	1.5 Hz– 2.3 Hz	
Canadian Highway Bridge Design Code CAN/CSA-S6-06 [16]	< 4 Hz	

Francuske preporuke **Sétra Guide méthodologique passerelles piétonnes** [66] daju četiri opsega frekvencija u zavisnosti od nivoa rizika od pojave rezonance (sl.3.1.1 i 3.1.2), pri čemu je: **Opseg 1**: maksimalni rizik od rezonance; **Opseg 2**: srednji rizik od rezonance; **Opseg 3**: mali rizik od rezonance usled standardnih opterećenja; **Opseg 4**: neznatan rizik od rezonance.



## 3.2 Analiza ubrzanja i granične vrednosti za ubrzanja prema internacionalnim standardima i preporukama

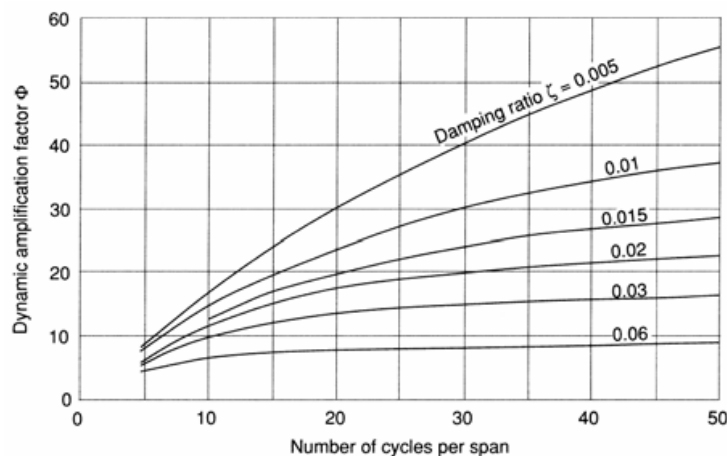
### 3.2.1 Analiza ubrzanja

Pored direktne integracije, koja se vrlo retko koristi u dinamičkoj analizi pešakih mostova [66], modalna analiza je jedna od mogućnosti za proračun ubrzanja koja se može naći u literaturi, videti [58]. Takođe, jedan broj autora, kao što su Grundmann [34], Rainer [62, Young [75] i dr., predlaže analitičke metode za proračun ubrzanja.

Računskom metodom prema Rainer-u [62] određuju se maksimalna vertikalna ubrzanja usled prolaska jednog pešaka koji hoda, ili trči frekvencijom jednakoj osnovnoj prirodnoj frekvenciji mosta, koji je modeliran kao oscillator sa jednim stepenom slobode.

$$a = 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot y \cdot \alpha \cdot \Phi \quad [\text{m/s}^2] \quad (3.2.1)$$

U izrazu (3.2.1)  $f$  je prirodna vertikalna frekvencija mosta [Hz],  $y$  je statički ugib na polovini raspona za silu od 700 N [m],  $\alpha = F_{i,v} / F_0$  je Fourier-ov koeficijent za relevantni harmonik usled hodanja ili trčanja (videti tabelu 2.2.1),  $\zeta = (\delta/2\pi)$  je relativno prigušenje,  $\delta$  je logaritamski decrement, a  $\Phi$  je faktor dinamičkog uvećanja za kretanje jednog pešaka (za prostu gredu) (videti sl.3.2.1) broj ciklusa (koraka) po rasponu = broj  $i$ -tog harmonika · dužina raspona / dužina koraka (videti tabelu 2.1.2).



Slika. 3.2.1 Faktor dinamičkog uvećanja  $\Phi$  za rezonantni odgovor usled sinusoidalne pokretne sile na prostoj gredi [62]

Primental i Fernandes [60] su proširili proceduru koju predlaže Rainer [62] na mostove sa dva raspona, uvodeći u proračun faktor  $k_a$ . Maksimalno ubrzanja se određuje prema formuli:

$$a_{\max} = \omega_0^2 \cdot y_s \cdot \alpha_i \cdot \Omega_d \cdot k_a \quad (3.2.2)$$

gde je  $\omega_0$  osnovna kružna frekvencija mosta,  $y_s$  je statički ugib usled težine pešaka,  $\alpha_i$  je dinamički faktor opterećenja rezonantnog  $i$ -tog harmonika,  $\Omega_d$  je faktor dinamičkog uvećanja i  $k_a$  je numerički određen faktor koji se odnosi na razliku razmatranja mostova sa dva raspona u odnosu na one sa jednim.

Grundmann [34], uz podrazumevanje sledećih pretpostavki: oscillator sa jednim stepenom slobode sa stacionarnim pobuđenjem, frekvencija hoda  $f_s$  = osnovnoj prirodnoj frekvenciji mosta  $f$ , koeficijent 0.6 usled promene položaja pobuđujuće sile, maksimalno ubrzanje određuje prema :

$$a = 0.6 \cdot \frac{F}{M_{gen}} \frac{\pi}{\delta} (1 - e^{-n\delta}) \text{ [m/s}^2\text{]} \quad (3.2.3)$$

gde je  $F = \alpha \cdot G$ :  $\alpha = F_{i,v} / F_0$  (videti tabelu 2.4),  $G = 0.7$  kN je stalno opterećenje od pešaka,  $M_{gen} = 0.5 \cdot M$  je masa [t] ekvivalentnog oscilatora sa jednim stepenom slobode za prostu gredu [35],  $\delta$  je logaritamski dekrement,  $n = L/l_s$  (broj ciklusa (koraka) po rasponu = dužina raspona / dužina koraka)(videti tabelu 2.1.2).

### 3.2.2 Granične vrednosti za ubrzanja prema internacionalnim standardima i preporukama

Granične vrednosti za ubrzanje u međunarodnim propisima su direktno povezane sa konforom pešaka. S obzirom da je pitanje konfora pešaka vrlo subjektivno, u internacionalnim propisima postoje različite granice za granične vrednosti ubrzanja. Pregled graničnih ubrzanja u međunarodnim propisima i relevantnoj literaturi je dat u tabeli 3.2.1. Neka od tih graničnih ubrzanja zavise od prirodnih frekvencija, dok su druga konstanta za ceo opseg frekvencija usled opterećenja indukovano pešacima, kao u **AISC Guide 11** [1], **Japanese Footbridge Design Code** [40].

Preporuke Asocijacije inženjera Nemačke **VDI Richtlinie 2057, Blatt 1-4**, [2] obuhvataju efekte mehaničkih vibracija na ljudsko telo. Proučavani su različiti položaji tela, pri stajanju ili sedenju. Zavisnost individualne osetljivosti na trajanje oscilacija, kao i drugu faktori su uzeti u obzir u preporukama VDI [2]. Nivo stresa kod pešaka može se odrediti na osnovu frekvencije i ubrzanja vibracija, a zavisi od prvca oscilacija, horizontalnog ili vertikalnog. Na osnovu sračunatog nivoa stresa, nivo individualne osetljivosti na vibracije može se odrediti na osnovu tabele date u preporukama.

**ISO 2631** [37], [38] tretira ubrzanje ljudskog tela, a ne upućuje na ubrzanje mostovske konstrukcije.

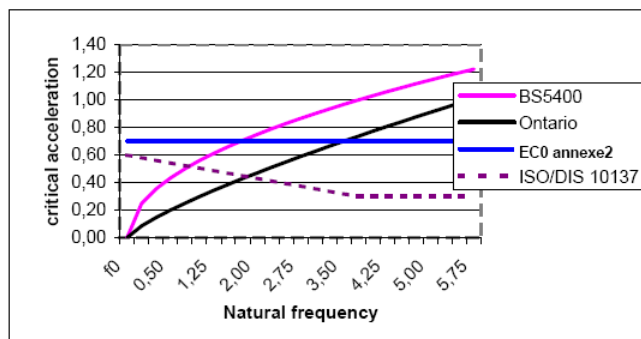
**Canadian Highway Bridge Design Code CAN/CSA-S6-06** [15] daje simplifikovani metod za proračun ubrzanja, kao i odgovarajuće granične vrednosti ubrzanja u funkciji osnovne prirodne frekvencije mosta. Ovaj pojednostavljeni metod primenljiv je samo za gredne pešačke mostove sa jednim, dva i tri raspona. Za frekvencije manje od 4 Hz, predlaže se detaljniji dinamički proračun u cilju određivanja odgovora konstrukcije, posebno pri dužoj izloženosti opterećenju od pešaka, ili džogera.

Tabela 3.2.1 Granična ubrzanja kao kriterijumi konfora [35]

Vertikalno ubrzanje $a_{v,max}$ [m/s <sup>2</sup> ]		
ISO 2631	$1.9 \cdot \sqrt{f_1}$	$f_1$ = osnovna prirodna frekvencija mosta
AISC Guide 11	0.5	
Eurocode 1	$Min \begin{cases} 0.50\sqrt{f_v} \\ 0.70 \end{cases}$	za $f = 1$ do 3 Hz za $f = 3-5$ Hz: potrebna provera u zavisnosti od slučaja od $f = 5$ Hz: nije neophodna provera
DIN-Fachbericht 102	$0.5 \cdot \sqrt{f_1}$ , vert.	za $f_1 \leq 5$ Hz; $f_1$ = osnovna prirodna frekvencija neopterećenog mosta
VDI 2057	$0.6 \cdot \sqrt{f_1}$ , vert. $0.214$ , hor.	$f_1$ = osnovna prirodna frekvencija mosta
SBA	0.39	
BS 5400-2	$0.5 \cdot \sqrt{f_1}$	$f_1$ = osnovna prirodna frekvencija mosta
Ontario Bridge Code ONT83	$0.25 \cdot f_1^{0.78}$	$f_1$ = osnovna prirodna frekvencija mosta
Eurocode 5 (EN 1995-2)	0.7	
Bachmann [40]	0.5-1.0	
Japanese Footbridge Design Code (1979)	1.0	
Lateralno ubrzanje $a_{l,max}$ [m/s <sup>2</sup> ]		
Eurocode 1	$Min \begin{cases} 0.14\sqrt{f_h} \\ 0.15 \end{cases}$	za $f = 0.5$ do 1.5 Hz za $f = 1.5-2.5$ Hz: potrebna provera u zavisnosti od slučaja od $f = 2.5$ Hz: nije neophodna provera
Eurocode 5 (EN 1995-2)	0.2	za $f < 2.5$ Hz (za pešake koji stoje)

Iz tabele 3.2.1 i sa slike 3.2.4 se može videti da dopuštene vrednosti za vertikalna ubrzanja variraju zavisno od primenjenog standard, ali je za vertikalne vibracije sa frekvencijom od oko 2 Hz (normalam hod) izvestan konsenzus u vezi sa graničnim ubrzanjem koje je u opsegu od 0.5 do 0.8 m/s<sup>2</sup>. Treba napomenuti da su predložene granične vrednosti uglavnom povezane sa teoretskim opterećenjem od jednog pešaka.

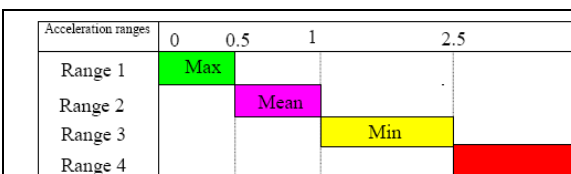




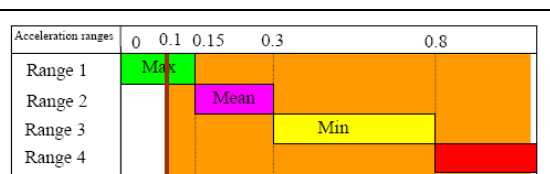
Slika. 3.2.4 Vertikalno kritično ubrzanje (u  $m/s^2$ ) u funkciji prirodne frekvencije mosta, prema različitim regulativama [66]

Vandalska opterećenja, kao na primer skakanje u ritmu u cilju pobuđenja prirodne frekvencije mosta, može dovesti do veoma velikih vrednosti ubrzanja. Neki autori postavljaju za maksimalnu granicu ubrzanja pešačkih mostova od 0.7 g do 0.8 g [7], [34], čak i pri vandalskim opterećenjima. Ovo ubrzanje se može uzeti kod dimenzionisanja konstrukcije, ali ne i kao kriterijum konfora.

Prema preporukama **Sétra Guide méthodologique passerelles piétonnes** [66] nivoi konfora s obzirom na ubrzanje mogu se svratati u tri grupe, pri čemu: maksimalni konfor podrazumeva da su ubrzanja konstrukcije neprimetna od strane korisnika, prosečan konfor podrazumeva da su ubrzanja konstrukcije jedva primetna od strane korisnika, dok minimalni konfor podrazumeva da korisnici primećuju ubrzanja konstrukcije, ali su ona prihvatljiva sa aspekta konfora. Prema tome, opsezi ubrzanja s obzirom na nivo konfora dati su na slikama 3.2.5 i 3.2.6. Prva tri odgovaraju maksimalnom, srednjem i minimalnom konforu, dok četvrti opseg obuhvata nekonforne nivoje ubrzanja, koji su, samim tim, neprihvatljivi. U svakom slučaju, da bi se izbegao "lock-in" efekat, ubrzanje je ograničeno na  $0.10 m/s^2$  (slika 3.2.6).



Slika. 3.2.5 Opseg ubrzanja (u  $m/s^2$ ) za vertikalne vibracije [66]



Slika. 3.2.6 Opseg ubrzanja (u  $m/s^2$ ) za horizontalne vibracije [66]

Granična ubrzanja u međunarodnim standardima su bazirana na konforu pešaka koji preko njega prelaze, tako da fenomen prinudne sinhronizacije pešaka (lock-in efekat) nema posebnog značaja s aspekta konfora, s obzirom da se prilikom ove pojave javljaju ubrzanja ispod dopuštenih granica. Tako na primer, pri lateralnim vibracijama kod lock-in efekta, ubrzanje može da iznosi  $0.08 m/s^2$ , pri frekvenciji od 1 Hz, što je, jasno, mnogo ispod kriterijuma za narušavanje konfora (oko  $0.15 m/s^2$ ). Ovaj fenomen je zato mnogo značajniji sa aspekta konfora pri lateralnim vibracijama.

Kriterijum konfora sa aspekta pomeranja nema specijalan tretman u poznatoj literaturi, iako je on specijalno interesantan kod sporijih vibracija, kada uzrok diskonfora nije brzina pomeranja, već amplitude. Jedini poznat kriterijum za pomeranje je u suštini statički kriterijum, koji daje granični ugib. S druge strane, ubrzanje, brzina i pomeranje su povezani, tako da se ubrzanje može prikazati u funkciji pomeranja, ili brzine:

$$Ubrzanje = (2\pi \cdot frekvencija)^2 \cdot Pomeranje$$

$$Ubrzanje = (2\pi \cdot frekvencija) \cdot Brzina$$

Tako npr., za frekvenciju od 2 Hz: ubrzanje od 0.5 m/s<sup>2</sup> odgovara pomeranju od 3.2 mm i brzini od 0.04 m/s, ubrzanje od 1 m/s<sup>2</sup> odgovara pomeranju od 6.3 mm i brzini od 0.08 m/s. Ali, za 1 Hz: ubrzanje od 0.5 m/s<sup>2</sup> odgovara pomeranju od 12.7 mm i brzini od 0.08 m/s, ubrzanje od 1 m/s<sup>2</sup> odgovara pomeranju od 25.3 mm i brzini od 0.16 m/s. Veza između ubrzanja, brzine i pomeranje važi samo za harmonijske oscilacije, što nije uvek slučaj.

## 4. Modeliranje grednih rasponskih konstrukcija i analiza vibracija indukovanih pešacima

Analiza vibracija mostova sa bilo kojeg važnijeg aspekta povezana je gotovo uvek sa znatnim praktičnim poteškoćama. To se naročito odnosi na rešavanje diferencijalnih jednačina, a pogotovu frekventne jednačine. Problem postaje znatno kompleksniji kada se radi o gredama promenljivog poprečnog preseka, o analizi u neelastičnoj oblasti, o komplikovanim spoljnim opterećenjima, itd. U svim takvim slučajevima pri oceni vremenske zavisnosti pomeranja posmatrane konstrukcije i pri datom vremenski promenljivom opterećenju, koristimo približne metode uz pomoć automatskih računara.

Za inženjersku praksu vrlo je važna analiza kvalitativne, a naročito kvantitativne promene neke dinamičke veličine pri proizvoljnoj, ili određenoj promeni uzroka njenog nastajanja, odnosno pri promeni izvesnog parametra. Analiza problema koja se zasniva na približnim metodama, bilo da se radi o simplifikovanom dinamičkom modelu mosta, odnosno pokretnog opterećenja, ili pak numeričkom postupku, po pravilu je uvek znatno zametnija od iste takve analize koja se sprovodi prema analitičkim rešenjima u zatvorenom obliku.

U ovom radu se primenjuje generalizacija postupka rešavanja problema linearnih transversalnih prigušenih vibracija jedne klase grednih mostova, koje nastaju zbog kretanja pešaka, koje se modelira poznatom vremenski promenljivom silom (determinističkom silom).

U ovom poglavlju prikazuju se rešenja problema vibracija u „zatvorenom obliku“, što podrazumeva rešenja preko redova, koji su konvergentni, budući da se sprovodi modalna analiza i da je pri tome dovoljno angažovanje prvih nekoliko tonova (najčešće prva tri). Rešenje diferencijalnih jednačina se sprovodi preko Laplasove transformacije, a za definisanje poremećajnih sila kontinualnog oscilatornog sistema korišćene su Dirakova delta i Hevisajdova teta funkcija. Za definisanje poremećajnih sila diskretizovanih grednih sistema rasponskih konstrukcija korišćeni su Ermitovi kubni polinomi. Na osnovu izvedenih opštih rešenja, data su i rešenja za karakteristična pokretna opterećenja pri konstantnoj brzini kretanja, kao što su pokretne koncentrisane sile, kao modeli koji predstavljaju pešaka u hodu, ili ravnomerno raspedeljeno opterećenje, kao model koji predstavlja kretanje kolone pešaka. Iz ovih rešenja se mogu izvesti rešenja za simultano delovanje navedenih opterećenja.

Izvedena rešenja se mogu koristiti za analizu vibracija grednih pešačkih mostova, kako vertikalnog, tako i horizontalnog pravaca (lateralne vibracije). Pri tome, krutosti masa sistema mogu biti konstantne duž raspona, ali i promenljive.

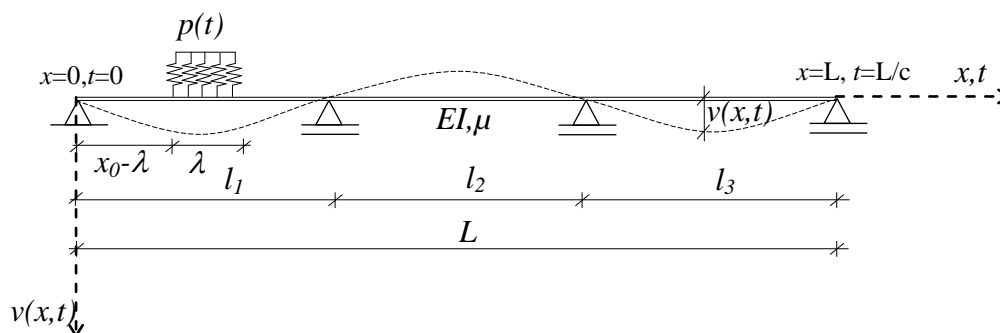
Za određivanje svojstvenih frekvenција i svojstvenih vektora, za tertman konstrukcija mosta linijskim sistemima u ravni, ili prostoru, korišćeni su programi: STRES6® i SAS6®. Za određivanje svojstvenih karakteristika, konstrukcija mosta tretirana je i metodom konačnih elemenata [49].

Konačno rešavanje konkretnih slučajeva vibracija, kako kontinualnih, tako i diskretizovanih sistema grednih rasponskih konstrukcija, sprovodi se po određenim procedurama u softveru MATHEMATICA® [71], a rezultati su prikazani u poglavlju 5.

## 4.1 Kontinualni sistemi-rešenja problema vibracija

### 4.1.1 Opšta razmatranja prinudnih prigušenih vibracija

Posmatramo transverzalne vibracije grede raspona  $L$  (sl.4.1.1), konsatantne krutosti na savijanje  $EJ$  i mase  $\mu$  po jedinici dužine.



Slika 4.1.1 Gredni nosač izložen transverzalnim vibracijama

Zanemarujući uticaj sile inercije usled obrtanja poprečnog preseka i uticaj deformacije klizanja na savijanje, a uz pretpostavku da disipacija energije deformacije linearno zavisi od brzine deformacije, transverzalne vibracije mogu se opisati deiferencijalnom jednačinom [11], [48]:

$$\mu \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + 2\beta\mu \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + EI\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} \right) + EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = p(x,t) \quad (4.1.1)$$

Sa graničnim uslovima koji zavise od načina oslanjanja grednog sistema, i početnim uslovima:

$$v(x,0) = v_0(x); \quad \dot{v}(x,0) = \dot{v}_0(x) \quad (4.1.2)$$

U jednačini (4.1.1)  $v(x,t)$  je ugib u tački  $x$  i vremenu  $t$ . Opterećenje na mostu (sl.4.1.1) koje stoji ( $x_0=\text{const.}$ ), ili se kreće konstantnom brzinom ( $x_0=c \cdot t$ ), opisuje sila  $p(x,t)$ , što bez uticaja njenog inercijalnog delovanja, definišemo kao determenističku poremećajnu silu.

U (4.1.1) konstanta prigušenja  $\beta$  izražava proporcionalnost sile prigušenja sa masom  $\mu$ , a  $\alpha$  sa kurutošću  $EI$  sistema. Precizne podatke za ove konstante dobijamo eksperimentalno, na izvedenom mostu. U fazi projektovanja, međutim, usled nedostatka takvih podataka, koristimo empirijske. Dakle, tačno prigušenje pešačkog mosta biće poznato tek kad on bude sagrađen, ali i tada biće podložno promeni s vremenom. Ono zavisi od mnogo parametara kao što su : izabrani

materijali, kompleksnost konstrukcije, tip gazišne površine, način oslanjanja i ležišta, ton oscilovanja koji se razmatra, čak i broj pešaka na mostu [35].

Rešavanje jednačine (4.1.1) vršimo primenom modalne analize, odnosno razvijanjem  $v(x,t)$  u redove po svojstvenim funkcijama  $V_i(x)$  prema relaciji:

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) V_i(x) \quad (4.1.3)$$

Ugib u  $i$ -tom tonu vibracija  $v_i(x,t)$ , prema (4.1.3) iznosi:

$$v_i(x,t) = \eta_i(t) V_i(x) \quad (4.1.4)$$

Ako relaciju (4.1.4) pomnožimo svojstvenom funkcijom  $V_k(x)$  tona  $k$  i integralimo u granicama od 0 do  $L$ , sledi da je:

$$\int_0^L v_i(x,t) V_k(x) dx = \eta_i(t) \int_0^L V_k(x) \cdot V_i(x) dx \quad (4.1.5)$$

S obzirom na ortogonalnost svojstvenih funkcija, iz (4.1.5) sledi da je:

$$\eta_i(t) = \frac{1}{H_i} \int_0^L v_i(x,t) V_i(x) dx \quad (4.1.6)$$

gde je

$$H_i = \int_0^L V_i^2(x) dx \quad (4.1.7)$$

$H_i = 1$  kada su svojstvene funkcije  $V_i(x)$  ortonormirane.

Smenom  $v(x,t)$  prema (4.1.3) u (4.1.1), zatim množenjem te relacije sa  $V_k(x)$  tona  $k$  i integraljenjm svakog člana po  $x$  u granicama od 0 do  $L$ , a s obzirom na ortogonalnost svojstvenih funkcija i uvažavanje pretpostavke o uniformnoj konvergenciji reda u (4.1.3), parcijalna diferencijalna jednačina (4.1.1) može se svesti na sistem nezavisnih jednačina oblika:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = \frac{1}{M_i} F_i(t) \quad (i = 1, \dots, \infty) \quad (4.1.8)$$

Ovde je:

$\eta_i(t)$  – glavna koordinata  $i$ -tog tona

$\omega_i$  – svojstvena kružna frekvencija  $i$ -tog tona

$$M_i = \mu H_i = \mu \int_0^L V_i^2(x) dx - \text{generalisana masa } i\text{-tog tona} \quad (4.1.9)$$

$$F_i(t) = \int_0^L p(x,t)V_i(x)dx - \text{generalisana sila } i\text{-tog tona} \quad (4.1.10)$$

Relativno prigušenje  $\xi_i$   $i$ -tog tona možemo prikazati relacijama (4.1.11), kojima su date tri važeće opcije, od kojih za svaku važi rešenje (4.1.14), pod uslovom da je  $\xi_i < 1$ .

$$\xi_i = \begin{cases} \frac{\beta}{\omega_i} \\ \frac{\alpha}{2}\omega_i \\ \frac{\beta}{\omega_i} + \frac{\alpha}{2}\omega_i \end{cases} \quad (4.1.11)$$

Nezavisnoj  $i$ -toj diferencijalnoj jednačini (4.1.8) pridružuju se odgovarajući početni uslovi  $i$ -tog tona, koji s obzirom na relacije (4.1.2), (4.1.3) i (4.1.6) glase:

$$\eta_{i0} = \eta_i(t=0) = \frac{1}{H_i} \int_0^L v_{i0}(x)V_i(x)dx \quad (4.1.12)$$

$$\dot{\eta}_{i0} = \dot{\eta}_i(t=0) = \frac{1}{H_i} \int_0^L \dot{v}_{i0}(x)V_i(x)dx \quad (4.1.13)$$

Primenom Laplasove transformacije na (4.1.8), za  $\xi_i < 1$ , koristeći zakon adicije i teoremu konvolucije sledi da je:

$$\eta_r(t) = \frac{1}{M_i} \int_0^t F_i(\tau) \frac{\sin \omega_{di}(t-\tau)}{\omega_{di}} e^{-\xi_i \omega_i \tau} d\tau + \left[ \eta_{i0} \cos \omega_{di} t + \left( \frac{\xi_i \omega_i \cdot \eta_{i0} + \dot{\eta}_{i0}}{\omega_{di}} \right) \sin \omega_{di} t \right] e^{-\xi_i \omega_i t} \quad (4.1.14)$$

Frekvencija  $\omega_{di}$  slobodnih prigušenih vibracija predstavljena je relacijom (4.1.15):

$$\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (\xi_i < 1) \quad (4.1.15)$$

Zamenom (4.1.14) u (4.1.3), a saglasno sa (4.1.10), (4.1.12) i (4.1.13), konačno dobijamo:

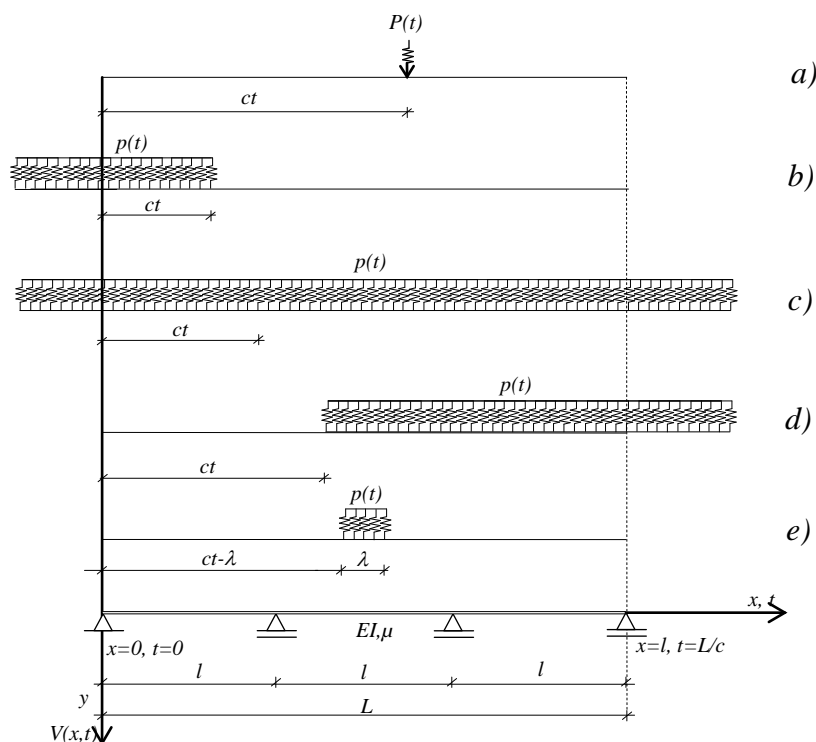
$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{V_i(x)}{M_i} \int_0^t \left[ \int_0^L p(u,\tau)V_i(u)du \right] \frac{\sin \omega_{di}(t-\tau)}{\omega_{di}} e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} d\tau + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{V_i(x)}{H_i} \left[ \cos \omega_{di} t \int_0^L v_{i0}(u)V_i(u)du + \sin \omega_{di} t \int_0^L \frac{\xi_i \omega_i v_{i0}(u) + \dot{v}_{i0}(u)}{\omega_{di}} V_i(u)du \right] e^{-\xi_i \omega_i t} \quad (4.1.16)$$

Rešenje (4.1.14) predstavlja najopštiji izraz za dinamički ugib grednog nosača, na osnovu kojeg se mogu analizirati različiti posebni slučajevi. Prvim članom (4.1.16) izražen je uticaj poremećajnih sila, a drugim uticaj početnih uslova.

Za slobodne prigušene vibracije, važe relacije i komentar dat za diskretne sisteme u Poglavlju 4.2.2.

### 4.1.2 Definisane poremećajnih sila

Analiziramo prinudne prigušene vibracije nosača (sl.4.1.2) odnosno rasponske konstrukcije pešačkog mosta konstantne mase  $\mu$  i krutosti  $EI$ , preko koje se kreće kolona pešaka, ili jedan pešak. Pri tome, posmatračemo karakteristične konstelacije pokretnog opterećenja, kao što su: nailazak, prelaženje i odlazak opterećenja, modelirani kao ravnomerno raspodeljeno. Kretanje jednog pešaka, modelira se kao koncentrisana vremenski promenljiva sila.



Slika 4.1.2 Dinamički modeli oscilatornog sistema

Zanemarujući inercijalno delovanje masa opterećenja, analizu vibracija sprovodimo za modele pokretnog opterećenja (sl.4.1.2), prema relacijama:

$$p(t) = q + q_0 \sin \Omega t \quad (4.1.17)$$

$$P(t) = P + P_0 \sin \Omega t \quad (4.1.18)$$

gde su  $q$  i  $P$  konstantni delovi,  $q_0$  i  $P_0$  amplitude, a  $\Omega$  kružna frekvencija drugog člana opterećenja.

Ovakvim tretmanom vibracija uticaj i inercijalnog delovanja mase pokretnog opterećenja, jednostavno se može uvesti za konstelaciju  $c$  (prelaženje kontinualnog opterećenja, sl.4.1.2). Pri

tome, masu ( $\mu$ ) nosača treba uvećati masom pokretnog opterećenja ( $\mu_q=q/g$ ), tako da je  $\bar{\mu} = \mu + \mu_q$ , što menja modalne karakteristike oscilatornog sistema, o čemu treba voditi računa.

Tabela 4.1.1 Pokretno opterećenja definisano preko Hevisajdove funkcije  $H(x)$  i Dirakove funkcije  $\delta(x)$ .

pokretno opterećenja		$P(x,t), p(x,t)$	konstelacija opterećenja
konzentrisano opterećenje	a	$P(t) \cdot \delta(x-ct)$	konzentrisano opterećenje
raspodeljeno opterećenje	b	$p(t) \cdot [1 - H(x-ct)]$	nailazak opterećenja
	c	$p(t)$	prelaženje
	d	$p(t) \cdot H(x-ct)$	odlazenje
	e	$p(t) \cdot [H(x-ct+\lambda) - H(x-ct)]$	prelaženje parcijalnog opterećenja

### 4.1.3 Rešenja za analizu odgovora konstrukcije

Analiziramo prinudne prigušene vibracije nosača (sl.4.1.2), odnosno rasponske konstrukcije pešačkog mosta konstantne mase  $\mu$  i krutosti  $EI$ , preko koje se kreće kolona pešaka, ili nekoliko pešak. Pri tome, posmatraćemo karakteristične konstelacije pokretnog opterećenja, kao što su: nailazak, prelaženje i odlazak kolone pešaka, modelirane kao ravnomerno raspodeljeno opterećenje. Kretanje jednog pešaka, modelira se kao koncentrisana vremenski promenljiva sila.

Radi poboljšanja efikasnosti u proceduri proračuna prema softveru Mathematica®, izvršena je simbolička modifikacija opšteg rešenja (4.1.16), prema sledećim relacijama koje se navode u daljem tekstu.

Na osnovu principa superpozicije, dinamički ugib  $v(x,t)$  u tački nosača sa apscisom  $x$ , može se predstaviti kao zbir ugiba  $v_i(x,t)$  po svim tonovima  $i$ , relacijom:

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x,t) \quad (4.1.19)$$

gde je

$$v_i(x,t) = V_i(x) \cdot \eta_i(t) \quad (4.1.20)$$

U (4.1.20) generalisana koordinata  $\eta_i(t)$  saglasno opštem rešenju (4.1.14), može se izraziti relacijom:



$$\eta_i(t) = \Phi_i(t) + \Phi_{0i}(t) \quad (4.1.21)$$

U (4.1.21) funkcija  $\Phi_i(t)$  izražava vremenski uticaj poremećajnih sila i definisana je relacijom (4.1.22), a funkcija  $\Phi_{0i}(t)$  izražava uticaj početnih uslova i definisana je relacijom (4.1.22).

$$\Phi_i(t) = \frac{1}{M_i} \int_0^t F_i(\tau) \cdot J_i(\tau) d\tau \quad \left( 0 \leq t \leq \frac{L}{c} \right) \quad (4.1.22)$$

U (4.1.22)  $M_i$  je generalisana masa tona  $i$  prema (4.1.9), a generalisana sila  $F_i(\tau)$  je definisana, saglasno sa (4.1.10), relacijom:

$$F_i(\tau) = \int_0^L p(u, \tau) V_i(u) du \quad (4.1.23)$$

Uslov da je relativno prigušenje  $i$ -tog tona uvek manje od kritičnog ( $\xi_i < 1$ ), na osnovu kojeg je  $i$  izvedeno opšte rešenje (4.1.16), sigurno je uvek ispunjen kada je prema relacijama (4.1.11)

$$\xi_i = \frac{\beta}{\omega_i}. \text{ Tada je } \omega_{di} = \sqrt{\omega_i^2 - \beta^2}.$$

Funkcija  $J_i(\tau)$  u (4.1.22) definisana je relacijom:

$$J_i(\tau) = \frac{\sin \omega_{di}(t - \tau)}{\omega_{di}} e^{-\beta(t-\tau)} \quad (4.1.24)$$

Uticaj početnih uslova izražava funkcija  $\Phi_{0i}(t)$ , a definisana je relacijom:

$$\Phi_{0i}(t) = \frac{1}{H_i} \left( A_i \cos \omega_{di} t + B_i \frac{\sin \omega_{di} t}{\omega_{di}} \right) e^{-\beta t} \quad t \geq t_0 \quad (4.1.25)$$

gde su  $A_i$  i  $B_i$  konstante prema relacijama:

$$A_i = \int_0^L v_{i0}(x) \cdot V_i(x) dx \quad (4.1.26)$$

$$B_i = \int_0^L (\beta \cdot v_{i0}(x) + \dot{v}_{i0}(x)) \cdot V_i(x) dx \quad (4.1.27)$$

### Dinamički faktor

Ako koncentrisanu pobuđujuću silu formulišemo (prema tabeli 4.1.1) u obliku:

$$P(x, t) = P_0 \cdot f(t) \delta(x) \quad (4.1.28)$$

gde je

$P_0$  – najveća vrednost (amplituda) sile

$f(t)$  – funkcija vremenske promene sile

$\delta(x)$  – Dirakova delta funkcija

Dinamički ugib  $i$ -tog tona možemo predstaviti relacijom:

$$v_i(x, t) = v_{i, st}(x) \cdot D_i(t) \quad (4.1.29)$$

U (4.1.29),  $v_{i, st}$  je statički ugib od  $P_0$ , a  $D_i(t)$  dinamički faktor prema relacijama:

$$v_{i, st}(x) = \frac{P_0 V_i(x)}{M_i \omega_i^2} \quad (4.1.30)$$

$$D_i(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot V_i(c\tau) \cdot \omega_i^2 \cdot J_i(\tau) \cdot d\tau \quad (4.1.31)$$

Ako sila nije pokretna, već stoji u položaju  $x_0$ , tada je u (4.1.d)  $V_i(c\tau) = V_i(x_0) = const.$ .

Statički ugib  $i$ -tog tona  $v_{i, st}(x)$  ima oblik tona  $i$ , tako da se dinamički ugib  $v_i(x, t)$  uvek odvija oko statičkog ugiba i njegova veličina zavisi od dinamičkog faktora. Dakle, dinamički faktor povećava statički ugib u  $i$ -tom tonu, što je posledica dinamički, a ne statički, primenjenog opterećenja.

Kada je pokretna sila konstantnog intenziteta, a stoji u položaju  $x_0$ , tada se umesto  $J_i(\tau)$  u jednačini (4.1.31), uvodi  $J_{ip}(\tau)$  prema relaciji:

$$J_{ip}(\tau) = \frac{\sin \omega_{di} \tau}{\omega_{di}} e^{-\beta \tau} \quad (4.1.32)$$

### Normalni i tangencijalni naponu usled delovanja dinamičkog opterećenja

Za  $EI = const.$  i  $\mu = const.$ , moguće je prikazati i oscilogramе, odnosno dinamičke uticajne linije za momente i transverzalne sile u posmatranom preseku rasponske konstrukcije. Kada su poznati ugibi  $v(x, t)$ , tada momente  $M(x, t)$  i transverzalne sile  $T(x, t)$  nalazimo prema relacijama:

$$M(x, t) = -EI_z \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (4.1.33)$$

$$T(x, t) = -EI_z \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} \quad (4.1.34)$$

Dalje, za poznate momente i transverzalne sile prema relacijama (4.1.33) i (4.1.34), možemo za homogene preseke (čelik, drvo, prethodno napregnuti beton), odrediti normalne napone  $\sigma(x, t)$  i tangencijalne napone  $\tau(x, t)$ , prema relacijama:

$$\sigma(x, t) = \frac{M(x, t)}{I_z} y \quad (4.1.35)$$

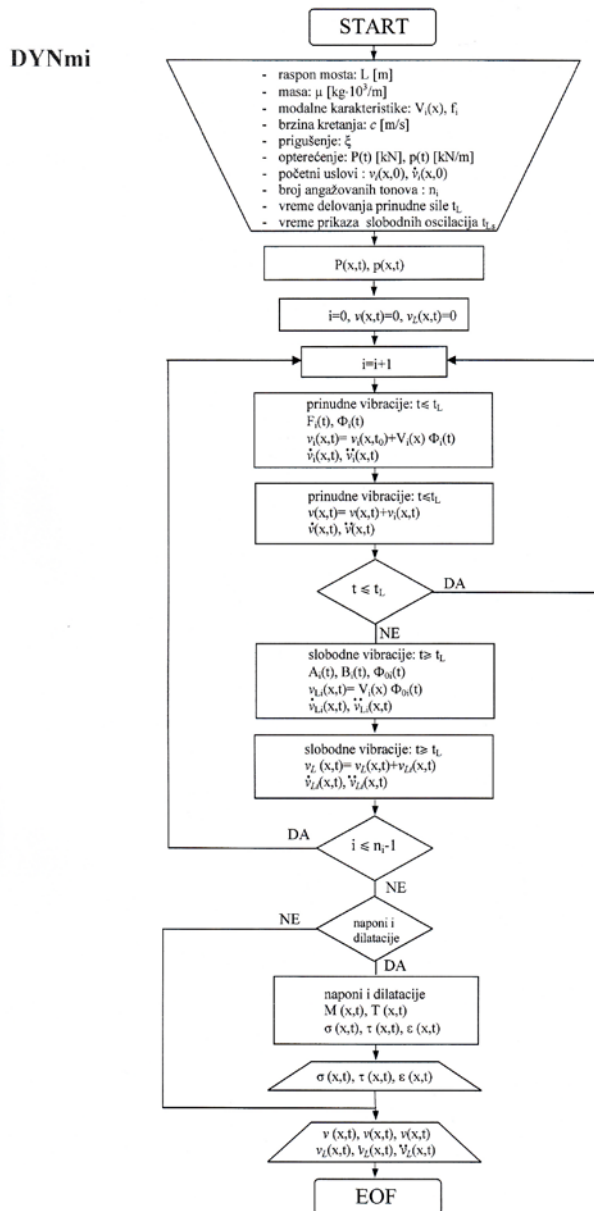
$$\tau(x, t) = \frac{T(x, t) \cdot S(x)}{b(x) \cdot I_z} \quad (4.1.36)$$

U (4.1.35) i (4.1.36),  $y$  je rastojanje od težišta zone preseka, za koju se određuje napon  $\sigma(x,t)$ ,  $S(x)$  statički moment i  $b(x)$  je širina preseka sa apscisom  $x$ .

Za poznate normalne napone  $\sigma(x,t)$  moguće je prikazati, za homogene preseke, i dilatacije  $\varepsilon(x,t)$  prema relaciji:

$$\varepsilon(x,t) = \frac{1}{E} \cdot \sigma(x,t) \quad (4.1.37)$$

Rešenja za ugibe, brzine, ubrzanja i napone i dilatacije nalazimo primenom programa u softeru Mathematica<sup>®</sup>, a prema algoritmu DYNmi (sl.4.1.3)



Slika.4.1.3 Algoritam DYNmi

### 4.1.3.1 Nosač sa jednim poljem

#### Svojstvene karakteristike

Za ovaj nosač su poznate svojstvene karakteristike oscilatornog sistema:

$$V_r(x) = \sin \frac{r\pi x}{l} \text{ - svojstveni oblik tona } r \quad (4.1.38)$$

$$\omega_r = \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \text{ - svojstvena frekvencija tona } r \quad (4.1.39)$$

$$r = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty \quad (0 \leq x \leq L)$$

Za generalisanu masu  $r$ -tog tona važi relacija:

$$M_r = \mu \int_0^L V_r^2(x) dx = \mu \frac{L}{2} = \mu \frac{l}{2} \quad (4.1.40)$$

#### Generalisane sile za karakteristične konstelacije pokretnih opterećenja

Generalisana sila saglasno sa (4.1.23) data je relacijom:

$$F_r(\tau) = \int_0^L p(u, \tau) V_r(u) du \quad (4.1.41)$$

Za pokretno opterećenje definisano preko Hevisajdove i Darakove funkcije (videti tabelu 4.1.1), sračunate su sile  $F_r(\tau)$  i prikazane u tabeli 4.1.2.

Tabela 4.1.2 Generalisane sile za karakteristične konstelacije pokretnih opterećenja

generalisana sila $F_r(\tau)$	konstelacija opterećenja	
$P(\tau) \sin r\omega_c \tau$	koncentrisana sila	<b>a</b>
$p(\tau) \frac{l(1-\cos r\omega_c \tau)}{r\pi}$	nailazak kont. opt.	<b>b</b>
$p(\tau) \frac{l(1-\cos r\pi)}{r\pi}$	prelaženje kont. opt.	<b>c</b>
$p(\tau) \frac{l(\cos r\omega_c \tau - \cos r\pi)}{r\pi}$	odlazak kont. opt.	<b>d</b>
$p(\tau) \frac{l(\cos r(\omega_c \tau - \omega_\lambda) - \cos r\omega_c \tau)}{r\pi}$	kont.opt. dužine $\lambda$	<b>e</b>

U tabeli 4.1.2 konstante  $\omega_c$  i  $\omega_\lambda$  date su izrazima:

$$\omega_c = \frac{\pi c}{l} \quad (4.1.42)$$

$$\omega_\lambda = \frac{\pi \lambda}{l} \quad (4.1.43)$$

### Analićka rešenja odgovora sistema

Analićka rešenja za odgovor oscilatornog sistema za vibracije u  $r$ -tom tonu, za karakteristične konstelacije opterećenja, nalazimo po određenoj proceduri u softveru Mathematica<sup>®</sup>, za generalisane sile date u tabeli 4.1.2, a preme relacijama za ugib, brzinu i ubrzanje  $r$ -tog tona :

$$v_r(x) = V_r(x)(\Phi_r(t) + \Phi_{0r}(t)) \quad (4.1.44)$$

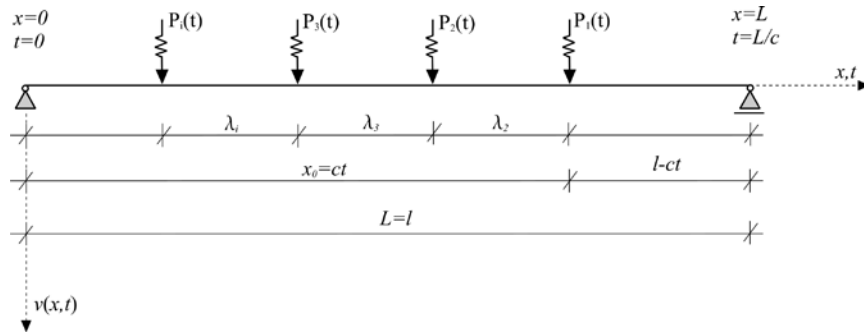
$$\dot{v}_r(x) = V_r(x)(\dot{\Phi}_r(t) + \dot{\Phi}_{0r}(t)) \quad (4.1.45)$$

$$\ddot{v}_r(x) = V_r(x)(\ddot{\Phi}_r(t) + \ddot{\Phi}_{0r}(t)) \quad (4.1.46)$$

Funcije  $\Phi_r(t)$  i  $\Phi_{0r}(t)$ , u (4.1.44), definisane su relacijama (4.1.22) i (4.1.25).

### Slučaj više koncentrisanih sila na nosaču

Polazaj više koncentrisanih sila na nosaču, prikazan je na sl.4.1.4



Slika 4.1.4 Dinamički model oscilatornog sistema sa više koncentrisanih sila

Posmatraćemo, najpre, slučaj kada se po nosaču kreće samo jedna sila, odnosno kada je  $\lambda_2 \geq L$ . Saglasno relaciji (4.1.41), generalisana sila  $r$ -tog tona se preko Dirakove delta funkcije, može izraziti relacijom:

$$F_r(\tau) = \int_0^L P_1(u, \tau) \delta(u - ct) V_r(u) du = P_1(\tau) V_r(c\tau) \quad (4.1.47)$$

Uvodeći smenu za  $V_r(c\tau)$  prema (4.1.38), sledi da je:

$$F_r(\tau) = P_1(\tau) \sin r\omega_c \tau \quad (4.1.48)$$

U izrazu (4.1.48), konstanta  $\omega_c$  je definisana relacijom (4.1.42). Tako, generalisana koordinata  $r$ -tog tona, za samo jednu silu na nosaču, a za nulte početne uslove, postaje:

$$\eta_{(1)r}(t) = \Phi_{(1)r}(t) = \frac{1}{M_r} \int_0^t P_1(\tau) \sin r\omega_c \tau \frac{\sin \omega_{dr}(t-\tau)}{\omega_{dr}} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau \quad \left(0 \leq t \leq \frac{L}{c}\right) \quad (4.1.49)$$

Ugib usled delovanje samo jedne sile  $P_1(t)$ , pri nultim početnim uslovima, označićemo, za vibracije u tonu  $r$ , sa:

$$v_{(1)r}(x, t) = V_r(x) \cdot \eta_{(1)r}(t) \quad (4.1.50)$$

Za slučaj kada se po nosaču kreće i druga sila  $P_2(t)$ , odnosno kada je  $\lambda_2 < L$ , ugib nosača određujemo superpozicijom ugiba od obe sile pojedinačno. Tako je za  $r$ -ti ton:

$$v_r(x, t) = v_{(1)r}(x, t) + v_{(2)r}(x, t) \quad (4.1.51)$$

Za ugib usled delovanja sile  $P_2(t)$ , početni uslovi nisu nulti, a sračunavaju se iz ugiba usled sile  $P_1(t)$ , u vremenu  $t_0 = \frac{\lambda_2}{c}$ .

Treba naglasiti da je vremenski interval za kretanje po nosaču sile  $P_2(t)$  od  $t = \frac{\lambda_2}{c}$  do  $t = \frac{L + \lambda_2}{c}$ . Dakle, posle vremena  $t = \frac{L}{c}$ , sila  $P_1(t)$  odlazi s mosta, i dalje deluje samo još sila  $P_2(t)$  za vreme do  $t = \frac{\lambda_2}{c}$ . Nakon toga, ostaju samo slobodne vibracije, koje se s vremenom gase, u zavisnosti od veličine relativnog prigušenja  $\xi_r$ .

Analognim postupkom problem se rešava i za kretanje tri i više sila, ili simultanog delovanja koncentrisanog i kontinualnog opterećenja.

Ako se vreme kretanja više koncentrisanih sila pri nailasku, odnosno odlasku sa mosta, može zanemariti u odnosu na vreme  $t = L/c$  dok se sila nalazi na njemu, postupak rešavanja problema se znatno pojednostavljuje. U tom slučaju, generalisana sila  $r$ -tog tona može se definisati relacijom:

$$F_r(\tau) = P_1(\tau) \cdot V_r(c\tau) + P_2(\tau) \cdot V_r(c\tau - \lambda_2) + P_3(\tau) \cdot V_r(c\tau - \lambda_2 - \lambda_3) + \dots \quad (4.1.52)$$

Ovakav postupak je primenljiv pri kretanju nekoliko pešaka na relativno malom rastojanju, biciklista, ili servisnog, odnosno protivpožarnog vozila (sa dve do tri osovine), ukoliko je projektom mosta prelaz ovih vozila predviđen. Analiza odgovora rasponske konstrukcije mosta se ovim postupkom znatno pojednostavljuje, naročito kada su koncentrisane sile različitih intenziteta  $P$ , frekvencija  $\Omega$ , amplituda  $P_0$ .

#### 4.1.3.2 Nosač sa dva jednaka polja ( $L=2l$ )

##### Svojstvene karakteristike

Za vibracije sinusoidalnog oblika, koje su za sve  $r$ -te tonove oscilovanja antimetrične, za oba polja važe svojstvene karakteristike prema relacijama:

$$V_r(x) = \sin \frac{r\pi x}{l} - \text{svojstveni oblik tona } r \quad (4.1.53)$$

$$\omega_r = \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = r^2 \omega_1 \text{ - svojstvena frekvencija tona } r \quad (4.1.54)$$

$$r = 1, 2, 3, 4, \dots, \infty \quad (0 \leq x \leq L)$$

Sinusne vibracije su nesimetričnog oblika i odnose se samo na neparne tonove (1,3,5,...).

Generalisana masa neparnog tona, saglasno sa (4.1.9), je:

$$M_r = \mu \int_0^L V_r^2(x) dx = \mu \frac{L}{2} = \mu l \quad (4.1.55)$$

Za vibracije nesinusoidalnog oblika, koje su simetrične, za svojstvene funkcije i svojstvene frekvencije, važe relacije [11] , [20]:

$$V_s(x) = \begin{cases} V_{s,1}(x) = \sin \frac{s\pi x}{l} - \frac{\sin s\pi}{\text{sh}s\pi} \cdot \text{sh} \frac{s\pi x}{l} \dots\dots\dots (0 \leq x \leq l) \\ V_{s,2}(x) = \sin \frac{s\pi}{l} (2l - x) - \frac{\sin s\pi}{\text{sh}s\pi} \cdot \text{sh} \frac{s\pi}{l} (2l - x) \dots\dots\dots (l \leq x \leq 2l) \end{cases} \quad (4.1.56)$$

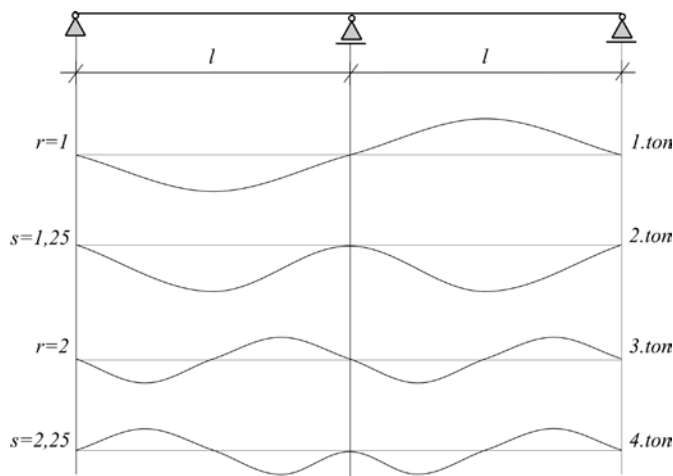
$$\omega_s = \frac{s^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = s^2 \cdot \omega_1, \quad \omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad s = 1.25, 2.25, 3.25 \dots \quad (4.1.57)$$

Nesinusne vibracije su simetričnog oblika i odnose se samo na parne tonove (2,4,6,...).

Generalisana masa parnog tona, saglasno sa (4.1.9), je:

$$M_s = \mu \int_0^L V_s^2(x) dx = \mu \frac{L}{2} = \mu l \quad (4.1.58)$$

Na sl.4.1.5 prikazana su prva četiri tona vibracija.



Slika 4.1.5 Grafici prva četiri tona vibracija

### Generalisane sile za karakteristične konstelacije pokretnih opterećenja

Generalisana sila saglasno sa (4.1.23), data je relacijom:

$$F_i(\tau) = \int_0^L p(u, \tau) V_i(u) du, \quad i = r, s \quad (4.1.59)$$

Za pokretno opterećenje definisano preko Hevisajdove i Darakove funkcije (videti tabelu 4.1.1), sračunate su sile  $F_r(\tau)$  i prikazane u tabelama 4.1.3.-4.1.5.

Tabela 4.1.3 Generalisane sile  $F_r(\tau)$  za karakteristične konstelacije pokretnih opterećenja za vibracije sinusnog obila (za oba polja)

generalisana sila $F_r(\tau)$	konstelacija opterećenja	
$P(\tau) \sin r\omega_c \tau$	koncentrisana sila	<b>a</b>
$p(\tau) \frac{l(1 - \cos r\omega_c \tau)}{r\pi}$	nailazak kont. opt.	<b>b</b>
$p(\tau) \frac{l(1 - \cos 2r\pi)}{r\pi}$	prelaženje kont. opt.	<b>c</b>
$p(\tau) \frac{l(\cos r\omega_c \tau - \cos 2r\pi)}{r\pi}$	odlazak kont. opt.	<b>d</b>
$\frac{l(\cos r(\omega_c \tau - \omega\lambda) - \cos r\omega_c \tau)}{r\pi}$	kont.opt. dužine $\lambda$	<b>e</b>

Tabela 4.1.4 Generalisane sile  $F_s(\tau)$  za karakteristične konstelacije pokretnih opterećenja u prvom polju za vibracije nesinusnog oblika (parni tonovi) ( $0 \leq c\tau \leq l$ )

generalisana sila $F_s(\tau)$	konstelacija opterećenja	
$P(\tau) \left( \sin s\omega_c \tau - \frac{\sin s\pi}{\sinh s\pi} \sinh s\omega_c \tau \right)$	koncentrisana sila	<b>a</b>
$p(\tau) \frac{l \left( 1 - \cos s\omega_c \tau + \frac{\sin s\pi}{\sinh s\pi} (1 - \cosh s\omega_c \tau) \right)}{s\pi}$	nailazak kont. opt.	<b>b</b>
$p(\tau) \frac{l \left( 1 - \cos s\pi + \sin s\pi \cdot \operatorname{tgh} \frac{s\pi}{2} \right)}{s\pi}$	prelaženje kont. opt.	<b>c</b>
$p(\tau) \frac{l \left( \cos s\omega_c \tau - \cos s\pi + \frac{\sin s\pi}{\sinh s\pi} (\cosh s\omega_c \tau - \cosh s\pi) \right)}{s\pi}$	odlazak kont. opt.	<b>d</b>
$p(\tau) \frac{l \left( \cos s(\omega_c \tau - \omega\lambda) - \cos s\omega_c \tau + \cosh s\pi \frac{\sin s\pi}{\sinh s\pi} (\cosh s(\omega_c \tau - \omega\lambda) - \cosh s\omega_c \tau) \right)}{s\pi}$	kont.opt. dužine $\lambda$	<b>e</b>



Tabela 4.1.5 Generalisane sile  $F_s(\tau)$  za karakteristične konstelacije pokretnih opterećenja u drugom polju za vibracije nesinusnog oblika (parni tonovi)  
( $l \leq c\tau \leq 2l$ )

generalisana sila $F_s(\tau)$	konstelacija opterećenja	
$p(\tau) \left( \sin(2s\pi - s\omega_c \tau) - \frac{\sin s\pi}{\sinh s\pi} \sinh(2s\pi - s\omega_c \tau) \right)$	koncentrisana sila	<b>a</b>
$p(\tau) \frac{l \left( \cos(2s\pi - s\omega_c \tau) - \cos s\pi + \frac{\sin s\pi}{\sinh s\pi} (\cosh(2s\pi - s\omega_c \tau) - \cosh s\pi) \right)}{s\pi}$	nailazak kont. opt.	<b>b</b>
$p(\tau) \frac{l \left( 1 - \cos s\pi + \sin s\pi \operatorname{tgh} \frac{s\pi}{2} \right)}{s\pi}$	prelaženje kont. opt.	<b>c</b>
$p(\tau) \frac{l \left( 1 - \cos(2s\pi - s\omega_c \tau) + \frac{\sin s\pi}{\sinh s\pi} (1 - \cosh(2s\pi - s\omega_c \tau)) \right)}{s\pi}$	odlazak kont. opt.	<b>d</b>
$p(\tau) \frac{l \left( \cos(2s\pi - s\omega_c \tau) - \cos(2s\pi - s\omega_c \tau - s\omega_\lambda) + \frac{\sin s\pi}{\sinh s\pi} (\cosh(2s\pi - s\omega_c \tau) - \cosh(2s\pi - s\omega_c \tau - s\omega_\lambda)) \right)}{s\pi}$	kont. opt. dužine $\lambda$	<b>e</b>

U tabelama 4.1.3, 4.1.4 i 4.1.5, konstante  $\omega_c$  i  $\omega_\lambda$  date su izrazima (4.1.42) i (4.1.43).

### Analitička rešenja odgovora sistema

Ukupne vibracije predstavljene su superpozicijom vibracija asimetričnog i simetričnog oblika, saglasno relaciji (4.1.19):

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x, t) = \sum_r v_r(x, t) + \sum_s v_s(x, t) \quad i = r, s \quad (4.1.60)$$

U (4.1.60) sa  $v_r(x, t)$  označene su vibracije (dinamički ugibi) tona  $r$ , sinusoidalnog oblika i to antimetrične, a  $v_s(x, t)$  vibracije nesinusoidalnog oblika i to simetrične.

Analitička rešenja za odgovor oscilatornog sistema, za karakteristične konstelacije opterećenja, nalazimo po određenoj proceduri u softveru Mathematica<sup>®</sup>, saglasno relacijama (4.1.20) do (4.1.27), pri čemu su generalisane sile definisane u tabelama 4.1.3, 4.1.4 i 4.1.5.

Treba napomenuti da se za prelazak opterećenja iz prvog u drugo polje treba uvesti početne uslove na osnovu odgovora sistema za kretanje opterećenja u prethodnom polju, a za vreme kada dolazi do oslonca narednog polja.

#### 4.1.3.3 Nosač sa tri jednaka polja

##### Svojstvene karakteristike

Za ovaj nosač, svojstvene karakteristike (svojstvene oblici i svojstvene frekvencije) važe relacije kao za nosač sa jednim, odnosno dva jednaka polja za sinusoidalne oblike, a relacije (4.1.61) do

(4.1.66) za nesinusoidalne oblike oscilovanja [21].

Za nesinusoidalne svojstvene oblike (simetrične vibracije) i frekvencije važe relacije:

$$V_s(x) = \begin{cases} V_{s,1}(x) = \sin \frac{s\pi x}{l} - \frac{\sin s\pi}{\operatorname{sh}s\pi} \cdot \operatorname{sh} \frac{s\pi x}{l} \dots\dots\dots (0 \leq x \leq l) \\ V_{s,2}(x) = 2 \sin \frac{s\pi}{2} \left[ \cos \frac{s\pi}{l} \left( \frac{3l}{2} - x \right) - \frac{\cos \frac{s\pi}{2}}{\operatorname{ch} \frac{s\pi}{2}} \operatorname{ch} \frac{s\pi}{l} \left( \frac{3l}{2} - x \right) \right] \dots\dots (l \leq x \leq 2l) \\ V_{s,3}(x) = \sin \frac{s\pi}{l} (3l - x) - \frac{\sin s\pi}{\operatorname{sh}s\pi} \cdot \operatorname{sh} \frac{s\pi}{l} (3l - x) \dots\dots\dots (2l \leq x \leq 3l) \end{cases} \quad (4.1.61)$$

$$\omega_s = \frac{s^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = s^2 \cdot \omega_1, \quad \omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (4.1.62)$$

$$s \approx 1.27, 2.14, 3.27, 4.14\dots \quad (4.1.63)$$

Za nesinusoidalne svojstvene oblike (nesimetrične vibracije) i frekvencije važe relacije:

$$V_n(x) = \begin{cases} V_{n,1}(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} - \frac{\sin n\pi}{\operatorname{sh}n\pi} \cdot \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{l} \dots\dots\dots (0 \leq x \leq l) \\ V_{n,2}(x) = 2 \cos \frac{n\pi}{2} \left[ \sin \frac{n\pi}{l} \left( \frac{3l}{2} - x \right) - \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{2}} \operatorname{sh} \frac{n\pi}{l} \left( \frac{3l}{2} - x \right) \right] \dots\dots (l \leq x \leq 2l) \\ V_{n,3}(x) = -\sin \frac{n\pi}{l} (3l - x) + \frac{\sin n\pi}{\operatorname{sh}n\pi} \cdot \operatorname{sh} \frac{n\pi}{l} (3l - x) \dots\dots\dots (2l \leq x \leq 3l) \end{cases} \quad (4.1.64)$$

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = n^2 \cdot \omega_1, \quad \omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (4.1.65)$$

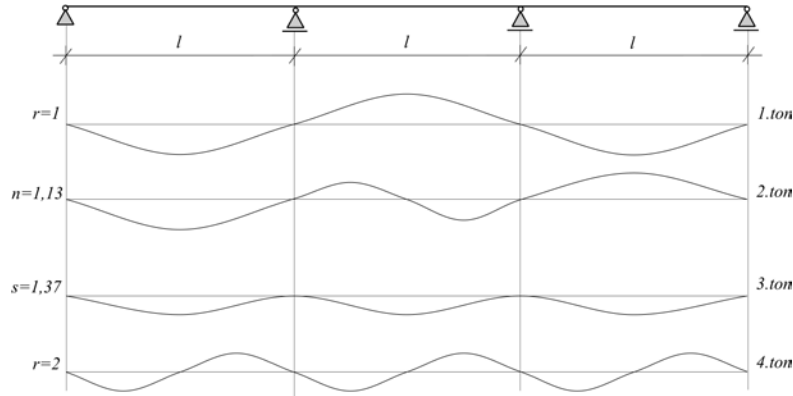
$$n \approx 1.13, 2.48, 3.13, 4.48\dots \quad (4.1.66)$$

Ukupne vibracije predstavljene su superpozicijom vibracija asimetričnog i simetričnog oblika, saglasno relaciji (4.1.19):

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x,t) = \sum_r v_r(x,t) + \sum_s v_s(x,t) + \sum_n v_n(x,t) \quad i = r, s, n \quad (4.1.67)$$

U (4.1.67) sa  $v_r(x,t)$  označene su vibracije (dinamički ugibi) sinusoidalnog oblika prema (4.1.53) i to simetrične i antimetrične, a  $v_s(x,t)$  i  $v_n(x,t)$  vibracije nesinusoidalnog oblika prema (4.1.61) i (4.1.64), i to simetrične i antimetrične respektivno.

Na sl.4.1.6 prikazani su grafici prva četiri tona vibracija.



Slika 4.1.6 Grafici prva četiri tona vibracija

### Analitička rešenja odgovora sistema

Ukupne vibracije predstavljene su superpozicijom vibracija simetričnog i nesimetričnog oblika, saglasno relaciji (4.1.19):

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x,t) = \sum_r v_r(x,t) + \sum_s v_s(x,t) + \sum_n v_n(x,t) \quad i = r, s, n \quad (4.1.68)$$

U (4.1.68) sa  $v_r(x,t)$  označene su vibracije (dinamički ugibi) tona  $r$ , sinusoidalnog oblika i to simetrične i nesimetrične, sa  $v_s(x,t)$  simetrične vibracije nesinusoidalnog oblika tona  $s$ , i sa  $v_n(x,t)$  nesimetrične vibracije nesinusoidalnog oblika tona  $n$ .

Generalisane mase  $i$ -tog tona ( $i = r, s, n$ ), saglasno (4.1.9) je:

$$M_i = \mu \int_0^L V_i^2(x) dx = \mu \frac{L}{2} = \mu \frac{3l}{2} \quad (4.1.69)$$

Analitička rešenja za odgovor oscilatornog sistema, za karakteristične konstelacije opterećenja, nalazimo po određenoj proceduri u softveru Mathematica<sup>®</sup>, saglasno sa (4.1.20) do (4.1.27).

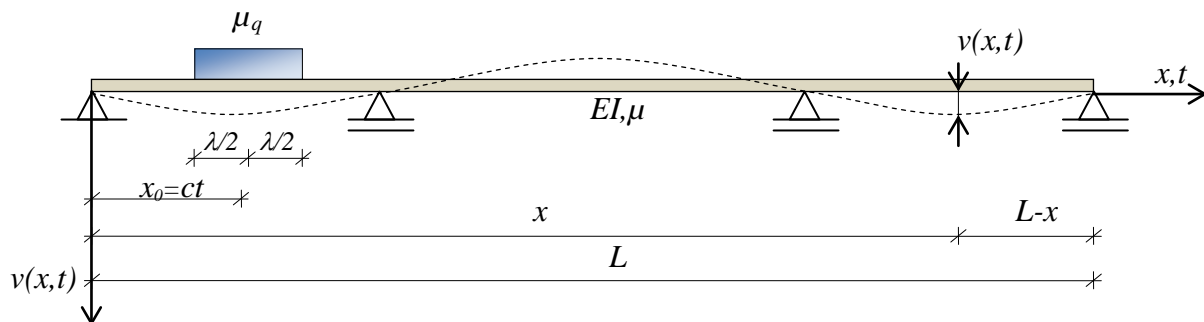
### 4.1.4 Uticaj mase pokretnog opterećenja na promenu osnovne frekvencije kontinualnih sistema

Za inženjersku praksu, a naročito kada su u pitanju pešački mostovi, vrlo je značajan aspekt rezonantnih vibracija usled prelaženja pešaka. U tom smislu, sasvim je razumljivo, da je poznavanje promene prirodne frekvencije mostovske konstrukcije pri različitim položajima mase, od posebnog interesa.

Na osnovu izvedenih analitičkih (približnih) rešenja u ovom odeljku, može se odrediti prirodna frekvencija grednog pešačkog mosta za proizvoljan položaj pešaka, ili servisnog vozila, čija se masa modelira kao parcijalno raspodeljena, ili koncentrisana.

#### 4.1.4.1 Postavka i rešenje problema

Posmatramo slobodne transverzalne vibracije elastičnog oscilatornog sistema (sl.4.1.7) konstantne krutosti na savijanje  $EI$  i mase  $\mu$  duž raspona  $L$ .



Slika 4.1.7 Dinamički model kontinualnog sistema sa pridodatom masom  $\mu_q$

Konstantnoj masi nosača  $\mu$  po jedinici dužine raspona pridodajemo parcijalno raspodeljenu masu  $\mu_q$  po jedinici dužine  $\lambda$ , čiji je položaj definisan apscisom  $x_0$ , ( $\lambda/2 \leq x_0 \leq l - \lambda/2$ ). Usvaja se da je kontakt između nosača i dodatnih masa stalno ostvaren.

Ovakva konstelacija pridodatih masa grednom nosaču se najčešće ostvaruje kod pešačkih mostova, kada pešaci stoje, ili se kreću brzinom  $c$ , pri čemu je  $x_0 = ct$ .

Problem vibracija se može opisati diferencijalnom jednačinom (4.1.1), gde je:

$$p(x,t) = -\mu_q \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} [H(x - x_0 + \lambda/2) - H(x - x_0 - \lambda/2)] \quad (4.1.70)$$

Koristeći modalnu analizu i uvodeći aproksimaciju prema relaciji (4.1.71)

$$\mu_q \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \cong \mu_q \ddot{\eta}_r(t) V_r(x) \quad (4.1.71)$$

diferencijalna jednačina (4.1.1), za slučaj neprigušenih vibracija, svodi se na sistem od  $r$  nezavisnih jednačina, koje se simbolički mogu predstaviti u formi (4.1.72):

$$\ddot{\eta}_r(t) + \bar{\omega}_r \eta_r(t) = 0 \quad (4.1.72)$$

gde je  $\bar{\omega}_r$  kružna frekvencija  $r$ -tog tona sistema sa pridodatom masom.

Za  $\bar{\omega}_r$  u (4.1.72) važi relacija (4.1.73):

$$\bar{\omega}_r = \frac{\omega_r}{\sqrt{1 + G_r}} \quad (4.1.73)$$

gde je:

$$G_r = \frac{1}{M_r} \mu_q \int_{x_0 - \lambda/2}^{x_0 + \lambda/2} V_r^2(x) dx \quad (4.1.74)$$

U (4.1.73), odnosno (4.1.74)  $\omega_r$ ,  $V_r(x)$  i  $M_r$  su kružna frekvecija, svojstvena funkcija i generalisana masa  $r$ -tog tona sistema bez pridodatih masa  $\mu_q$ .

Budući da je doprinos viših tonova, po pravilu, od manjeg značaja na ukupne vibracije, to je očigledno da je relacija (4.1.73) prihvatljiva za osnovni ton ( $r=1$ ), i nekoliko sledećih tonova gde su odstupanja utoliko veća, ukoliko je ton ( $r$ ) viši i pri tome odnos pridodatih masa i mase mosta veći.

Kada su u pitanju pešački mostovi od praktičnog je interesa poznavanje promene frekvencije osnovnog tona usled delovanja mase pešaka, što relacija (4.1.73) zadovoljava, dakle, za  $r=1$ .

#### 4.1.4.2 Primeri datih rešenja za nosače sa jednim, dva i tri jednaka polja

Primenu izloženog teorijskog postupka prikazaćemo na kontinualnim nosačima raspona  $L$ , i to za nosač sa tri jednaka polja ( $L=3l$ ), dva jednaka polja ( $L=2l$ ) i nosač sa jednim poljem ( $L=l$ ).

Analiza se sprovodi za tri karakteristična slučaja konstelacije pridodatih masa, prema dinamičkim modelima nosača prikazanim u tabeli 1. Pri tome, sličaj (a) odnosi se na jednakorasodeljenu masu  $\mu_q$  na dužini  $\lambda$ , slučaj (b) na nailazak jednakorasodeljene mase  $\mu_q$  na nosač, i slučaj (c) na uticaj koncentrisane mase  $m$ .

Posmatraćemo vibracije sinusoidalnog oblika gde za sva tri nosača važe svojstvene karakteristike :

$$V_r(x) = \sin \frac{r\pi x}{l} - \text{funkcija svojstvenog oblika tona } r \quad (4.1.75)$$

$$\omega_r = \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{l}} - \text{svojstvena frekvencija tona } r \quad (4.1.76)$$

Za nosač sa jednim poljem, svojstvene karakteristike (4.1.75), (4.1.76), važe za sve tonove, dok za nosače sa dva i tri jednaka polja, odnose se na osnovni ton i više tonove samo sinusoidalnog oblika. Budući da se akcenat stavlja na osnovni ton, analiza za više tonove nesinusoidalnog oblika se ovde izostavlja.

##### 4.1.4.2.1 Slučaj a – dodatna masa na dužini $\lambda$

Frekvevciju  $\bar{\omega}_r$  za ovaj slučaj određujemo iz izraza (4.1.73) saglasno sa relacijama (4.1.75), (4.1.76). Tako se dobija da je:

$$\bar{\omega}_r = \omega_r \left[ 1 + \frac{\mu_q}{M_r} \frac{l}{2} \cdot \Phi_a(\lambda, x_0) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.1.77)$$

gde je

$$\Phi_a(\lambda, x_0) = \left( \frac{\lambda}{l} - \frac{1}{r\pi} \sin \frac{r\pi\lambda}{l} \cos \frac{2r\pi x_0}{l} \right) \quad (4.1.78)$$

Relacija (4.1.77) je opšti izraz i važi za nosače sa jednim, dva i tri jednaka polja, u koji treba uvesti  $M_r$  za odnosni nosač, prema relaciji (4.1.79). Generalisana masa  $M_r$  prema (4.1.69) i (4.1.75) iznosi :

$$M_r = \mu \int_0^L \sin^2 \frac{r\pi x}{l} dx = \mu \frac{L}{2} \quad (4.1.79)$$

#### 4.1.4.2.2 Slučaj b – nailazak jednakoraspodeljene mase

Uvodeći smenu  $x_0 = \lambda/2$  u (4.1.77), odnosno (4.1.78), posle sređivanja izraza,  $\bar{\omega}_r$  za ovaj slučaj može se, uz translaciju  $x_0$  za  $\lambda/2$ , predstaviti relacijom:

$$\bar{\omega}_r = \omega_r \left[ 1 + \frac{\mu_q}{M_r} \frac{l}{2} \cdot \Phi_b(x_0) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.1.80)$$

gde je

$$\Phi_b(x_0) = \left( \frac{x_0}{l} - \frac{1}{2r\pi} \sin \frac{2r\pi x_0}{l} \right) \quad (4.1.81)$$

Relacija važi za nosače sa jednim, dva i tri jednaka polja, u koju, za odnosni nosač, generalisanu masu  $M_r$  treba uvesti prema relacijama (4.1.79).

#### 4.1.4.2.3 Slučaj c – koncentrisana masa

Uticao koncentrisane mase na rasponskoj konstrukciji pešačkog mosta, može biti više značajan za opterećenje od servisnog, ili protivpožarnog vozila, čije kretanje u nekim slučajevima može biti dozvoljeno, a praktično zanemarljiv pri kretanju pešaka.

Rešenje za  $\bar{\omega}_r$ , ovog slučaja, možemo dobiti iz relacije (4.1.77), odnosno (4.1.78), ako smatramo da je  $\lambda$  beskonačno malo, a da, pri tome, masa  $\mu_q \lambda$  ima konačnu vrednost  $m$ .

Tada, za  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\sin \frac{r\pi\lambda}{l}$  postaje  $\frac{r\pi\lambda}{l}$ , pa se izraz (4.1.75) transformiše u relaciju (4.1.82), koja definiše frekvenciju  $r$ -tog tona nosača sa koncentrisanom masom. Tako, opšte rešenje za  $\bar{\omega}_r$ , ovog slučaja, glasi:

$$\bar{\omega}_r = \omega_r \left[ 1 + \frac{m}{M_r} \cdot \Phi_c(x_0) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.1.82)$$

gde je

$$\Phi_c(x_0) = \sin^2 \frac{r\pi x_0}{l} \quad (4.1.83)$$

Relacija (4.1.82) važi za nosače sa jednim, dva i tri jednaka polja, u koju, za odonosni nosač, generalisanu masu  $M_r$  treba uvesti prema relacijama (4.1.79).

#### **4.1.4.3 Dinamički modeli grednih nosača sa pridodatim masama i odgovajajuća analitička rešenja za promenu osnovne frekvencije**

Izvedena analitička rešenja za promenu osnovne frekvencije grednog pešačkog mosta usled kretanja pešaka, koje se modelira kao parcijaino raspodeljena, ili koncentrisana masa, mogu se koristiti za jednu užu klasu grednih pešačkih mostova kod kojih su krutost na savijanje i raspored mase duž raspona konstantne veličine. Pri ovome se uvažava da su svojstvene dinamičke karakteristike oscilatornog sistema (most bez pešaka) poznate.

Dinamički modeli tretiranih grednih sistema sa pridodatim masama i odgovarajuća analitička rešenja za promenu osnovne frekvencije prikazani su u tabeli 4.1.13.

Na osnovu rešenja iz tabele 4.1.13 izrađeni su grafikoni za promenu osnovne frekvencije usled pridodatih masa.

Tačnost rešenja proverena je na adekvatnim sistemima sa jednim, dva i tri jednaka polja, diskretizovanim sa konačnim brojem koncentrisanih masa. Rezultati za model nosača sa kontinualno raspodeljenom masom i sa dodatom kontinualnom, ili koncentrisanom masom, i za tretman na modelu korespondentnog diskretizovanog sistema sa koncentrisanim masama, su identični.

Prikazana analitička rešenja vrlo pogodna za kvalitativnu i kvantitativnu analizu postavljenog problema, što je u inženjerskoj praksi uvek od posebnog interesa. Budući da je za analizu vibracija pešačkih mostova relevantan parameter osnovna frekvencija, na osnovu izvedenih analitičkih rešenja, odnosno prikazanih grafikona, jednostavno je ustanoviti kada je zanemarivanje inercijalnog delovanja pridodatih masa prihvatljivo.

Od posebnog interesa je promena osnovne frekvencije usled pridodatih masa, na pr. grupe pešaka koji stoje na određenoj dužini na mostu, dok se ostali pešaci kreću.

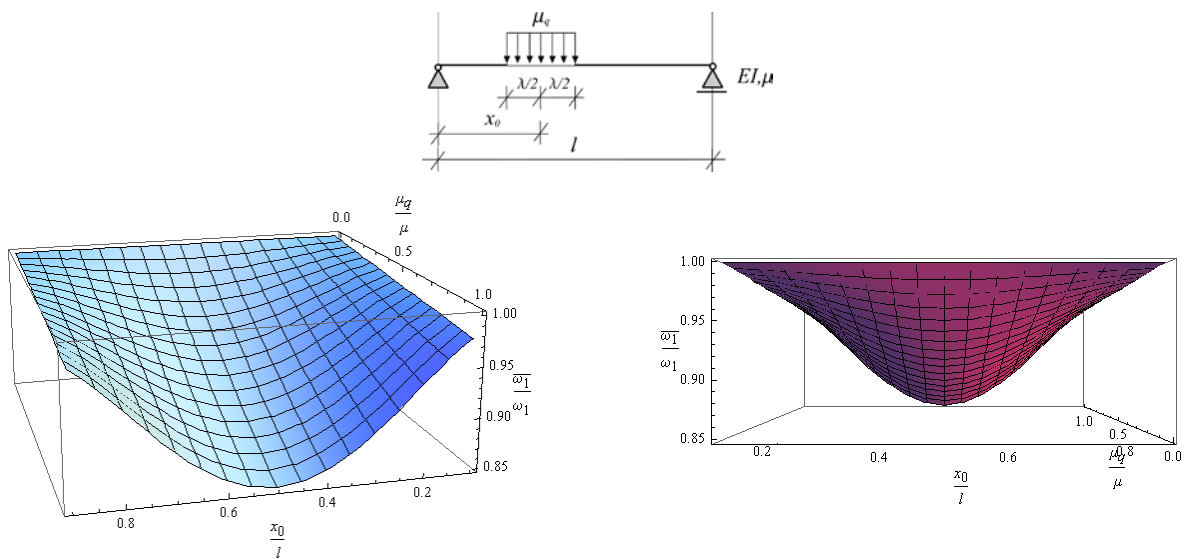
Tabela 4.1.13 Dinamički modeli grednih sistema sa pridodatim masama i odgovarajuća analitička rešenja za promenu osnovne frekvencije

Dinamički model nosača		Osnovne frekvencije
a)		$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \left[ 1 + \frac{\mu_q}{3\mu} \cdot \Phi_a(\lambda, x_0) \right]^{-\frac{1}{2}}$
b)		$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \left[ 1 + \frac{\mu_q}{3\mu} \cdot \Phi_b(x_0) \right]^{-\frac{1}{2}}$
c)		$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \left[ 1 + \frac{m}{1.5\mu l} \cdot \Phi_c(x_0) \right]^{-\frac{1}{2}}$
a)		$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \left[ 1 + \frac{\mu_q}{2\mu} \cdot \Phi_a(\lambda, x_0) \right]^{-\frac{1}{2}}$
b)		$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \left[ 1 + \frac{\mu_q}{2\mu} \cdot \Phi_b(x_0) \right]^{-\frac{1}{2}}$
c)		$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \left[ 1 + \frac{m}{\mu l} \cdot \Phi_c(x_0) \right]^{-\frac{1}{2}}$
a)		$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \left[ 1 + \frac{\mu_q}{\mu} \cdot \Phi_a(\lambda, x_0) \right]^{-\frac{1}{2}}$
b)		$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \left[ 1 + \frac{\mu_q}{\mu} \cdot \Phi_b(x_0) \right]^{-\frac{1}{2}}$
c)		$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \left[ 1 + \frac{m}{0.5\mu l} \cdot \Phi_c(x_0) \right]^{-\frac{1}{2}}$
$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad \Phi_a(\lambda, x_0) = \left( \frac{\lambda}{l} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi\lambda}{l} \cos \frac{2\pi x_0}{l} \right), \quad \Phi_b(x_0) = \left( \frac{x_0}{l} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi x_0}{l} \right), \quad \Phi_c(x_0) = \sin^2 \frac{\pi x_0}{l}$		

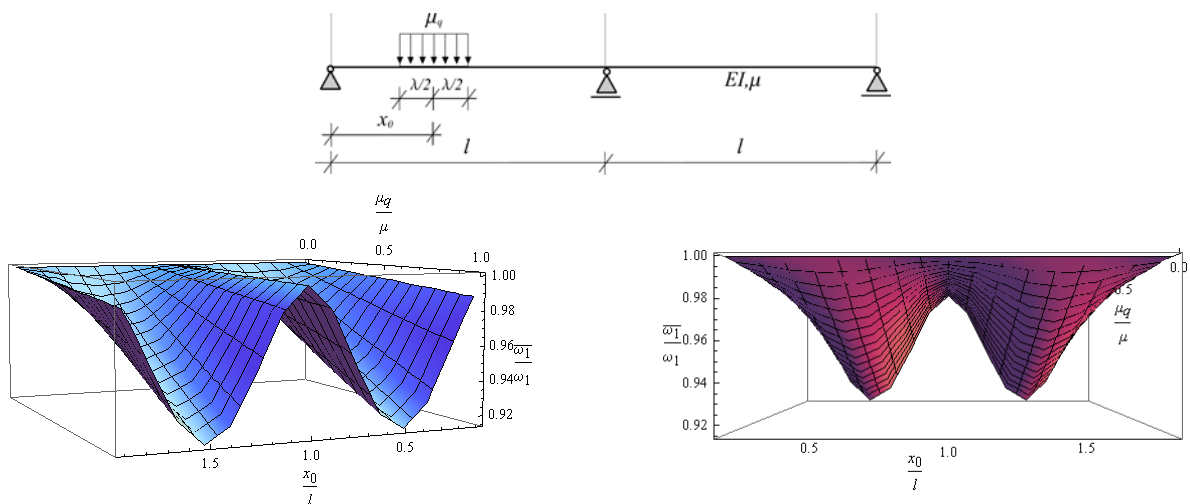


### 4.1.4.4 Grafički prikaz promene osnovne frekvencije nosača usled pridodatih masa

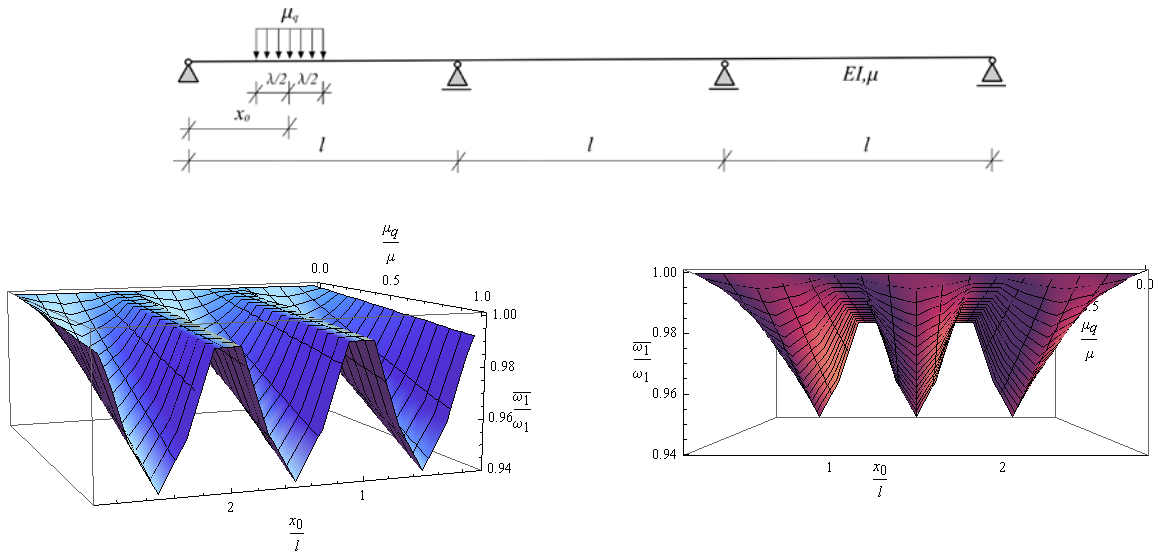
a) Dodatna masa  $\mu_q$  na dužini  $\lambda = 0.2l$



Slika 4.1.8 Promena osnovne frekvencije nosača sa jednim poljem uled pridodate mase  $\mu_q$  na dužini  $\lambda$

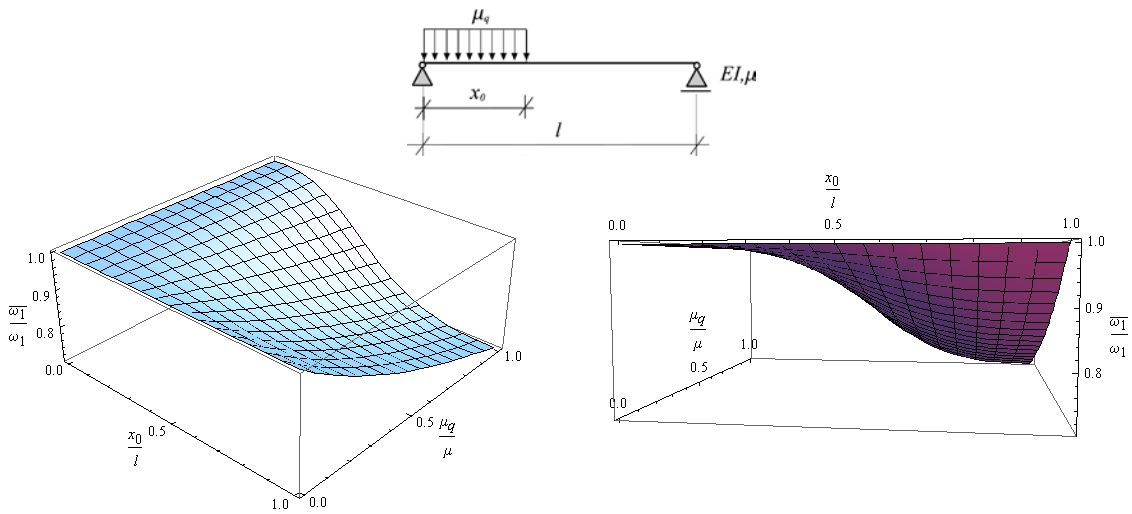


Slika 4.1.9 Promena osnovne frekvencije nosača sa dva jednaka polja uled pridodate mase  $\mu_q$  na dužini  $\lambda$

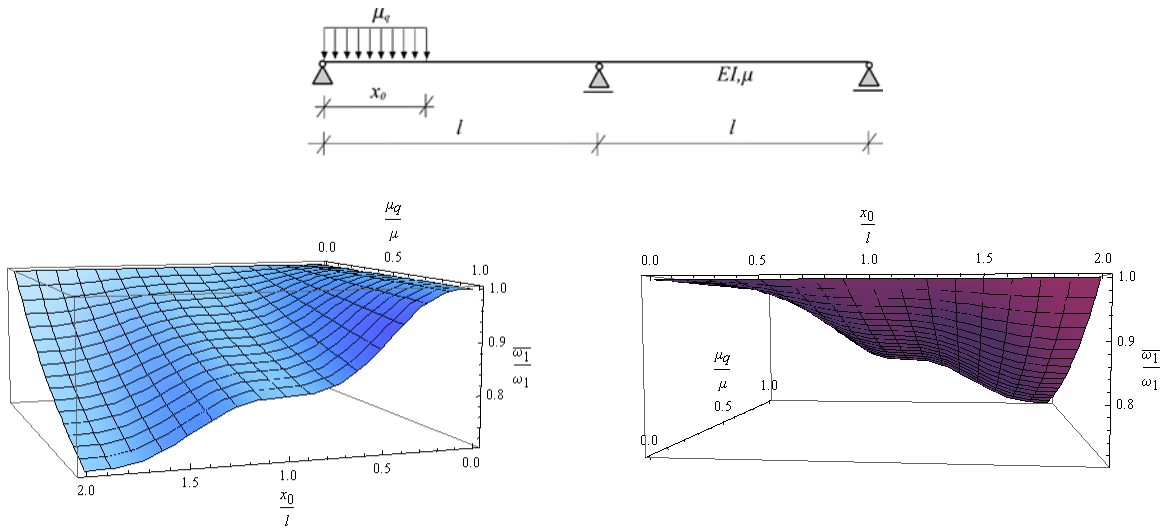


Slika 4.1.10 Promena osnovne frekvencije nosača sa tri jednaka polja uled pridodate mase  $\mu_q$  na dužini  $\lambda$

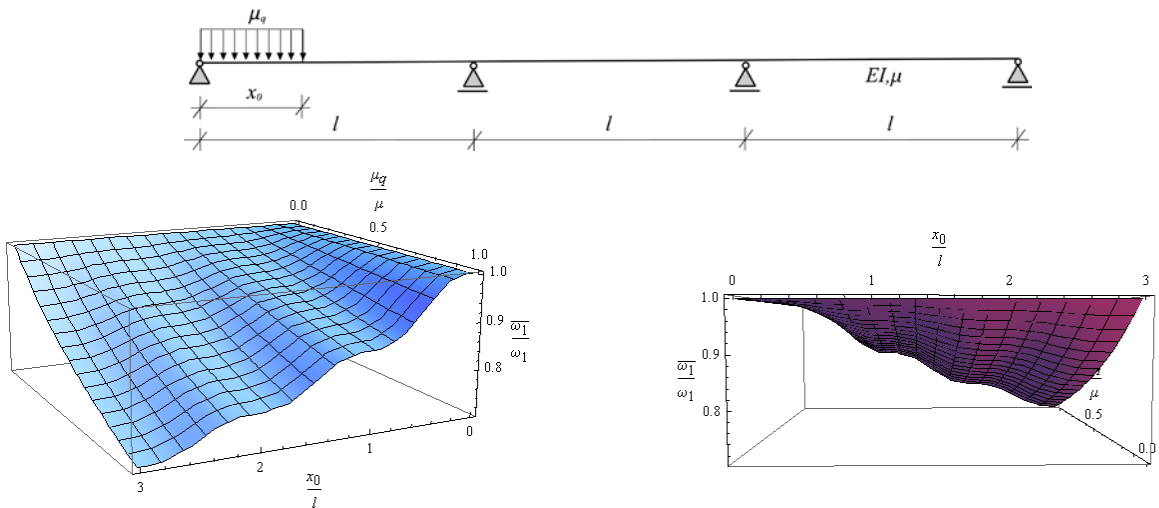
b) Nailazak jednakoraspodeljene mase  $\mu_q$



Slika 4.1.11 Promena osnovne frekvencije nosača sa jednim poljem uled nailaska pridodate mase  $\mu_q$

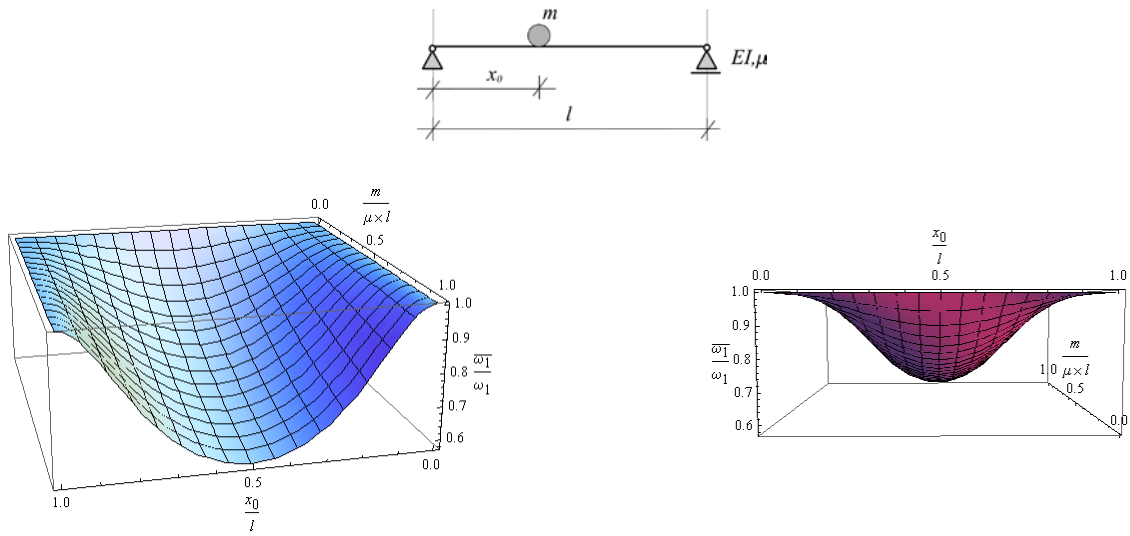


Slika 4.1.12 Promena osnovne frekvencije nosača sa dva jednaka polja uled nailaska pridodate mase  $\mu_q$

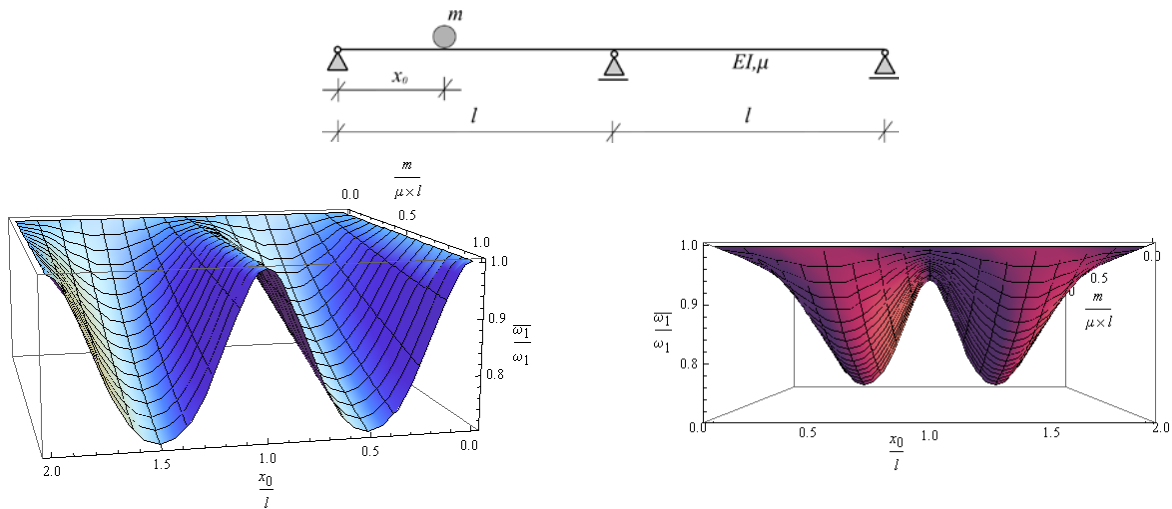


Slika 4.1.13 Promena osnovne frekvencije nosača sa tri jednaka polja uled nailaska pridodate mase  $\mu_q$

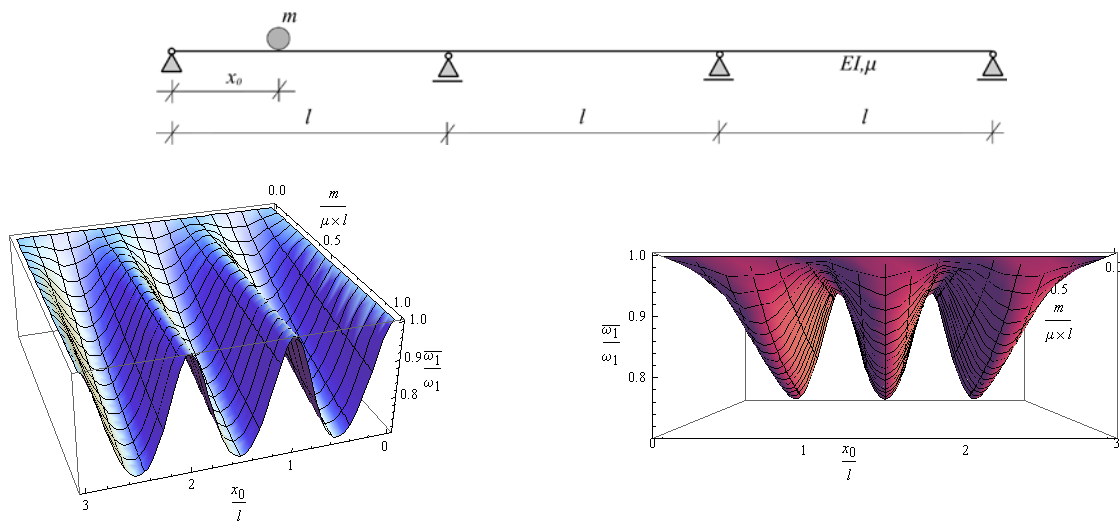
c) Koncentrisana masa  $m$



Slika 4.1.14 Promena osnovne frekvencije nosača sa jednim poljem uled koncentrisane mase  $m$



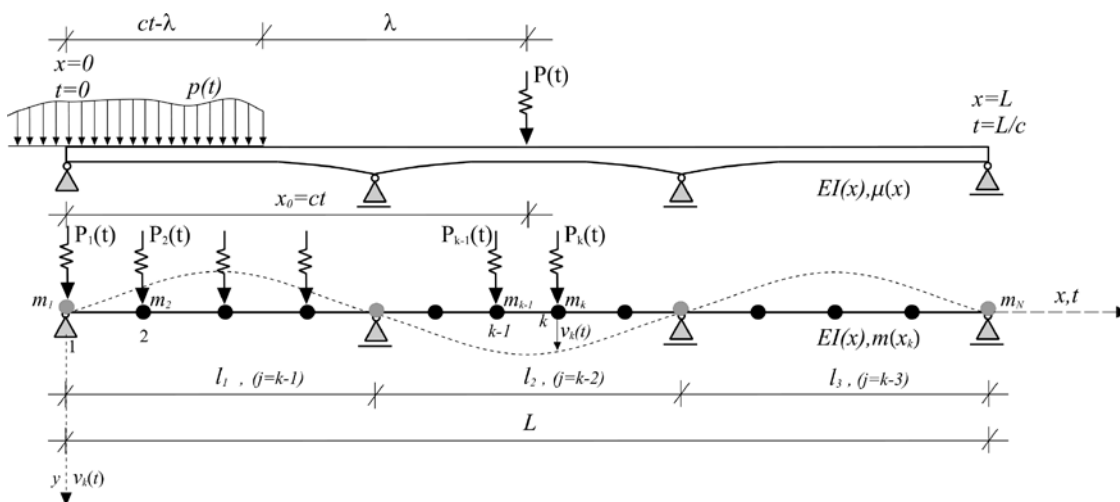
Slika 4.1.15 Promena osnovne frekvencije nosača sa dva jednaka polja uled koncentrisane mase  $m$



Slika 4.1.16 Promena osnovne frekvencije nosača sa tri jednaka polja uled koncentrisane mase  $m$

## 4.2 Diskretni sistemi-rešenja problema vibracija

### 4.2.1 Opšta razmatranja prinudnih prigušenih vibracija



Slika 4.2.1 Dinamički model diskretizovanog oscilatornog sistema sa konačnim brojem koncentrisanih masa

Posmatramo transverzalne vibracije grednog nosača (sl.4.2.1) kod kojeg kontinualno raspoređenu masu  $\mu(x)$  zamenjujemo konačnim brojem ( $N$ ) koncentrisanih masa ( $m$ ). Uvažavamo da svaka aktivna masa ( $m_j$ ;  $j=1,2,\dots,n$ ) vrši kretanje samo u jednom pravcu ( $y$ ), pa prema tome vibracije sistema opisuje  $n$  nezavisnih – generalisanih koordinata, koje ćemo simbolički označiti sa  $v_j(t)$ .

Ukupan broj koncentrisanih masa ( $m_k$ ) je  $N = n + n_o$ , pri čemu je  $n_o$  broj oslonaca grednog nosača, odnosno broj neaktivnih masa. Za nosače sa više polja,  $j$ -a aktivna masa ( $m_j$ ) u ukupnom broju masa se označava kao  $m_{k-1}$  za prvo polje,  $m_{k-2}$  za drugo polje, itd.

Uz pretpostavku da je prigušenje vibracija proporcionalno brzini deformacija, problem se može opisati sistemom od  $n$  diferencijalnih jednačina drugog reda, čija matična formulacija glasi [11]:

$$[m] \{\ddot{v}\} + [c] \{\dot{v}\} + [k] \{v\} = \{P\} \quad (4.2.1)$$

Ovde je  $[m]$  dijagonala matrica aktivnih masa,  $[c]$  matrica prigušenja,  $[k]$  matrica krutosti sistema,  $\{P\}$  vektor poremećajnih sila, a  $\{\ddot{v}\}$ ,  $\{\dot{v}\}$  i  $\{v\}$  vektori ubrzanja, brzina i pomeranja masa sistema. Koordinatni početak koordinata  $v_j(t)$  izabran je tako da se nalazi u težištu koncentrisanih masa  $m_j$ .

Skalarni oblik jednačine (4.2.1) glasi :

$$m_j \cdot \ddot{v}_j(t) + \sum_{i=1}^n c_{ji} \cdot \dot{v}_i(t) + \sum_{i=1}^n k_{ji} \cdot v_i(t) = P_j(t) \quad (4.2.2)$$

$(j = 1, 2, \dots, n)$

Sa početnim uslovima:

$$v_j(0) = v_{j0} \quad \text{i} \quad \dot{v}_j(0) = \dot{v}_{j0} \quad (4.2.3)$$

Primenom modalne analize, odnosno razvijanjem generalisanih koordinata, u konkretnom slučaju dinamičkih ugiba  $v_j(t)$ , u redove po svojstvenim oblicima (tonovima)  $V_{jr}$  prema:

$$v_j(t) = \sum_{r=1}^n \eta_r(t) \cdot V_{jr} \quad (4.2.4)$$

$$\eta_r(t) = \frac{1}{M_r} \sum_{j=1}^n m_j \cdot v_{jr}(t) \cdot V_{jr} \quad (4.2.5)$$

Relacija (4.2.2) se svodi na skup od  $n$  nezavisnih jednačina oblika:

$$\ddot{\eta}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = \frac{1}{M_r} F_r(t) \quad (4.2.6)$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

Ovde je:

$\eta_r(t)$  - normalna (glavna) koordinata tona  $r$

$\omega_r$  - frekvencija slobodnih neprigušenih vibracija tona  $r$  - (svojstvena frekvencija)

$$M_r = \sum_{j=1}^n m_j \cdot V_{jr}^2 \quad \text{- generalisana masa za ton } r \quad (4.2.7)$$

$$\xi_r = \frac{\beta}{\omega_r} + \frac{\alpha}{2} \omega_r \quad \text{- relativno prigušenje tona } r \quad (4.2.8)$$

$$F_r(t) = \sum_{j=1}^n P_j(t) \cdot V_{jr} \quad \text{- generalisana sila tona } r \quad (4.2.9)$$

Konstanta prigušenja  $\beta$  izražava proporcionalnost matrice prigušenja u odnosu na matricu masa, a  $\alpha$  u odnosu na matricu krutosti, prema (4.2.8), odnosno (4.2.1) i (4.2.6). Precizne podatke za ove konstante dobijamo eksperimentalno, na izvedenom mostu. U fazi projektovanja, međutim, usled nedostatka takvih podataka, koristimo empirijske.

Nezavisnoj  $r$ -toj diferencijalnoj jednačini (4.2.6), pridružuju se početni podaci, koji s obzirom na početne uslove (4.2.3) i relaciju (4.2.5), glase:

$$\eta_{r0} = \eta_r(0) = \frac{1}{M_r} \sum_{j=1}^n m_j v_{j0} V_{jr} \quad (4.2.10)$$

$$\dot{\eta}_{r0} = \dot{\eta}_r(0) = \frac{1}{M_r} \sum_{j=1}^n m_j \dot{v}_{j0} V_{jr} \quad (4.2.11)$$

Primenom Laplasove transformacije na (4.2.6) dobijamo rešenje za r-tu normalnu koordinatu  $\eta_r(t)$ , koje zavisi od veličine relativnog prigušenja  $\xi_r$  tona r. Slučaj prigušenja pri kojem je relativno prigušenje za svaki ton  $\xi_r < 1$  nazivamo osnovnim slučajem. Ako je pri tome još i  $\xi_r \ll 1$ , sto je najčešći slučaj kod pešačkih mostova, onda takvo prigušenje nazivamo malo ili slabo prigušenje.

Rešenje za normalnu koordinatu r-tog tona, za osnovni slučaj prigušenja ( $\xi_r < 1$ ), može se predstaviti relacijom :

$$\eta_r(t) = \frac{1}{M_r} \int_0^t F_r(\tau) \frac{\sin \omega_{dr}(t-\tau)}{\omega_{dr}} e^{-\beta(t-\tau)} d\tau + \left[ \eta_{r0} \cos \omega_{dr} t + (\beta \eta_{r0} + \dot{\eta}_{r0}) \frac{\sin \omega_{dr} t}{\omega_{dr}} \right] \cdot e^{-\beta t} \quad (4.2.12)$$

Ovde je  $\omega_{dr}$  frekvencija slobodnih prigušenih vibracija za koju važi relacija

$$\omega_{dr} = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} = \sqrt{\omega_r^2 - \beta^2}, \quad (\xi_r < 1) \quad (4.2.13)$$

U (4.2.13) je  $\xi_r = \frac{\beta}{\omega_r}$ , što znači da je matrica prigušenja proporcionalna matrici masa, pri čemu je ispunjen uslov za osnovni slučaj prigušenja, odnosno da je za svaki ton  $\xi_r < 1$ .

Uvodeći (4.2.12) u (4.2.4), zatim smene za generalisanu silu i početne uslove prema relacijama (4.2.9), (4.2.10), (4.2.11), dobija se rešenje za dinamički ugib, koje glasi:

$$\begin{aligned} v_j(t) = & \sum_{r=1}^n \frac{V_{jr}}{M_r} \sum_{k=1}^N V_{kr} \int_0^t P_k(\tau) \frac{\sin \omega_{dr}(t-\tau)}{\omega_{dr}} \cdot e^{-\beta(t-\tau)} d\tau + \\ & + \sum_{r=1}^n \frac{V_{jr}}{M_r} \cdot e^{-\beta t} \left[ \cos \omega_{dr} t \sum_{k=1}^N m_k V_{kr} v_{kr0} + \frac{\sin \omega_{dr} t}{\omega_{dr}} \sum_{k=1}^N m_k V_{kr} (\beta v_{kr0} + \dot{v}_{kr0}) \right] \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

( $j = 1, 2, \dots, n$ )

Prvim članom ovog rešenja izražen je uticaj poremećajnih determinističkih sila, a drugim uticaj početnih uslova. Uočimo, odmah, da se sa vremenom slobodne vibracije gase i da se ukupan odgovor sistema ( $t \rightarrow \infty$ ) tada odnosi samo na poremećajne sile.

Ako u (4.2.14) unesemo  $\xi_r = 0$ , odnosno  $\beta = 0$ , pri čemu  $\omega_{dr}$  postaje  $\omega_r$ , dobije se rešenje za prinudne neprigušene vibracije, koje glasi:



$$\begin{aligned}
v_j(t) = & \sum_{r=1}^n \frac{V_{jr}}{M_r} \sum_{k=1}^N \frac{V_{kr}}{\omega_r} \int_0^t P_k(\tau) \cdot \sin \omega_r(t-\tau) d\tau + \\
& + \sum_{r=1}^n \frac{V_{jr}}{M_r} \cdot \left[ \cos \omega_r t \sum_{k=1}^N m_k V_{kr} v_{kr0} + \frac{\sin \omega_r t}{\omega_r} \sum_{k=1}^N m_k V_{kr} \dot{v}_{kr0} \right] \\
& (j = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

## 4.2.2 Slobodne prigušene vibracije

Posmatrajmo odgovor oscilatornog sistema (sl.4.2.1) na početne uslove, odnosno slobodne prigušene vibracije.

Iz relacije (4.2.12),  $r$ -tu normalnu koordinatu možemo prikazati u formi

$$\eta_r(t) = A_r \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_{dr} t + \psi_r) \tag{4.2.16}$$

gde je

$$A_r = \frac{1}{\omega_{dr}} \left[ \omega_{dr} \cdot \eta_{r0}^2 + (\beta \cdot \eta_{r0} + \dot{\eta}_{r0})^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \text{amplituda tona } r \tag{4.2.17}$$

$$\psi_r = \arctg \left( -\frac{\beta \eta_{r0} + \dot{\eta}_{r0}}{\omega_{dr}} \right) - \text{fazni ugao tona } r \tag{4.2.18}$$

Uvodjenjem (4.2.16) u (4.2.4) dolazimo do rešenja za slobodne vibracije u obliku reda :

$$v_j(t) = \sum_{r=1}^n v_{jr}(t) \tag{4.2.19}$$

Pri čemu je

$$v_{jr}(t) = A_{jr} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_{dr} t + \psi_r) \tag{4.2.20}$$

$$A_{jr} = A_r \cdot V_{jr} \tag{4.2.21}$$

$$(j = 1, 2, \dots, n ; r = 1, 2, \dots, n)$$

Relacija (4.2.20) definiše vibracije u  $r$ -tom tonu, odnosno dinamiče ugibe mase u tački  $j$ .

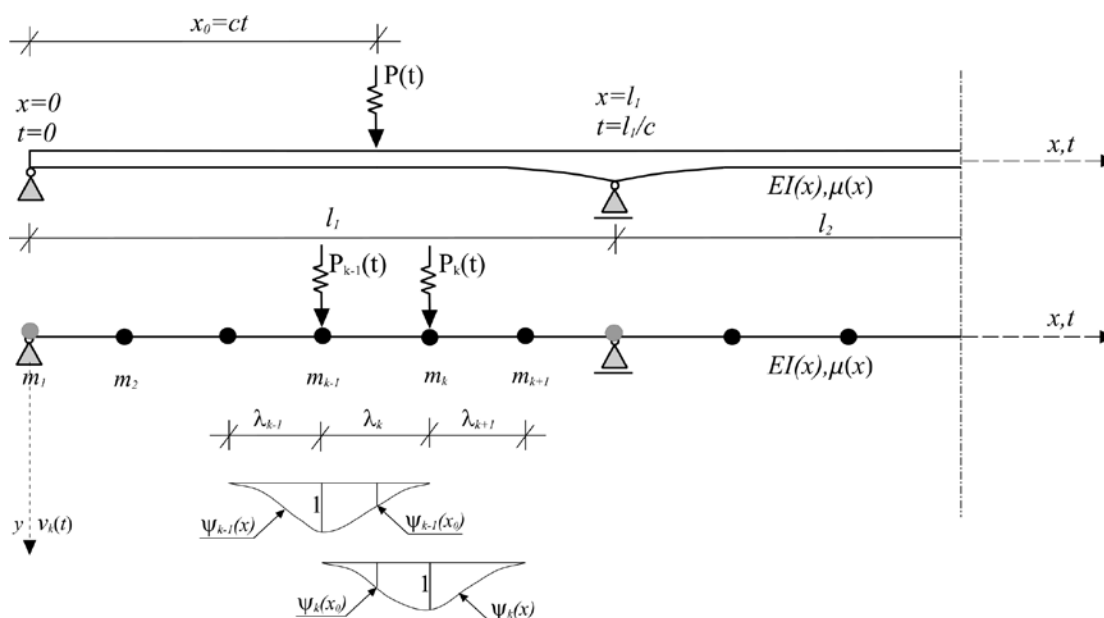
Iz (4.2.20) se vidi da su vibracije u  $r$ -tom tonu kvaziharmonijske, sa stalnim periodom  $T_{rd} = 2\pi / \omega_{dr}$  i amplitudom  $A_r$  koja se smanjuje po zakonu  $e^{-\beta t}$  (sl.4.2.2)

Posmatrajući relacije (4.2.19) i (4.2.20), koje opisuje slobodne prigušene vibracije sistema sa koncentrisanim masama, zaključujemo da se ove vibracije mogu posmatrati kao zbir nezavisnih oblika, koji po formi liče na normalne oblike (tonove), ali sa amplitudom koja se smanjuje eksponencijalno sa vremenom i ravnomerno po sistemu. Ovi oblici se odlikuju određenim prostornim rasporedom stacionarnih tačaka.

Drugim rečima, ako prigušene slobodne vibracije sistema sa viskoznim proporcionalnim prigušenjem, započinju u jednom od prirodnih oblika neprigušenog sistema, nastaviće sa nepromenjenom konfiguracijom oblika, uz eksponencijalno smanjenje amplituda u svim tačkama sistema istim gradijentom. Dakle, pri vibracijama u  $r$ -tom tonu sve tačke sistema vrše eksponencijalna prigušena kretanja sa istom frekvencijom i istom fazom (sinhrone i sinfazne vibracije) [36].

## 4.2.3 Definisanje poremećajne sile na diskretnom sistemu

### 4.2.3.1 Pokretno koncentrisano opterećenje



Slika 4.2.3 Dinamički model diskretizovanog oscilatornog sistema sa pokretno koncentrisanom silom

Za  $x_{k-1} \leq x_0 \leq x_k$ , sledi da je :

$$P_{k-1}(t) = P(t) \cdot \psi_{k-1}(x_0) \quad (4.2.22)$$

$$P_k(t) = P(t) \cdot \psi_k(x_0) \quad (4.2.23)$$

Funkcije raspodele  $\psi(x)$  su Ermitovi kubni polinomi prema relacijama:

Za  $x_{k-1} \leq x_0 \leq x_k$  ;  $(\lambda_k = x_k - x_{k-1})$

$$\psi_{k-1}(x_0) = 1 - 3 \left( \frac{x_0 - x_{k-1}}{\lambda_k} \right)^2 + 2 \left( \frac{x_0 - x_{k-1}}{\lambda_k} \right)^3 \quad (4.2.24)$$

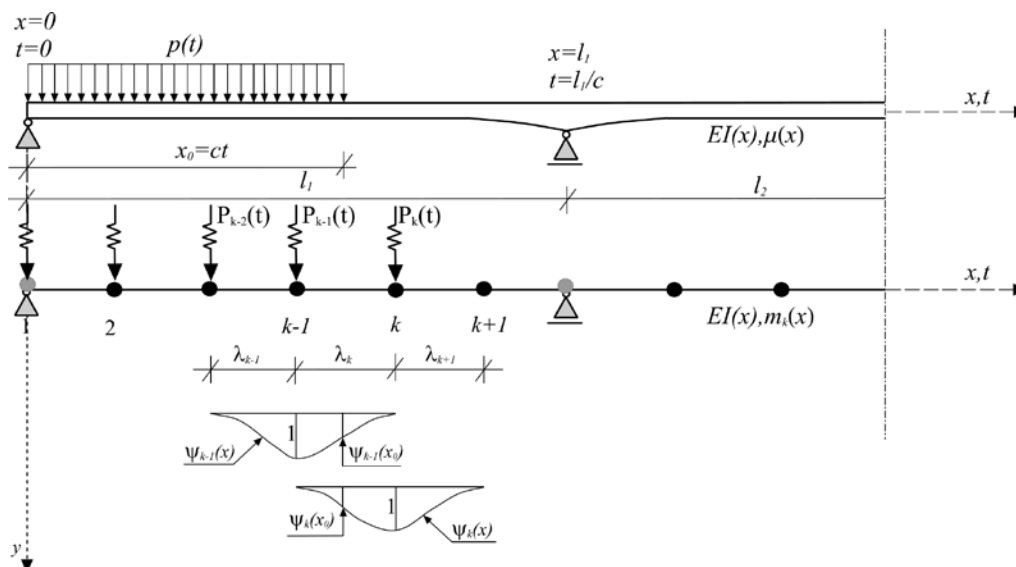
$$\psi_k(x_0) = 3 \left( \frac{x_0 - x_{k-1}}{\lambda_k} \right)^2 - 2 \left( \frac{x_0 - x_{k-1}}{\lambda_k} \right)^3 \quad (4.2.25)$$

U sledećoj tabeli 4.2.1 prikazane su vrednosti funkcija  $\psi(x)$  u četvtinama rastojanja susednih masa ( $\lambda_k/4$ ).

Tabela 4.2.1

$x_0$	$x_{k-1}$	$x_{k-1} + \lambda_k / 4$	$x_{k-1} + \lambda_k / 2$	$x_{k-1} + 3\lambda_k / 4$	$x_{k-1} + \lambda_k$
$x_0 - x_{k-1}$	0	$\lambda_k / 4$	$\lambda_k / 2$	$3\lambda_k / 4$	$\lambda_k$
$\psi_{k-1}(x_0)$	1,0000	0,84375	0,5000	0,15625	0,0000
$\psi_k(x_0)$	0,0000	0,15625	0,5000	0,84375	1,0000
$\sum$	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

#### 4.2.3.2 Pokretno kontinualno opterećenje



Slika 4.2.4 Dinamički model diskretizovanog oscilatornog sistema sa pokretnim kontinualnim opterećenjem

Posmatramo slučaj kada su rastojanja koncentrisanih masa grednog nosača jednaka  $\lambda_k = \lambda$  (sl.4.2.4). Tada je:

$$x_k = (k-1) \cdot \lambda, \quad t_k = \frac{(k-1)\lambda}{c}, \quad t_{k-1} = \frac{(k-2)\lambda}{c} \quad (4.2.26)$$

gde je  $c$  konstantna brzina kretanja kontinualnog opterećenja.

Koncentrisano opterećenje  $P(t)$ , kao ekvivalent kontinualnom opterećenju  $p(t)$ , može se definisati preko Ermitovih kubnih polinoma prema (4.2.24) i (4.2.23), za  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$  (sl.4.2.4), sledećim relacijama:

$$2 \cdot P_1(t) = P_2(t) = \dots = P_{k-2}(t) = p(t) \cdot \int_{(k-3)\lambda}^{(k-1)\lambda} \psi_{k-2}(x) dx = p(t) \cdot \lambda \quad (4.2.27)$$

$$P_{k-1}(t) = p(t) \cdot \left( \frac{\lambda}{2} + \int_{(k-2)\lambda}^{x_0=ct} \psi_{k-1}(x) dx \right) = p(t) \cdot \left( \frac{\lambda}{2} + Z_k - Z_k^3 \frac{2\lambda - Z_k}{2\lambda^3} \right) \quad (4.2.28)$$

$$P_k(t) = p(t) \cdot \int_{(k-2)\lambda}^{x_0=ct} \psi_k(x) dx = p(t) \cdot Z_k^3 \frac{2\lambda - Z_k}{2\lambda^3} \quad (4.2.29)$$

gde je

$$Z_k = Z_k(t) = ct - (k-2)\lambda \quad (4.2.30)$$

#### 4.2.4 Prvi način definisanja i rešavanja problema

Analiziramo prinudne prigušene vibracije nosača (sl.4.2.1), odnosno rasponske konstrukcije pešačkog mosta promenljive mase  $\mu(x)$  i krutosti  $EI(x)$ , preko koje se kreće kolona pešaka, ili nekoliko pešaka. Pri tome, posmatraćemo karakteristične konstelacije pokretnog opterećenja, kao što su: nailazak, prelaženje i odlazak kolone pešaka, modelirane kao ravnomerno raspodeljeno opterećenje. Kretanje jednog pešaka, modelira se kao koncentrisana vremenski promenljiva sila. Na diskretizovanom sistemu, sva ova opterećenja prevode se, preko Ermitovih kubnih polinoma, na ekvivalentne koncentrisane sile.

Radi poboljšanja efikasnosti u proceduri proračuna prema softveru Mathematica<sup>®</sup>, izvršena je simbolička modifikacija opšteg rešenja (4.2.14), prema relacijama koje se navode u daljem tekstu.

Na osnovu principa superpozicije, dinamički ugib  $v_j(t)$ ,  $j$ -te mase na nosača sa apscisom  $x_j$ , može se predstaviti kao zbir ugiba  $v_{jr}(t)$  po svim tonovima  $r$ , relacijom:

$$v_j(t) = \sum_{r=1}^n v_{jr}(t), \quad j=1,2,\dots,n \quad r=1,2,\dots,n \quad (4.2.31)$$

gde je

$$v_{jr}(t) = V_{jr} \cdot \eta_r(t) \quad (4.2.32)$$

U (4.2.32) generalisana koordinata  $\eta_r(t)$ , tona  $r$ , saglasno opštem rešenju (4.2.14), može se izraziti relacijom:

$$\eta_r(t) = \Phi_r(t) + \Phi_{0r}(t) \quad (4.2.33)$$

U (4.2.33) funkcija  $\Phi_r(t)$  izražava vremenski uticaj poremećajnih sila i definisana je relacijom (4.2.34), a funkcija  $\Phi_{0r}(t)$  izražava uticaj početnih uslova i definisana je relacijom (4.2.37).

$$\Phi_r(t) = \frac{1}{M_r} \int_0^t F_r(\tau) \cdot J_r(\tau) d\tau \quad \left( 0 \leq t \leq \frac{L}{c} \right) \quad (4.2.34)$$

U (4.2.34)  $M_r$  je generalisana masa tona  $r$  prema (4.2.7), a generalisana sila  $F_r(\tau)$  je definisana, saglasno sa (4.2.9), relacijom:

$$F_r(\tau) = \sum_{k=1}^N P_k(\tau) V_{kr} \quad (4.2.35)$$

Funkcija  $J_r(\tau)$  u (4.2.34) definisana je relacijom:

$$J_r(\tau) = \frac{\sin \omega_{dr}(t - \tau)}{\omega_{dr}} e^{-\beta(t-\tau)} \quad (4.2.36)$$

Uticaj početnih uslova izražava funkcija  $\Phi_{0r}(t)$ , a definisana je relacijom:

$$\Phi_{0r}(t) = \frac{1}{M_r} \left( A_r \cos \omega_{dr} t + B_r \frac{\sin \omega_{dr} t}{\omega_{dr}} \right) e^{-\beta t} \quad t \geq t_0 \quad (4.2.37)$$

gde su  $A_r$  i  $B_r$  konstante prema relacijama:

$$A_r = \sum_{k=1}^N m_k V_{kr} v_{kr0} \quad (4.2.38)$$

$$B_r = \sum_{k=1}^N m_k V_{kr} (\beta v_{kr0} + \dot{v}_{kr0}) \quad (4.2.39)$$

Za razmatranje problema prihvatljivosti nivoa vibracija, osim ugiba, merodavni su brzina, a naročito ubrzanje tačaka rasponske konstrukcije pešačkih mostova. Ove veličine su definisane kao prvi, odnosno drugi izvod ugiba po vremenu.

Rešenja za ugibe, brzine i ubrzanja, nalazimo primenom procedure u softeru Mathematica<sup>®</sup>, a prema algoritmu DYNmk1 (sl.4.2.5).

#### 4.2.4.1 Pokretno koncentrisano opterećenje

Kada se pokretna sila,  $P(t) = P_0 f(t)$ , gde je  $f(t)$  harmonijska funkcija, nalazi u intervalu  $x_{k-1}$  do  $x_k$ , aktivne su samo sile  $P_{k-1}(t)$  i  $P_k(t)$ , kao komponente sile  $P(t)$ , sl.4.2.3, koje su definisane relacijama (4.2.22) i (4.2.23). U tom slučaju, rešenje za dinamički ugib  $v_{jr}(t)$ , prema (4.2.32) za vremenski interval  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ , može se predstaviti u formi:

$$v_{jr}(t) = V_{jr} (\Phi_r(k, t) + \Phi_{0r}(k, t)) \quad (4.2.40)$$

gde je

$$\Phi_r(k, t) = \frac{1}{M_r} \int_{t_{k-1}}^{t \leq t_k} F_r(\tau) \cdot J_r(\tau) \cdot d\tau \quad (4.2.41)$$

Podintegralne funkcije u (4.2.40) definisane su relacijama (4.2.42) i (4.2.43).

$$F_r(\tau) = F(\tau) \cdot \left\{ V_{k-1,r} + (V_{kr} - V_{k-1,r}) \cdot \left[ 3 \left( \frac{c\tau - x_{k-1}}{\lambda_k} \right)^2 - 2 \left( \frac{c\tau - x_{k-1}}{\lambda_k} \right)^3 \right] \right\}, \quad (k \geq 2) \quad (4.2.42)$$

$$J_r(\tau) = \frac{\sin \omega_{dr}(t - \tau)}{\omega_{dr}} \cdot e^{-\beta(t - \tau)} \quad (4.2.43)$$

U (4.2.40) funkcija  $\Phi_r(k, t)$  izražava uticaj poremećajne sile, a  $\Phi_{0r}(k, t)$ , prema relaciji (4.2.44), uticaj početnih uslova.

$$\Phi_{0r}(k, t) = \frac{1}{M_r} \left[ A_r \cos \omega_{dr}(t - t_{k-1}) + B_r \frac{\sin \omega_{dr}(t - t_{k-1})}{\omega_{dr}} \right] e^{-\beta(t - t_{k-1})} \quad (4.2.44)$$

gde su konstante  $A_r$  i  $B_r$  prema relacijama (4.2.38) i (4.2.39):

$$A_r = \sum_{k=1}^N m_k V_{kr} v_{kr0} \quad (4.2.45)$$

$$B_r = \sum_{k=1}^N m_k V_{kr} (\beta v_{kr0} + \dot{v}_{kr0}) \quad (4.2.46)$$

U (4.2.45) i (4.2.46) su ugib i brzina  $k$ -te mase:

$$v_{kr0} = v_{kr}(t_{k-1}) \quad (4.2.47)$$

$$\dot{v}_{kr0} = \dot{v}_{kr}(t_{k-1}) \quad (4.2.48)$$

Za  $\lambda_k = \lambda$ , ( $k = 2, \dots, N$ ) sledi da je:

$$x_k = (k-1)\lambda, \quad t_{k-1} = \frac{(k-2)\lambda}{c}, \quad t_k = \frac{(k-1)\lambda}{c} \quad (4.2.49)$$

Saglasno sa (4.2.59), izraz (4.2.22), za generalisanu silu, se transformiše u relaciju (4.2.50).

$$F_r(\tau) = P(\tau) \cdot \left\{ V_{k-1,r} + (V_{kr} - V_{k-1,r}) \cdot \left[ 3 \left( \frac{c\tau}{\lambda} - k + 2 \right)^2 - 2 \left( \frac{c\tau}{\lambda} - k + 2 \right)^3 \right] \right\}, (k \geq 2) \quad (4.2.50)$$

Za pešačke mostove, osim dinamičkog ugiba  $v_j(t)$ , od značaja je i poznavanje brzina  $\dot{v}_j(t)$  i ubrzanja  $\ddot{v}_j(t)$ , što se za vremenski interval  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ , može predstaviti u formi:

$$\dot{v}_j(t) = \sum_{r=1}^n V_{jr} (\dot{\Phi}_r(k,t) + \dot{\Phi}_{r0}(k,t)) \quad (4.2.51)$$

$$\ddot{v}_j(t) = \sum_{r=1}^n V_{jr} (\ddot{\Phi}_r(k,t) + \ddot{\Phi}_{r0}(k,t)) \quad (4.2.52)$$

Rešenja za ugibe, brzine i ubrzanja, nalazimo primenom procedure u softeru Mathematica<sup>®</sup>. Problem se rešava u koracima, koji se odnose na vremenski interval  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ . Broj koraka ( $k-1$ ) jednak je ( $N-1$ ), gde je  $N$  ukupan broj koncentrisanih masa (aktivnih i neaktivnih). Za svaki sledeći korak uvode se novi početni uslovi, koji se određuju na osnovu odgovora sistema na kraju vremena prethodnog koraka.

#### 4.2.4.2 Nailazak kontinualnog opterećenja

Za nailazak kontinualnog opterećenja  $P(t) = q_0 \cdot f(t)$ , gde je  $f(t)$  harmonijska funkcija, na rasponsku konstrukciju pešačkog mosta, ekvivalentne koncentrisane sile na diskretizovanom sistemu (sl.4.2.4), definisane su u odeljku 4.2.3.2 (Pokretno kontinualno opterećenje), relacijama (4.2.27) do (4.2.30). Saglasno sa tim relacijama i relacijama iz odeljka 4.2.4 (Dinamički modeli diskretnih grednih sistema za pokretno opterećenje), ugib  $v_{jr}(t)$  mase  $m_j$  za ton  $r$  i vremenski interval  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ , može se predstaviti u formi:

$$v_{jr}(t) = V_{jr} (\Phi_r(k,t) + \Phi_{0r}(k,t)) \quad (4.2.53)$$

gde je

$$\Phi_r(k,t) = \frac{1}{M_r} \int_{t_{k-1}}^{t \leq t_k} F_r(\tau) \cdot J_r(\tau) \cdot d\tau, \quad (t \geq t_1 = 0), (k \leq 3) \quad (4.2.54)$$

$$\Phi_r(k,t) = \frac{1}{M_r} \left[ \lambda \cdot \sum_{i=2}^{k-2} V_{ir} \cdot \int_0^{t \leq t_k} p(\tau) \cdot J_r(\tau) \cdot d\tau + \int_{t_{k-1}}^{t \leq t_k} F_r(\tau) \cdot J_r(\tau) \cdot d\tau \right], \quad (4.2.55)$$

$$\left( t \geq t_3 = \frac{2\lambda}{c} \right), (k \geq 4)$$

Uticaj početnih uslova u (4.2.53) izražava funkcija  $\Phi_{0r}(k,t)$ , definisana prema (4.2.44).

$$\Phi_{0r}(k, t) = \frac{1}{H_r} \left[ A_r \cos \omega_{dr}(t - t_k) + B_r \frac{\sin \omega_{dr}(t - t_k)}{\omega_{dr}} \right] e^{-\beta(t - t_k)} \quad (4.2.56)$$

Za generalisanu silu u (4.2.54) važi relacija:

$$F_r(\tau) = p(\tau) \cdot \left[ V_{k-1,r} \left( \frac{\lambda}{2} + Z_k \right) + (V_{k,r} - V_{k-1,r}) Z_k^3 \frac{2\lambda - Z_k}{2\lambda^3} \right] \quad (4.2.57)$$

gde je

$$Z_k = Z_k(t) = ct - (k - 2)\lambda \quad (4.2.58)$$

Funkcija  $J_r(\tau)$  u (4.2.54) i (4.2.55) definisana je relacijom:

$$J_r(\tau) = \frac{\sin \omega_{dr}(t - \tau)}{\omega_{dr}} e^{-\beta(t - \tau)} \quad (4.2.59)$$

Rešenja za ugibe, brzine i ubrzanja, nalazimo primenom procedure u softeru Mathematica<sup>®</sup>. Problem se rešava u koracima, na način izložen u odeljku 4.2.4.1.

#### 4.2.4.3 Prelaženje kontinualnog opterećenja

Posmatramo nosač (sl.4.2.4) – rasponsku konstrukciju pešačkog mosta, preko koje prelazi kolona pešaka. Model pokretnog kontinualnog opterećenja usvajamo prema relaciji  $p(t) = q + q_0 \sin \Omega t$ .

Ako inercijalno delovanje pokretne mase  $\mu_q = q/g$  nije zanemarljivo, tada dinamičko delovanje, saglasno sa (4.1.15), možemo izraziti relacijom:

$$p(x, t) = (q + q_0 \sin \Omega t) - \mu_q \frac{d^2 v(x, t)}{dt^2} \quad (4.2.60)$$

Za diskretizovan oscilatorni sistem – sistem sa koncentrisanim masama, problem se sada svodi na tretman tog sistema sa povećanom konstantnom masom  $\mu_q$ . S toga koncentrisane mase  $m_j$  treba zameniti uvećanim masama  $\bar{m}_j$ , pri čemu je :

$$\bar{m}_j = m_j + \frac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{2} \cdot \mu_q, \quad \mu_q = \frac{q}{g} \quad (4.2.61)$$

ili za  $\lambda_j = \lambda = \text{const}$ .

$$\bar{m}_j = m_j + \mu_q \cdot \lambda \quad (4.2.62)$$

Za takav oscilatorni sistem treba, najpre, odrediti svojstvene karakteristike (frekvencije  $\omega_r$  i svojstvene oblike – svojstvene funkcije  $V_{jr}$ ).

Kako je za svako  $t \geq 0$ , saglasno funkcijama raspodele  $\psi(j)$



$$P_j(t) = p(t) \frac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{2} \quad (4.2.63)$$

odnosno za  $\lambda_j = \text{const}$  ( $\lambda_j = \lambda$ )

$$P_j(t) = p(t) \lambda \quad (4.2.64)$$

to se, saglasno opštem rešenju za  $v_j(t)$ , a za nulte početne uslove, dinamički ugib za ton  $r$ , može izraziti relacijom:

$$v_{jr}(t) = V_{jr} \cdot \Phi_r(t) \quad (4.2.65)$$

gde je

$$\Phi_r(t) = \left( \frac{\lambda}{M_r} \int_0^t p(\tau) \cdot J_r(\tau) d\tau \right) \cdot \sum_{k=2}^{N-1} V_{kr} \quad (4.2.66)$$

$$J_r(\tau) = \frac{\sin \omega_{dr}(t-\tau)}{\omega_{dr}} e^{-\beta(t-\tau)} \quad (4.2.67)$$

Rešenja za ugibe, brzine i ubrzanja, nalazimo primenom procedure u softeru Mathematica<sup>®</sup>

#### 4.2.4.4 Odlazak kontinualnog opterećenja

Rešenje za dinamički ugib oscilatornog sistema pri odlazku kontinualnog opterećenja  $p(t) = q_0 \cdot \sin \Omega t$  sa rasponske konstrukcije, nalazimo kao razliku rešenja za prelaženje i rešenja za nailazak kontinualnog opterećenja. Tako se dinamički ugib mase  $m_j$  za vibracije u  $r$ -tom tonu, može izraziti relacijom:

$$v_{jr}(t) = V_{jr} \left[ \Phi_r(t) - (\Phi_r(k,t) + \Phi_{0r}(k,t)) \right] \quad (4.2.68)$$

U (4.2.68)  $\Phi_r(t)$  se odnosi na prelaženje kontinualnog opterećenja, prema relaciji (4.2.70), uz apstrahovanje inercijalnog delovanja mase pokretnog opterećenja, dok se  $\Phi_r(k,t)$  i  $\Phi_{0r}(k,t)$  odnosi na nailazak opterećenja, prema relacijama (4.2.54), (4.2.55) i (4.2.56), respektivno.

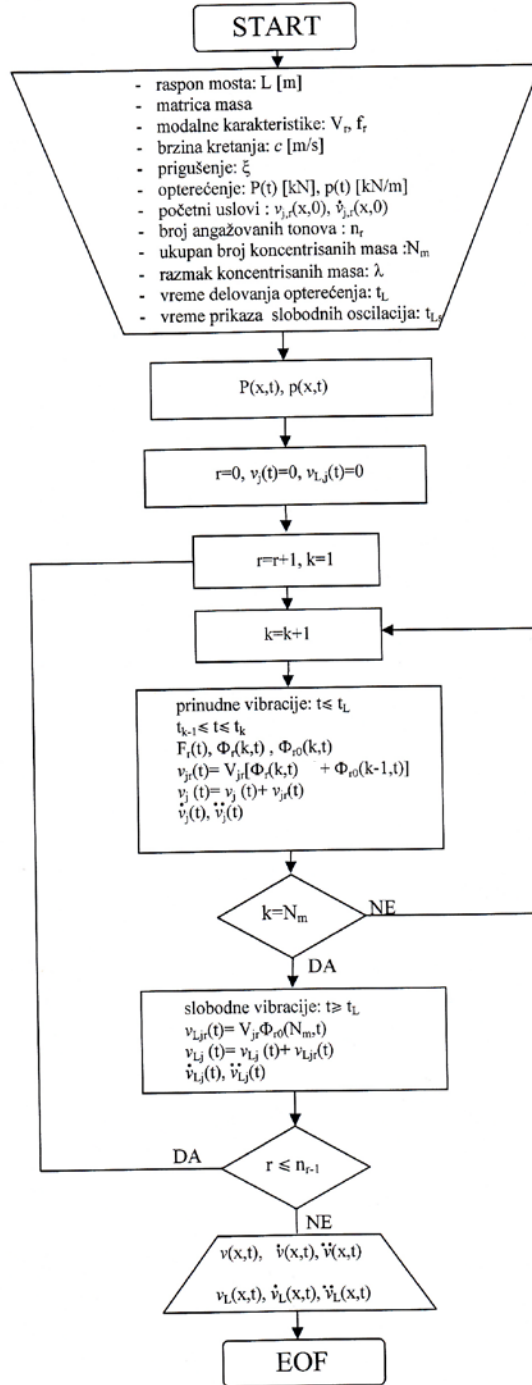
Rešenja za ugibe, brzine i ubrzanja, nalazimo primenom procedure u softeru Mathematica<sup>®</sup>.

#### 4.2.4.5 Pokretno kontinualno opterećenje na dužini $\lambda_p$

Rešenje za dinamički ugib oscilatornog sistema usled pokretnog kontinualnog opterećenja  $p(t) = q_0 \cdot \sin \Omega t$  na dužini  $\lambda_p$ , nalazimo kao razliku rešenja (4.2.53) za nailazak kontinualnog opterećenja, za  $x_0 = ct$  i  $x_0 = ct - \lambda_p$ , koje važi za vremenski interval  $\frac{L - \lambda_p}{c} \geq t \geq \frac{\lambda_p}{c}$ , gde je  $L$

raspon mosta. Za vremenski interval  $\frac{\lambda p}{c} \geq t \geq 0$  važi rešenje (4.2.53) za nailazak kontinualnog opterećenja, a za  $\frac{L - \lambda p}{c} \leq t \leq \frac{L}{c}$  važi rešenje (4.2.68) za odlazak kontinualnog opterećenja.

**DYNmk1**



Slika 4.2.5 Algoritam DYNmk1

### 4.2.5 Drugi način definisanja i rešavanja problema vibracija diskretnih sistema

Sušтина ovog postupka definisanja dinamičkih modela diskretnih grednih sistema za pokretno opterećenje, za razliku od predhodnog (poglavlje 4.2.4), sadržana je u aproksimaciji svojstvenih vektora  $V_{kr}$  sistema sa koncentrisanim masama, neprekidnim funkcijama  $V_r(x)$ . Dinamički ugib u vremenu  $t$ , za presek sa apscisom  $x$  na rasponskoj konstrukciji, može se, za vibracije u  $r$ -tom tonu, izraziti relacijom:

$$v_r(x, t) = V_r(x) (\Phi_r(t) + \Phi_{0r}(t)) \quad (4.2.69)$$

gde je

$$\Phi_r(t) = \frac{1}{M_r} \int_0^t F_r(\tau) \cdot J_r(\tau) \cdot d\tau \quad (4.2.70)$$

Generalisana masa  $M_r$  tona  $r$  definisana je relacijom (4.2.7).

Generalisanu silu u (4.2.70) definišu relacije:

$$F_r(\tau) = \int_0^L P(x, t) \cdot V_r(x) \cdot dx, \text{ za koncentrisanu silu } P(t) \quad (4.2.71)$$

$$F_r(\tau) = \int_0^L p(x, t) \cdot V_r(x) \cdot dx, \text{ za kontinualno opterećenje } p(t) \quad (4.2.72)$$

Funkcija  $J_r(\tau)$  u (4.2.70) definisana je relacijom (4.2.43).

Pokretno opterećenje definiše se preko Hevisajdove i Dirakove funkcije, prema tabeli 4.1.1. Izrazi za generalisane sile za različite konstelacije opterećenja (sl.4.1.2), prikazani su u tabeli 4.2.2.

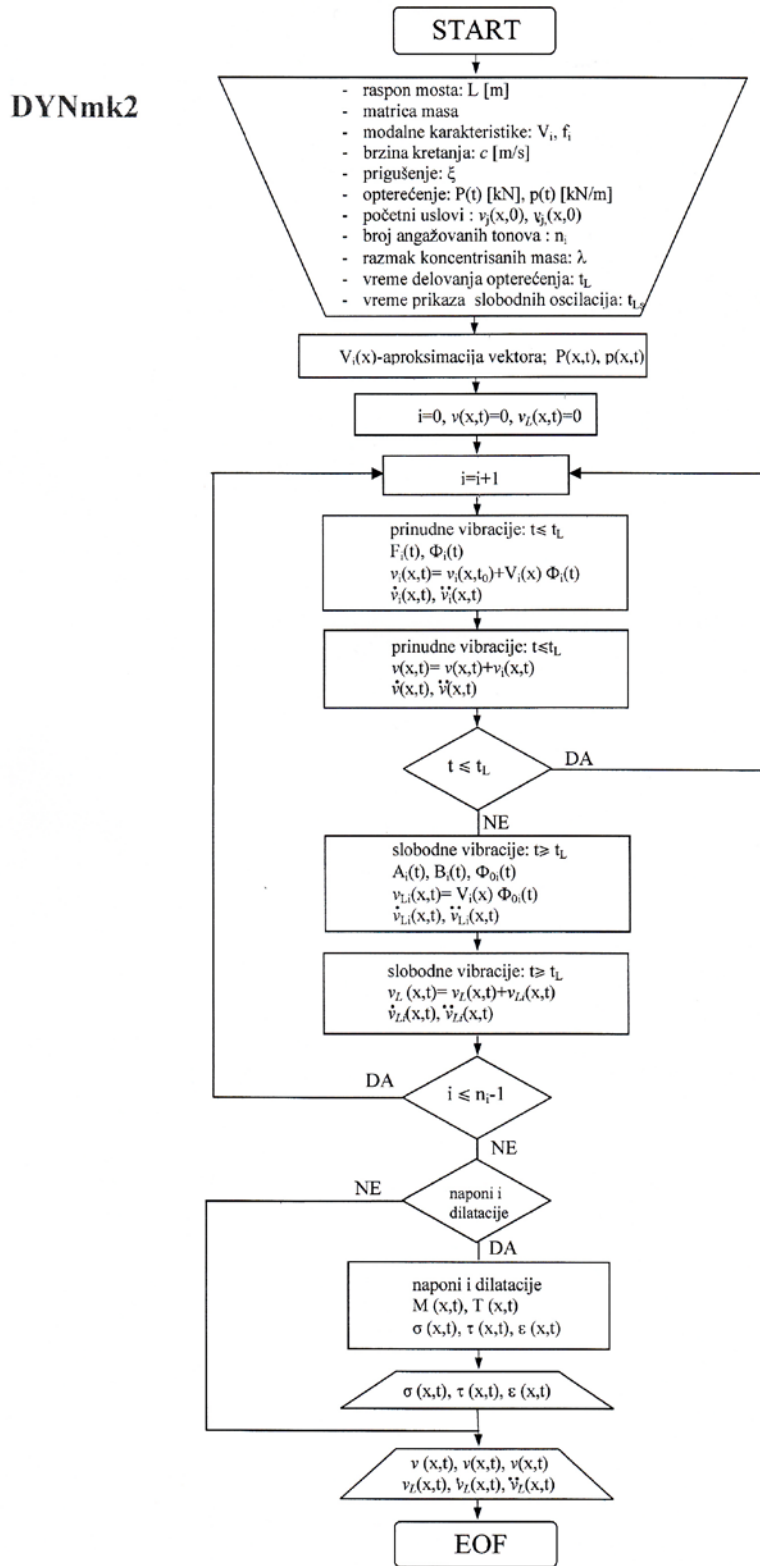
Tabela 4.2.2 Generalisane sile za različite konstelacije pokretnog opterećenja definisanog preko Hevisajdove funkcije  $H(x)$  i Dirakove funkcije  $\delta(x)$ .

pokretno opterećenje		$F_r(\tau)$	konstelacija opterećenja
koncentrisano opterećenje	a	$P(\tau) \cdot V_r(c\tau)$	koncentrisano opterećenje
raspodeljeno opterećenje	b	$p(\tau) \cdot \int_0^{c\tau} V_r(x) dx$	nailazak opterećenja
	c	$p(\tau) \cdot \int_0^L V_r(x) dx$	prelaženje
	d	$p(\tau) \cdot \int_{c\tau}^L V_r(x) dx$	odlaženje
	e	$p(\tau) \cdot \int_{c\tau-\lambda}^{c\tau} V_r(x) dx$	prelaženje parcijalnog opterećenja

U (4.2.69) funkcija  $\Phi_r(t)$  izražava uticaj poremećajnih sila, a  $\Phi_{0r}(t)$  izražava uticaj početnih uslova, prema relacijama (4.1.22) do (4.1.24).

Analiza vibracija prema ovom načinu definisanja dinamičkih modela je znatno komfornija od predhodnog načina (odjeljak 4.2.4), jer omogućava da se ugibi, brzine i ubrzanja posmatraju za bilo koju presek na rasponskoj konstrukciji. U prethodnom pristupu, to je bilo moguće samo na mestima koncentrisanih masa, pri čemu se problem rešava u sektorima, između susednih masa. Prvi način, međutim, ima prednost kada nije moguća dobra aproksimacija svojsvtenih vektora  $V_{kr}$  diskretizovanog sistema, kontinualnim funkcijama  $V_r(x)$ .

U poglavlju 5, u odeljku 5.1 (Test primeri), pokazano je da se rezultati analize vibracija prema prvom i drugom načinu ne razlikuju za diskretne sisteme, a da se isti ne razlikuju i za kontunualne sisteme, koji su analizirani prema rešenjima iz poglavlja 4.1. Rešenja za ugibe, brzine, ubrzanja i napone i dilatacije nalazimo primenom procedure u softeru Mathematica<sup>®</sup>, a prema algoritmu DYNmk2 (sl.4.2.6)

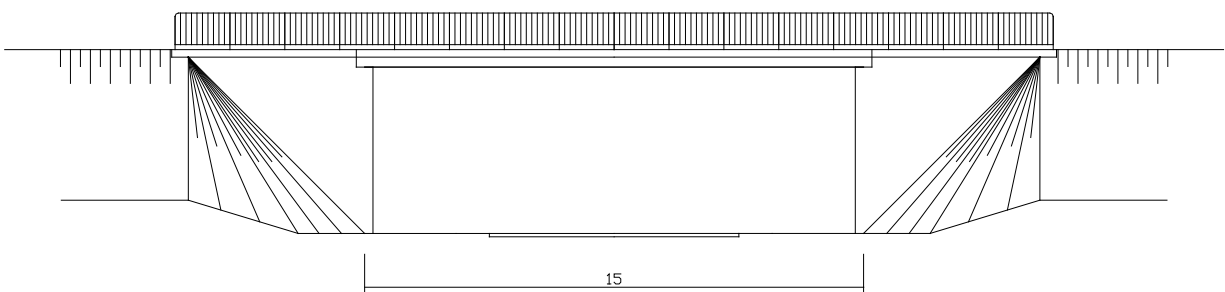


Slika 4.2.6 Algoritam DYNmk2

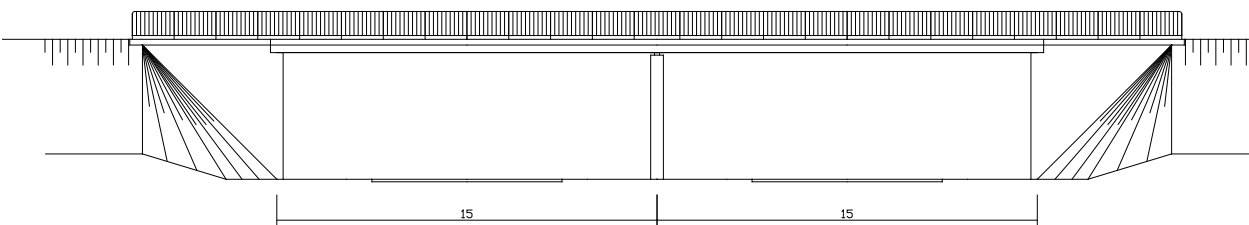
## 5. Dinamička analiza nekih karakterističnih pešačkih mostova sa aspekta prihvatljivosti vibracija

### 5.1 Test primeri

U ovom odeljku, analiza vibracija je sprovedena za kontinualni sistem ( $EI=\text{const.}$ ,  $\mu=\text{const.}$ ) rasponske konstrukcije pešačkog mosta (osa mosta je u pravcu) sa jednim, i dva jednaka polja (sl.5.1.1, 5.1.2) i korespondentnim diskretizovanim sistemima sa konačnim brojem koncentrisanih masa. Cilj ove analize je provera tačnosti izvedenih rešenja u poglavlju 4, što se vrši poređenjem rezultata, odnosno oscilograma za ugibe, brzine i ubrzanja, za kontinualne i diskretne sisteme, pri istim parametrima vibracija.



Slika 5.1.1 Izgled mosta sa jednim otvorom  $L=l=15$  m



Slika 5.1.2 Izgled mosta sa dva otvora  $L=2l=30$  m

#### 5.1.1. Izbor poprečnog preseka superstrukture mosta

Razmatrane su dve varijante poprečnog preseka betonskih pešačkih mostova, korisne širine 3m i ograničene konstruktivne visine do 50cm, sa jednim i dva otvora, raspona polja ( $l=15$ m), (sl.5.1.1 i 5.1.2).

Prva varijanta odnosi se na poprečni presek visine  $d = \frac{l}{30} = 50$  cm, a druga na presek visine

$d = \frac{l}{33} \approx 45$  cm. Za obe varijante sračunate su geometrijske karakteristike preseka ( $A_x$ ,  $I_z$ ), kao i mase ( $\mu$ ) i prirodne frekvencije ( $f_0$ ) osnovnog (prvog) tona oscilovanja rasponske konstrukcije,



(tabela 5.1.1) vrlo bliske, to je sa aspekta vibracija, ali i tehnološkog aspekta izvođenja mostova, prihvatljivija varijanta punog preseka. Most sa dva jednaka polja ( $l=15$  m) izvodi se od betona MB 35 i čelika RA 400/500-2, dok se most sa jednim poljem (otvorom), zbog statičkog graničnog stanja upotrebljivosti (prslina, deformacije-ugibi), izvodi kao prethodno napregnuta betonska konstrukcija.

Jedan od ciljeva ovakve analize je bio da se ukaže na povoljnost sandučastih preseka, gde je moguće adekvatnim izborom ispune, regulisati pitanje mase oscilatornog sistema, pri istoj krutosti ( $EI$ ), i time svođenje osnovne frekvencije na dozvoljen opseg. Razume se, pri tome, mora se voditi računa i o drugim uslovima, kao što su granična stanja nosivosti, upotrebljivosti (prslina i deformacije), ali i opravdanosti tehnološkog postupka samog izvođenja superstrukture mosta.

### 5.1.2. Poređenje rezultata analize vibracija mostova za tretman kontinualnih i diskretnih oscilatornih sistema

Analiza vibracija se odnosi na pešačke mostove sa jednim i dva otvora (sl.5.1.1 i 5.1.2), raspona polja  $l=15$  m. Poprečni presek rasponske konstrukcije je usvojen na osnovu usklađivanja frekvencije  $f_0$  sa dozvoljenim opsegom, saglasno analizi u odeljku 5.1, kao puni betonski presek (sl.5.1.3), visine 45 cm.

Za rasponske konstrukcije oba mosta važe sledeći podaci:

$$A_x=1.325 \text{ m}^2 \text{ - površina poprečnog preseka}$$

$$I_z= 0.02547 \text{ m}^4 \text{ - moment inercije}$$

$$E= 33 \text{ MPa- modul elastičnosti betona}$$

$$\mu=3.67 \text{ t/m - masa kontinualnog sistema}$$

$$m_k= 3.67 \cdot \lambda = 9.175 \text{ t - koncentrisana masa diskretizovanog sistema } (\lambda=2.5 \text{ m})$$

$$f_0 = \frac{1\pi}{T_0} \frac{\omega_0}{2} = \frac{1}{2l^2 \mu} \sqrt{EI_z} = 3.34 \text{ Hz - prirodna frekvencija osnovnog (prvog) tona}$$

$$T_0=0.2994 \text{ s - period oscilovanja osnovnog (prvog) tona}$$

$$\omega_0= 20.986 \text{ rad/s - kružna frekvencija osnovnog (prvog) tona}$$

$$\delta=0.05 \text{ - logaritamski dekrement prigušenja vibracija za gredne betonske pešačke mostove}$$

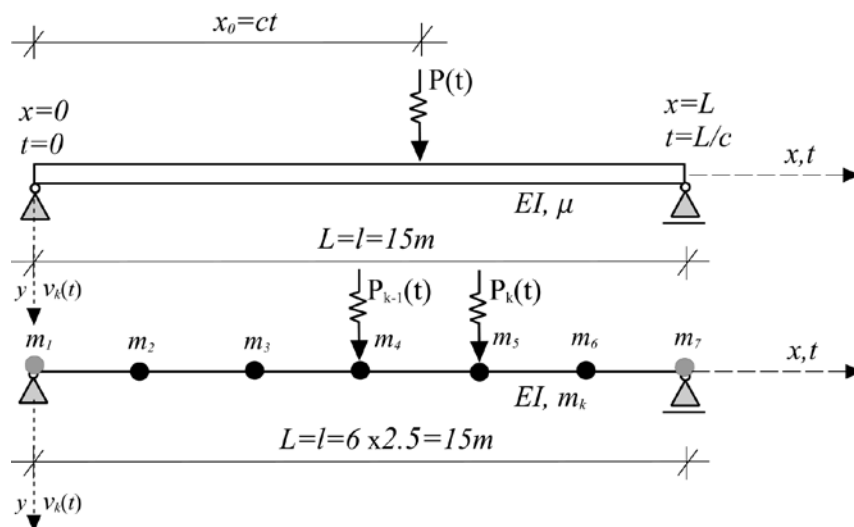
Za rasponske konstrukcije oba mosta proverena su statička granična stanja nosivosti i upotrebljivosti (deformacije, prslina). Za granično stanje upotrebljivosti u pogledu prihvatljivosti nivoa vibracija, ispunjen je potreban uslov, pošto se prirodna frekvencija ne nalazi u nepoželjnim opsezima.

Prema programu napisanom u Mathematica®, a prema rešenjima datim u poglavlju 4 za kontinualne i diskretne sisteme, rezultati proračuna vibracija prikazani su oscilogramima. Za



vremenski interval od 0 do  $t=L/c$  sekundi, oscilogrami prikazuju prinudne, a nadalje slobodne vibracije

### 5.1.2.1 Most sa jednim otvorom $L=l=15$



Slika 5.1.4 Kontinualni i diskretizovan oscilatorni sistem

Vektor masa:

$$mk = \{4.5875, 9.175, 9.175, 9.175, 9.175, 9.175, 4.5875\}$$

Svojtveni vektori:

$$V_1 = \{0.0, 0.28868, 0.500, 0.57737, 0.500, 0.28868, 0.0\}$$

$$V_2 = \{0.0, -0.500, -0.500, 0.0, 0.500, 0.500, 0.0\}$$

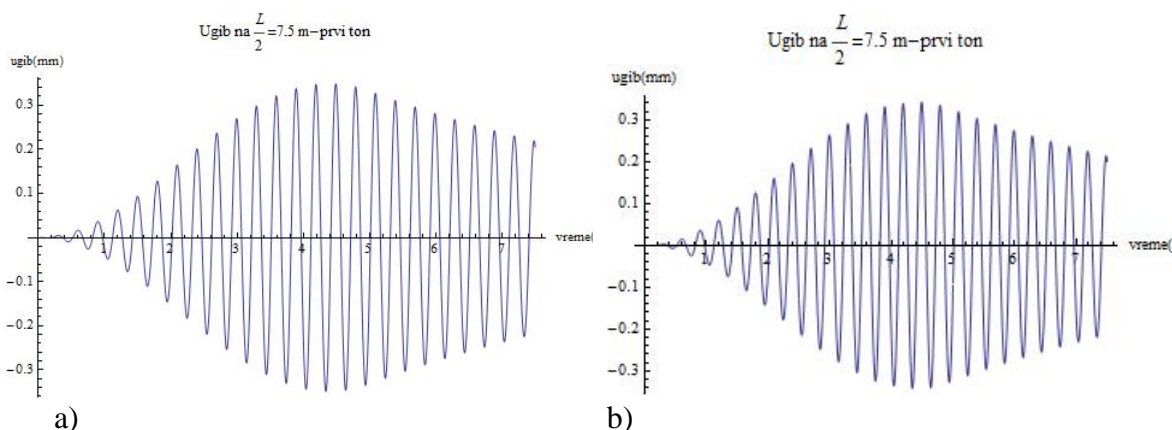
$$V_3 = \{0.0, 0.57735, 0.0, -0.57735, 0.0, 0.57735, 0.0\}$$

$$V_4 = \{0.0, 0.500, -0.500, 0.0, 0.500, -0.500, 0.0\}$$

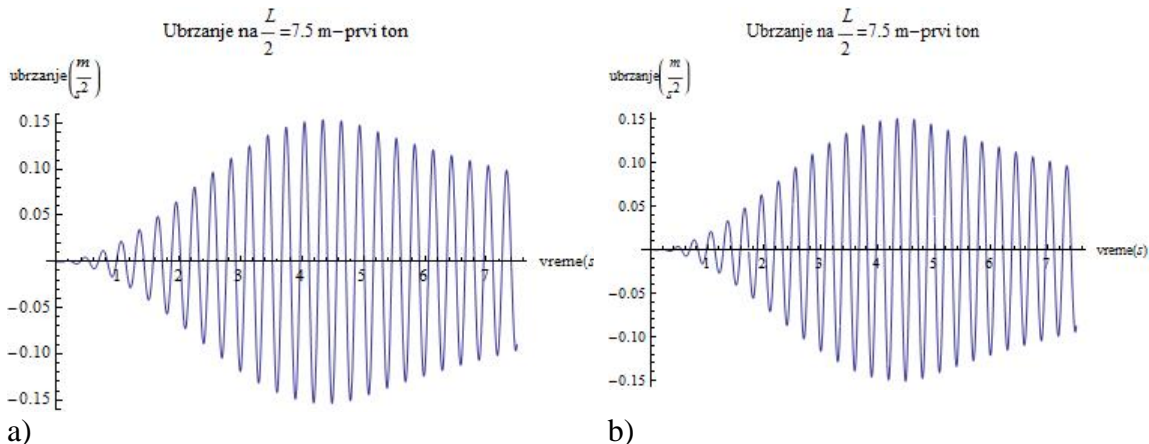
$$V_5 = \{0.0, 0.28868, -0.500, 0.57735, -0.500, 0.28868, 0.0\}$$

Svojtvene frekvencije:

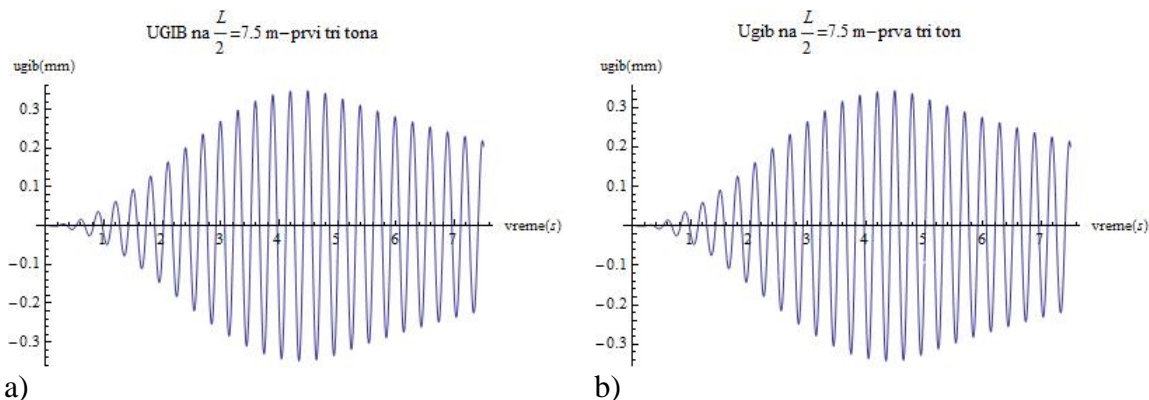
$$f_1 = 3.341; f_2 = 13.351; f_3 = 29.850; f_4 = 51.813; f_5 = 74.8074 \text{ Hz};$$



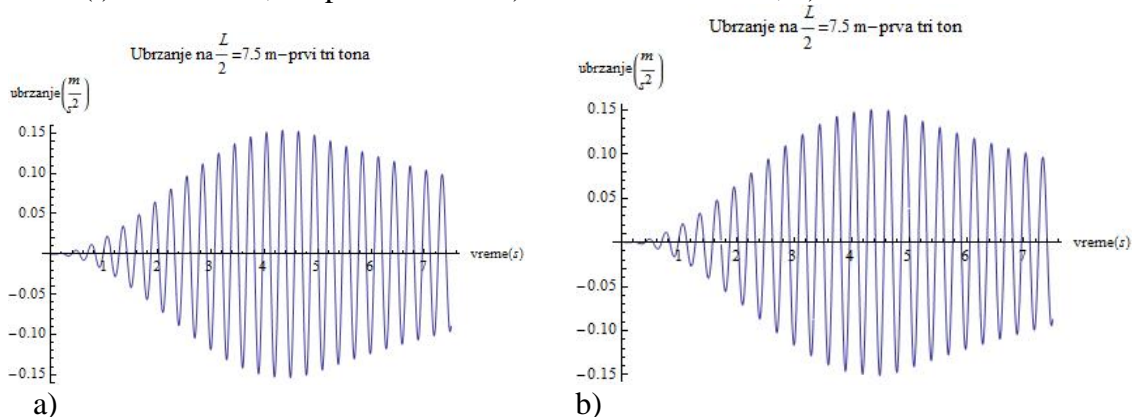
Sl. 5.1.5 Oscilogram ugiba na polovini raspona usled kretanja jednog pešaka, simuliranog silom  $P(t) = 0.18 \sin \Omega t$ , za prvi ton: a) kontinualni sistem; b) diskretni sistem



Sl. 5.1.6 Oscilogram ubrzanja na polovini raspona usled kretanja jednog pešaka, simuliranog silom  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$ , za prvi ton: a) kontinualni sistem ; b) diskretni sistem



Sl. 5.1.7 Oscilogram ugiba na polovini raspona usled kretanja jednog pešaka, simuliranog silom  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$ , za prva tri tona: a) kontinualni sistem ; b) diskretni sistem



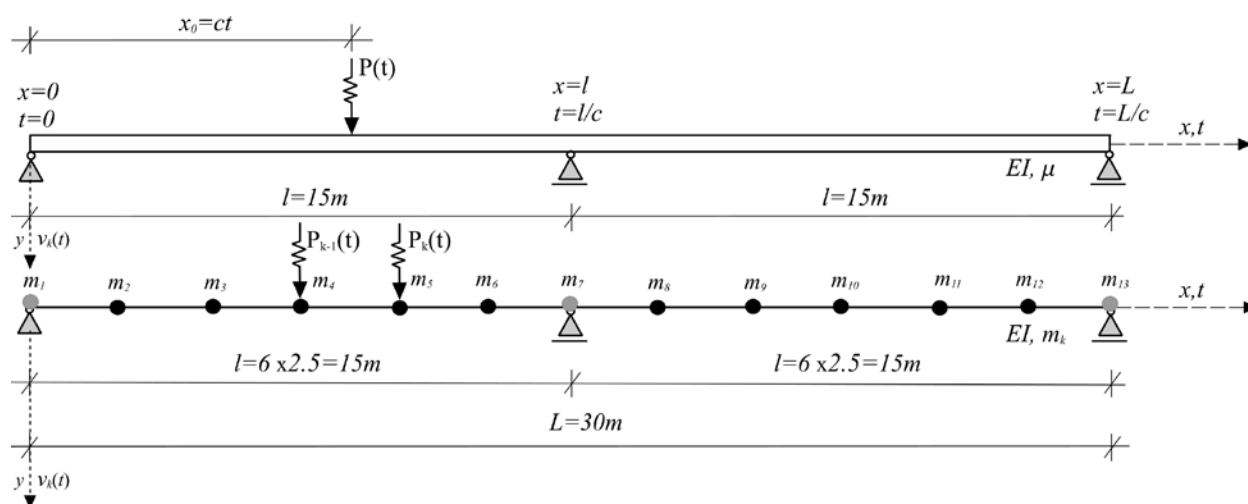
Slika 5.1.8 Oscilogram ubrzanja na polovini raspona usled kretanja jednog pešaka, simuliranog silom  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$ , za prva tri tona: a) kontinualni sistem ; b) diskretni sistem

Oscilogrami na slikama 5.1.5 do 5.1.8 prikazuju ugibe i ubrzanja na polovini raspon ( $x=7.5$  m), a pri rezonantnim vibracijama usled kretanja jednog pešaka, simuliranog silom  $P(t)=$

$0.18\sin\Omega t$  kN,  $\Omega=2\pi f_p$ , gde je  $f_p=f_0=3.3.4$  Hz, što odgovara brzini trčanja  $c=09f_p=3$  m/s (tabela 2.1.2). Vreme prelaska opterećenja (sile) preko mosta je  $L/c=5$  s, nakon čega nastaju slobodne vibracije.

Pregledom rezultata (oscilograma) sprovedene analize, može se konstatovati da: oscilogrami ugiba i ubrzanja, kako za kontinualan, tako i za diskretan sistem su podudarni; doprinos viših tonova je zanemarljiv u odnosu na osnovni ton vibracija. Analiza vibracija za kontinualni diskretizovan sistem sprovedena je prema algoritmu DYNmi, a za diskretizovani sistem prema algoritmu DYNmk1.

### 5.1.2.2 Most sa dva otvora $L=2l=30$ m



Slika 5.1.9 Kontinualni i diskretizovan oscilatorni sistem

Vektor masa:

$$mk=\{4.5875, 9.175, 9.175, 9.175, 9.175, 9.175, 9.175, 9.175, 9.175, 9.175, 9.175, 9.175, 4.5875\};$$

Svojtveni vektori:

$$V_1=\{0.0, 0.20412, 0.35355, 0.40825, 0.35355, 0.20412, 0.0, -0.20412, -0.35355, -0.40825, -0.35355, -0.20412, 0.0\};$$

$$V_2=\{0.0, 0.25658, 0.41400, 0.41708, 0.28189, 0.09671, 0.0, 0.09671, 0.28189, 0.41708, 0.41400, 0.25658, 0.0\};$$

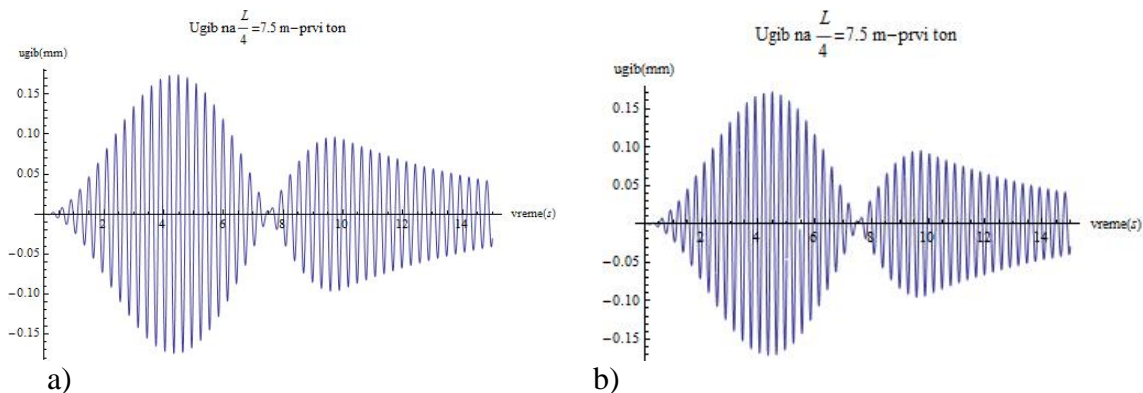
$$V_3=\{0.0, -0.35355, -0.35355, 0.0, 0.35355, 0.35355, 0.0, -0.35355, 0.35355, 0.0, 0.35355, 0.35355, 0.0\};$$

$$V_4=\{0.0, 0.37615, 0.28606, -0.16425, -0.43531, -0.24536, 0.0, -0.24536, -0.43531, -0.16425, 0.28606, 0.37615, 0.0\};$$

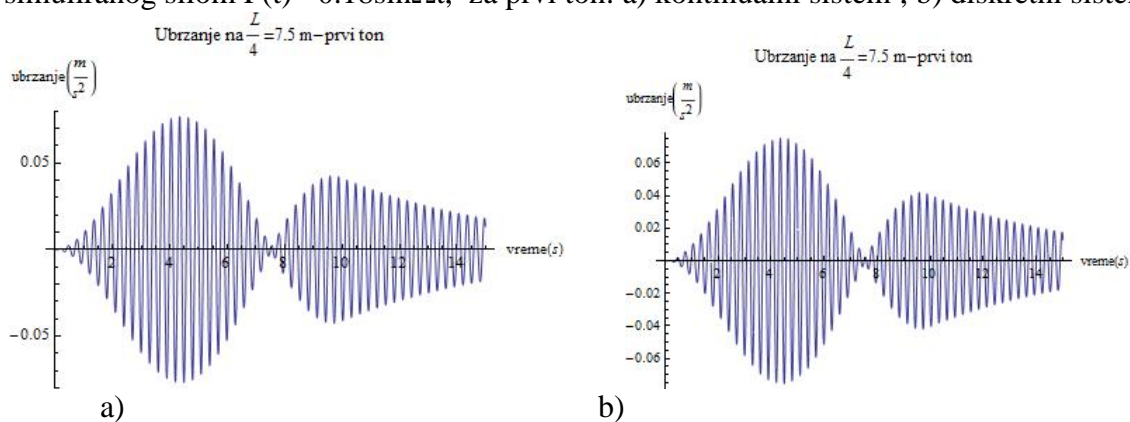
$$V_5=\{0.0, -0.40825, 0.0, 0.40825, 0.0, -0.40825, 0.0, 0.40825, 0.0, -0.40825, 0.0, 0.40825, 0.0\};$$

Svojtvene frekvencije:

$$f_1=3.341; f_2=5.102; f_3=13.35; f_4=16.863; f_5=29.85 \text{ Hz};$$

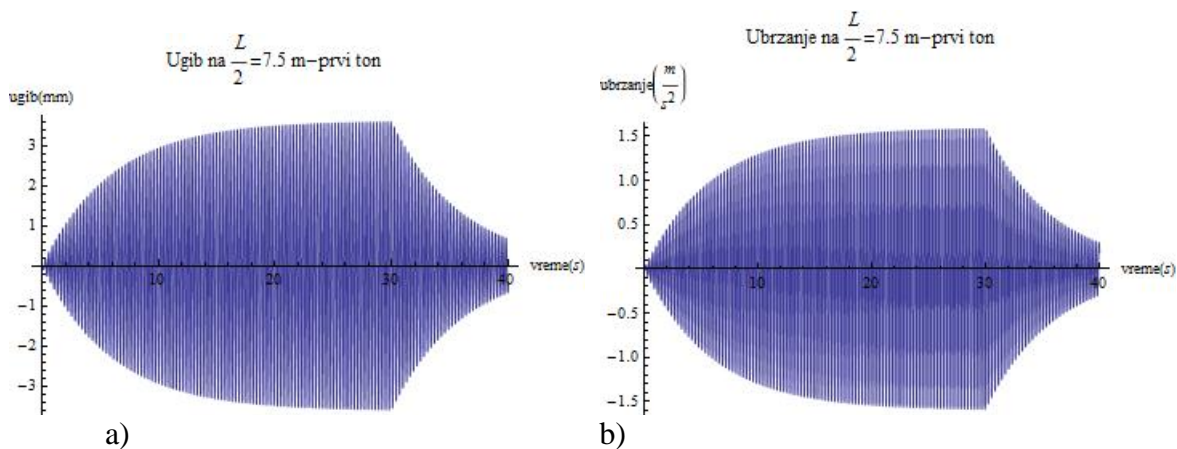


Slika 5.1.10 Oscilogram ugiba na polovini prvog polja usled kretanja jednog pešaka, simuliranog silom  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$ , za prvi ton: a) kontinualni sistem ; b) diskretni sistem



Slika 5.1.11 Oscilogram ubrzanja na polovini prvog polja usled kretanja jednog pešaka, simuliranog silom  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$ , za prvi ton: a) kontinualni sistem ; b) diskretni sistem

Oscilogrami na slikama 5.1.10 i 5.1.11 prikazuju ugibe i ubrzanja na polovini raspona prvog polja ( $x=7.5$  m), a pri rezonantnim vibracijama usled kretanja jednog pešaka, simuliranog silom  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$  kN,  $\Omega=2\pi f_p$ , gde je  $f_p = f_0=3.3.4$  Hz, što odgovara brzini trčanja  $c=09f_p=3$  m/s (tabela 2.1.2). Vreme prelaska opterećenja (sile) preko mosta je  $L/c=10$  s, nakon čega nastaju slobodne vibracije.



Slika 5.1.12 Oscilogram ugiba(a) i ubrzanja (b) na polovini raspona prvog polja usled vadalskog delovanja pešaka u trajanju od 30 s

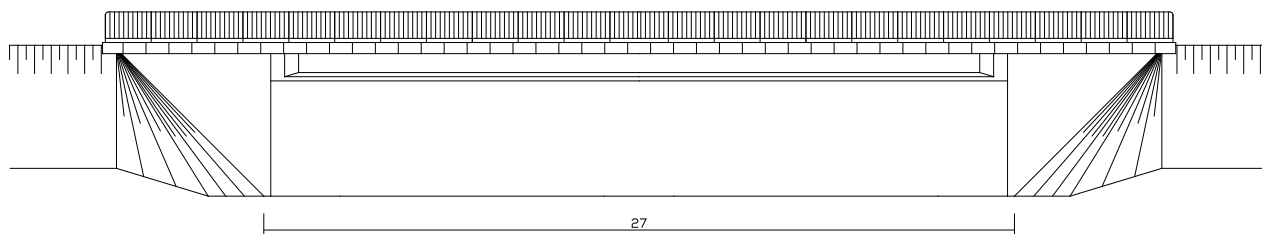
Oscilogrami na slici 5.1.12, koji su isti i za kontinualni i za diskretizovani sistem, prikazuju ugibe i ubrzanja na polovini raspona prvog polja ( $x=7.5$  m), a pri rezonantnim vibracijama usled vandalskog delovanja pešaka (skakanja), mase 70 kg, simuliranog stacionarnom pulsirajućom silom  $P(t)=0.7\sin\Omega t$  kN,  $\Omega=2\pi f_p$ , gde je  $f_p=f_0=3.34$  Hz. Sila deluje na polovini raspona prvog polja, i u trajanju od 30 s ugibi i ubrzanja su, praktično, već ustaljeni. Po prestanku delovanja opterećenja od 30 s, nastaju slobodne vibracije.

Kao i kod sprovedene analize za most sa jednim poljem, i ovde važi ista konstatacija, odnosno da su oscilogrami ugiba i ubrzanja, kako za kontinualan, tako i za diskretan sistem podudarni. Analiza vibracija za kontinualni diskretizovan sistem sprovedena je prema algoritmu DYNmi, a za diskretizovani sistem prema algoritmu DYNmk1.

## 5.2 Betonski most

### 5.2.1 Kratak opis konstrukcija mosta

Opis se prevashodno odnosi na elemente superskstrukture mosta, relevantne za analizu vibracija. Most-pasarela (sl.5.2.1) je sa jednim otvorom raspona  $L=27$  m i prevodi pešačku saobraćajnicu širine 2.4 m, preko autoputa. Niveleta mosta je u jednostranom padu  $i = 1\%$ .



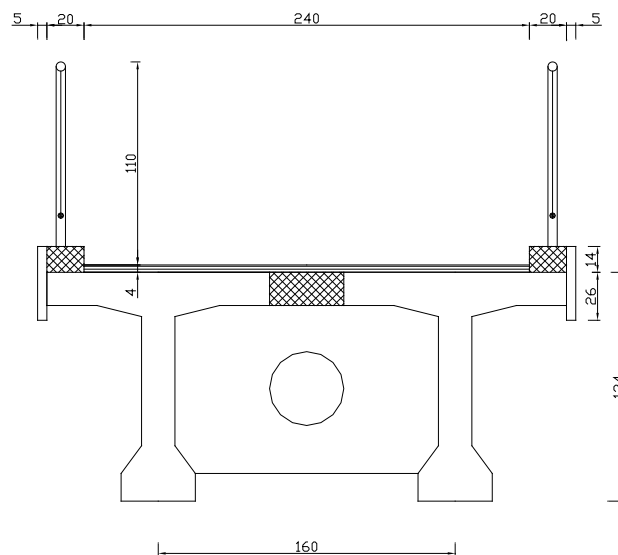
Slika 5.2.1 Izgled mosta

Donji stroj mosta (krajnji stubovi) su olakšane AB konstrukcije. Fundiranje je usklađeno sa geotehničkim uslovima tako da interakcija most-tlo ne utiče na vibracije gornjeg stroja.

Rasponska konstrukcija se sastoji od dva montažna prethodno napregnuta nosača (sl.5.2.2), od betona marke MB 40, oslonjena na krajnje stubove preko armiranih elastomernih ležišta. Prednaprezanje jednog nosača vrši se sa dva kabla sastavljena od po 8 paralelnih užadi  $\phi 15.2$  mm, sa početnom silom prednaprezanja 1390 kN po kablu, i to u jednoj fazi. Povezivanje montažnih nosača vrši se betoniranjem *in situ* poprečnih ukrućenja postavljenih u trećinama raspona i podužnog spoja na delu gornjih flanši. Armatura ovih spojnih elemenata povezuje se ankernom armaturom iz montažnih nosača. Poprečna ukrućenja nad osloncima su debljine 20 cm, a u polju 16 cm i mase po 450 kg. Po postavljanju montažnih maski, parapeti na kojima se postavlja ograda, takođe se betoniraju *in situ*.

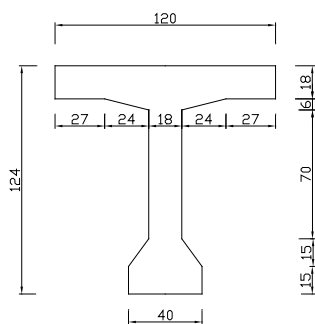
Preko gornjih flanši spojenih montažnih nosača, postavlja se hidroizolacija debljine 0.5 cm, a potom vrši asfaltiranje asfaltbetonom od 3.5 cm.

Poprečni presek mosta



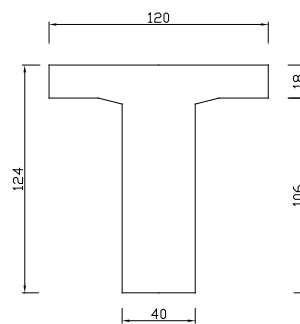
Slika 5.2.2 Poprečni presek mosta

Poprečni presek montažnog nosaca u polju



Slika 5.2.2a Poprečni presek montažnog nosača u polju

Poprečni presek montažnog nosaca nad osloncem

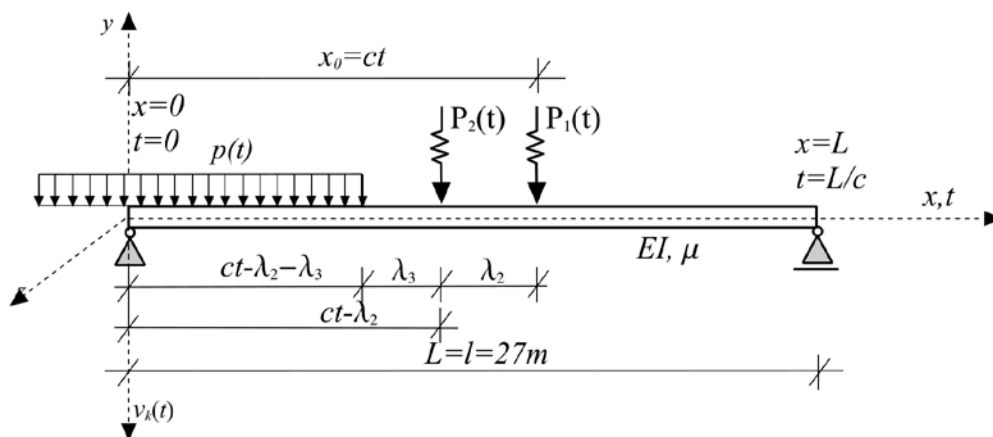


Slika 5.2.2b Poprečni presek montažnog nosača nad osloncem

Statičkim proračunom je ustanovljeno da je izbor poprečnog preseka rasponske konstrukcije adekvatan, pošto su ispunjeni uslovi za statička granična stanja nosivosti i upotrebljivosti (prslina, deformacije-ugibi). Za granično stanje upotrebljivosti u pogledu vibracija, izborom adekvatnog preseka, odnosno krutosti  $EI$  i mase  $\mu$ , ispunjen je potreban uslov da se osnovna prirodna frekvencija  $f_0$  ne nalazi u nepoželjnim opsezima.

## 5.2.2 Analiza vibracija

Analizu vibracija sprovodimo prema rešenjima iz poglavlja 4.1, za dinamički model rasponske konstrukcije prema sl. 5.2.1, a za vibracije vertikalnog pravca idukovane kretanjem pešaka, čije se delovanje modelira kao harmonijska koncentrisana sila, odnosno jednakoraspodeljeno harmonijsko opterećenje.



Slika 5.2.3 Dinamički model rasponske konstrukcije

Karakteristike rasponske konstrukcije:

$$\begin{aligned} A_x &= 1.0694 \text{ m}^2 & \mu &= 3.10 \text{ t/m} \\ I_z &= 0.1881 \text{ m}^4 & f_0 &= 3.095 \text{ Hz} \\ I_y &= 0.754 \text{ m}^4 & \xi_0 &= \delta/(2\pi) = 0.8\% \xi_{kr} \\ E &= 3.4 \text{ MPa} & \beta &= 2\pi \xi_0 f_0 \end{aligned}$$

Položaj težišta poprečnog preseka :

$$\begin{aligned} Y_u &= 0.8385 \text{ m (donja ivica preseka)} \\ Y_0 &= 0.4015 \text{ m (gornja ivica preseka)} \end{aligned}$$

Logaritamski decrement:  $\delta=0.05$  (za prethodno napregnute gredne betonske mostove)

Za kretanja pešaka posmatramo slučaj brzog trčanja, za koji je opseg frekvencija  $f_p$  od 2.7 do 3 Hz, odnosno skakanja, gde je frkvencija od 3.0 do 3.4 Hz [37]. Konstantnu brzinu ( $c$ ) kretanja pešaka definišemo, zavisno od frekvencije hoda  $f_p$ , sa  $c=0.9f_p$ .

Za  $f_p=f_0$ , brzina  $c$  je 2.7855 m/s, što odgovara tretiranom režimu kretanja pešaka, pošto se frekvencija  $f_0$  nalazi u opsegu frekvencija hoda  $f_p$ .

Vreme za koje se sila  $P(t)$  kreće po mostu je  $t \leq \frac{L}{c} = 9.693 \text{ s}$ , nakon čega nastaju slobodne vibracije.

Za posečnu težinu pešaka od 0.7 kN, prema modelu opterećenja od jednog pešaka (videti poglavje 2), sila  $P(t)$  iznosi:

$$P(t) = 0.7 + 0.18 \sin \Omega t \text{ [kN]} \quad (5.2.2)$$

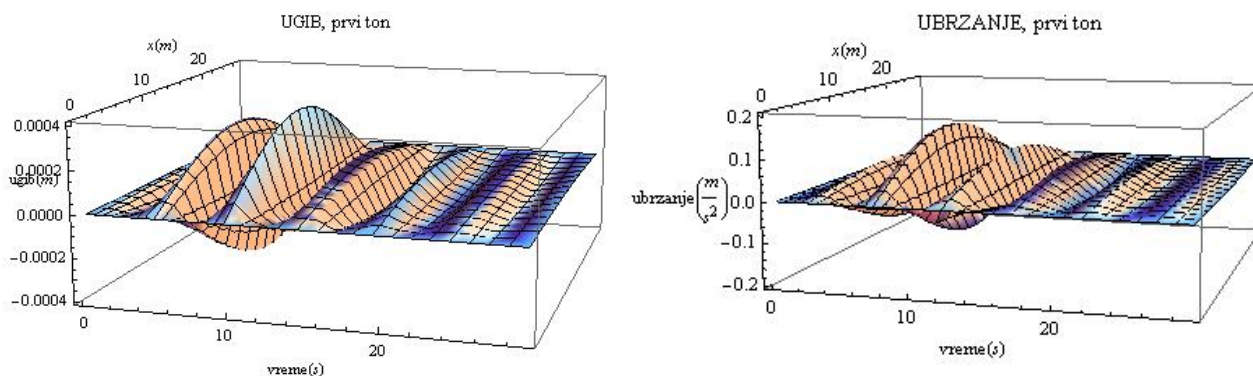
pri čemu posmatramo slučaj rezonantnih vibracija, odnosno kada je  $j\Omega = \omega_0 = 2\pi \cdot f_0$ . Analiziran je, takođe i odgovor konstrukcije ekstremnog slučaja, kada jedan pešak, ili grupa pešaka na sredini mosta (sinhrono i sinfazno) indukuje vibracije. Pri ovoj analizi frekvencija  $\Omega$  varira od 0 do  $1.5 \omega_0$  Hz, što je prikazano trodimenzionalnim oscilogramom. Odgovor konstrukcije pri rezonantnim vibracijama ( $\Omega = \omega_0$ ) prikazan je dvodimenzionalnim oscilogramima. Za presek na polovini raspona, prikazani su i oscilogrami normalnih napona usled pobuđenja opisanog uz oscilogram.

Od posebnog interesa je odgovor konstrukcije koji dobijamo analizom vibracija pri promenama određenih relevantnih parametra. Za takvu analizu, dinamički ugib se izražava kao funkcija više promrnljivih:

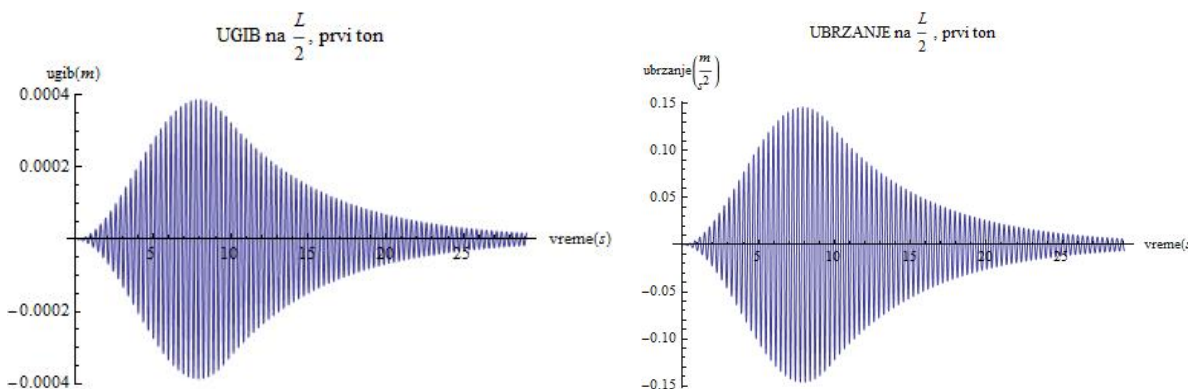
$$v = v(x, t, P, P_0, \Omega, \xi, c) \text{ za koncentrisano opterećenje} \quad (5.2.3)$$

$$v = v(x, t, q, q_0, \Omega, \xi, c) \text{ za kontinualno opterećenje} \quad (5.2.4)$$

Rezultati sprovedene analize prikazani su oscilogramima (sl.5.2.4 do sl.5.2.17) za karakteristične slučajeve pobuđenja mosta.



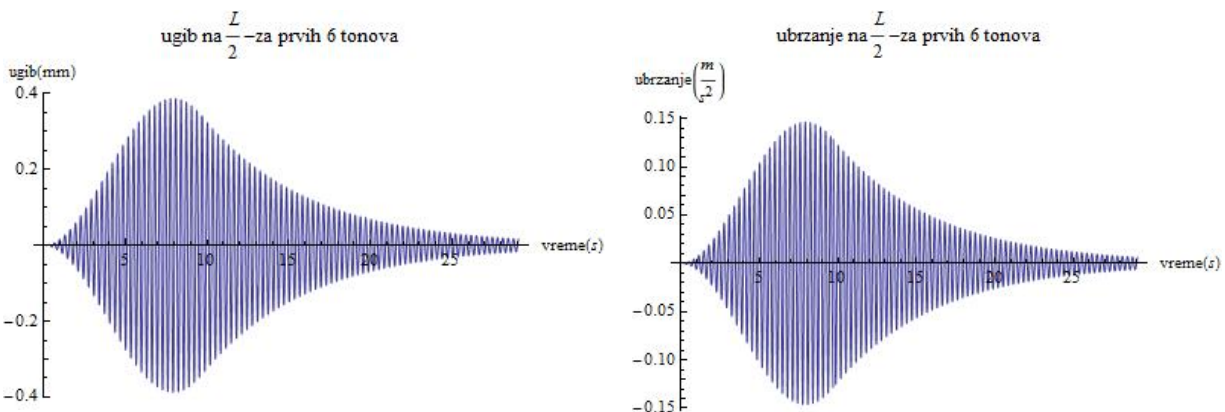
Slika 5.2.4 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled delovanja harmonijske sile  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$



Slika 5.2.5 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled delovanja harmonijske sile  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$

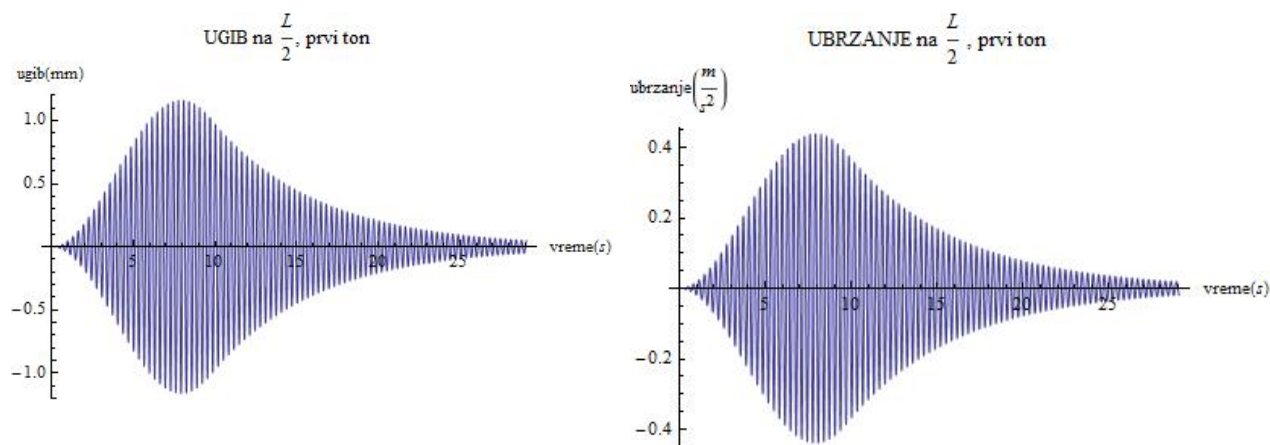


Na osnovu trodimenzionalnih oscilograma (sl.5.2.4) zaključujemo da se maksimalne vrednosti ugiba i ubrzanja postižu na polovini raspona mosta, usled prelaženja jednog pešaka, čije se delovanje simulira pokretnom harmonijskom silom  $P(t)=0.18\sin\Omega t$ , pri rezonantnim vibracijama  $\Omega=\omega_0=2\pi f_0$ . Za precizniji uvid, na sl.5.2.5, prikazan je dvodimenzionalni oscilogram ugiba i ubrzanja za delovanje iste harmonijske sile. U oba slučaja se pokazuje da maksimalni ugib i ubrzanje nastaju na polovini raspona mosta i da je pri tome maksimalni ugib 0.388 mm, a maksimalno ubrzanje  $0.147 \text{ m/s}^2$ , što se postiže za vreme od 7.9 s, kada se sila nalazi na 22. metru, odnosno kad pređe polovinu raspona mosta za 8.5 m. Ovo se smatra posledicom relativno velike brzine kretanja sile ( $c=0.9 f_0=2.7855 \text{ m/s}$ ).



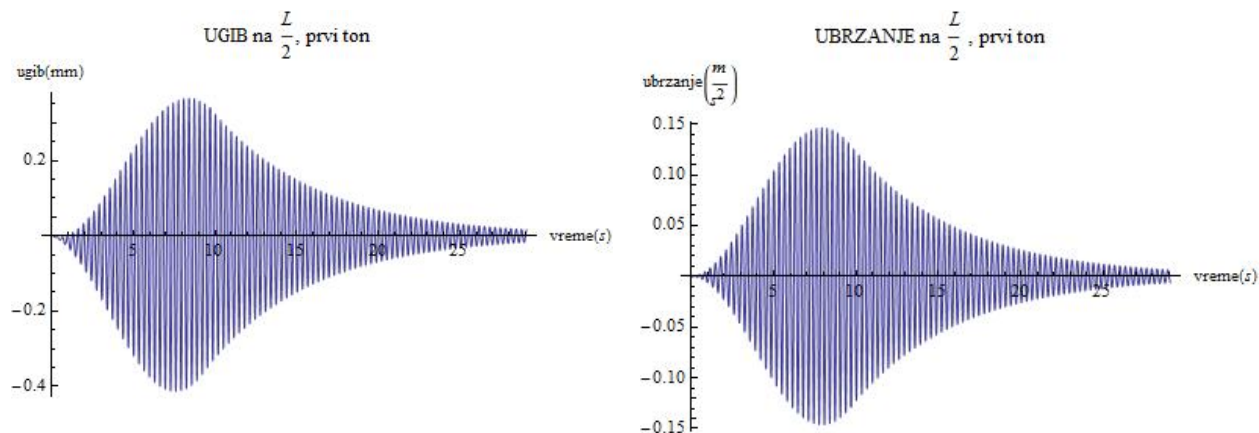
Slika 5.2.6 Oscilogrami ugiba i ubrzanja za superponiranih prvih šest tonova, usled delovanja harmonijske sile  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$

Na slici 5.2.6 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja na polovini raspona mosta, kada je u sintetizovanju vibracija po tonovima, sumirano prvih šest tonova. Rezultati, prema ovim oscilogramima, su gotovo identični sa rezultatima kada se analiza sprovodi samo za osnovni ton (sl.5.2.5). To pokazuje da je doprinos viših tonova zanemarljiv za kvalitativnu analizu vibracija. Iz tih razloga važeći standardi i daju preporuke za proračun približnim metodama ubrzanja pešačkih mostova samo za osnovni ton, ukoliko se ne sprovodi detaljnija dinamička analiza.



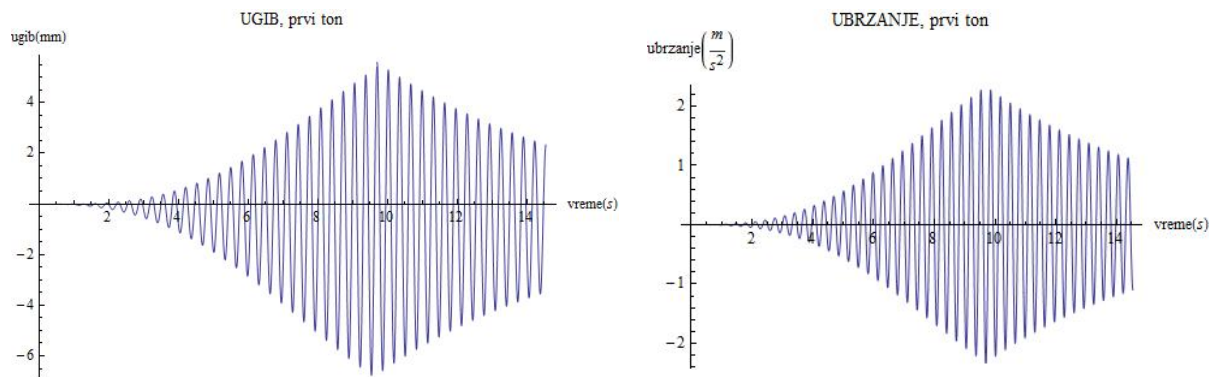
Slika 5.2.7 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled delovanja harmonijske sile  $P(t) = 3 \cdot 0.18\sin\Omega t$

Na slici 5.2.7 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja na polovini raspona, kada se mostom paralelno kreću tri pešaka čije delovanje simuliramo sa tri harmonijske sile (sinhrone i sinfazne), a pri rezonantnim vibracijama. Ovde se prikazuje linearnost problema, odnosno da su ugibi i ubrzanja linearno zavisni od amplitude harmonijske sile, jer su pri kretanju tri pešaka ugibi i ubrzanja tri puta veći od kretanja samo jednog pešaka. Ako bi se npr., mostom kretale dve grupe od po tri pešaka na bliskom rastojanju (npr. 1.5 m), tako bi maksimalni ugib iznosio 2.33 mm, a maksimalno ubrzanje  $0.882 \text{ m/s}^2$ , što je nešto iznad dopuštenog ubrzanja  $a_{\max}=0.7 \text{ m/s}^2$ . Prema tome, o ovakvim mogućim konstelacijama pokretnog opterećenja mora se voditi računa, jer dovode do narušavanja graničnog stanja upotrebljivosti.



Slika 5.2.8 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled kretanja sile  $P(t) = 0.7 + 0.18 \sin \Omega t$

Oscilogrami sa slike 5.2.8 pokazuju da se ubrzanje ne razlikuje od ubrzanja kada se u analizi izostavlja konstantni deo sile  $P(t)$  (sl.5.2.5), ali da su pri tome maksimalni ugibi nešto veći, što je razumljivo zbog doprinosa statičkog ugiba od težine pešaka.

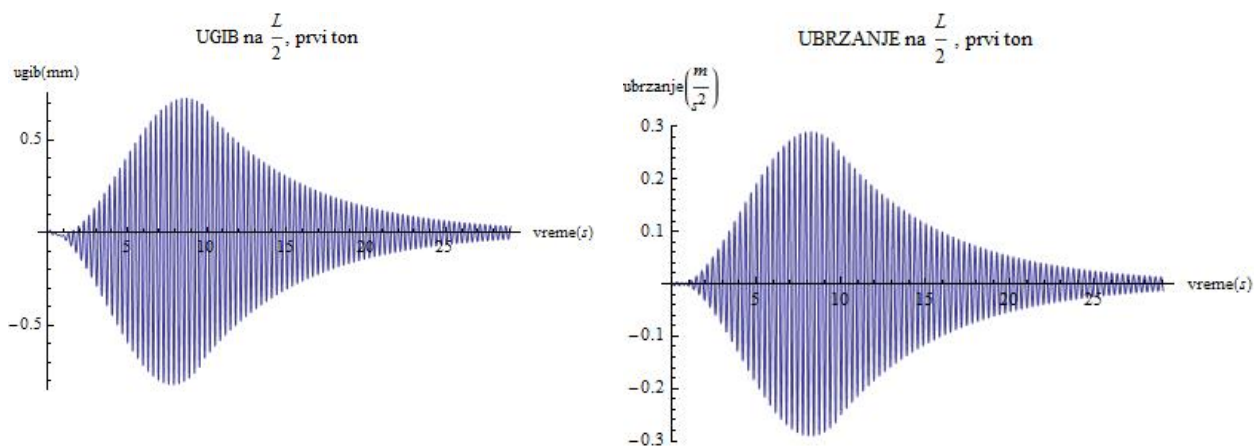


Slika 5.2.9 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled nailaska kolone pešaka, modelirane jednakoraspodeljenim opterećenjem  $p(t) = 0.7 + 0.18 \sin \Omega t$  [kN/m]

Oscilogrami na slici 5.2.9 su vrlo karakteristični, jer pokazuju da se pri kretanju kolone pešaka, čije delovanje simuliramo jednakoraspodeljenim opterećenjem, maksimalni ugibi i ubrzanja se javljaju na sredini raspona mosta. Tako je maksimalni ugib 6.8 mm, a maksimalno

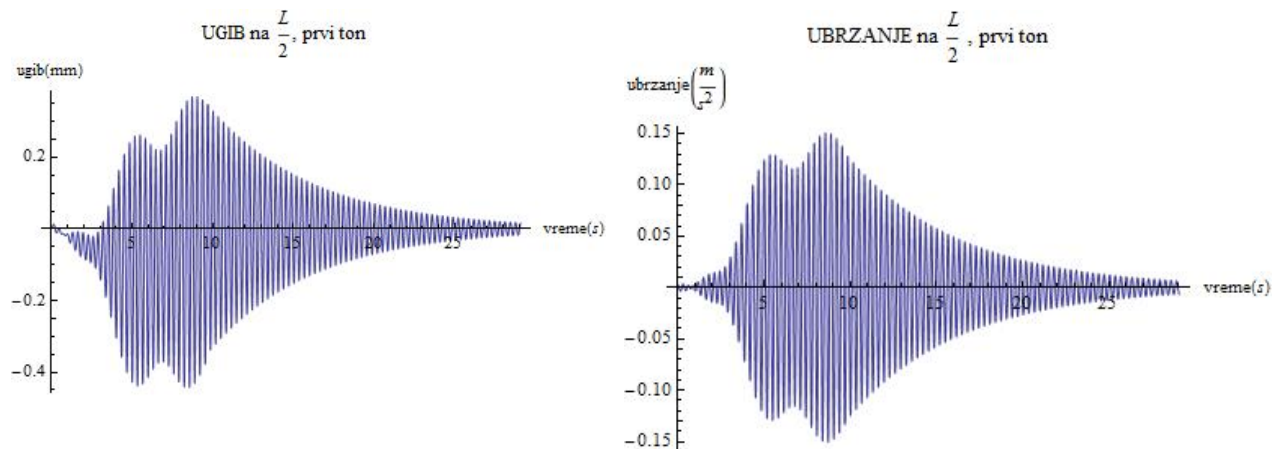
ubrzanje  $2.34 \text{ m/s}^2$ . Ugib je manji od  $10 \text{ mm}$ , što se smatra gornjom granicom prihvatljivosti, ali ubrzanje znatno premašuje granicu dopuštenog ( $a_{\text{dop}}=0.7 \text{ m/s}^2$ ).

Ako bi ovakvo pokretno opterećenje smatrali nerealnim, tada bi tek za  $1/3$  njegovog intenziteta bio zadovoljen uslov da ubrzanje bude u granicama dopuštenog ( $a=0.78 \text{ m/s}^2 \sim a_{\text{dop}}$ ). Opterećenje dva i po puta manje indukovalo bi ubrzanje  $a=0.936 \text{ m/s}^2$ , što je veće od dopuštenog. Dakle, takvo opterećenje ne bi bilo prihvatljivo, a realno je moguće. Sve ovo pokazuje da simultano kretanje pešaka na bližem rastojanju (do  $1 \text{ m}$ ) i daljem (npr.  $2 \text{ m}$ ), smatramo kolonom pešaka, čije delovanje pri rezonantnim vibracijama može da izazove neprihvatljivo velika ubrzanja. Iz tih razloga se takvo kretanje „ne dozvoljava“, npr. kretanje kolone vojnika strojevim korakom.



Slika 5.2.10 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled kretanja, dva pešaka na rastojanju  $1.5 \text{ m}$ , simuliranog silama  $P_1(t) = P_2(t) = 0.7 + 0.18 \sin \Omega t$

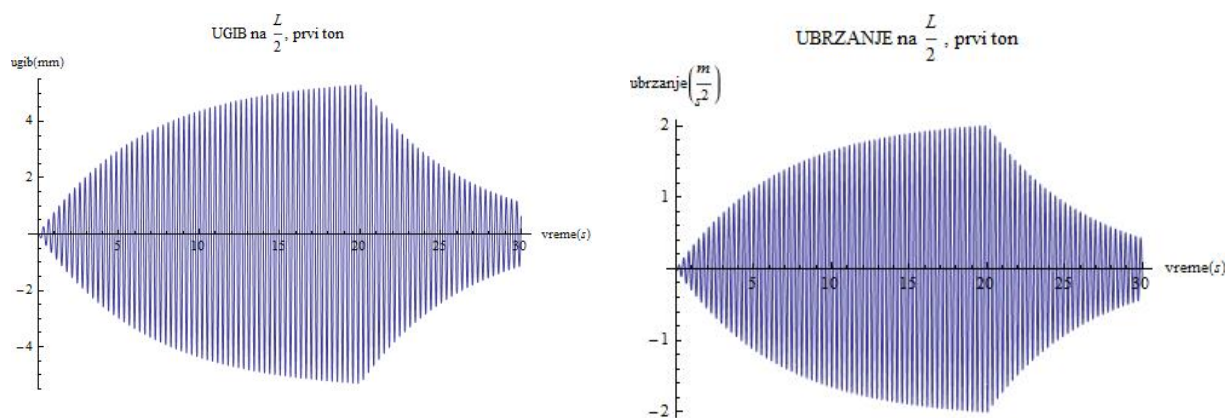
Na slici 5.2.10 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja na polovini raspona mosta, pri sinhronom i sinfaznom kretanju dva pešaka paralelno podužnoj osi mosta, na rastojanju  $1.5 \text{ m}$  (sl.5.2.3). Pri tome, maksimalni ugib je  $0.82 \text{ mm}$ , a maksimalno ubrzanje je  $0.29 \text{ m/s}^2$ , što se ostvaruje za vreme od  $8.3 \text{ s}$ , kada se sila nalazi na  $9.5 \text{ m}$  od polovine raspona, u smeru kretanja.



Slika 5.2.11 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled kretanja, dva pešaka na rastojanju  $1.5 \text{ m}$ , simuliranog silama  $P_1(t) = 0.7 + 0.18 \sin \Omega t$ ,  $P_2(t) = 0.7 + 0.18 \sin(\Omega - \pi/2)t$

Na slici 5.2.11 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja na polovini raspona mosta, pri sinhronom kretanju sila, ali sa faznom razlikom od  $\pi/2$  i na rastojanju 1.5 m (sl.5.2.3). Pri tome, maksimalni ugib je 0.447 mm, a maksimalno ubrzanje je  $0.15 \text{ m/s}^2$ , što se ostvaruje za vreme od 8.6 s, kada se sila nalazi na 10.5 m od polovine raspona, u smeru kretanja.

Sa oscilograma (sl.5.2.10 i sl.5.2.11) možemo zaključiti: da maksimalni ugib i ubrzanje na  $L/2$  mosta nastaju istovremeno, ali pošto sila pređe polovinu raspona, što je uzrokovano brzinom kretanja od  $2.7885 \text{ m/s}$ ; da su maksimalni ugibi i ubrzanja pri rezonantnim vibracijama za slučaj sinhronog i sinfaznog kretanja znatno veći od maksimalnih ugiba i ubrzanja za slučaj sinhronog i fazno pomerenog kretanja jedne sile u odnosu na drugu. Sve ovo ukazuje na činjenicu da kretanje jedne grupe pešaka van zone rezonantnih vibracija, amortizuje uticaje druge grupe pešaka, čije kretanje indukuje rezonantne vibracije. To ne mora da ima uticaj na stabilnost mosta, ali može da ima nepovoljne reperkusije na ostale pešake, naročito na one koji stoje. Iz tih razloga, za ocenu prihvatljivosti nivoa vibracija, odnosno graničnog stanja upotrebljivosti, važeći standardi za određivanje ubrzanja usvajaju kretanje samo jednog pešaka, čiji se delovanje simulira harmonijski promenljivom silom.

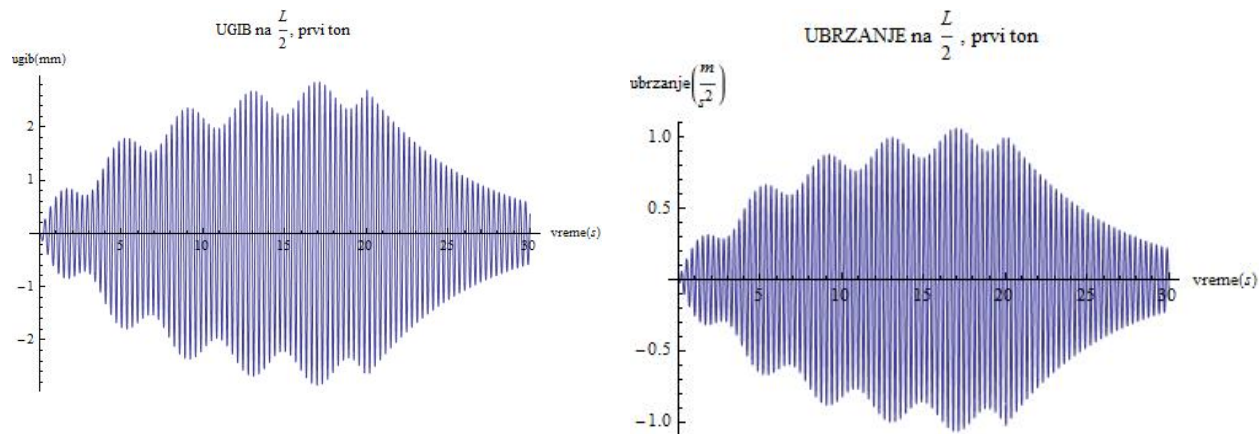


Slika 5.2.12 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled namernog skakanja dva pešaka na sredini mosta, simuliranog silama  $P_1(t) = 0.7\sin\Omega t$ ,  $P_2(t) = 0.7\sin\Omega t$

Na slici 5.2.12 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja na polovini raspona, kada dva pešaka na sredini mosta namerno skokovima izazivaju rezonantne vibracije, a čije delovanje simuliramo sa dve harmonijske sile. To je tzv. vandalsko ponašanje koje je moguće, samo je pitanje koliko je realno da se skakanjem u mestu postigne izjednačavanje frekvencija podude sa osnovnom frekvencijom mosta ( $f_p=f_0$ ). Sa oscilograma se vidi da je maksimalni ugib 5.2 mm, a maksimalno ubrzanje  $2 \text{ m/s}^2$ , što se postiže već u vremenu od 20 s. Ugibi su dozvoljenom opsegu, ispod 10 mm, ali su ubrzanja neprihvatljiva.

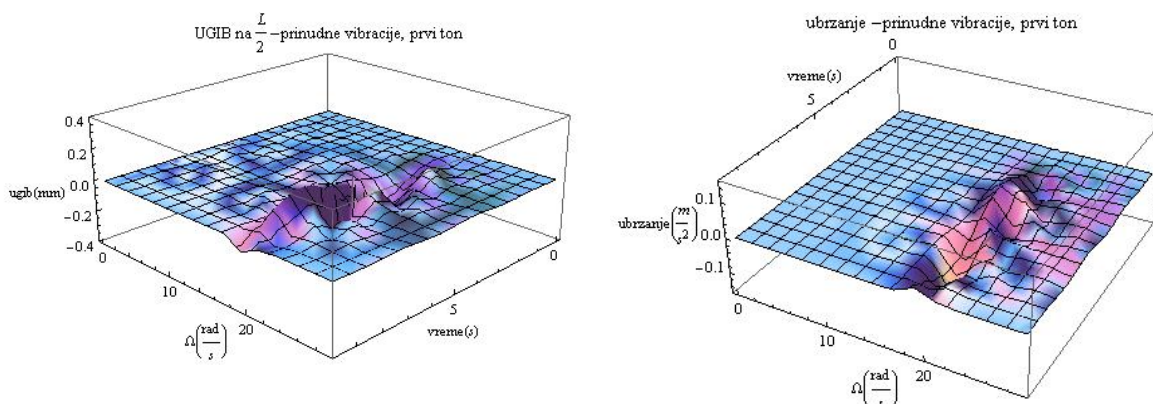
Na slici 5.2.13 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja na polovini raspona, kada dva pešaka na sredini mosta namerno skokovima izazivaju vibracije, a čije delovanje simuliramo sa dve harmonijske sile, fazno pomerene za  $\pi/2$ . Pri ovom vandalskom ponašanju, maksimalni ugibi i ubrzanja su znatno manji od slučaja skakanja sa rezonantnim vibracijama (sl.5.2.12) i nastaju za vreme od 17s. Sa oscilograma (sl.5.2.12 i sl.5.2.13) možemo zaključiti da pri izazivanju vibracija

skokovima pešaka u mestu, maksimalni veličine ugiba i ubrzanja se postižu ako frekvencije harmonijskih sila nisu međusobno fazno pomerene, a pri rezonantnim vibracijama.



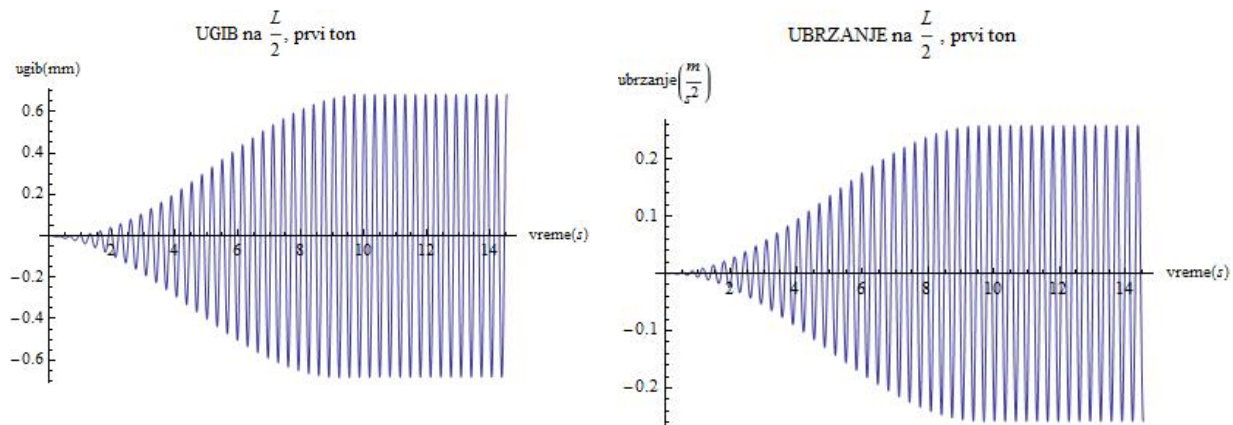
Slika 5.2.13 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled namernog skakanja dva pešaka na sredini mosta, simuliranog silama  $P_1(t) = 0.7\sin\Omega t$ ,  $P_2(t) = 0.7(\Omega - \pi/2)t$

Na slici 5.2.13 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja na polovini raspona, kada dva pešaka na sredini mosta namerno skokovima izazivaju vibracije, a čije delovanje simuliramo sa dve harmonijske sile, fazno pomerene za  $\pi/2$ . Pri ovom vandalskom ponašanju, maksimalni ugibi i ubrzanja su znatno manji od slučaja skakanja sa rezonantnim vibracijama (sl.5.2.12) i nastaju za vreme od 17s. Sa oscilograma (sl.5.2.12 i sl.5.2.13) možemo zaključiti da pri izazivanju vibracija skokovima pešaka u mestu, maksimalni veličine ugiba i ubrzanja se postižu ako frekvencije harmonijskih sila nisu međusobno fazno pomerene, a pri rezonantnim vibracijama.



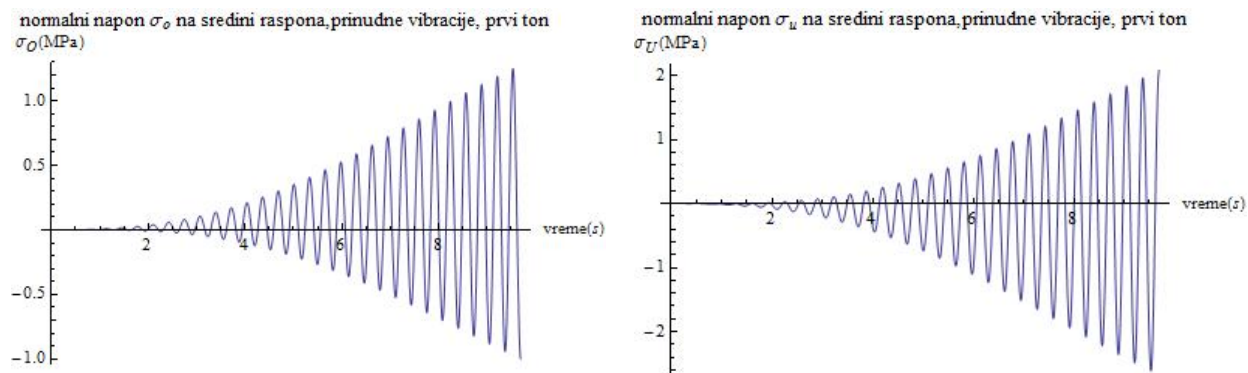
Slika 5.2.14 Uticaj promene frekvencije pobuđujuće sile na ugib i ubrzanja rasponske konstrukcije

Oscilogrami sa slike 5.2.14 ilustruju uticaj promene frekvencije  $\Omega$  pokretne sile  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$ . Frekvencija  $\Omega$  varira u granicama od 0 do  $1.5\omega_0$ , odnosno do  $3\pi f_0$ . Pokazuje se da sa porastom frekvencije pobuđujuće sile rastu i ugibi i ubrzanja, i da se maksimalne vrednosti ovih veličina uvek ostvaruju na polovini raspona mosta, a pri rezonantnim vibracijama.

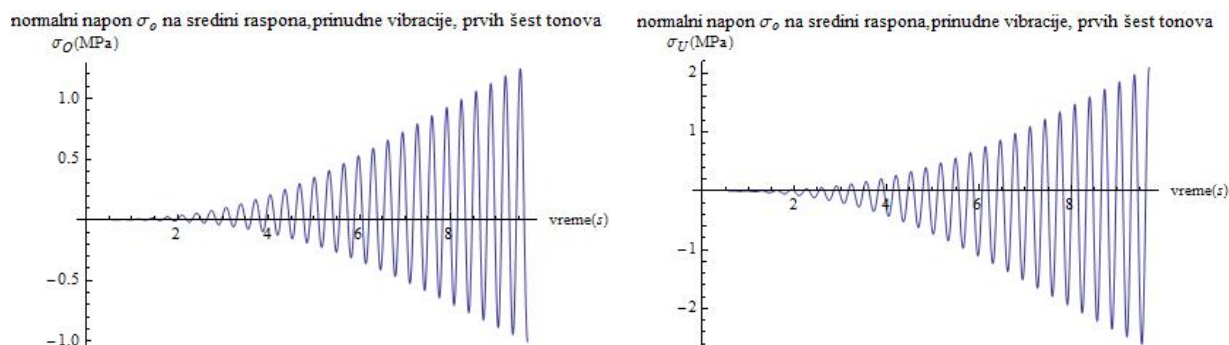


Slika 5.2.15 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled delovanja sile  $P(t) = 0.7 + 0.18\sin\Omega t$ , bez prigušenja

Na slici 5.2.15 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja na polovini raspona mosta, za slučaj vibracija bez prigušenja, indukovanih silom  $P(t) = 0.7 + 0.18\sin\Omega t$ . Vidi se da su maksimalne vrednosti ugiba i ubrzanja uvećane u odnosu na slučaj sa prigušenjem (sl.5.2.8), kada je logaritamski dekrement  $\delta = 0.05$ , odnosno, relativno prigušenje osnovnog tona  $\xi_0 = 0.8\%$  od kritičnog ( $\xi_{kr} = 1$ ). To je dokaz da se uticaj prigušenja ne sme zanemarivati, čak i u slučaju kada je ono veoma malo ( $\xi \ll 1$ ), naročito pri rezonantnim vibracijama.



Slika 5.2.16 Oscilogrami normalnih napona ( $\sigma$ ) u preseku na polovini raspona mosta, za slučaj pobuđenja kontinualnim opterećenjem  $p(t) = 0.7 + 0.18\sin\Omega t$



Slika 5.2.17 Oscilogrami normalnih napona ( $\sigma$ ) za superponiranih prvih šest tonova, u preseku na polovini raspona mosta, za slučaj pobuđenja kontinualnim opterećenjem  $p(t) = 0.7 + 0.18\sin\Omega t$

Oscilogrami napona (sl.5.2.17) pokazuju da se sintetizovanjem vibracija za prvih šest tonova, naponi na gornjoj i donjoj ivici preseka ne razlikuju od napona za osnovni ton (sl.5.2.16). To potvrđuje činjenicu da je doprinos viših tonova osnovnom tonu zanemarljiv, te je analiza vibracija prema osnovnom tonu, kao dominantnom, pouzdana.

Oscilogrami sa sl. 5.2.16, odnosno sl.5.2.17, prikazuju vremensku promenu normalnih napona u preseku na sredini raspona mosta, usled nailaska kolone pešaka, čije se delovanje simulira jednako respodeljenim opterećenjem. Najveći naponi nastaju kada kolona stigne do kraja mosta ( $t=L/c=9.693$  s). Maksimalni napon na gornjoj ivici preseka iznosi  $\pm 1.085$  MPa, a na donjoj ivici istovremeno  $\mp 2.335$  MPa. Stanje napona od stalnog opterećenja mosta, u istom preseku, a u vremenu eksploatacije iznosi: za gornju ivicu 3.841 MPa, a za donju 4.916 MPa. Pri vibracijama mosta usled tertiranog opterećenja, naponi na gornjoj ivici preseka variraju od 4.9-2.8 MPa, a na donjoj ivici od 2.6-7.3 MPa, tako da je ceo presek uvek u zoni pritiska.

Uz oscilogram sa slike 5.2.9, komentarisano je ovakvo pobuđenje mosta kao ekstremno i da je veličina ubrzanja neprihvatljiva. Međutim, analiza stanja napona je pokazala da takva konstelacija pokretnog opterećenja, ne utiče na stabilnost mosta.

Prema **BS 5400-2** [13] kada je osnovna prirodna frekvencija vertikalnog pravca  $f_0 \leq 5$  Hz, maksimalno ubrzanje bilo kog dela rasponske konstrukcije (superstrukture) pešačkog, ili biciklističkog mosta mora biti ograničeno sa

$$a_{\max} \leq 0.5\sqrt{f_0} \text{ m/s}^2 \quad (5.2.5)$$

Za mostove sa jednim rasponom, kontinualne sa dva, ili tri polja, simetrične superstrukture, sa konstantnim poprečnim presekom i ležištima koja se mogu idealizovati kao prosti oslonci, maksimalno vertikalno ubrzanje se može odrediti po pojednostavljenom metodu, prema relaciji:

$$a = 4\pi^2 f_0^2 v_s k \psi \quad (5.2.6)$$

gde je  $f_0$  osnovna prirodna frekvencija mosta ( u Hz),  $v_s$  je statički ugib u metrima, u sredini glavnog raspona, za vertikalno koncentrisano opterećenje od 0.7 kN aplicirano na sredinu glavnog raspona,  $k$  je faktor statičkog sistema,  $\psi$  je faktor dinamičkog odgovora koji je u funkciji raspona mosta i logaritamskog dekrementa ( $\delta$ ).

Za tretirani most je:  $f_0 = 3.095$  Hz,  $v_s = 4.08 \times 10^{-5}$  m,  $k = 1$ ,  $\psi = 8.8$ .

Sračunato ubrzanje iznosi  $a=0.136$  Hz, što je manje od maksimalnog dozvoljenog ubrzanja  $a_{\max} = 0.88$  m/s<sup>2</sup>.

Prema ovom standardu kada je frekvencija  $f_{0h}$  horizontalnog pravca veća od 1.5 Hz, smatra se da su zahtevi u pogledu vibracija ispunjeni. Za tretirani most prirodna osnovna frekvencija horizontalnog pravca iznosi 6.196 Hz, tako da analiza lateralnih vibracija nije neophodna.

Prema **CAN/CSA-S6-00** [16], ukoliko se ne sprovodi potpuna dinamička analiza, a tretiraju se konstrukcije grednog sistema sa jednim, dva ili tri raspona, maksimalno vertikalno ubrzanje rasponske konstrukcije pešačkog mosta određuje se prema relacijama koje su u svemu iste kao

kod britanskog standarda. Razlika je, međutim, u maksimalnom dozvoljenom ubrzanju, koje se očitava sa dijagrama u Standardu, u funkciji frekvencije  $f_0$ . Prema ovom Standardu, za tretirani most  $a=0.136 \text{ m/s}^2$ , a maksimalno dozvoljeno ubrzanja iznosi  $a_{\max} = 0.603 \text{ m/s}^2$ .

U tabeli 5.2.1 prikazani su rezultati analize vibracija mosta prema relevantnim regulativama.

Tabela 5.2.1 Rezultati analize vibracija

regulativa	maksimalno ubrzanje $a$	dopušteno ubrzanje $a_{dop}$	način proračuna	granično stanje upotrebljivosti
	$\text{m/s}^2$	$\text{m/s}^2$		
<b>Eurocode 1</b>	0.147	0.700	dinamička analiza	zadovoljeno
<b>BS 5400-2</b>	0.136	0.880	približni metod	zadovoljeno
<b>CAN/CSA-S6</b>	0.136	0.603	približni metod	zadovoljeno

Sprovedenom dinamičkom analizom i približnim metodama, prema navedenim regulativama, tretirani most je prihvatljiv sa aspekta graničnog stanja upotrebljivosti u pogledu vibracija.

Na kraju, treba ipak naglasiti da pri analizi vibracija pešačkih mostova grednih sistema, kako za vertikalni, tako i horizontalni pravac, osim proračuna ubrzanja i deformacija rasponske konstrukcije prema važećim regulativama, treba razmotriti odgovore konstrukcije i prema drugim kriterijumima. Pri tome, misli se na kritične konstelacije pobuđujućeg opterećenja mosta, kao što su vandalska ponašanja pešaka (skakanje u mestu), ili ekstremni režimi kretanja grupe pešaka, koji pored toga što mogu narušiti granično stanje upotrebljivosti u pogledu prihvatljivosti vibracija, mogu, eventualno, dovesti u pitanje i granično stanje nosivosti mosta.



## 5.3 Drveni most

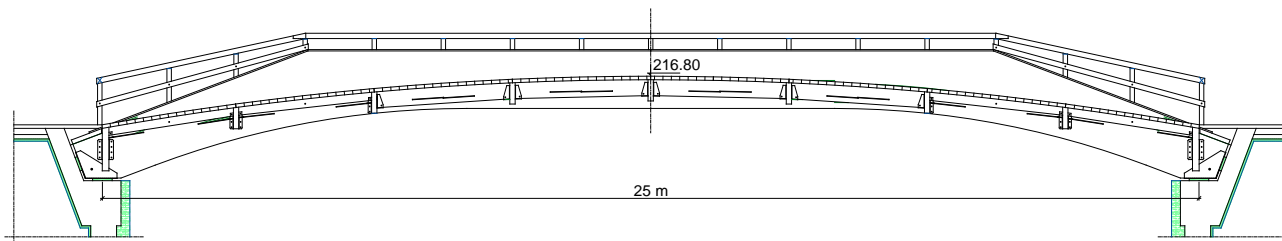
### 5.3.1 Kratak opis konstrukcija mosta

Pešački most u Knjaževcu (sl.5.3.1), raspona 25 m i korisne širine 2.8 m, premošćava reku Svrljiški Timok. Projekat mosta [72] izrađen je 1990.godine u Institutu za građevinarstvo i arhitekturu, tada Građevinskog fakulteta u Nišu. Glavni i odgovorni projektant je prof.dr Dragoslav Stojić. Most je izveden 1991.godine i od tada je neprekidno u funkciji.



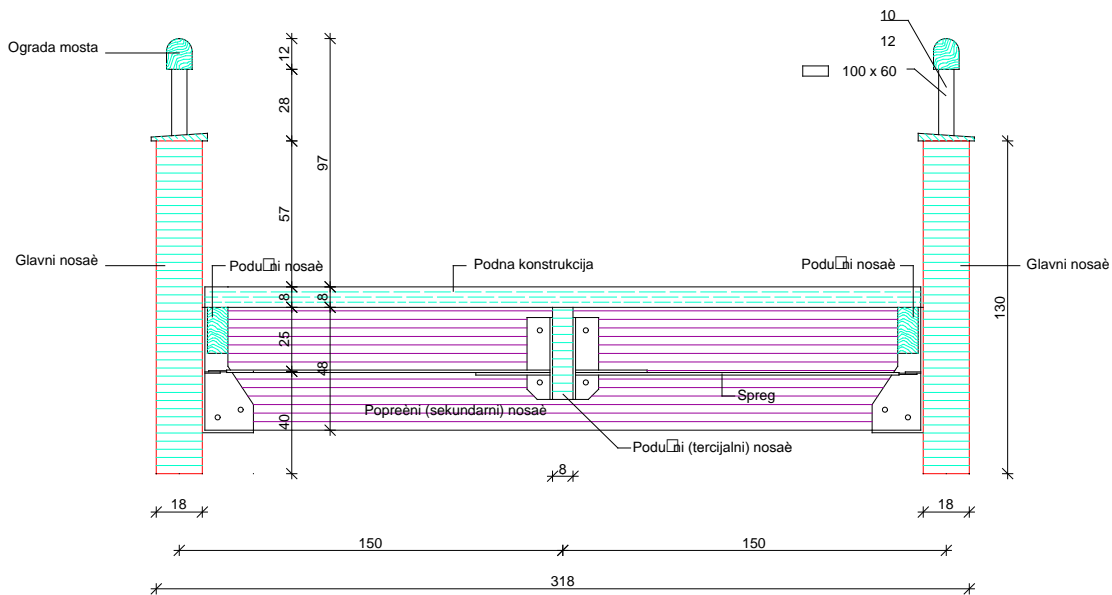
Slika 5.3.1 Izgled mosta

Most se sastoji od dva glavna podužna nosača od lepljenog lameliranog drveta, konstantne širine 18 cm i promenljive visine od 130cm u sredini, do 160 cm prema krajevima (sl. 5.3.2 i 5.3.3).



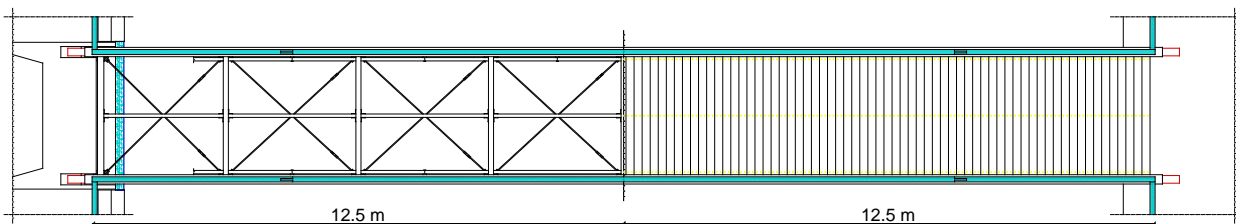
Slika 5.3.2 Dispozicija mosta-podužni presek po niveleti

Gornja ivica glavnih nosača je u vidu izlomljene prave linije, a donja (intrados) mosta, u vidu prave linije u središnjem delu i krive linije (deo kruga  $r=20m$ ) u krajnjim delovima mosta (sl.5.3.2).



Slika 5.3.3 Popreèni presek mosta na L/2

Glavni podužni nosaèi su povezani popreènim nosaèima ( $b/h=12/48\text{cm}$ ) na razmaku 3.125m i imaju ulogu prenošenja opterećenja od sekundarnih podužnih nosaèa ( $b/h=8/36\text{cm}$ ), raspona 3.125m, postavljenih po sredini mosta, između glavnih podužnih nosaèa. Podna konstrukcija je od talpi debljine 8 cm (slike 5.3.2, 5.3.4 i 5.3.5), koje su postavljene upravno na osu mosta i oslanjaju se na glavne i sekundarne podužne nosaèe.



Slika 5.3.4 Osnova mosta

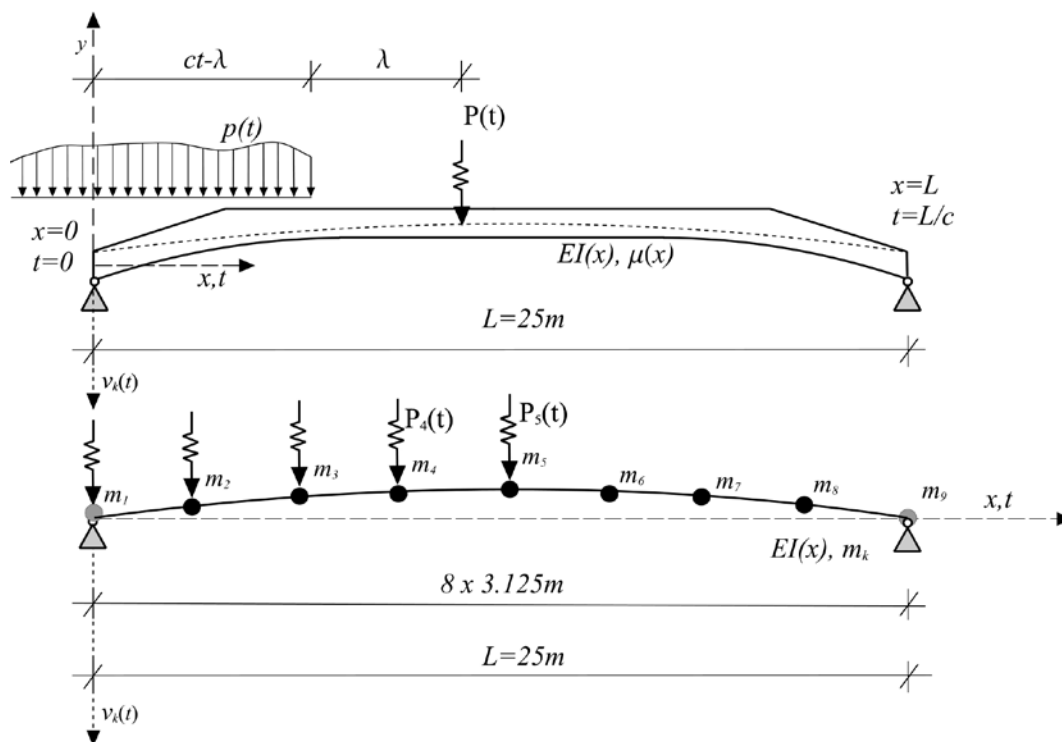
Veza popreènih nosaèa sa glavnim, kao i sekundarnih podužnih sa popreènim, izvedena je preko èeliènih papuèa i zavrtnjeva. Uloga popreènih nosaèa ja da sa èeliènim spregovima ( $\phi 25\text{mm}$ ) (sl.5.3.4), postavljenim u svakom polju između njih, obrazuju prostorno stabilan sistem.



Slika 5.3.5 Pogled na gazište mosta

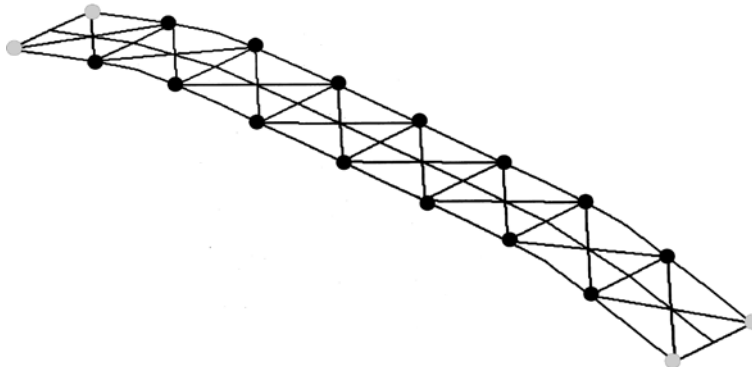
Niveleta mosta (gazišta) je kvadratna parabola sa strelom 1.1m (sl.5.3.2). Oslanjanje rasponske konstrukcije na obalne stubove izvršeno je preko elastomernih ležišta. Obalni stubovi su projektovani kao olakšane armiranobetonske konstrukcije. Za analizu vibracija, inetarkcija most-tlo nije od značaja.

### 5.3.2 Analiza vibracija



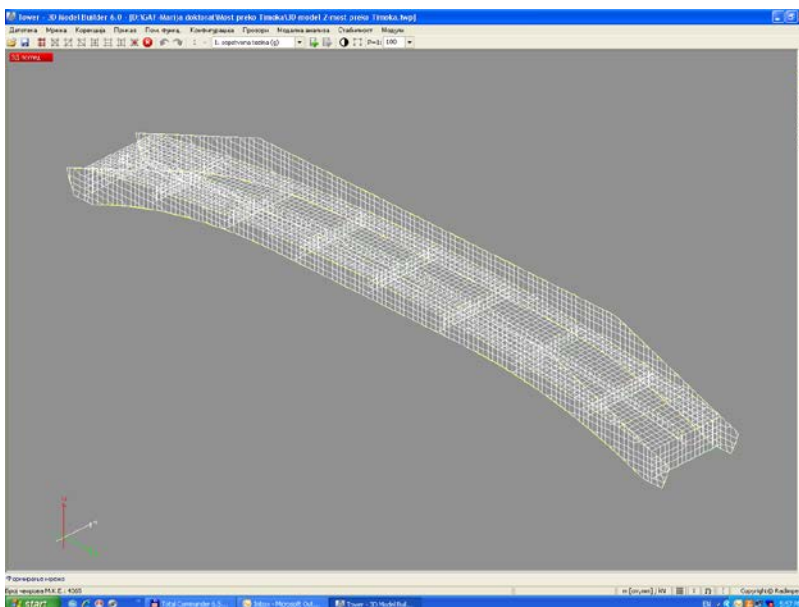
Slika 5.3.6 Dinamički model gornjeg stoja mosta za tretman linijskog sistema u ravni

Analizu vibracija sprovodimo prema rešenjima iz poglavlja 4.1, za dinamički model rasponske konstrukcije prema sl. 5.3.6, a za vibracije vertikalnog pravca idukovane kretanjem pešaka, čije se delovanje modelira kao harmonijska koncentrisana sila, odnosno jednakorasodeljeno harmonijsko opterećenje.



Slika 5.3.7 Dinamički model gornjeg stoja mosta za tretman prostornog linijskog sistema

Statički sistem mosta je dvozglojni luk sa strelom  $f=1.75$  m, tako da je stinjenost  $f/L=1/14$ . Smelost tretirani luka iznosi  $l^2/f=44$ , što ga čini relativno plitkim i veoma osetljivim na razmicanje oslonaca. Razmicanje je moguće usled eventualnog popuštanja (deformacija) elastomernih ležišta, malih horizontalnih pomeranja usled rotacije obalnih stubova izloženih stalnom delovanju sile potiska, posledica zemljotresa, i drugih okolnosti. Uticaj tih mogućih razmicanja na ugibe, povećanje perioda sopstvenih vibracija, odnosno smanjenje svojstvenih frekvencija, zatim smanjenje sile potiska, prikazani su na sl.5.3.8. Sa ove slike vidi se da, za razmicanje oslonaca od 18 mm, sistem se oslobađa sile potiska od sopstvene težine ( $H_g$ ), a osnovna prirodna frekvencija  $f_0$  se smanjuje od 8.137 do 2.674 Hz.



Slika 5.3.7 Gornji stroj mosta modeliran konačnim elementima

Prema veličini ovih frekvencija,  $f_0$  za vertikalni, kao i  $f_{0h}$  za horizontalni pravac, uz uvažavanje kriterijuma postojećih standarda (tabela 5.3.3), most ispunjava potrebne uslove graničnog stanja upotrebljivosti u pogledu vibracija. Međutim, zbog navedenih eventualnih razmicanja oslonaca, a pri tome brzog smanjenja svojstvenih frekvencija, i pri malim horizontalnim pomeranjima, dinamička analiza dobija na značaju. Celishodno je da se takva analiza sprovede za granične konfiguracije sistema, kada oslonci prihvataju celokupnu silu potiska  $H=H_g+H_p$  (sistema sa nepomerljivim osloncima– označen kao **sistem A**) i kada se  $H_g$  izgubi, pa sistem prima samo silu potiska od pokretnog opterećenja  $H=H_p$  (sistema sa pomerljivim osloncima– označen kao **sistem B**). Takva analiza je sprovedena za karakteristična kretanja pešaka, a za dinamičke modele sa koncentrisanim masama i ekvivalentne modele sa konstantnim krutostima  $EI$  i masom  $\mu$  duž raspona mosta. Ekvivalentni modeli kontinualnih sistema odgovarajući su za osnovni ton, mada se model sistema bez horizontalnog potiska  $H_g$  može koristiti i za prva dva tona (tabela 5.3.2).

Važno je naglasiti da je za formiranje dvozglbnog luka, sa horizontalnim potiskom  $H=H_g+H_p$ , projektant predvideo da se u fazi montaže izvrši prednaprezanje glavnih nosača, uvođenjem (hidrauličkim presama) horizontalne sile potiska, nakon čega su fiksirana ležišta [103]. Tako je sistem zakrivljenog slobodno oslonjenog grednog nosača, sveden na sistem dvozglbnog luka (sistem A). Da su ležišta fiksirana bez prednaprezanja glavnih nosača, zatvoreni sistem konstrukcija mosta bi imao efekte luka na dva zgloba, za sva opterećenja, osim sopstvene težine (Sistem B).

U tabeli 5.3.1, prikazani naponi i deformacije (ugibi) na  $L/2$  raspona glavnog nosača za statičko delovanje opterećenja  $g$  i  $p$ , su manji od dopuštenih, što znači da je most funkcionalan, kako pri konfiguraciji sistema A, tako i pri svim mogućim konfiguracijama, zaključno sa konfiguracijom sistema B.

### **Kontrola normalnih napona i ugiba glavnog nosača na $L/2$ za statičko delovanje opterećenja $g$ i $p$**

Dužina izvijanja u ravni luka:  $l_i=0.625L=0.625\cdot 5.24=15.875$  m

Vitkost nosača:  $\lambda=3.46\cdot 15.875/1.30=42.30$

Koficijent izvijanja:

$$\omega = \frac{1}{1 - 0.8 \left( \frac{42.3}{100} \right)^2} = 1.167$$

Koeficijent redukcije dopuštenih napona, za vlažnost drveta u eksploataciji do 25%, iznosi:

$K_w=0.8$  za pritisak, smicanje i zatezanje upravno na vlakna

$K_w=0.9$  za savijanje i zatezanje

$$\sigma_{md} = 14 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c\parallel d} = 11 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{c\parallel} = \omega \frac{N}{A_x} + \frac{M}{I_z} \cdot y \cdot \frac{\sigma_{c\parallel d}}{\sigma_{md}}$$

$p=5.5 \cdot 0.05L=4.125 \text{ kN/m}^2$  – opterećenje od pešaka

Za poprečni presek nosača na  $L/2$  ( $b/h=18/130 \text{ cm}$ ):

$$A_x = 0.234 \text{ m}^2$$

$$I_z = 0.032956 \text{ m}^4$$

$$y_o = 0.65 \text{ m...gornja ivica preseka}$$

$$y_u = -0.65 \text{ m...donja ivica preseka}$$

$$\sigma_{c\parallel dop} = K_w \cdot 11 = 9.9 \text{ MPa}$$

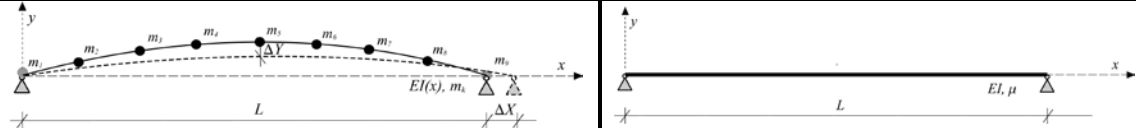
Dozvoljeni ugib temena nosača:

$$\Delta Y_{dop} = \frac{L}{400} = \frac{25}{400} 10^3 = 62.5 \text{ mm}$$

Tabela 5.3.1 Stanje normalnih napona i ugiba na  $L/2$  raspona glavnog nosača za statičko delovanje opterećenja  $g$  i  $p$

opterećenje	$\max \mathbf{M}$	$\max \mathbf{N}$	$\sigma_{\Pi}^o$	$\sigma_{\Pi}^u$	$\Delta \mathbf{X}$	$\Delta \mathbf{Y}$
	kNm	kN	MPa	MPa	mm	mm
<b>Sistem A (horizontalni potisak <math>H=H_g+H_p</math>)</b>						
$g$	103/2	232/2	1.38	-0.22	0	5.0
$p$	205/2	452/2	2.72	-0.46	0	9.9
$\Sigma$	308/2	684/2	4.10	-0.68	0	14.9
<b>Sistem B (horizontalni potisak <math>H=H_p, H_g=0</math>)</b>						
$g$	509/2	0	3.94	-3.94	18	44.8
$p$	205/2	452/2	2.72	-0.46	0	9.9
$\Sigma$	714/2	452/2	6.66	-4.40	18	54.7

Tabela 5.3.2 Dinamički modeli mosta za diskretni i ekvivalentni sistem

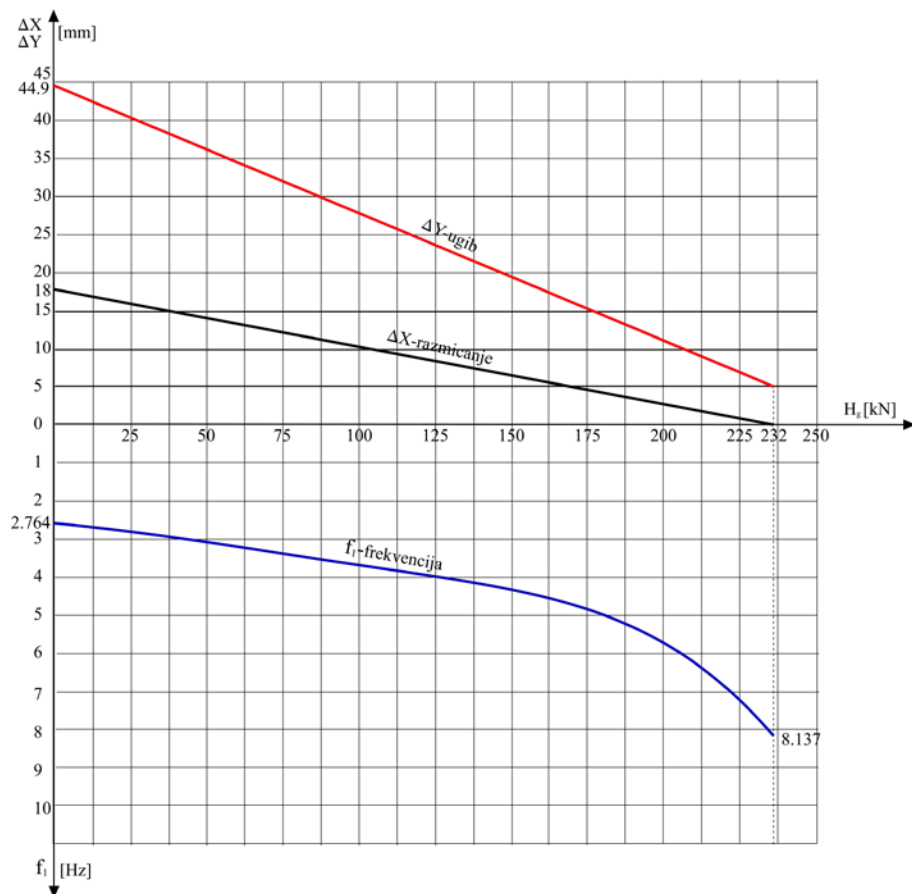
Dinamički model mosta				
diskretni sistem		ekvivalentan kontinualni sistem		
važi za sve tonove (7)		važi za osnovni ton (1)		
				
	sistem A ( $H_g + H_p$ )	sistem B ( $H_g = 0$ )	za sistem A	za sistem B
E	11 MPa	11 MPa	11 MPa	11 MPa
$I_z$	$I_z(x)$	$I_z(x)$	$0.625 \text{ m}^4$	$0.0675 \text{ m}^4$
$\mu$	$\mu(x)$	$\mu(x)$	$0.656 \text{ t/m}$	$0.656 \text{ t/m}$
$f_0$	8.1367 Hz	2.674 Hz	8.1367 Hz	2.674 Hz
$f_2$	10.030 Hz	10.030 Hz	-	10.70 Hz
$f_3$	24.038 Hz	19.417 Hz	-	24.07 Hz
$H_g$	232 kN	0.0	-	-
$R_{vg}$	82 kN	82 kN	82 kN	82 kN
$\Delta_{gx}$	0.0	18.0 mm	-	-
$\Delta_{gy}$	5.0 mm	44.9 mm	4.853 mm	44.937 mm

Treba naglasiti da lučni sistemi imaju svoje specifičnosti u pogledu vibracija. U odnosu na gredne sisteme, kod lučnih linijskih sistema u ravni, diskretizovanih konačnim brojem koncentrisanih masa, svaka masa ima dva stepena slobode. Pri tome, zanemaren je efekat inercije rotacije poprečnih preseka luka, odnosno koncentrisanih masa. Kod veoma plitkih lukova, za analizu vibracija vertikalnog pravca, može se primeniti metodologija za gredene sisteme, izložena u poglavlju 4.

Tabela 5.3.3 Prirodne frekvencije slobodnih vibracija gornjeg stroja mosta

ton		1	2	3	4	5	6	7	pravac slobodnih vibracija
<b>Sistem A (horizontalni potisak <math>H = H_g</math>)</b>									
$f_y$	Hz	8.14	10.03	24.04	29.15	38.61	46.06	50.25	vertikalni Y
$f_z$	Hz	13.11	23.15	44.44	62.50	74.63	85.47	94.34	horizontalni Z
$f_x$	Hz	22.98	57.80	71.43	72.99	108.67	121.95	131.58	horizontalni X
<b>Sistem B (horizontalni potisak <math>H_g = 0</math>)</b>									
$f_y$	Hz	2.67	10.03	19.42	29.15	38.61	46.08	50.0	vertikalni Y
$f_z$	Hz	7.84	20.32	43.29	62.11	74.63	85.47	94.34	horizontalni Z
$f_x$	Hz	8.71	51.28	64.52	69.93	100.00	101.01	123.456	horizontalni X

Za tretman linijskog sistema u ravni, luk je diskretizovan sa 9, od čega 7 aktivnih masa (sl.5.3.6), a za tretman prostornog linijskog sistema (sl.5.3.7), sa  $2 \cdot 7 = 14$  aktivnih koncentrisanih masa, lociranih na glavnim nosačima, u čvorovima na vezi sa poprečnim nosačima.



Slika 5.3.8 Zavisnost ugiba temena nosača ( $\Delta Y$ ), razmicanja oslonaca ( $\Delta X$ ) i osnovne prirodne frekvencije ( $f_0$ ) u funkciji horizontalnog potiska od stalnog opterećenja ( $H_g$ )

### Sistem A (horizontalni potisak $H=H_g+H_p$ )

Vektor masa

$$m = \{1, 2.1, 2.1, 2.0, 2.0, 2.0, 2.1, 2.1, 1\}$$

Svojstveni vektori za prva tri tona vertikalnih vibracija:

$$V_1 = \{0.0, 0.06763, 0.25092, 0.49817, 0.60710, 0.49817, 0.25092, 0.06763, 0.0\}$$

$$V_2 = \{0.0, 0.37596, 0.49216, 0.36005, 0.0, 0.36005, 0.49216, 0.37596, 0.0\}$$

$$V_3 = \{0.0, -0.50826, -0.40914, 0.05969, 0.37606, 0.05969, -0.40914, -0.50826, 0.0\}$$

Svojstvene frekvencije date su u tabeli 5.3.3.



Dopušteno ubrzanje perema Eurocode 1 [26] je manja vrednost od  $0.7 \text{ m/s}^2$  i  $a_{dop} = 0.5\sqrt{f_0} = 1.43 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , dok je prema Eurocode 5 [28] dopušteno ubrzanje samo  $0.7 \text{ m/s}^2$ .

Logaritamski dekrement je  $\delta=0.02$  (za drvene mostove od lepljenog lameliranog drveta), odnosno relativno prigušenje osnovnog tona  $\xi_0=0.3\%$  od  $\xi_{kr}=1$ .

### Sistem B (horizontalni potisak $H_g=0$ )

Vektor masa

$$m = \{1, 2.1, 2.1, 2.0, 2.0, 2.0, 2.1, 2.1, 1\}$$

Svojtstveni vektori za prva tri tona vertikalnih vibracija:

$$V_1 = \{0.0, 0.18933, 0.34915, 0.46365, 0.50452, 0.46365, 0.34915, 0.18933, 0.0\}$$

$$V_2 = \{0.0, 0.35796, 0.49217, 0.36005, 0.0, -0.36005, -0.49217, -0.35796, 0.0\}$$

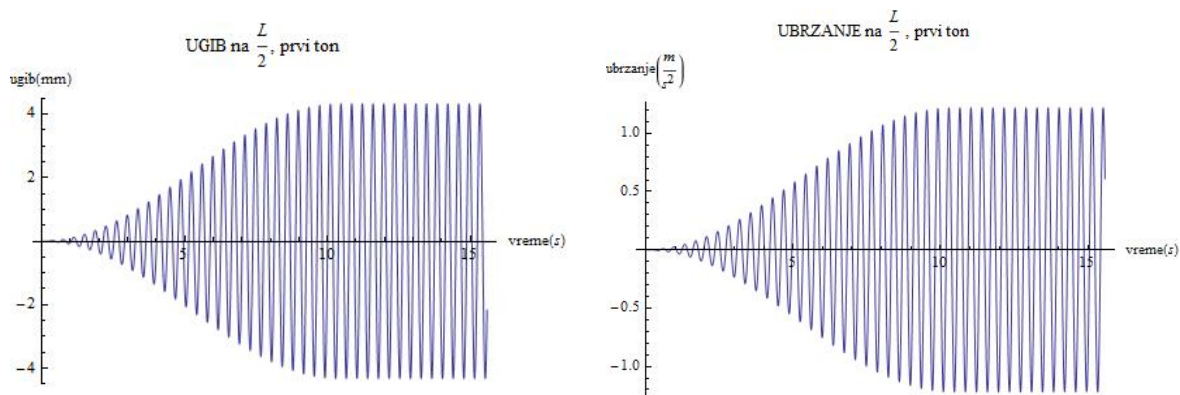
$$V_3 = \{0.0, -0.47010, -0.33754, 0.19362, 0.50513, 0.19362, -0.33754, -0.47010, 0.0\}$$

Svojtstvene frekvencije date su u tabeli 5.3.3.

Dopušteno ubrzanje perema Eurocode 1 [26] je manja vrednost od  $0.7 \text{ m/s}^2$  i  $a_{dop} = 0.5\sqrt{f_0} = 0.82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , dok je prema Eurocode 5 [28] dopušteno ubrzanje samo  $0.7 \text{ m/s}^2$ .

Logaritamski dekrement je  $\delta=0.02$ , odnosno relativno prigušenje osnovnog tona  $\xi_0=0.3\%$  od  $\xi_{kr}=1$ .

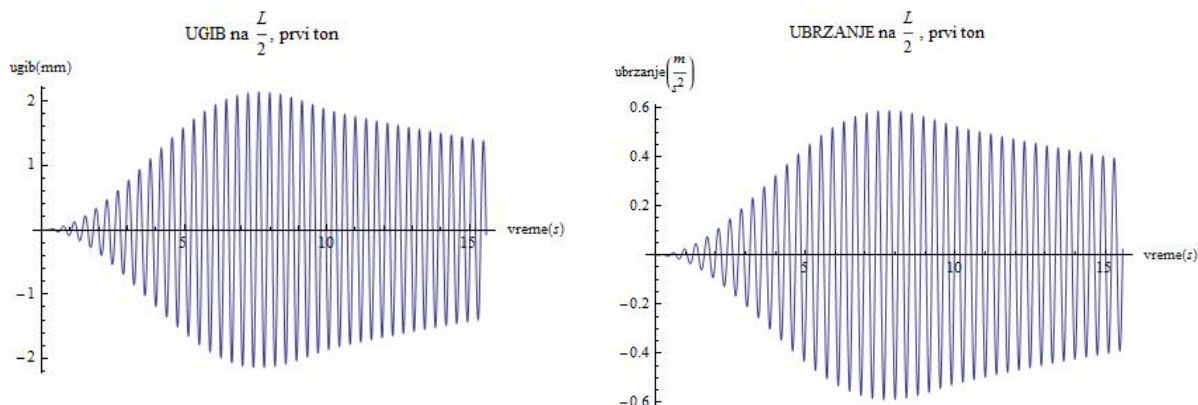
Rezultati sprovedene analize za sistem B prikazani su oscilogramima (sl.5.3.9 do sl.5.3.17) za karakteristične slučajeve pobuđenja mosta.



Slika 5.3.9 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled delovanja sile  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$ , bez prigušenja

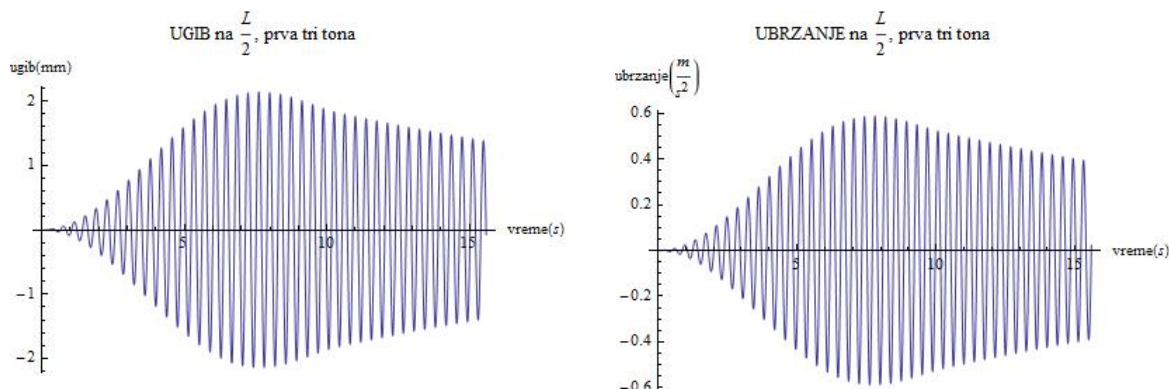
Na slici 5.3.9 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja na polovini raspona mosta, za slučaj vibracija bez prigušenja, indukovanih silom  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$  (model opterećenja od jednog pešaka, videti poglavlje 2), pri brzini kretanja  $c=0.9f_0=2.4 \text{ m/s}$ . Vidi se da su maksimalne vrednosti ugiba i ubrzanja uvećane u odnosu na slučaj sa prigušenjem (sl.5.3.10), kada je logaritamski dekrement  $\delta=0.02$ , odnosno, relativno prigušenje osnovnog tona  $\xi_0=0.3\%$  od

kritičnog ( $\xi_{kr}=1$ ). To je dokaz da se uticaj prigušenja ne sme zanemarivati, čak i u slučaju kada je ono veoma malo ( $\xi \ll 1$ ), naročito pri rezonantnim vibracijama.



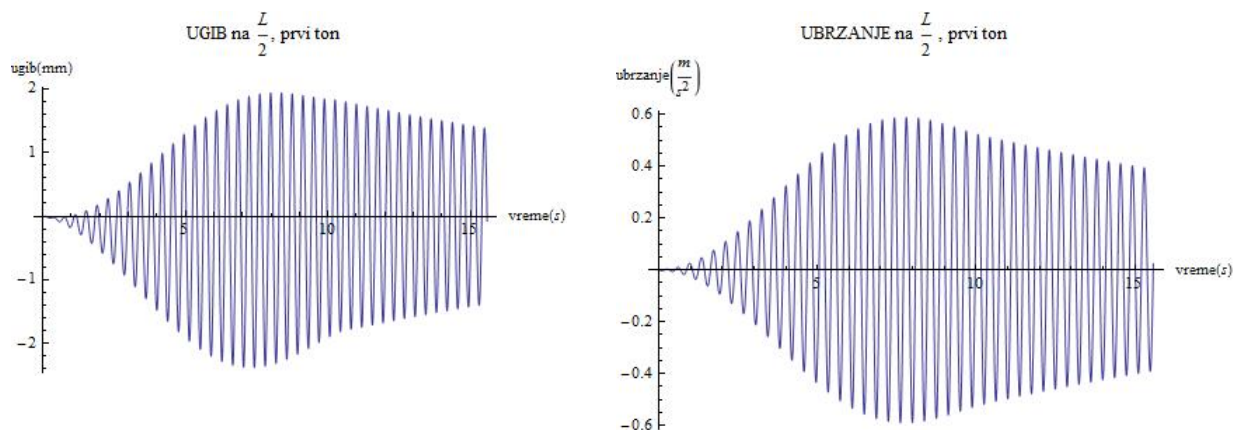
Slika 5.3.10 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled delovanja sile  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$

Na slici 5.3.10 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja za delovanje usled prelaženja jednog pešaka, čije se delovanje simulira pokretnom harmonijskom silom  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$ , pri rezonantnim vibracijama  $\Omega = \omega_0 = 2\pi f_0$ . Prigušenje vibracija uvedeno je preko empirijskog logaritamskog dekrementa  $\delta = 0.02$ , za drvene mostove. Maksimalni ugib i ubrzanje su na polovini raspona mosta i iznose 2.132 mm, a maksimalno ubrzanje  $0.59 \text{ m/s}^2$ , što se postiže za vreme od 7.8 s, kada se sila nalazi na 18.77 m, odnosno kad pređe polovinu raspona mosta za 6.27 m. Ovo se smatra posledicom relativno velike brzine kretanja sile ( $c = 0.9f_0 = 2.4 \text{ m/s}$ ).

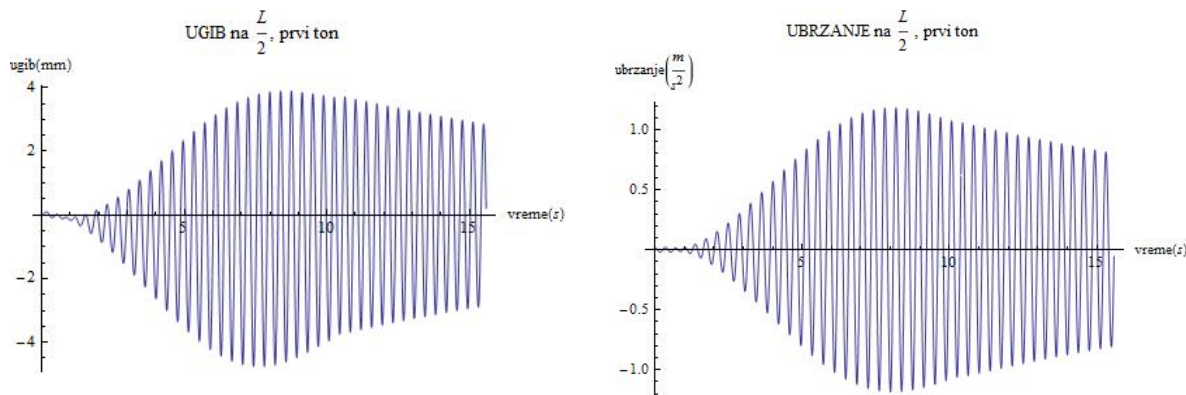


Slika 5.3.11 Oscilogrami ugiba i ubrzanja za superponirana prva tri tona, usled delovanja harmonijske sile  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$

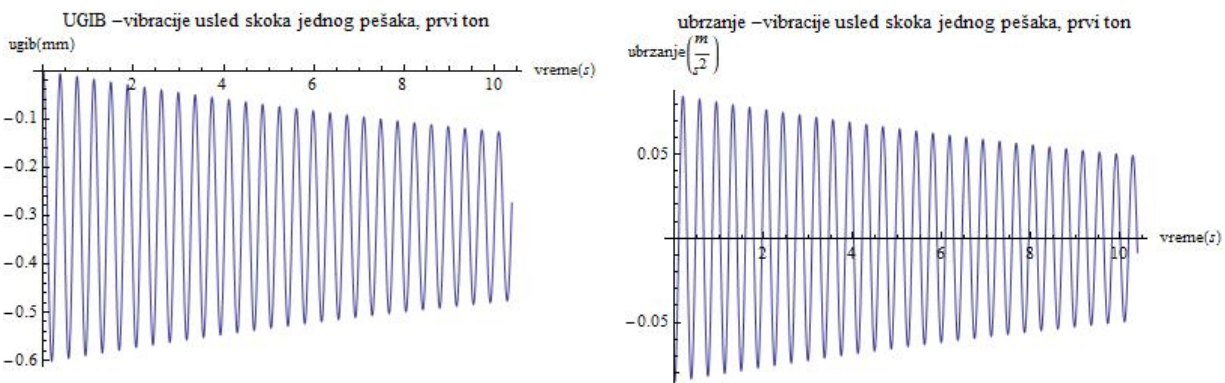
Na slici 5.3.11 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja na polovini raspona mosta, kada je u sintetizovanju vibracija po tonovima, sumirano prva tri tona. Rezultati, prema ovim oscilogramima, su gotovo identični sa rezultatima kada se analiza sprovodi samo za osnovni ton (sl.5.3.10). To pokazuje da je doprinos viših tonova zanemarljiv za kvalitativnu analizu vibracija. Iz tih razloga važeći standardi i daju preporuke za proračun približnim metodama ubrzanja pešačkih mostova samo za osnovni ton, ukoliko se ne sprovodi detaljnija dinamička analiza.

Slika 5.3.12 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled kretanja sile  $P(t) = 0.7 + 0.18 \sin \Omega t$ 

Oscilogrami sa slike 5.3.12 pokazuju da se ubrzanje ne razlikuje od ubrzanja kada se u analizi izostavlja konstantni deo sile  $P(t)$  (sl.5.3.10), ali da su pri tome maksimalni ugibi nešto veći, što je razumljivo zbog doprinosa statičkog ugiba od težine pešaka.

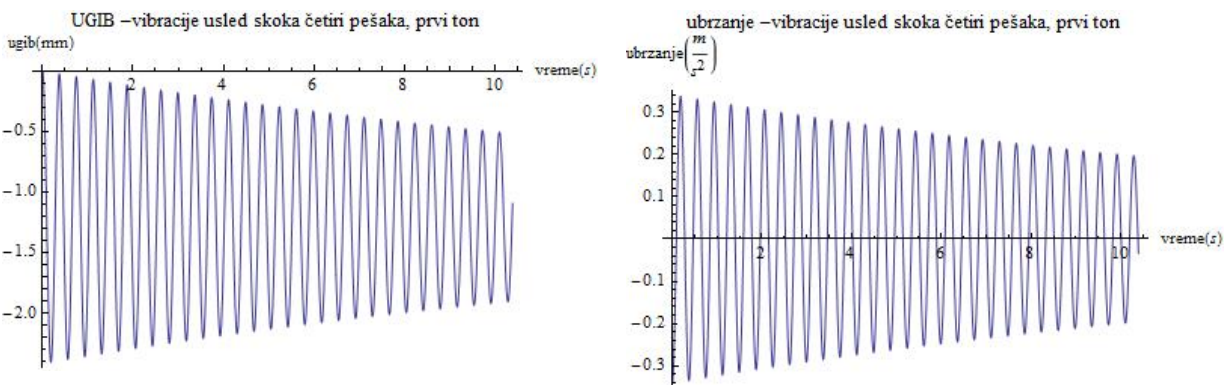
Slika 5.3.13 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled kretanja sile  $P(t) = 0.7 + 0.18 \sin \Omega t$ 

Na slici 5.3.13 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja na polovini raspona mosta, pri sinhronom i sinfaznom kretanju dva pešaka paralelno podužnoj osi mosta, na rastojanju 1.5 m. Pri tome, maksimalni ugib je 4.75 mm, a maksimalno ubrzanje je  $1.18 \text{ m/s}^2$ , što se ostvaruje za vreme od 7.8 s, kada se sila nalazi na 6.27 m od polovine raspona, u smeru kretanja. Ovaj režim kretanja pešaka, gde je brzina kretanja  $c = 0.9f_0 = 2.40 \text{ m/s}$  i  $\Omega = 2\pi f_0$ , izaziva ubrzanje na polovini rasponske konstrukcije nešto veće od dopuštenog.



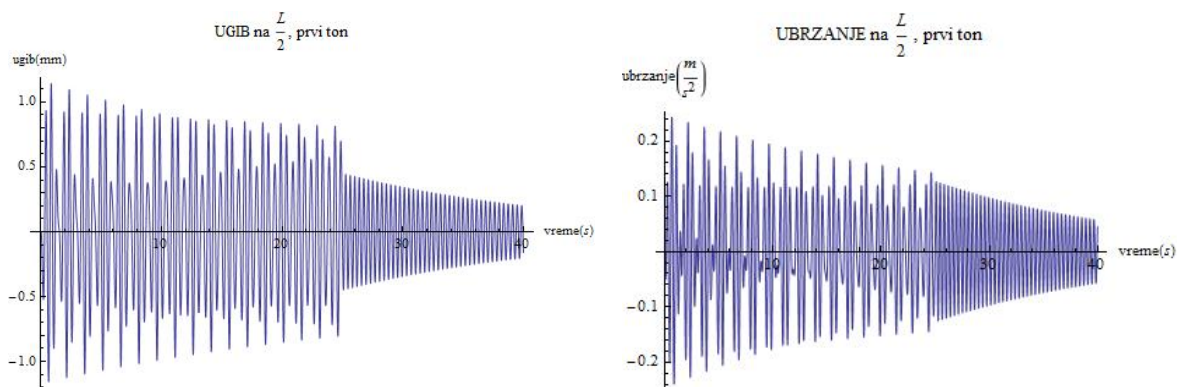
Slika 5.3.14 Oscilogrami ugiba i ubrzanja na  $L/2$ , usled skoka jednog pešaka  $P=0.7$  kN

Oscilogrami na slici 5.3.14 se odnose na skok jednog pešaka, mase 70 kg, na polovini raspona mosta. Pretpostavljeni su nulti početni uslovi, odnosno da je sila naglo aplicirana, pošto je statički ugib usled datog opterećenja samo 0.3 mm. Maksimalni ugib iznosi 0.6 mm, a maksimalno ubrzanje  $0.084 \text{ m/s}^2$ , što je mnogo manje od dopuštenog. Maksimalno dopušteno ubrzanje konstrukcije postiglo bi se pri istovremenom skoku osam pešaka, ukupne mase 560 kg.



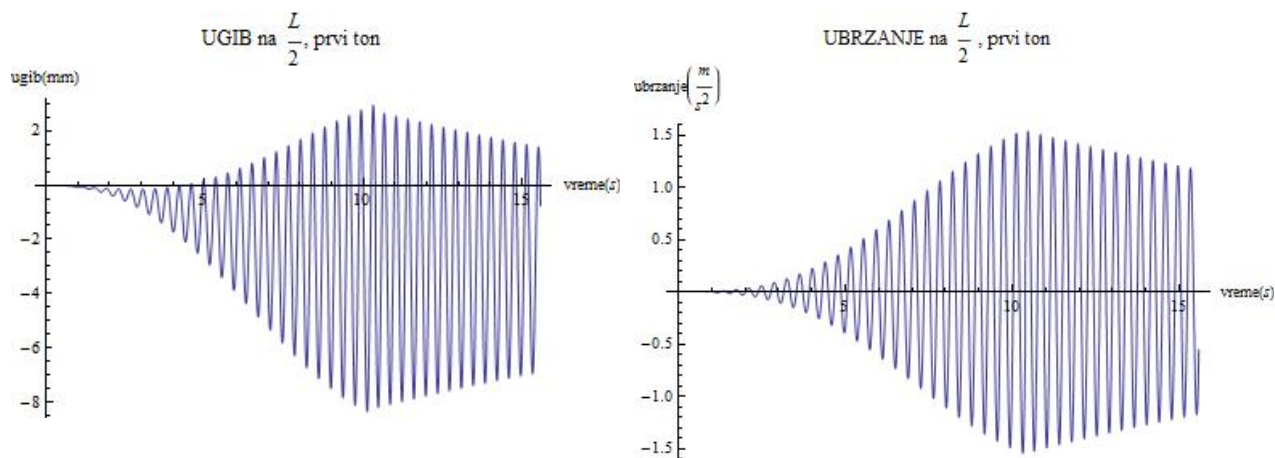
Slika 5.3.15 Oscilogrami ugiba i ubrzanja na  $L/2$ , usled skoka četiri pešaka  $P=4 \cdot 0.7$  kN

Oscilogrami na slici 5.3.15 se odnose na istovremeni skok četiri pešaka, prosečne mase od po 70 kg, na polovini raspona mosta. Pretpostavljeni su nulti početni uslovi, odnosno da je sila naglo aplicirana, na nedeformisanom sistemu. Maksimalni ugib iznosi 2.4 mm, a maksimalno ubrzanje  $0.336 \text{ m/s}^2$ , što je četiri puta veće od ugiba i ubrzanja usled skoka jednog pešaka. Ovim je pokazana linearnost problema u odnosu na intenzitet dinamički nanete sile.



Slika 5.3.16 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled namernog skakanja jednog pešaka na sredini mosta, simuliranog silom  $P(t) = 0.7\sin\Omega t$

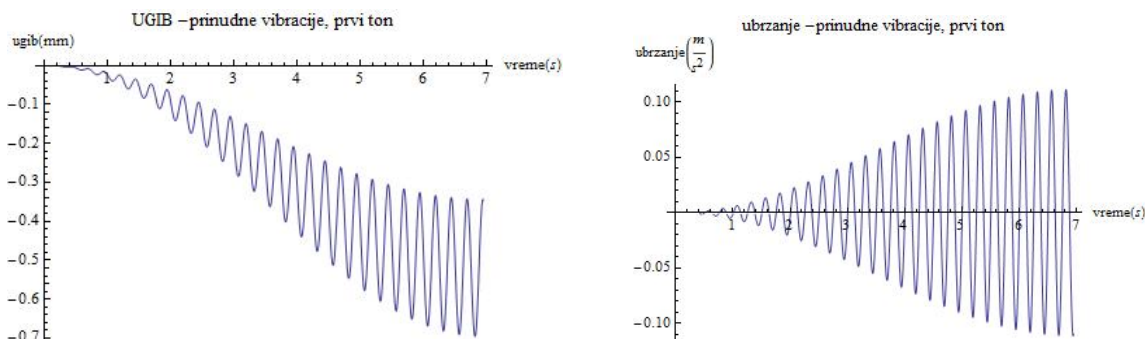
Na slici 5.3.16 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja na polovini raspona, kada jedan pešaka na sredini mosta namerno skokovima izaziva vibracije, a čije delovanje simuliramo harmonijskom silom u trajanju od 25 s, nakon čega nastaju slobodne vibracije. To je tzv. vandalsko ponašanje koje je moguće, samo je pitanje koliko je realno da se skakanjem u mestu postige izjednačavanje frekvencija pobude sa osnovnom frekvencijom mosta ( $f_p=f_0$ ). Oscilogram se odnosi na frekvenciju harmonijske sile  $\Omega=2\pi f_p$ , gde je  $f_p=2$  Hz (frekvenciju skoka pešaka). Sa oscilograma se vidi da je maksimalni ugib 1.15 mm, a maksimalno ubrzanje  $0.24 \text{ m/s}^2$ . Maksimalno dopušteno ubrzanje konstrukcije postiglo bi se tek pri sinhronom i sinfaznog skakanju tri pešaka, ukupne mase 210 kg.



Slika 5.3.17 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled nailaska kolone pešaka, modelirane jednakoraspodeljenim opterećenjem  $p(t) = 0.4 + 0.035\sin\Omega t$  [ $\text{kN/m}^2$ ]

Oscilogrami na slici 5.3.17 prikazuju ugibe i ubrzanja na sredini raspona mosta, pri rezonantnim vibracijama, usled kretanja kolone pešaka, čije delovanje simuliramo jednakoraspodeljenim opterećenjem, prema modelu opterećenja za kolonu pešaka, za prosečnih  $0.6 \text{ pešaka/m}^2$ , sa frekvencijom od  $\Omega=2\pi f_0$ . Maksimalni ugibi i ubrzanja se javljaju kada kolona pešaka stigne do kraja mosta i zaustavi se, posle čega nastaju slobodne vibracije. Tako je maksimalni ugib 8.4 mm

( $v_{\text{stat}}=2.7$  mm), a maksimalno ubrzanje  $1.55$  m/s<sup>2</sup>. Ugib je manji od 10 mm, što se smatra gornjom granicom prihvatljivosti, ali ubrzanje znatno premašuje granicu dopuštenog ( $a_{\text{dop}}=0.82$  m/s<sup>2</sup>). Ovakav režim kretanja je moguć, ali malo verovatan, jer podrazumeva veoma visok stepen sinhronizacije kretanja (trčanja) pešaka u koloni ( $k_v(f_0)=2.8$ ), i to sa frekvencijom hoda  $f_p=f_0$ , a pri brzini od  $c=0.9$   $f_0=2.4$  m/s.



Slika 5.3.18 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled nailaska kolone pešaka, modelirane jednakoraspodeljnim opterećenjem  $p(t)=0.7+0.18\sin 2\pi f_p t$

Na slici 5.3.18 prikazani su (za sistem A) oscilogrami ugiba i ubrzanja na sredini raspona mosta, pri vibracijama, usled kretanja kolone pešaka, čije delovanje simuliramo jednakoraspodeljenim opterećenjem  $p(t)=0.7+0.18\sin \Omega t$ , sa frekvencijom hoda  $f_p=4$  Hz i brzinom hoda (trčanja)  $c=0.9$   $f_p=3.6$  m/s. Maksimalni ugibi od 0.7 mm i maksimalno ubrzanje od  $0.11$  m/s<sup>2</sup>, javljaju se kada kolona pešaka stigne do kraja mosta i zaustavi se, posle čega nastaju slobodne vibracije. Ugibi i ubrzanja su u dopuštenim granicama.

Most sistema A je u potpunosti prihvatljiv sa aspekta graničnog stanja upotrebljivosti u pogledu vibracija, s obzirom da su mu osnovne frekvencija vertikalnog pravca  $f_{0v}=8.14$  Hz, horizontalnog bočnog Z pravca  $f_{0h}=13.11$  Hz, vrlo visoke i time premašuje nepoželjne opsege. Detaljnija dinamička analiza u tom slučaju nije neophodna.

Sprovedenom dinamičkom analizom prema poglavlju 4, tretirani most (sistema B) je prihvatljiv sa aspekta graničnog stanja upotrebljivosti u pogledu vibracija, izuzimajući ekstremne režime kretanja grupe pešaka i vandalska ponašanja (npr. skakanje u mestu), što najčešće predstavlja kratkotrajno delovanje koje ne utiče na granično stanje nosivosti mosta.

## 5.4 Spregnuti most

### 5.4.1 Kratak opis konstrukcija mosta

Idejno rešenje, Idejni i Glavni projekat pešačkog mosta preko reke Nišave u Nišu [33], urađeni su u Institutu GAF-a Niš. Most je izveden 2003. godine, a glavni i odgovorni projektant je Prof. dr Novak Spasojević [69], [70].



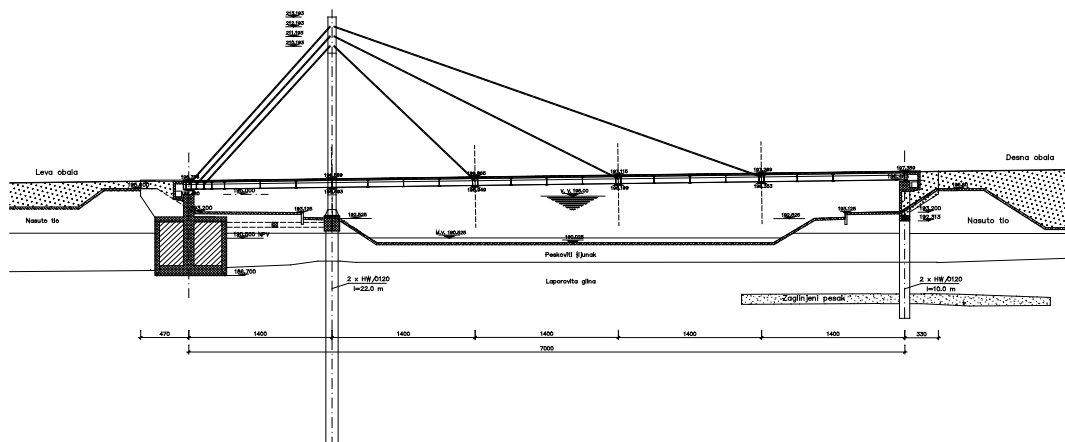
Slika 5.4.1 Pogled na most



Slika 5.4.2 Pogled na most sa nizvodne strane

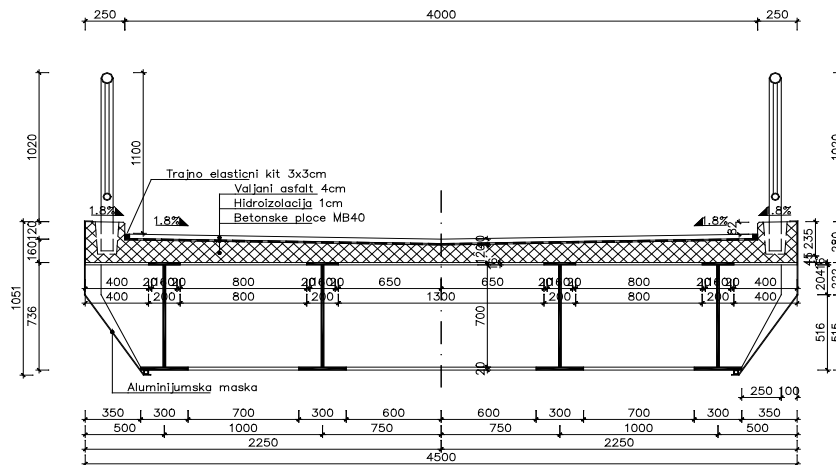
Most je projektovan, saglasno zadatim uslovima i usvojenoj koncepciji montažne gradnje gornjeg stroja, sa dva otvora, raspona  $14.00 + 56.00 = 70.00$  metara (sl.5.4.3). Ukupna dužina mosta, zajedno sa krilnim zidovima, iznosi 78 metara.

Gornji stroj mosta je koncipiran kao spregnuta konstrukcija (beton-čelik) sa kosim kablovima (zategama) i jednim pilonom postavljenim na inundaciji leve obale.



Slika 5.4.3 Dispozicija mosta – podužni presek [33]

Pored udovoljavanja funkcionalnim zahtevima, strogim uslovima vibracija kao i stabilnosti, naročito je insistirano na estetici mosta, odnosno njegovoj atraktivnosti, s obzirom da se radi o gradskom pešačkom mostu.



Slika 5.4.4 Poprečni presek mosta [33]

*Rasponska konstrukcija* je koncipirana sa četiri glavna čelična nosača, spregnuta sa kolovoznom pločom, prosečne debljine 14.0 cm. Svi *glavni nosači* su istog poprečnog preseka, konstantne visine  $h = 736$  mm, i dimenzija elemenata: donja flanša 20/300 mm, rebro 10/700 mm i gornja flanša 16/200 mm (sl.5.4.4). *Glavni nosači* su povezani poprečnim nosačima i to: glavnim poprečnim nosačima na 14 m, osim kod pilona i nad desnim obalnim stubom, i sekundarnim poprečnim nosačima između ovih, na razmaku od 3.5 m. *Glavni poprečni nosači* su sandučastog poprečnog preseka, dimenzija elemenata: donja flanša 20/700 mm, rebra 10/720 mm i gornja flanša 16/700 mm. Na krajevima glavnih poprečnih nosača, dužine 4.5 m, postavljena su kućišta za ankerovanje kosih kablova.

*Sekundarni poprečni nosači* su takođe konstantnog poprečnog preseka, dimenzija elemenata: donja flanša 16/200 mm, rebro 10/700 mm i gornja flanša 16/200 mm

Na delu levog obalnog stuba razmak poprečnih nasača je progušćen i na njihovim krajevima su postavljena zajednička kućišta za ankerovanja baterije kablova.

Rasponska konstrukcija na levom obalnom stubu ima *nepokretne oslonce* (nepokretna čelična ležišta za prijem negativne vertikalne reakcije), dok se na pilon i desni obalni stub oslanja preko *elastomernih ležišta* pokretnih u pravcu ose mosta.

*Pilon*, koji se ovde tretira kao konstrukcijski element superstrukture mosta, postavljen je na levoj inundaciji na 14.0 m od levog obalnog stuba. Pilon je ukupne visine 20.443 m (sl 5.4.5).





Slika 5.4.5 Pogled na pilon mosta sa uzvodne strane

Zatege su izvedu od kosih kablova sistema prednaprezanja SPB SUPER, formiranih od 12 paralelnih sedmožilnih užadi nominalnog prečnika 16 mm.

U rasponsku konstrukciju kablovi se sidre pomoću pokretnih (podešavajućih) kotvi, a u pilon fiksnim kotvama.

*Kolovozna ploča (MB 40)* je promenljive debljine: 12.0 cm po osi mosta i 16.0 cm na krajevima. Sprezanje betonske ploče i čeličnih nosača izvršeno je vitkim moždanicima tipa čep sa glavom. Na gazištu širine 4.0 m, preko hidroizolacije, postavljen je valjani asfaltbeton. Donji stroj mosta čine dva obalna stuba i temelj pilona.

*Fundiranje pilona* je izvršeno na dva HW šipa  $\phi$  1200 mm i dužine 22.0 m, povezana u vrhu naglavnom gredom.

*Desni obalni stub* je koncipiran kao olakšana armiranobetonska konstrukcija, a fundiranje je izvršeno na dva HW šipa, prečnika  $\phi$ 1200 mm i dužine po 10.0 m.

*Levi obalni stub* je koncipiran kao i desni, ali je zbog negativnih vertikalnih reakcija gornjeg stroja fundiran na masivnom temelju.

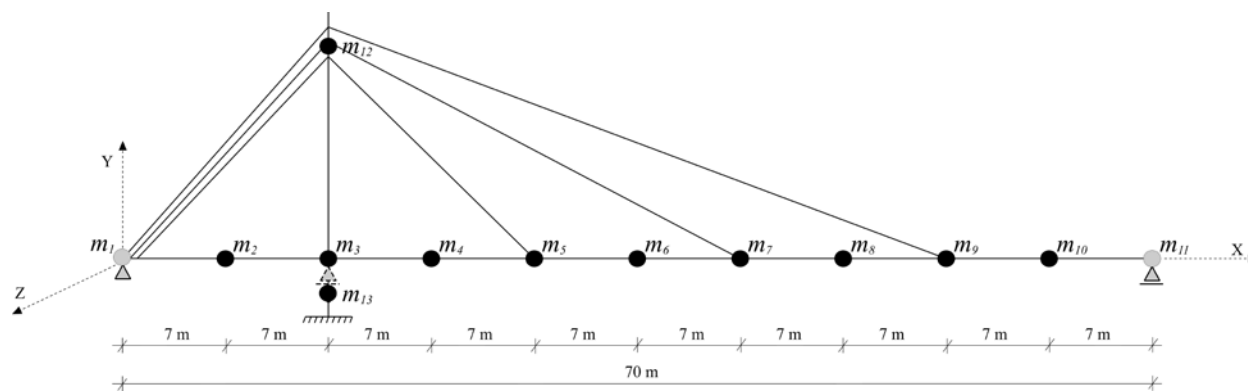
Za analizu vibracija, inetarkcija most-tlo nije od značaja[33].

### **5.4.2 Analiza vibracija**

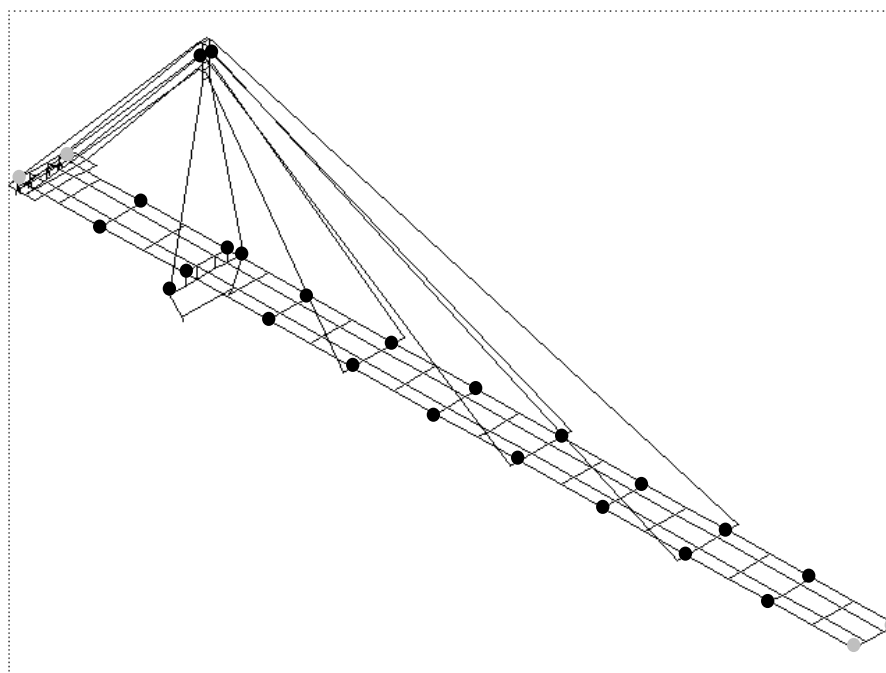
Analizu vibracija sprovodimo prema rešenjima iz poglavlja 4.1, za dinamički model gornjeg stroja mosta prema slikama 5.4.6, 5.4.7, 5.4.8 i 5.4.9 a za vibracije idukovane kretanjem pešaka, čije se delovanje modelira kao harmonijska koncentrisana sila, odnosno jednakoraspodeljeno harmonijsko opterećenje.

Za tretman linijskog sistema u ravni (sl.5.4.6), rasponska konstrukcija je diskretizovana sa 11, od čega 9 aktivnih masa, a pilon sa dve koncentrisane mase. Za tretman prostornog linijskog

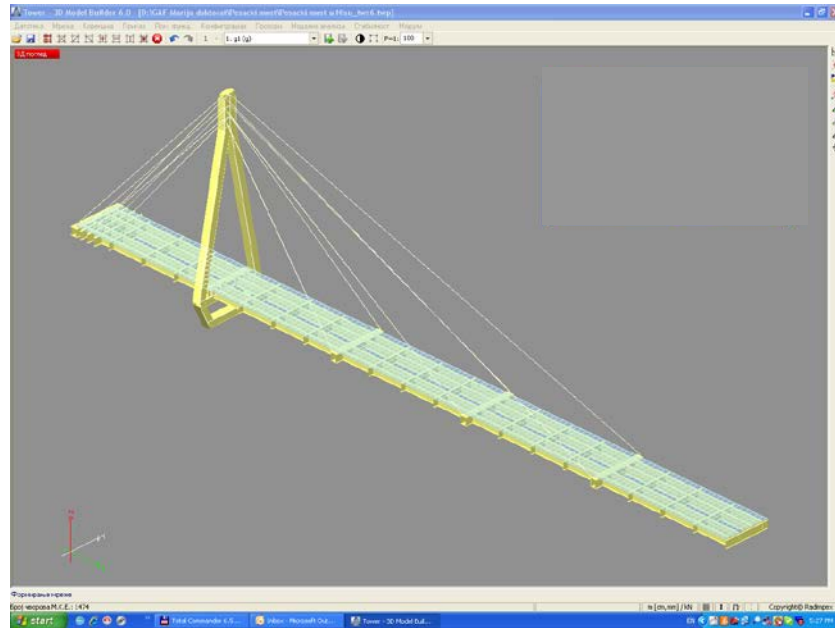
sistema, rasponska konstrukcija je diskretizovana sa  $2 \cdot 9 = 18$  aktivnih koncentrisanih masa, a pilon sa 4, dve u vrhu pilona ( $m=5$  t) i dve ispod rasponske konstrukcije ( $m=4.1$ t).



Slika 5.4.6 Dinamički model gornjeg stroja mosta za tretmen linijskog sistema u ravni



Slika 5.4.7 Dinamički model gornjeg stroja mosta za tretman prostornog linijskog sistema



Slika 5.4.8 Gornji stroj mosta modeliran konačnim elementima

Tabela 5.4.1 Prirodne frekvencije slobodnih vibracija gornjeg stroja mosta za  $t=t_0$  (28 dana)

ton		1	2	3	4	5	6	7	8	9	pravac slobodnih vibracija
$f_y$	Hz	1.396	3.32	5.77	9.15	11.68	14.71	19.38	23.36	32.26	vertikalni Y
$f_z$	Hz	3.40	7.06	10.93	19.23	26.04	35.33	43.86	53.19	60.24	horizontalni Z
$f_x$	Hz	10.92	13.77	32.05	33.11	37.31	38.91	41.15	45.45	56.50	horizontalni X

Tabela 5.4.2 Prirodne frekvencije slobodnih vertikalnih vibracija gornjeg stroja mosta za  $t=t_n$

ton		1	2	3	4	5	6	7	8	9	pravac slobodnih vibracija
$f_y$	Hz	1.35	3.18	5.44	8.52	10.92	13.72	18.08	21.74	30.30	vertikalni Y

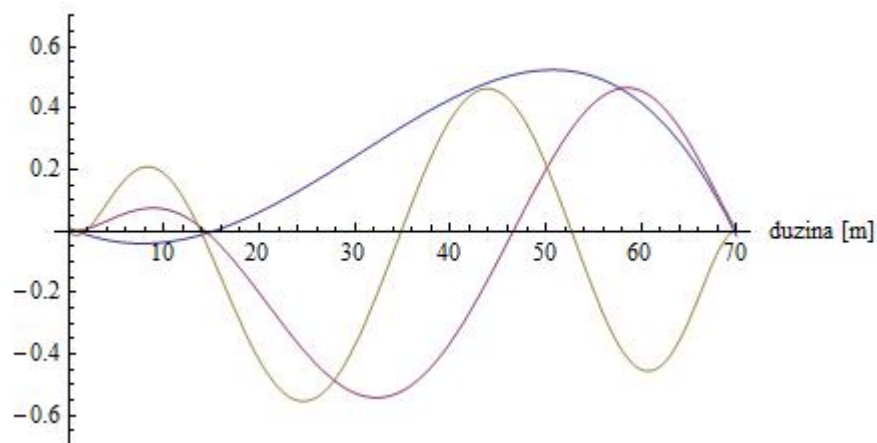
Svojstveni vektori za prva tri tona vertikalnih vibracija:

$$V_1 = \{-0.02178, 0.00083, 0.06595, 0.17898, 0.33405, 0.47533, 0.54859, 0.49010, 0.29052, 0.00083, 0.00752\}$$

$$V_2 = \{0.07545, -0.00138, -0.24739, -0.46928, -0.52812, -0.27529, 0.15310, 0.44171, 0.37357, -0.00137, -0.00886\}$$

$$V_3 = \{0.19239, -0.00196, -0.47450, -0.48367, 0.02098, 0.44377, 0.27012, -0.25432, -0.41089, -0.00195, -0.00681\}$$

Aproksimacija prva tri tona



Slika 5.4.9 Prva tri tona oscilovanja

Vektor masa

$$m = \{36.8, 20.2, 20.2, 20.2, 23.4, 20.2, 23.4, 20.2, 23.4, 20.2, 11.0\}$$

Svojtvene frekvencije date su u tabeli 5.4.1.

Logaritamski dekrement je  $\delta=0.04$  (za gredne spregnute mostove, čelik-beton), odnosno relativno prigušenje osnovnog tona  $\xi_0=0.6\%$  od  $\xi_{kr}=1$ .

$\mu=3.40$  t/m (prosečno)

$f_0=1.396$  Hz

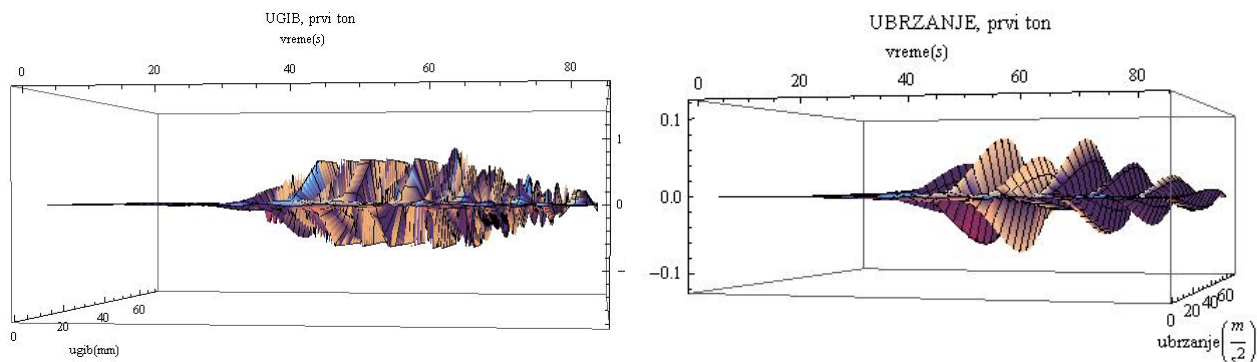
$\xi_0=\delta/(2\pi)=0.6\% \xi_{kr}$

$\beta=2\pi \xi_0 f_0$

Dopušteno ubrzanje iznosi:

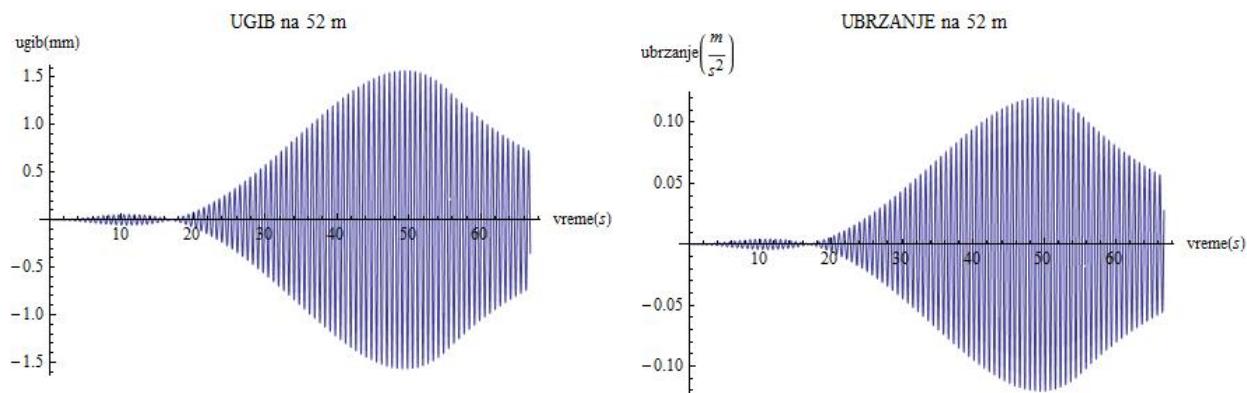
$$a_{dop} = 0.5\sqrt{f_0} = 0.59 \frac{m}{s^2}$$

### 5.4.2.1 Opterećenje od pešaka



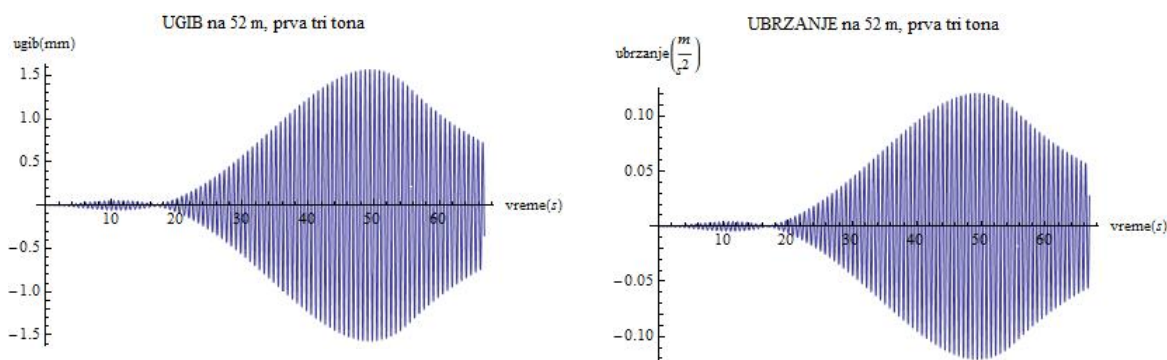
Slika 5.4.9 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled delovanja sile  $P(t) = 0.18\sin(2\pi f_0 t)$

Na slici 5.4.9 prikazani su trodimenzionalni oscilogrami ugiba i ubrzanja duž raspona mosta, za slučaj vertikalnih vibracija sa prigušenjem, indukovanih silom  $P(t) = 0.18\sin(2\pi f_0 t)$ . Pri rezonantnim vibracijama, kada je frekvencija hoda  $f_p = f_0 = 1.396$  Hz, a brzina kretanja  $c = 0.9f_p = 1.2564$  m/s, maksimalni ugib i ubrzanje nastaju u preseku  $x = 52$  m, a u vremenu  $t = 50$  s, kada se sila nalazi na  $x = c \cdot t = 62.82$  m. Maksimalni ugib iznosi 1.58 mm, a ubrzanje  $0.121$  m/s<sup>2</sup>.



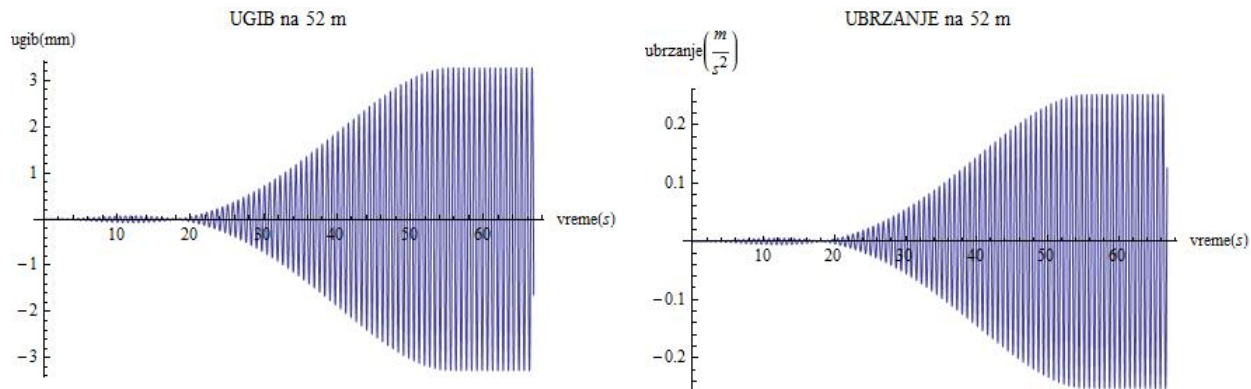
Slika 5.4.10 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled delovanja sile  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$

Na slici 5.4.10 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja u kritičnom preseku  $x = 52$  m, za slučaj vertikalnih vibracija usled istog delovanja kao za oscilogram na sl.5.4.9. Maksimalni ugib iznosi 1.58 mm, a ubrzanje  $0.121$  m/s<sup>2</sup>, što su postiže u vremenu od 50 s.



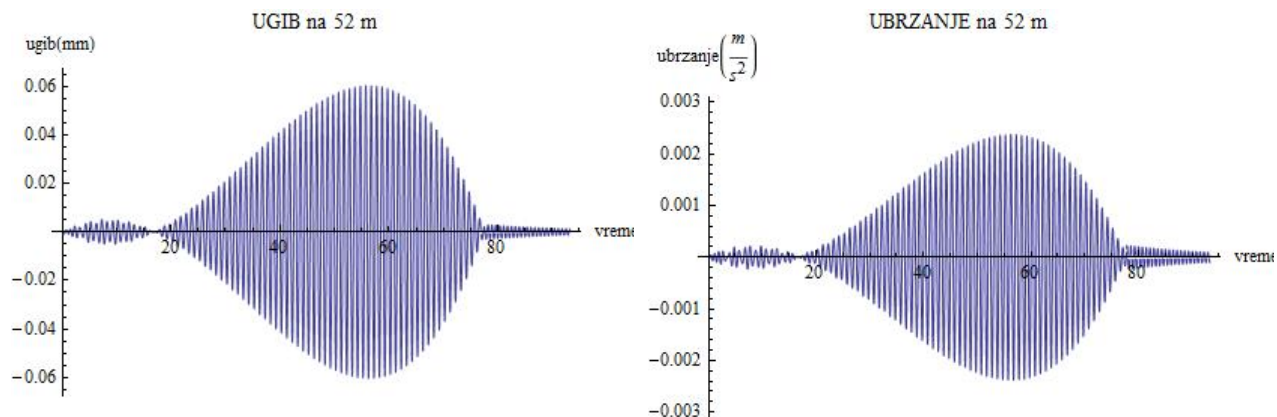
Slika 5.4.11 Oscilogrami ugiba i ubrzanja za superponirana prva tri tona, usled delovanja harmonijske sile  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$

Na slici 5.4.11 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja u kritičnom preseku  $x = 52$  m, za slučaj vertikalnih vibracija usled istog delovanja kao za oscilogram na sl.5.4.9, odnosno sl.5.4.10, pri čemu su sumirane vibracije za prva tri tona. Rezultati, prema ovim oscilogramima, su gotovo identični sa rezultatima kada se analiza sprovodi samo za osnovni ton (sl.5.4.10).



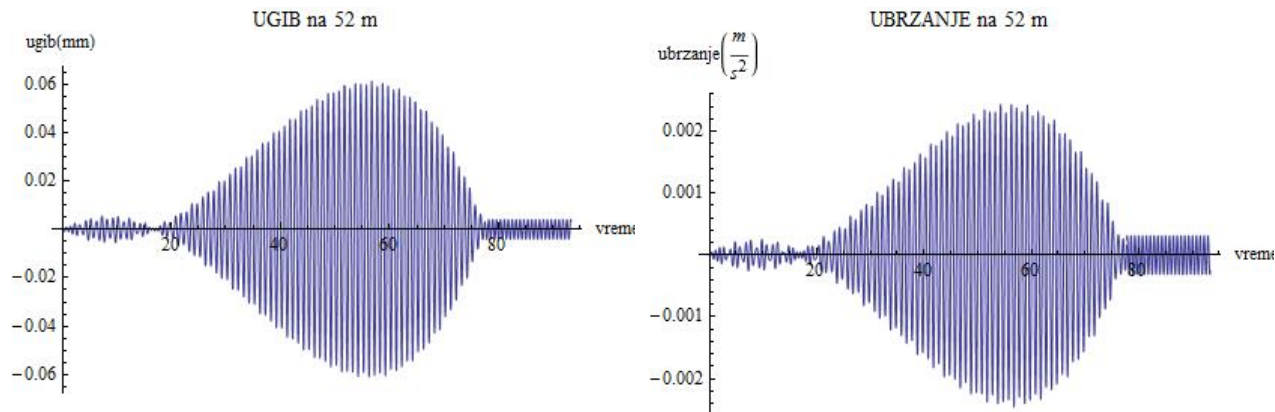
Slika 5.4.12 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled usled delovanja harmonijske sile  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$ , bez prigušenja

Na slici 5.4.12 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja u kritičnom preseku  $x=52$  m, za slučaj vertikalnih vibracija usled istog delovanja kao za oscilogram na sl.5.4.9, bez prigušenja. Maksimalni ugibi ubrzanja su uvceni u odnosu na isti slučaj bez prigušenja, što ukazuje da se uticaj prigušenja ne treba zanemariti, čak i kada je ono veoma malo, pogotovu pri rezonantnim vibracijama.



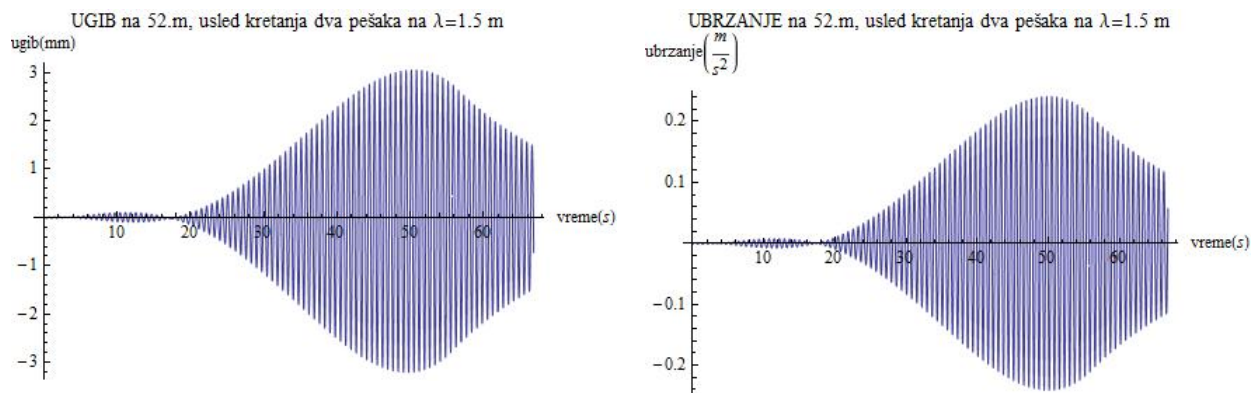
Slika 5.4.13 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled kretanja sile  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$ , pri frekvenciji hoda  $f_p=1$  Hz,  $\Omega=2\pi f_p$

Na slici 5.4.13 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja u preseku  $x=52$  m, za slučaj vertikalnih vibracija sa prigušenjem, indukovanih silom  $P(t) = 0.18\sin(2\pi f_0 t)$ . Pri vibracijama, kada je frekvencija hoda  $f_p = 1$  Hz, a brzina kretanja  $c=0.9f_p=0.9$  m/s, maksimalni ugib i ubrzanje nastaju u preseku  $x=52$  m, kada se sila nalazi na  $x=c\cdot t=56$  m. Maksimalni ugib iznosi 0.06 mm, a ubrzanje  $0.024$  m/s<sup>2</sup>.



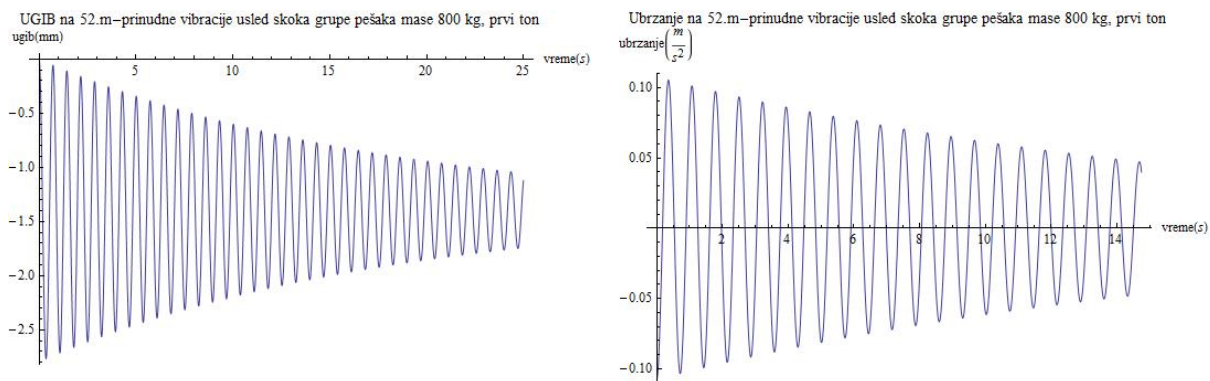
Slika 5.4.14 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled kretanja sile  $P(t) = 0.18\sin\Omega t$ , pri frekvenciji hoda  $f_p = 1$  Hz,  $\Omega = 2\pi f_p$ , bez prigušenja

Na slici 5.4.14 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja u preseku  $x=52$  m, za slučaj vertikalnih vibracija bez prigušenja, indukovanih silom  $P(t) = 0.18\sin(2\pi f_0 t)$ . Pri vibracijama, kada je frekvencija hoda  $f_p = 1$  Hz, a brzina kretanja  $c = 0.9f_p = 0.9$  m/s, maksimalni ugib i ubrzanje nastaju u preseku  $x=52$  m, kada se sila nalazi na  $x=c \cdot t = 56$  m. Maksimalni ugib iznosi 0.061 mm, a ubrzanje  $0.025$  m/s<sup>2</sup>. Uticaj prigušenja kod nerezonantnih vibracija, za razliku od rezonantnih (sl.5.4.12 i sl.5.4.13), je zanemarljiv.



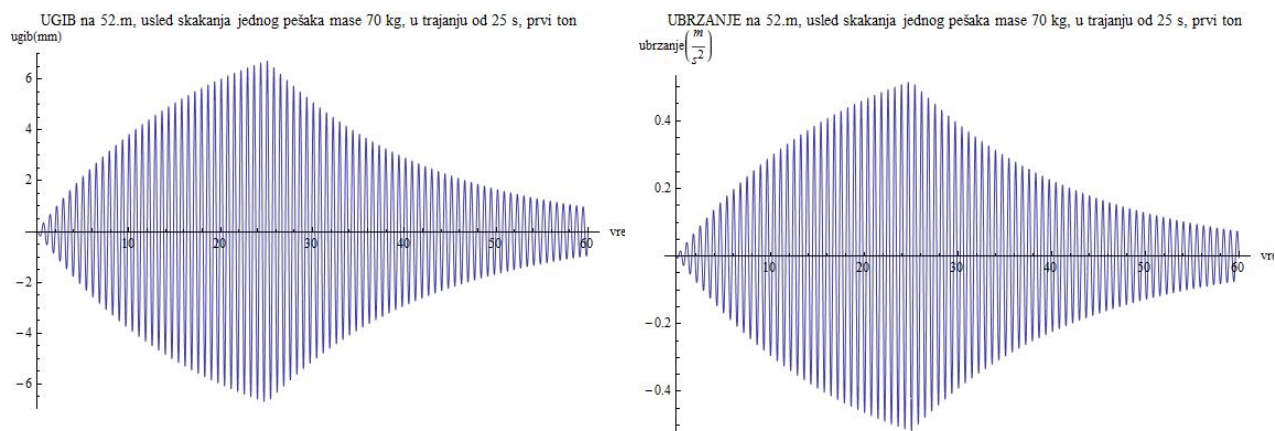
Slika 5.4.15 Oscilogrami ugiba i ubrzanja na 52.m, usled kretanja dva pešaka na razmaku  $\lambda = 1.5$  m,  $P_1 = P_2 = 0.7 + 0.18\sin(2\pi f_0 t)$

Oscilogrami na slici 5.3.15 se odnose na simultano i sinhrono kretanje dva pešaka ( prosečne mase od po 70kg), brzinom  $c = 0.9f_0 = 1.2564$  m/s, čije delovanje je simulirano modelom opterećenja DLM1, uz gravitaciono delovanje mase pešaka, za slučaj vertikalnih rezonantnih vibracija. Maksimalni ugib iznosi 3.22 mm, a ubrzanje  $0.24$  m/s<sup>2</sup>.



Slika 5.4.16 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled naglog skoka grupe pešaka mase 800kg

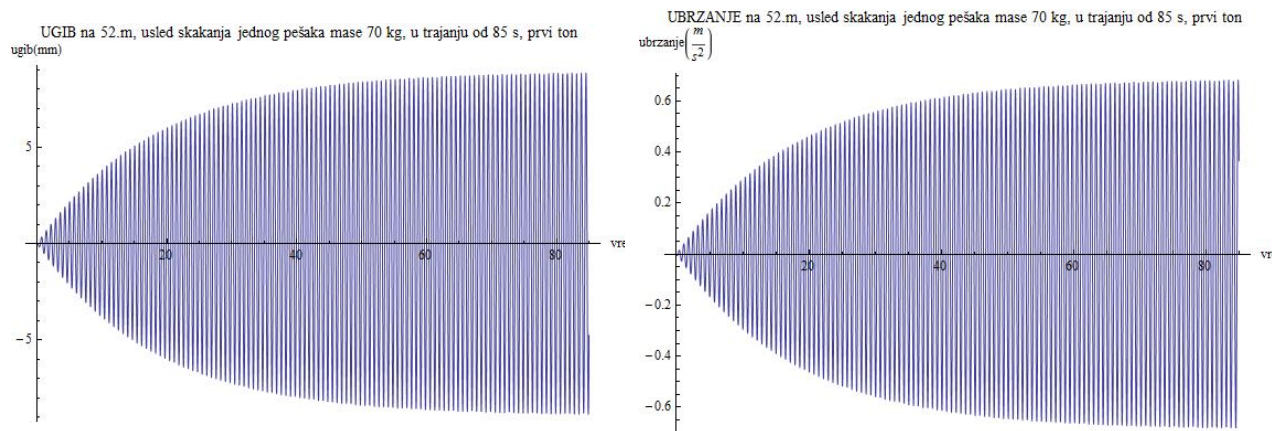
Na slici 5.3.16 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja usled naglog skoka grupe pešaka mase 800kg. Opterećenje je simulirano koncentrisanom silom od 8 kN, naglo nanetom u preseku na  $x=52\text{m}$ . Maksimalni ugib iznosi 2.8 mm, a ubrzanje  $0.107 \text{ m/s}^2$ . Oscilacije se vrše oko statičkog ugiba koji iznosi 1.4 mm.



Slika 5.4.17 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled skakanja jednog pešaka mase 70 kg, u preseku  $x=52 \text{ m}$ , u trajanju 25s, pri rezonantnim vibracijama ( $f_p = f_0 = 1.396 \text{ Hz}$ )

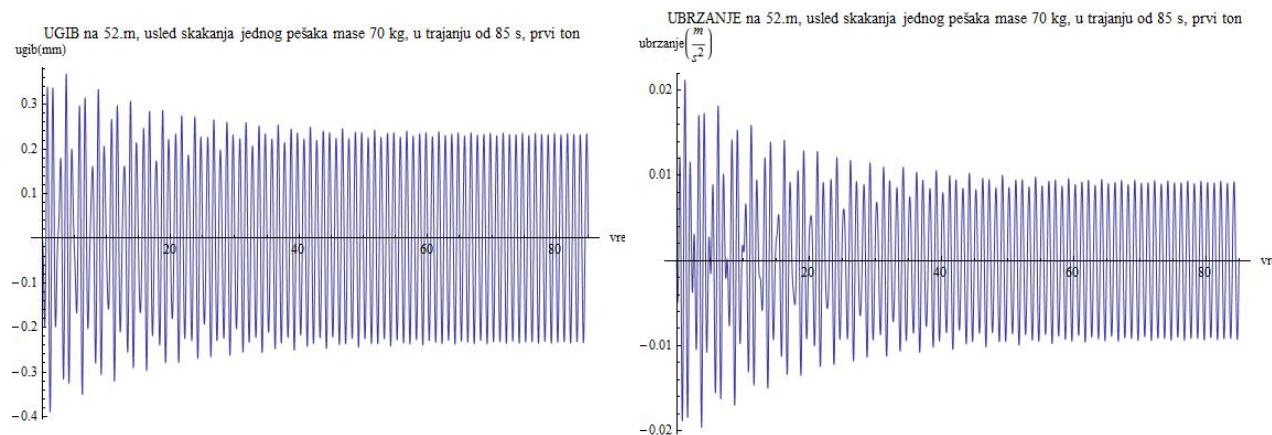
Na slici 5.3.17 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja usled skakanja jednog pešaka ( $P(t)=0.7 \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ ), mase 70 kg, u trajanju 25s, pri rezonantnim vibracijama ( $f_p = f_0 = 1.396 \text{ Hz}$ ). Maksimalni ugib iznosi 6.7 mm, a maksimalno ubrzanje  $0.516 \text{ m/s}^2$ , što je na granici dopuštenog.





Slika 5.4.18 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled skakanja jednog pešaka mase 70 kg, u preseku  $x=52$  m, u trajanju 85s, pri rezonantnim vibracijama ( $f_p = f_0 = 1.396$  Hz)

Na slici 5.3.18 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja usled skakanja jednog pešaka ( $P(t) = 0.7 \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ ), mase 70 kg, u trajanju 85s, pri rezonantnim vibracijama ( $f_p = f_0 = 1.396$  Hz). Maksimalni ugib iznosi 8.1 mm, a maksimalno ubrzanje  $0.69 \text{ m/s}^2$ , što je nešto iznad granice dopuštenog.

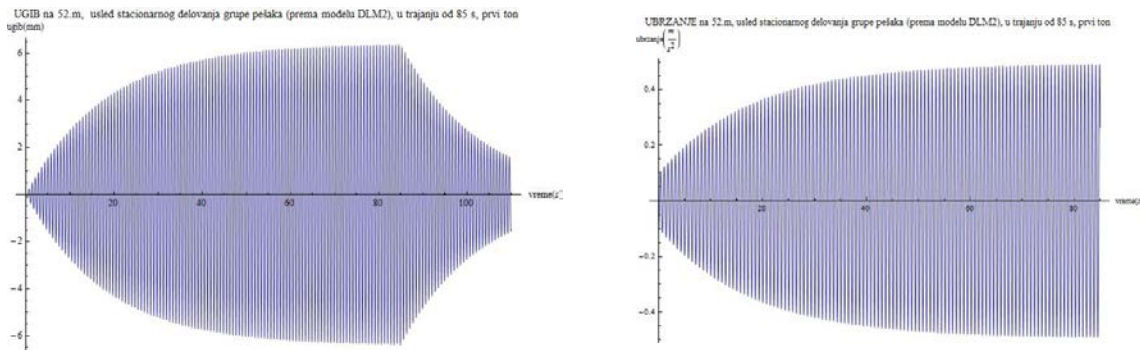


Slika 5.4.19 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled skakanja jednog pešaka mase 70 kg, u preseku  $x=52$  m, u trajanju 85s, pri frekvenciji skakanja  $f_p = 1$  Hz

Na slici 5.3.19 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja usled skakanja jednog pešaka ( $P(t) = 0.7 \cdot \sin(2\pi f_p t)$ ), mase 70 kg, u trajanju 85s, pri frekvenciji skakanja  $f_p = 1$  Hz. Maksimalni ugib iznosi 0.39 mm, a maksimalno ubrzanje  $0.021 \text{ m/s}^2$ .

Na osnovu prikazanih oscilograma sa sl.5.4.17 do sl.5.4.19, može se zaključiti da je uticaj vadalskog delovanja (skakanja u mestu) značajan sa aspekta prihvatljivosti vibracija, naročito u slučaju rezonantnih vibracija.

### 5.4.2.2 Opterećenje od grupe pešaka



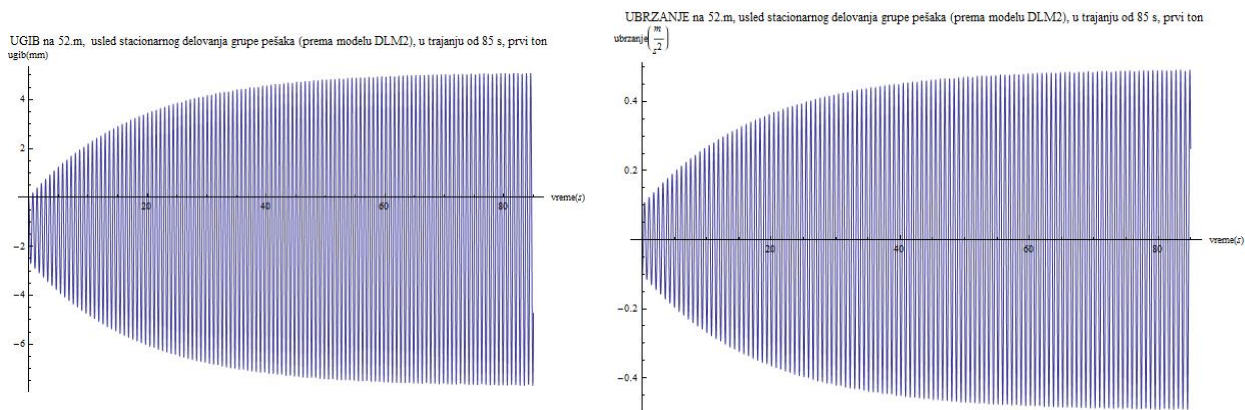
Slika 5.4.20 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled stacionarnog delovanja grupe pešaka  $P(t) = 0.18 \cdot k_v \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ , u kritičnim preseku  $x=52$  m, u tajanju 85 s

Na slici 5.4.20 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja usled stacionarnog delovanja grupe pešaka, mase 800 kg, predstavljene silom  $P(t) = 0.18 \cdot k_v \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ , prema (2.2.7). Faktor sinhronizacije  $k_v=2.8$  (videti sl.2.2.8), tako da je harmonijska sila  $P(t) = 0.504 \cdot \sin(2\pi f_0 t)$  i deluje u kritičnom preseku  $x=52$  m, u trajanju 85 s. Maksimalni ugib iznosi 6.4 mm. A maksimalno ubrzanje  $0.49 \text{ m/s}^2 < a_{\text{dop}}$ . Uticaj inrcijalnog i gravitacionog delovanja mase 800 kg je zanemaren.

Uticaj mase grupe pešaka u čvorovima 8 i 9 (sl.5.4.6) na promenu prirodnih frekvencija vertikalnih vibracija je zanemarljiv (tabela 5.4.3).

Tabela 5.4.3 Uticaj mase grupe pešaka na promenu prirodnih frekvencija vertikalnih vibracija

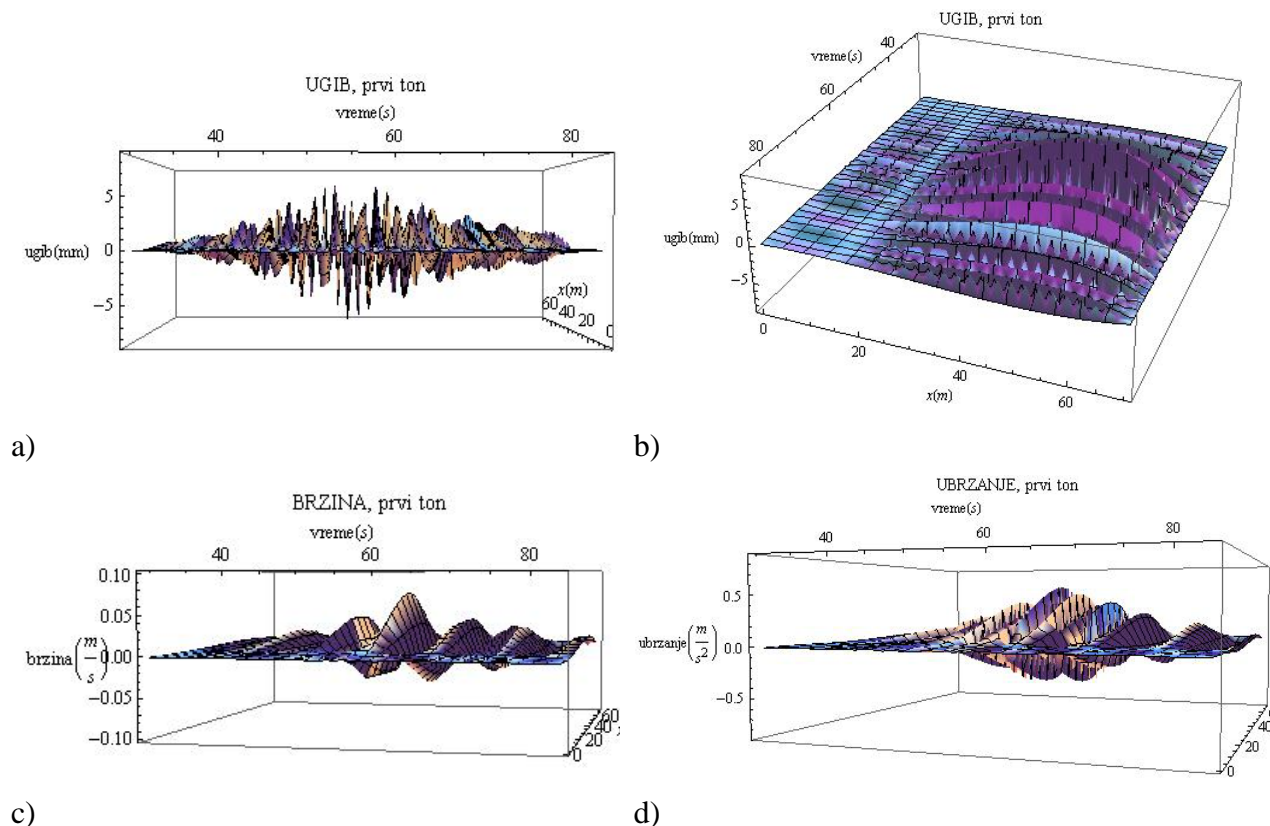
	bez dodatne mase	masa 800 kg u čvoru 8, $x=49$ m	masa 800 kg u čvoru 9, $x=56$ m
Ton $r$	$f_r$ [Hz]	$\bar{f}_r$ [Hz]	$\bar{f}_r$ [Hz]
1	1.396	1.388	1.389
2	3.317	3.316	3.306
3	5.767	5.760	5.760



Slika 5.4.21 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled stacionarnog delovanja grupe pešaka  $P(t) = 8 + 0.18 \cdot k_v \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ , u kritičnim preseku  $x=52$  m, u tajanju 85 s

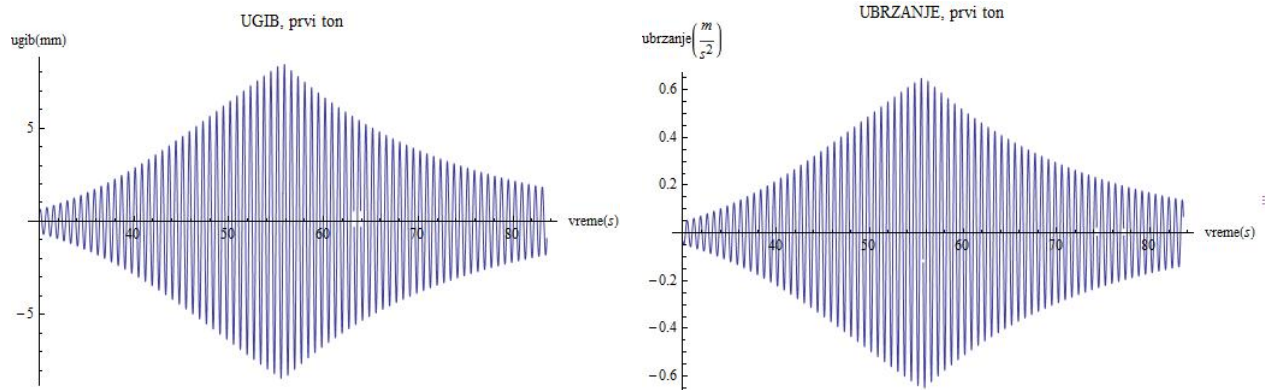
Na slici 5.4.21 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja usled stacionarnog delovanja grupe pešaka, mase 800 kg, predstavljene silom  $P(t) = 0.18 \cdot k_v \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ , prema (2.2.17), kada je uzeto još i gravitaciono delovanje mase opterećenja. Za delovanje opterećenja u trajanju od 85 s maksimalni ugib iznosi 7.7 mm, maksimalno ubrzanje  $0.49 \text{ m/s}^2 < a_{\text{dop}}$ . Ugib je povećan u odnosu na ugib sa sl.5.4.20, što je posledica statičkog ugiba usled delovanja gravitacione sile od 8 kN.

### 5.4.2.3 Opterećenje od kolone pešaka



Slika 5.4.22 Oscilogrami: a) i b) ugiba i c) brzine i d) ubrzanja usled nailaska kontinualnog opterećenja  $p(t) = 0.035 \sin \Omega t$

Na osnovu trodimenzionalnih oscilograma (sl.5.4.22) zaključujemo da se maksimalne vrednosti ugiba i ubrzanja postižu u preseku na  $x = 52 \text{ m}$ , usled prelaženja kolone pešaka, čije se delovanje simulira pokretnim kontinualnim opterećenjem  $p(t) = 0.035 \sin \Omega t$ , prema (2.2.9), pri rezonantnim vibracijama kada je  $\Omega = \omega_0 = 2\pi f_0$ . Amplituda poremećajne sile  $q_0 = 0.0126 \cdot k_v = 0.035 \text{ kN/m}^2$ , gde je  $k_v$  faktor sinhronizacije (videti sl.2.2.8).



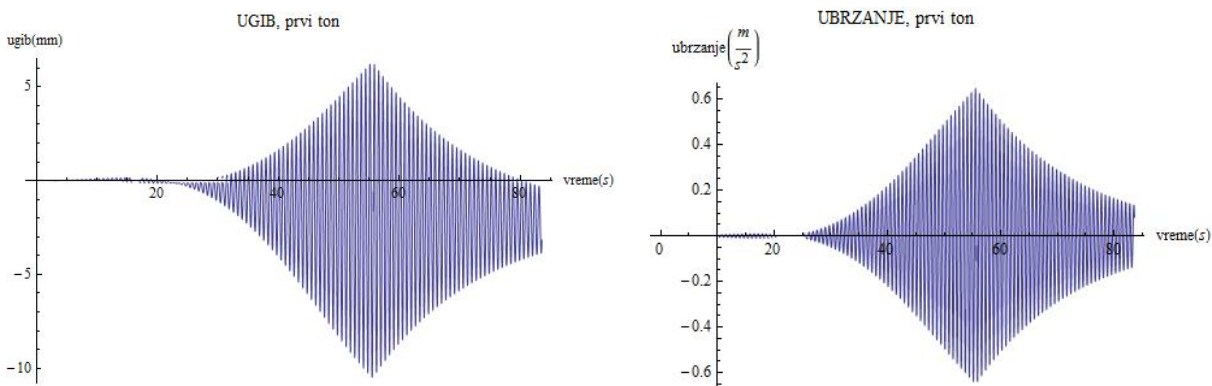
Slika 5.4.23 Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled nailaska kontinualnog opterećenja  $p(t)=0.035\sin\Omega t$ , za kritični presek  $x=52$  m

Za precizniji uvid, na sl.5.4.23, prikazani su dvodimenzionalni oscilogrami ugiba i ubrzanja za delovanje istog opterećenja. U oba slučaja se pokazuje da maksimalni ugib i ubrzanje nastaju u preseku na  $x=52$  m, kada kolona pešaka stigne do kraja mosta i zaustavi se, posle čega nastaju slobodne vibracija. Pri tome, maksimalni ugib 8.5 mm, a maksimalno ubrzanje  $0.65 \text{ m/s}^2$ , što se postiže za vreme od 55.72 s, kada opterećenje stigne do kraja raspona. Brzina nailaska kolone je  $c=0.9 f_0=1.26 \text{ m/s}$ .

Tabela 5.4.4 Uticaj mase kolone pešaka na promenu (smanjenje) prirodnih frekvencija  $f_r$

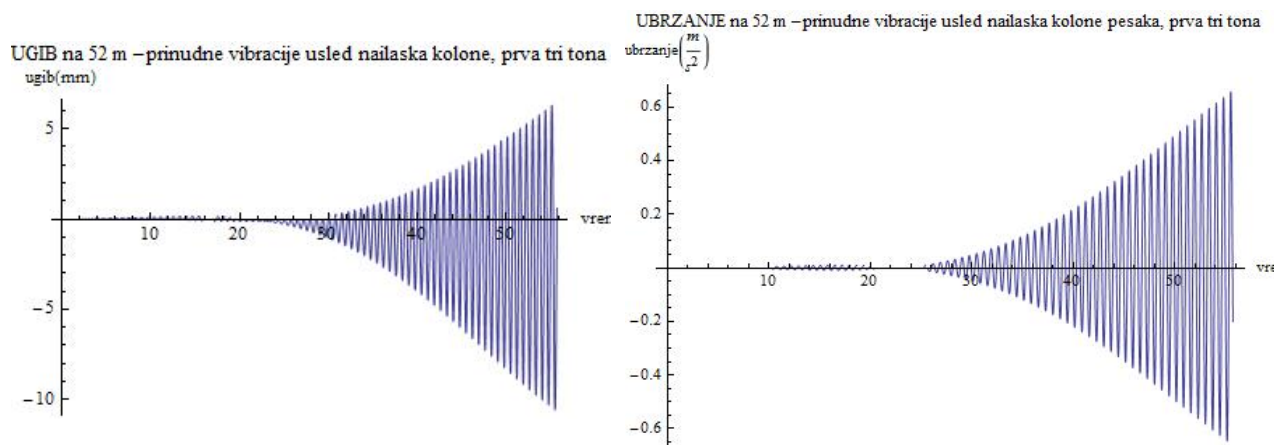
ton $r$	$f_r$ [Hz]	$\bar{f}_r$ [Hz]
1	1.396	1.361
2	3.317	3.235
3	5.767	5.624

Uticaj mase kolone pešaka po celoj površini mosta, na promenu osnovne frekvencije rasponske konstrukcije, je neznatan, s obzirom da je prosečna masa rasponske konstrukcije ( $3.4 \text{ t/m}$ ) mnogo veća od mase kolone pešaka ( $\mu_q=40 \text{ kg/m}^2$ , odnosno  $0.16 \text{ t/m}$ ), (videti tabelu5.4.4.).



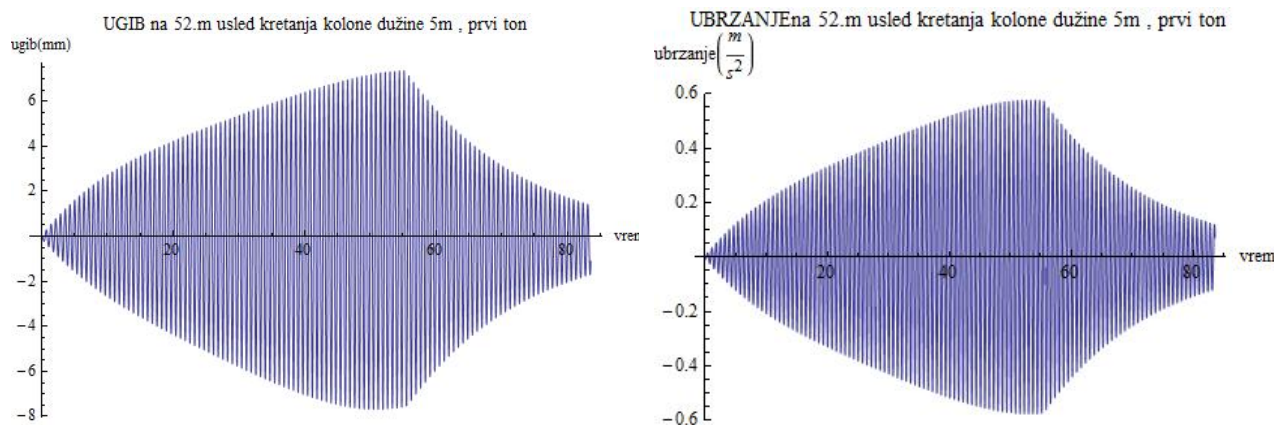
Slika 5.4.24 Oscilogrami ugiba i ubrzanja (presek  $x=52$  m) usled nailaska kontinualnog opterećenja  $p(t)=0.4 + 0.035\sin\Omega t$

Na slici 5.4.24 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja za presek  $x=52$  m usled nailaska kontinualnog opterećenja prema modelu  $p(t) = 0.4 + 0.035\sin\Omega t$ , gde je  $q=0.4$  kN/m dodatno gravitaciono delovanje mase opterećenja ( $40 \text{ kg/m}^2$ ). Maksimalni ugib iznosi  $10.60 \text{ mm}$ , a maksimalno ubrzanje  $0.65 \text{ m/s}^2$ . Sa uvođenjem gravitacionog delovanja mase pokretnog opterećenja, ubrzanje se nije promenilo u odnosu na slučaj prema modelu  $p(t) = 0.0126 \cdot k_v \sin\Omega t$  (sl.5.4.23), ali se maksimalni ugib uvećao za  $2.1 \text{ mm}$ , odnosno za veličinu statičkog ugiba usled konstantnog dela opterećenja  $q$ .



Slika 5.4.25 Oscilogrami ugiba i ubrzanja (presek  $x=52$  m) za prva tri tona, usled nailaska kontinualnog opterećenja  $p(t) = 0.4 + 0.035\sin\Omega t$

Na slici 5.4.25 prikazani su oscilogrami ugiba i ubrzanja za presek  $x=52$  m usled nailaska kontinualnog opterećenja  $p(t) = 0.4 + 0.035\sin\Omega t$ , za prva tri tona oscilovanja. Maksimalni ugib iznosi  $10.66 \text{ mm}$ , a maksimalno ubrzanje  $0.65 \text{ m/s}^2$ , što pokazuje da je doprinos viših tonova zanemarljiv.



Slika 5.4.26 Oscilogrami ugiba i ubrzanja (presek  $x=52$  m) usled prelaženja udvojene kolone pešaka dužine  $5 \text{ m}$

Oscilogrami na slici 5.4.26 prikazuju ugibe i ubrzanja za presek  $x=52\text{m}$ , usled prelaska udvojene kolone pešaka dužine 5 m, simulirane silom  $p(t) = 2 \cdot (0.4 + 0.035 \sin \Omega t)$  kN/m. Maksimalni ugib iznosi 7.75 mm, a maksimalno ubrzanje  $0.58 \text{ m/s}^2$ .

U tabeli 5.4.5 prikazani su rezultati analize vibracija mosta prema relevantnim regulativama.

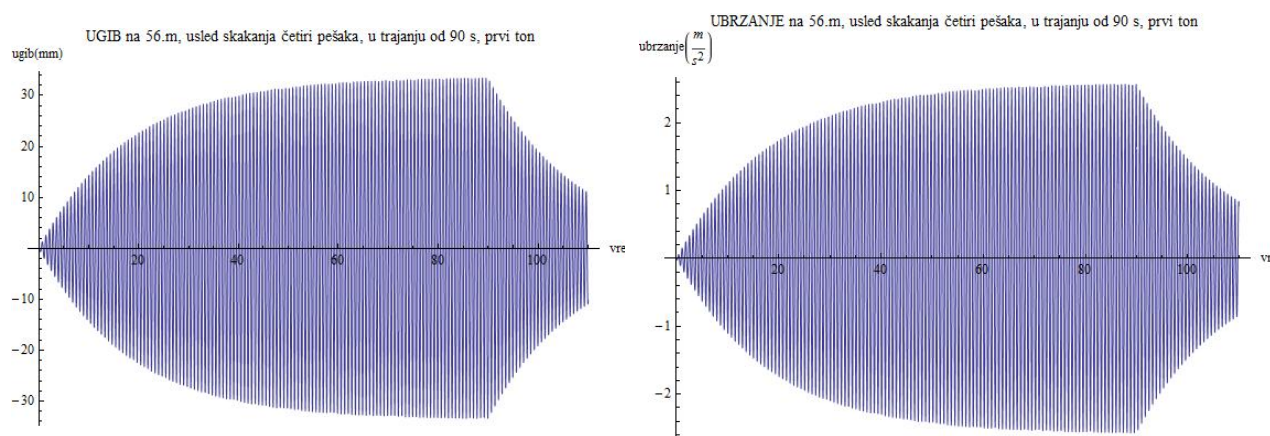
Tabela 5.4.5 Rezultati analize vibracija

regulativa	model opterećenja	maksimalno ubrzanje $a$	dopušteno ubrzanje $a_{dop}$	način proračuna	kriterijum graničnog stanja upotrebljivosti ispunjen [da/ne]
		$\text{m/s}^2$	$\text{m/s}^2$		
Eurocode 1	jedan pešak u pokretu	0.121	0.59	dinamička analiza	da
	grupa pešaka	0.490			da
	kolona pešaka	0.650			ne
BS 5400-2	jedan pešak u pokretu	0.100	0.59	približni metod	da
CAN/CSA-S6-00	jedan pešak u pokretu	0.126	0.324	približni metod	da

Sprovedenom dinamičkom analizom i približnim metodama prema navedenim regulativama, tretirani most je prihvatljiv sa aspekta graničnog stanja upotrebljivosti u pogledu vibracija, ako se izuzme neznatno prekoračenje dopuštenog ubrzanja pri nailasku kolone pešaka, kao i pri vandalskim delovanjima.

#### 5.4.2.4 Izuzetna opterećenja

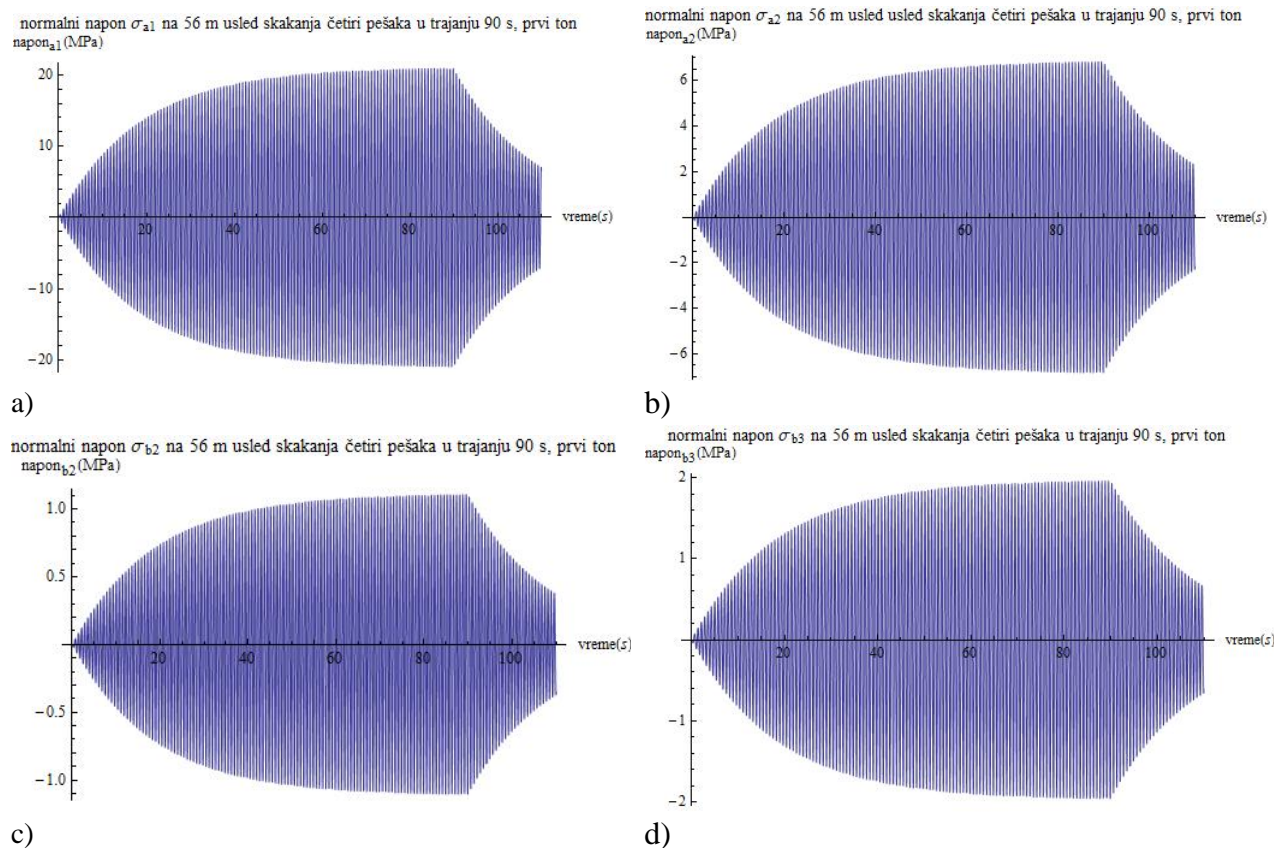
##### 5.4.2.4.1 Vandalsko delovanje



Slika 5.4.27 Oscilogrami ugiba i ubrzanja (presek  $x=56 \text{ m}$ ) usled skakanja četiri pešaka u trajanju 90 s

Oscilogrami ugiba i ubrzanja usled vandalskog ponašanja (skakanja u mestu) četiri pešaka ( $P(t) = 4 \cdot 0.7 \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ ), mase 280 kg, u trajanju 90s, pri rezonantnim vibracijama ( $f_p = f_0 = 1.396 \text{ Hz}$ ), prikazani su na slici 5.4.27. Maksimalni ugib iznosi 32.5 mm, a maksimalno ubrzanje  $2.5 \text{ m/s}^2$ , što je iznad granice dopuštenog ugiba i ubrzanja. S toga je ova konstelacija dinamičkog

opterećenja neprihvatljiva sa aspekta upotrebljivosti u pogledu vibracija. Međutim, ovakvo vandalsko delovanje još uvek ne narušava granično stanje nosivosti konstrukcije, što analiza normalnih napona u istom preseku i pokazuje (sl.5.4.28 i tabela 5.4.6).



Slika 5.4.28 Dijagrami normalnih napona na: a) donjoj flanši čeličnog nosača, b) gornjoj flanši čeličnog nosača, c) donjoj ivici betonske ploče, d) gornjoj ivici betonske ploče

Tabela 5.4.6

	čelični nosač		betonska ploča	
	donja flanša	gornja flanša	donja ivica	gornja ivica
	$\sigma_{a1}$ [MPa]	$\sigma_{a2}$ [MPa]	$\sigma_{b2}$ [MPa]	$\sigma_{b3}$ [MPa]
din.	$\pm 21.04$	$\mp 6.79$	$\mp 1.01$	$\mp 1.92$
stat.[67]	-19.8	27.5	0.03	0.05

+/- = zatezanje/pritisak

U tabeli 5.4.6 prikazana je najveća promena normalnih dinamičkih napona u preseku  $x=56m$ , prema slici 5.4.28, kao i stanje napona od stalnog opterećenja [33], [67].

#### 5.4.2.4.2 Prelaženje vozila (eksperimentalni podaci i matematičke simulacije)

##### Eksperimentalni podaci

Analiza vibracija izložena u ovom odeljku omogućava relativno jednostavan globalni uvid u očekivani odgovor konstrukcije na pobudu vozilom koje prelazi preko mosta. To se odnosi na red veličina ugiba i ubrzanja, kao i kritične preseke u kojima treba vršiti snimanje (merenje) tih podataka.

Statičko ispitivanje mosta izvršeno je sa 6 troosovinskih vozila prosečne mase 16 t. Za dinamičko ispitivanje ovog mosta, koje je izvršeno odmah po završenoj gradnji, korišćeno je vozilo-kamion, (videti sl.5.4.29a) natovareno šljunkom, težine cca 160 kN, koje se kretalo preko mosta različitim brzinama u smeru (+ x, sl.5.4.6) sa leve prema desnoj obali i obrnuto. Da bi se izazvala veća pobuda, na kolovozu je, za neke faze ispitivanja, postavljena prepreka (daska),(sl.5.4.29b). Vozilo ima tri osovine na razmaku 3+1.8 m. Osovinsko opterećenje je 30 kN kod prednjih i po 65 kN kod zadnjih točkova. Elaborat sadrži 5 snimljenih oscilograma ugiba u presecima na 42. i 56. metru rasponske konstrukcije, od kojih je za ovu analizu uzet dijagram ugiba za prelaz vozila sa leve ka desnoj obali reke, a preko prepreke na sredini većeg raspona [23].



a)

b)

Slika 5.4.29 Dinamičko ispitivanje mosta: a) vozilo na mostu b) postavljena prepreka

Oterecenje od ovog vozila je simulirano determinističkom pokretnom silom  $P(t)=P+P_0\sin\Omega t$ , pri čemu je  $P=160$  kN,  $P_0=1.6$  kN,  $\Omega=2\pi f_p$ , gde je  $f_p=1.5$  Hz. Frekvencija  $f_p$  i amplituda  $P_0$  su usvojene na osnovu globalne procene sa eksperimentalnih oscilograma ugiba (sl.5.4.30), i to za  $f_p$  prema broju pikova u 1 s, a za  $P_0$  prema veličini doprinosa uticaju konstantne sile P.



Za precizniju analizu delovanja vozila, potrebno je poznavanje i drugih karakteristika osim težine. To su veličine ogibljenih i neogibljenih masa, krutosti gibnjeva i pneumatika točkova, kao i karakteristike amortizera. U skladu sa tim podacima, vozilo se, zavisno od broja osovina, modelira kao oscilatorni sistem sa dve, ili više oscilujućih masa. Sa takvim modelom može se obuhvatiti interakcija most-vozilo, kao i uticaji neravnina (prepreka) na kolovozu mosta, što je više od značaja za drumske mostove. Međutim, takvim modelom simulacija delovanja vozila gubi karakter determinističke sile, te se problem vibracija oscilatornog sistema most-vozilo rešava numeričkim metodama.

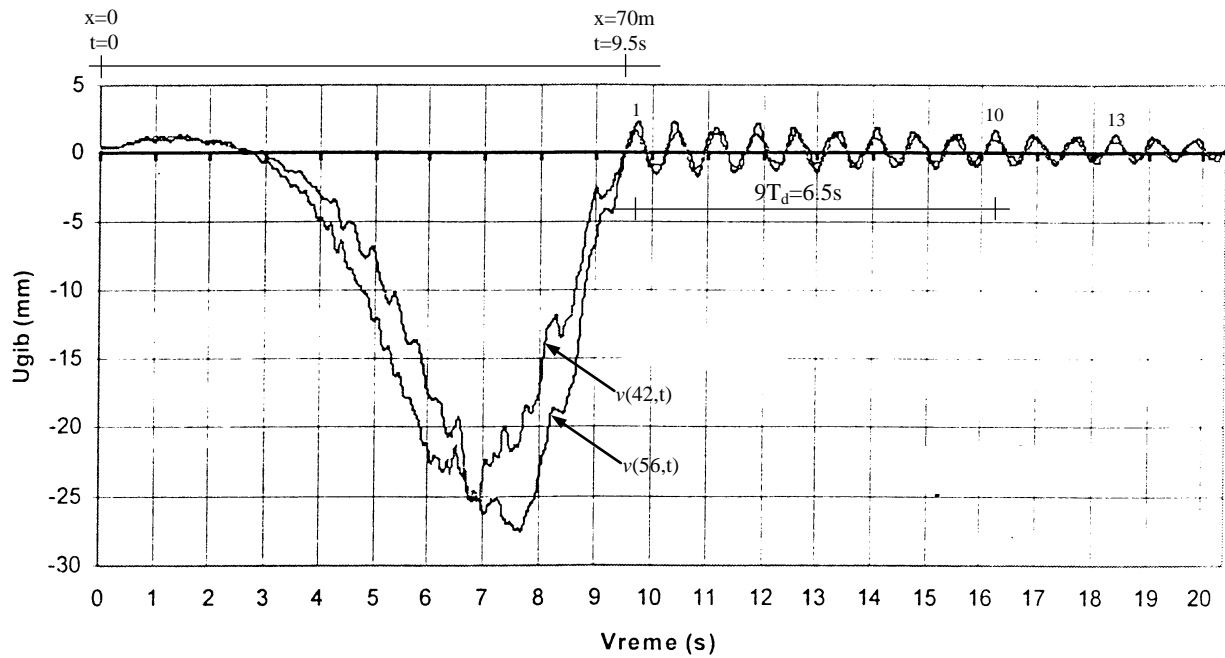
Izloženi postupak analize vibracija simulacijom sile od vozila determinističkom silom i proračun prema predloženim algoritmima, je jednostavan, svrsishodan i pouzdan, i treba ga koristiti, pogotovo u fazi projektovanja. Pri tome, za karakteristike harmonijske promljive sile  $P_0 \sin \Omega t$ , treba razmotriti više opcija. Simulacija udara pri prelazu vozila preko prepreke na kolovozu, može se izvesti dinamičkim nanošenjem odgovarajuće sile, odnosno delovanjem serije impulsa, zavisno od broja osovina vozila i brzine kretanja, a u preseku u kome je postavljena prepreka.

Tabela 5.4.7 Promena (smanjenje) prirodnih frekvencija  $f_r$  za prva tri tona vertikalnih vibracija, usled pokretne mase vozila ( $m=16t$ )

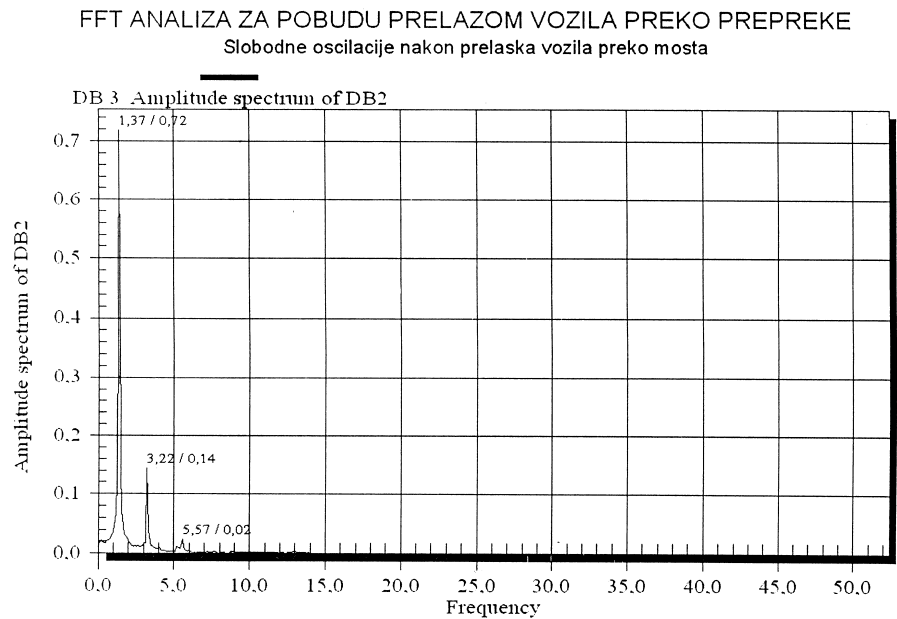
	čvor (k)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$x_k$ [m]	7.0	14.0	21.0	28.0	35.0	42.0	49.0	56.0	63.0
ton $r$	$f_r$ [Hz]	$\overline{f_r} / f_r$								
1	1.396	0.998	0.999	0.997	0.985	0.955	0.922	0.904	0.922	0.970
2	3.317	0.998	1.000	0.976	0.926	0.919	0.978	0.992	0.942	0.950
3	5.767	0.982	1.000	0.970	0.938	1.000	0.946	0.977	0.984	0.947

U tabeli 5.4.7 pokazano je da je promena (smanjenje) prirodnih frekvencija  $f_r$  za prva tri tona vertikalnih vibracija, usled pokretne mase vozila ( $m=16t$ ), najveća kada se vozilo nalazi u zoni oko sredine većeg polja.

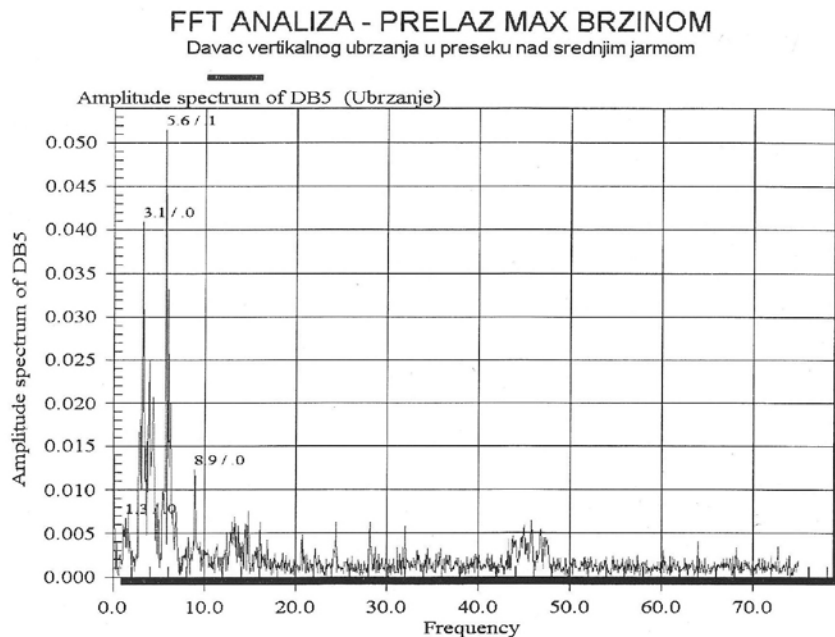
Na slici 5.4.30 prikazani su oscilogrami ugiba za preseke na 42. i 56.m rasponske konstrukcije, usled prelaza vozila težine 160 kN sa leve na desnu obale, preko prepreke na polovini većeg raspona ( $x=42m$ ) (sl.5.4.29). Brzina kretanja vozila je 26.5 km/h.



Slika 5.4.30 Oscilogrami ugiba za prelaz vozila preko prepreke brzinom 26.5 km/h, sa leve obale [23]



Slika 5.4.31 Amplitudni spektar za slobodne oscilacije, za prelaz vozila sa desne obale [23]



Slika 5.4.32 Amplitudni spekter ubrzanja za prelaz vozila brzinom 35 km/h, sa desne obale [23]

Prema slobodnim vibracijama sa oscilograma (sl.5.4.30) određeno je

$$T_d = 0.722s, f_d = \frac{1}{0.722} = 1.385\text{Hz}$$

$$\delta' = \frac{1}{10} \ln \frac{A_1}{A_{10}} = \frac{1}{10} \ln \frac{2.36}{1.57} = 0.041$$

$$\delta'' = \frac{1}{13} \ln \frac{A_1}{A_{13}} = \frac{1}{13} \ln \frac{2.36}{1.36} = 0.042$$

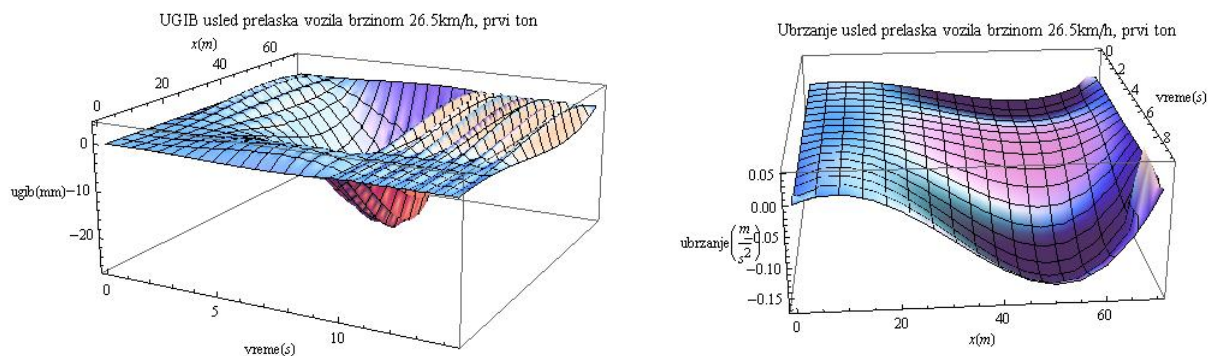
$$\delta''' = \frac{1}{4} \ln \frac{A_{10}}{A_{13}} = \frac{1}{4} \ln \frac{1.57}{1.36} = 0.036$$

$$\delta = \frac{1}{3}(\delta' + \delta'' + \delta''') \approx 0.04$$

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi} = 0.0063 \quad (0.63\% \cdot \xi_{kr})$$

$$f = \frac{f_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx f_d = 1.38\text{Hz}$$

Matematičke simulacije odgovora sistema

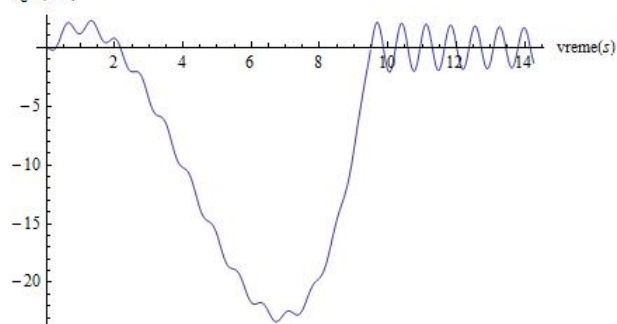


a)

b)

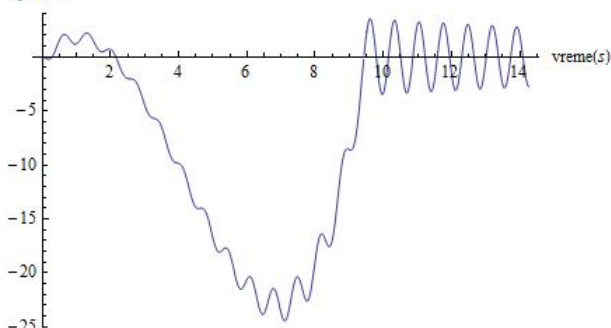
Slika 5.4.33 Oscilogrami a) ugiba i b) ubrzanja usled prelaska vozila prosečnom brzinom  $v=26.5$  km/h simuliranog silom  $P(t)=P+P_0\sin\Omega t$

UGIB na 42 m usled prelaska vozila, brzinom 26.5 km/h, prvi ton ugib(mm)



a)

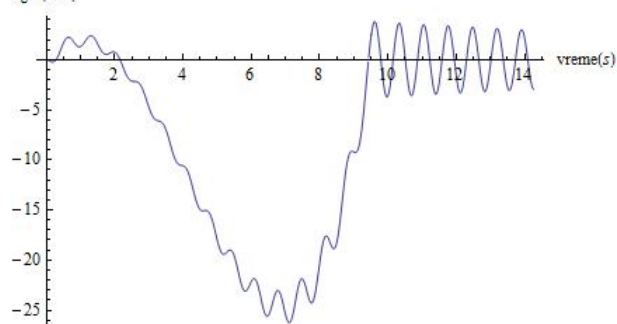
UGIB na 42 m usled prelaska vozila, brzinom 26.5km/h, prvi ton ugib(mm)



b)

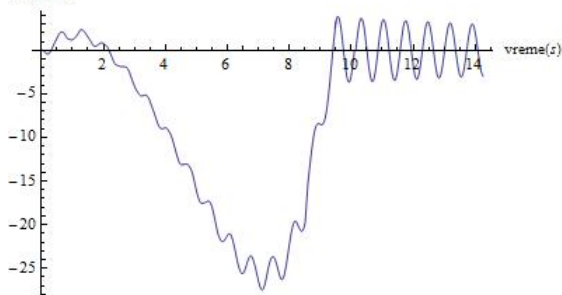
Slika 5.4.34 Oscilogrami ugiba za presek  $x=42$  m usled prelaska vozila prosečnom brzinom  $v=26.5$  km/h: a) simuliranog silom  $P(t)=P$ , b) simuliranog silom  $P(t)=P+P_0 \sin\Omega t$

UGIB na 56 m usled prelaska vozila, brzinom 26.5km/h, prvi ton ugib(mm)



a)

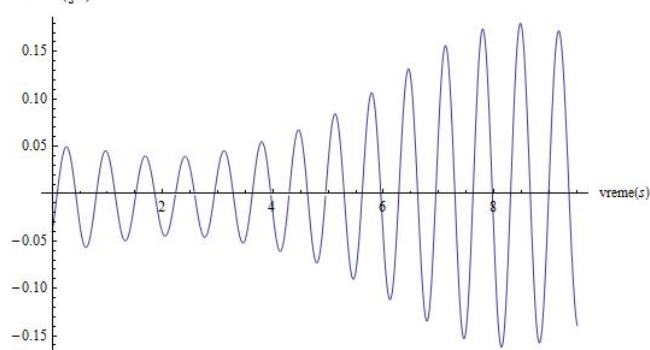
UGIB na 56 m usled prelaska vozila brzinom 26.5km/h, prva tri tona ugib(mm)



b)

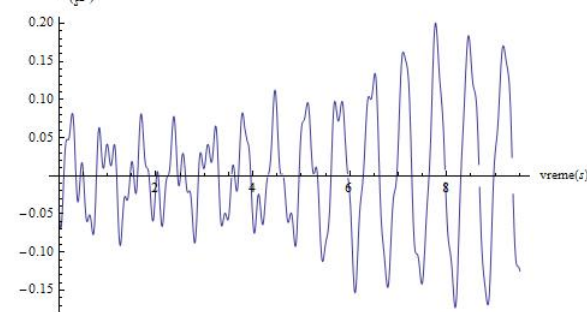
Slika 5.4.35 Oscilogrami ugiba za presek  $x=56$  m usled prelaska vozila prosečnom brzinom  $v=26.5$  km/h, simuliranog silom  $P(t)= P+P_0 \sin\Omega t$  za : a) prvi ton, b) tri prva tona

Ubrzanje na 56 m usled prelaska vozila, prosečnom brzinom 26.5km/h, prvi ton ubrzanje( $\frac{m}{s^2}$ )



a)

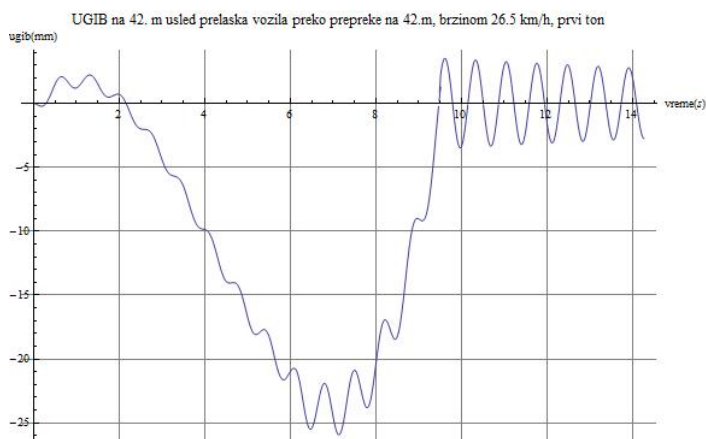
UBRZANJE na 56 m usled prelaska vozila, prosečnom brzinom 26.5km/h, prva tri tona ubrzanje( $\frac{m}{s^2}$ )



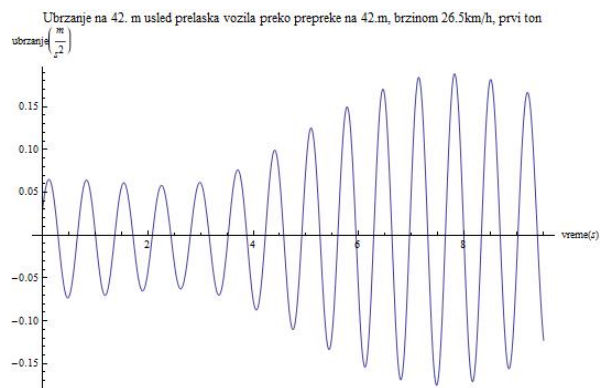
b)

Slika 5.4.36 Oscilogrami ubrzanja za presek  $x=56$  m usled prelaska vozila prosečnom brzinom  $v=26.5$  km/h, simuliranog silom  $P(t)= P+P_0 \sin\Omega t$  za : a) prvi ton, b) tri prva tona

Simulirani oscilogrami na slikama 5.4.33 do 5.4.36 pokazuju ugibe i ubrzanja usled prelaženja vozila mase 16t brzinom 26.5 km/h, bez prepreke na kolovozu.

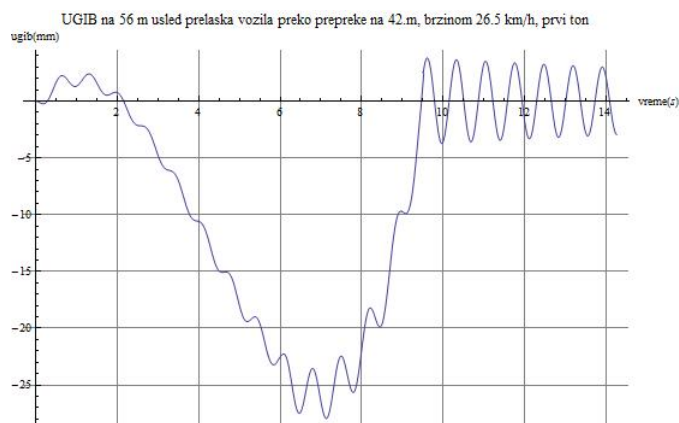


a)

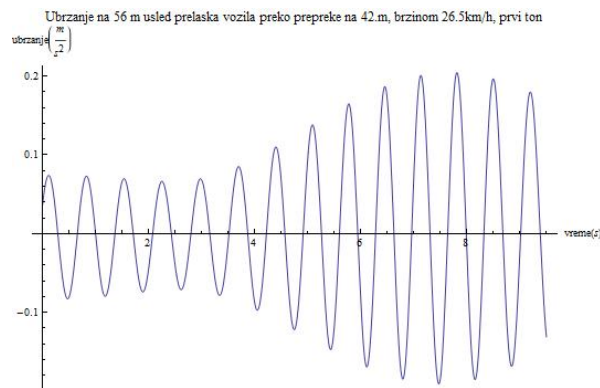


b)

Slika 5.4.37 Oscilogrami a) ugiba i b) ubrzanja za presek  $x=42$  m usled prelaska vozila preko prepreke na 42.m, prosečnom brzinom  $v=26.5$  km/h



a)



b)

Slika 5.4.38 Oscilogrami a) ugiba i b) ubrzanja za presek  $x=56$  m usled prelaska vozila preko prepreke na 42.m, prosečnom brzinom  $v=26.5$  km/h

Simulirani oscilogrami na slikama 5.4.37 i 5.4.38 pokazuju ugibe i ubrzanja usled prelaženja vozila mase 16t brzinom 26.5 km/h, sa preprekom (daskom) na kolovozu, postavljenom na sredini većeg raspona. Uticaj prelaženja vozila preko prepreke je simuliran sa dve udarne sile, prvom intenziteta 5% težine prednje osovine (1.5 kN) i drugom intenziteta 5% težine zadnjih osovine (6.5 kN), apliciranih u vremenu nastajanja na mestu prepreke. Intenziteti udarnih sila ( $\Delta P$ ) usvojeni su na osnovu njihovog doprinosa prelaženju vozila bez prepreke, a u skladu sa rezultatima eksperimenta (sl.5.4.30), prema relaciji  $\Delta P = P(v_{din}/v_{stat} - 1)$ . Dalje, uticaji udarnih sila su superponirani sa uticajem vozila simuliranog silom  $P(t) = P + P_0 \sin \Omega t$ . Maksimalni računski dinamički ugibi za preseke na 42. i 56.m respektivno su 25.9 mm i 27.9 mm, što je vrlo

blisko rezultatima eksperimenta, gde su maksimalni dinamički ugibi za iste preseke 26 mm i 27.5 mm (sl.5.4.30). Za ove preseke, statički ugibi iznose 24.8 mm i 26.1 mm. Dinamička analiza je sprovedena prema algoritmu DYNmk2. Treba naglasiti da su prikazane simulacije ugiba dobra aproksimacija snimljenim oscilogramima ugiba u kvantitativnom smislu, što pokazuju maksimalne vrednosti dinamičkih ugiba. Međutim, razlike njihovih oblika, koje uslovljava uticaj mase vozila na promenu prirodne frekvencije mosta (videti tabelu 5.4.7), zatim uticaj inetrakcije most vozilo, mogu se odraziti na razlike u ubrazanjima. Opterećenje usled kretanje vozila (servisnog, protivpožarnog, ambulatnog i dr.), ima tretman izuzetnog, pošto je moguće samo u specijalnim slučajevima, ukoliko je projektom predviđeno i to pod određenim uslovima (ograničena težina, broj osovina i brzina kretanja). U tom smislu, ubrzanja rasponske konstrukcije usled prelaženja vozila, nisu relevantna za ocenu konfora pešaka, s obzirom da se pešaci i vozila uglavnom ne kreću istovremeno po pešačkom mostu. Kako je za projektante, za slučaj opterećenja od vozila, od naročitog interesa poznavanje reda očekivane velične deformacija rasponske konstrukcije, predloženi postupak analize vibracija, zbog svoje jednostavnosti, može biti od velike koristi.

## 6. Zaključak

S obzirom na savremeni trend izgradnje elegantnih mostovskih konstrukcija, susrećemo se sa novim izazovima u pogledu projektovanja i proračuna. Imajući u vidu činjenicu da je korisno opterećenje pešačkih mostova relativno malo, a da savremeni materijali omogućavaju veću nosivost, proračunom zasnovanim na isključivo statičkoj analizi, uz kontrolu graničnih stanja nosivosti, dobijamo konstrukcije male krutosti i mase, osetljivije na dinamička delovanja.

Pobuđenja prouzrokovana kretanjem pešaka mogu se kalsifikovati kao pitanje stanja upotrebljivosti, s obzirom na osetljivost ljudskog tela na vibracije, čiji nivo uglavnom nije dovoljno veliki da prouzrokuje konstrukcijska oštećenja, a može narušiti komfor pešaka. S toga, imperativ je ispunjenje uslova graničnih stanja upotrebljivosti konstrukcijskih elemenata, posebno u pogledu, kako vertikalnih, tako i horizontalnih vibracija indukovanih pešacima.

Prvi korak u rešavanju problema odnosi se na usklađivanje osnovne prirodne frekvencije mosta. Zato je kod ovih konstrukcija bitan adekvatan izbor krutosti i mase sistema, čime se postiže da se svojstvena frekvencija, pored ostalih relevantnih parametara, svede na opseg kojim se obezbeđuje da vibracije ne stvaraju osećaj neugodnosti kod korisnika.

Sledeći korak odnosi se na sračunavanje prinudnih vibracija, odnosno ograničavanje ubrzanja konstrukcije pod delovanjem dinamičkog opterećenja koje predstavlja pešaka u hodu. Ovde se u cilju rešenja problema prvenstveno postavlja pitanje uspostavljanja relevantnog matematičkog modela koji bi predstavljao pobuđujuću silu pešaka u hodu, kao i određivanje granica prihvatljivosti nivoa vibracija.

Za proračun prinudnih prigušenih vibracija koje nastaju usled kretanja pešaka, u tezi su, primenom modalne analize, razvijena opšta rešenja problema. Na osnovu izvedenih opštih rešenja, data su i pojedinačna rešenja za karakteristične slučajeve pokretnih opterećenja, modeliranih determinističkim silama. Ovim modelima obuhvaćeno je kretanje jednog, ili više pešaka, kolone pešaka, ali i izuzetna (npr.vandalska) opterećenja. Iz ovih rešenja se mogu izvesti rešenja za simultano delovanje navedenih opterećenja.

Izvedena rešenja se mogu koristiti za analizu kako vertikalnih, tako i horizontalnih vibracija grednih pešačkih mostova. Pri tome, krutost i masa sistema mogu biti konstantne duž raspona, ali i promenljive. Određivanje modalnih karakteristika konstrukcija sprovodi se korišćenjem programskih paketa za proračun inženjerskih konstrukcija. Rešenja za ugibe, brzine, ubrzanja, kao i napone i dilatacije nalazimo primenom procedura u softeru Mathematica<sup>®</sup>, a prema teorijskim analizama i odgovarajućim algoritmima DYNmi, DYNmk1 i DYNmk2, prikazanim u poglavlju 4. Procedura prema algoritmu DYNmi koristi se za mostove konstantne krutosti i mase duž raspona. Procedurama prema algoritmima DYNmk1 i DYNmk2 dobijaju se odgovori diskretizovanih sistema mostova sa konstantnim, ili promenljivim krutostima i masom duž

raspona. Za proračun prema DYNmk1 koriste se svojstveni vektori sistema sa konačnim brojem koncentrisanih masa. Proračun prema algoritmu DYNmk2 podrazumeva aproksimaciju neprekidnim funkcijama svojstvenih vektora sistema sa koncentrisanim masama.

U poglavlju 5, tačnost izvedenih rešenja potvrđena je poređenjem rezultata analiza vibracija (oscilograma) za kontinualne sisteme ( $EI=const.$ ,  $\mu=const.$ ) rasponske konstrukcije pešačkog mosta i korespondentne diskretizovane sa konačnim brojem koncentrisanih masa, a pri istim parametrima vibracija. Pri tome, pregledom rezultata sprovedene analize, konstatovana je podudarnost oscilograma ugiba i ubrzanja za kontinualane i odgovarajuće diskretizovane sisteme. Jednom od izvršenih analiza u odeljku 5.1 ukazano je da se adekvatnim izborom ispune sandučastih poprečnih preseka može regulisati pitanje mase oscilatornog sistema pri istoj krutosti ( $EI$ ), i time svesti osnovna frekvencija na poželjan opseg.

U odeljku 5.4.2.4, gde se analizira uticaj izuzetnih opterećenja, pokazano je slaganje teorijskih i eksperimentalnih rezultata. Ovi rezultati su predstavljeni oscilogramima dinamičkih ugiba, snimljenih ispitivanjem mosta *in situ*, i oscilogramima usled delovanja odgovarajućih determinističkih sila, primenom procedure prema algoritmu DYNmk2.

Dinamičkim analizama grednih pešačkih mostova (odeljak 5.2-5.4), zaključeno je da pri proračunu vibracija, kako za vertikalni, tako i horizontalni pravac, osim određivanja ubrzanja i deformacija rasponske konstrukcije prema važećim standardima, treba razmotriti odgovore konstrukcije i prema dodatnim kriterijumima. Predlog je da se obavezno razmotre i kritične konstelacije pobuđujućeg opterećenja mosta, kao što su vandalska ponašanja pešaka (skakanje u mestu i dr.), ili ekstremni režimi kretanja grupe pešaka. Dok se ekstremni režimi kretanja pešaka (strojevi korak, ritmizirane sportske aktivnosti i dr.) merama zabrane mogu ograničiti, namerno izazivanje prekomernih vibracija vandalskim delovanjem se ne može sprečiti. Budući da je ono najčešće kratkotrajnog karaktera, aspekt prihvatljivosti nivoa vibracija je uglavnom ignorisan, što i pokazuje nedovoljan tretman ove problematike u postojećim međunarodnim i nacionalnim standardima. Međutim, preporuka autora je da takve ekstremne slučajeve ipak treba analizirati, jer izazivanje prekomernih vibracija može imati nepovoljan uticaj na granična stanja nosivosti, ali i upotrebljivosti u pogledu deformacija i prslina. Aspekt izuzetnih delovanja se, iz tih razloga, treba razmatrati kako bi se pri dimenzionisanju obezbedila potrebna stabilnost mosta. Kao kriterijum za to, s obzirom na ekonomske razloge, može biti dopušteno smanjenje koeficijenta sigurnosti za granična stanja nosivosti i upotrebljivosti, bar kao za seizmičke uticaje. Pri tome, dok vandalsko delovanje ne bude imalo adekvatniji tretman u tehničkim regulativama, na projektantima je da ih u proračun uvodu prema modelima opterećenja koje treba sami da definišu. S toga, celishodno bi bilo da se, radi efikasnijeg dinamičkog proračuna, uz kategorizaciju pešačkih mostova prema vrsti konstrukcije, izvrši i detaljnija tipizacija istih prema kategoriji pešačkog saobraćaja koji se na njim odvija, a posebno očekuje. Razlog tome je što je lokacija konstrukcije predispozicija za njenu manju, ili veću izloženost opterećenju od pešaka, koji, takođe mogu pripadati kategorijama stanovništva različite osetljivosti na vibracije.



Pri projektovanju pešačkih mostova, pored razmatranja uticaja dinamičkih delovanja prema važećoj tehničkoj regulativi, treba uvesti i uticaje koji mogu nastati u određenim okolnostima za vreme eksploatacije objekta. U tom smislu, mora se obratiti pažnja na moguće promene modalnih karakteristika, koje vremenom mogu uvesti sistem u nepoželjni opseg frekvencija. Ove promene mogu biti posledica deformacija ležišta, odnosno oslonaca, kao i reoloških osobina ugrađenih materijala (videti odeljke 5.3 i 5.4).

Predloženi postupci rešavanja problema vibracija su lako primenljivi za različita dinamička delovanja, tako da mogu predstavljati veliku pomoć projektantima u proceni dinamičkog ponašanja pešačkih mostova, što jeste preduslov za savremen i prihvatljiv princip projektovanja i, uz primenu savremenih tehnologija, njihovu kvalitetnu izradu.

## Bibliografija

- [1] American Institute of Steel Construction: AISC Guide11 Floor Vibration Due to Human Activity, Chicago, 1997.
- [2] Association of German Engineers: Guideline VDI 2057, 2012.
- [3] Austroads: AGBT Guide to Bridge Technology, Australija, 2013.
- [4] Bachmann H., Ammann W.: Vibrations in structures induced by man and machines, Structural Engineering Document Nr.3, IABSE, 1987.
- [5] Bachmann H., Ammann W.: Vibration Problems in Structures. Practical Guidelines, 1995.
- [6] Bachmann, H.: 'Lively' Footbridges – a real challenge, Footbridge 2002, Paris, 2002.
- [7] Bachmann, H.: Schwingungsprobleme bei Fußgängerbrücken, Bauingenieur 63, 1988 .
- [8] Bachmann H., Pretlove A.J., Rainer H.: Dynamic forces from rhythmical human body motions, in: Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines, Birkhäuser Appendix G, Basel, 1995,
- [9] Baumann K. und Bachmann H.: Durch Menschen verursachte dynamische Lasten und deren Auswirkungen auf Balkentragwerke, Birkhäuser Verlag, 1988 (in German).
- [10] J. Blanchard, B.L. Davies, J.W. Smith, Design criteria and analysis for dynamic loading of footbridges, in: Proceedings of the DOE and DOT TRRL Symposium on Dynamic Behaviour of Bridges, Crowthorne, UK, May 19, 1977, pp. 90–106.
- [11] Brčić.V.: Dinamika konstrukcija, Građevinska knjiga , Beograd, 1978.
- [12] British Standards Institution: British Standard 5400 Steel, Concrete and Composite Bridges: Specification for Loads, Part 2, Appendix C, 1978.
- [13] British Standards Institution: BS 5400 -2:2006 Steel, Concrete and Composite Bridges: Specification for Loads, 2006.
- [14] BS6399.Part 1, Loading for buildings.Part 1:Code of practice for dead and imposed loads. London (UK): BSI; 1996.
- [15] CSA International: CAN/CSA-S6-06 :Canadian Highway Bridge Design Code, Toronto, 2006.

- [16] CSA International: CAN/CSA-S6-00 :Canadian Highway Bridge Design Code, Toronto, 2000.
- [17] Dallard P., Fitzpatrick, T., Flint, A., Low, A., Ridsdill Smith, R., Willford, M. and Roche, M. :London Millennium Bridge: Pedestrian-induced lateral vibration, ASCE Journal of Bridge Engineering, pp 412 – 417, Nov. / Dec.2001.
- [18] Dallard, P., Fitzpatrick, A.J., Flint, A., Le Bourva, S., Low, A., Ridsdill Smith, R.M. and Willford, M. The London Millennium Bridge. *The Structural Engineer*, Volume 79/ No 22, pages 17-33, November 2001.
- [19] Deutsches Institut für Normung: DIN-Fachbericht 102, Betonbrücken, 2003.
- [20] Dmitriev, A.S.: Динамика двухпролетной балки с криволинейным начальным очертанием пути. Прикладная механика, том XV-4, Kiev, 1979.
- [21] Dmitriev, A.S.: поперечные колебания трехпролетной под действием движущейся. Прикладная механика, том X-11, Kiev, 1974.
- [22] Ebrahimpour A., Sack R. L.: Design loads for coherent crowd harmonic movements, Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No. 4, page 1121-1136, April 1992.
- [23] Elaborat o ispitivanju pešačkog mosta preko reke Nišave u Nišu, Institut za građevinarstvo i arhitekturu, Građevinsko-arhitektonski fakultet Niš, Niš, 2003.
- [24] Ellis B.R. and Ji T. : Floor vibration induced by dance-type loads verification, The Structural Engineer 72 (3), pp. 45–50, 1994.
- [25] Ellis B.R. and Ji T. : The response of structures to dynamic crowd loads BRE Digest Report 426
- [26] European Committee for Standardization CEN: EN 1991-2, Eurocode 1 - Actions on structures, Part 2: Traffic loads on bridges, 2003.
- [27] European Committee for Standardization CEN: EN 1992-2 : 2005 Eurocode 2 - Design of concrete structures - Concrete bridges - Design and detailing rules, 2005.
- [28] European Committee for Standardization CEN: ENV 1995-2, Eurocode 5 - Design of timber structures – bridges, 1997.
- [29] European Committee for Standardization CEN: EN 1995-2 : 2004 Eurocode 5: Design of timber structures - Part 2: Bridges, 2004.

- [30] Fryba, L.: Vibrations of solid and structures under moving loads, Prague, 1972.
- [31] Fujino Y., et al.: Synchronization of Human Walking Observed During Lateral Vibration of a Congested Pedestrian Bridge, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 22: p. pp. 741-758, 1993.
- [32] Galbraith F.W. and Barton M.V. Ground loading from footsteps, Journal of the Acoustic Society of America 48, Vol. 5, pp. 1288–1292, 1970.
- [33] Glavni projekat pešačkog mosta preko reke Nišave u Nišu , Institut za građevinarstvo i arhitekturu, Građevinsko-arhitektonski fakultet Niš, Niš, 2000.
- [34] Grundmann H., Kreuzinger H., Schneider M.: Dynamic Calculations of footbridges, Der Bauingenieur 68, pp.215-225, 1993.
- [35] Guidelines for the design of footbridges. Guide to good practice (155 pages ISBN 2-88394-072-X), Fédération internationale du béton (FIB), Lausanne, 2005.
- [36] Hurty, W.C., Rubinstein, M.F. Dinamika konstrukcija, BIGZ, Beograd, 1973.
- [37] ISO 2631-1: Mechanical Vibration and shock Evaluation of human exposure to whole body vibration. General requirements, July 1997.
- [38] ISO 2631-2: Mechanical vibration and shock - Evaluation of human exposure to whole body vibration - part 2: vibration in buildings (1 to 80 Hz), February 2003.
- [39] ISO/CD 10137, Bases for design of structures Serviceability of buildings an pedestrian walkways against vibration, International Standardization Organization, Geneva, Switzerland, 2005.
- [40] Japanese Road Association: Footbridge Design Code, 1979.
- [41] Kramer H.: Dynamische Belastung durch Fußgänger, Bauingenieur 73 Nr.7/8, 1998.
- [42] Kreuzinger H.: Dynamic Design Strategies for Pedestrian and Wind Actions. Footbridge 2002, Paris, 2002.
- [43] Koloušek, V.: Dynamics in Engineering structures. Academia, Prague, 1973
- [44] Lehrstuhl für Stahlbau, RWTH Aachen: Untersuchungsergebnisse der Bodenkontaktkraftmessungen an der Kölner Sporthochschule, internal Report, 2003.

- [45] Leonard D.R.: Human Tolerance Levels for Bridge Vibrations, Road Research Laboratory, Ministry of Transport, Crowthorne, Berkshire, 1966.
- [46] Lippert S.: Human response to vertical vibration, S.A.E. Journal 55 Vol. 5, pp. 32–34., 1947.
- [47] Matsumoto Y., Nishioka T., Shiojiri H., Matsuzaki K.: Dynamic Design of Footbridges, IABSE Proceedings, Nr. 17/18, S. 1-15, 1978.
- [48] Milićević M., Spasojević N.: Some Aspects of the Vibration Analysis of Concrete Bridges (in Serbian), str.161-164., Modern Concrete Structures, Monigraph, Faculty of Civil Engineering oh the University of Belgrade, Belgrade, 1994.
- [49] Moaveni S., Finite Elements Analysis-Theory and application with ANSYS, Pearson Education, Inc., New Jersey, 2003.
- [50] Nakamura, S-I. Lateral vibration on a pedestrian cable-stayed bridge. IABSE Journal of Structural Engineering International, volume 12, no.2, pages 295-300, 2002.
- [51] Newland D.E.: An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis, Longman Group, Harlow, 1993.
- [52] Occhiuzzi A., Spizzuoco M, Ricciardelli F: Loading models and response control of footbridges excited by running pedestrians, Structural Control and Health Monitoring, 15 (3), pp.349-368, 2008.
- [53] Oeding: Verkehrsanalyse Fußgänger, Stadt Stuttgart Planungsamt, Abt. Verkehr,
- [54] Oeding, D.: Verkehrsbelastung und Dimensionierung von Gehwegen und anderen Anlagen des Fußgängerverkehrs. Straßen und Straßenverkehrstechnik, 1963 Heft 22 Forschungsberichte.
- [55] Ontario Government: Ontario Highway Bridge Design Code ONT 83, 2000.
- [56] Pavic A., Yu C.H., Brownjohn J., Reynolds P.: Verification of the existence of humaninduced horizontal forces due to vertical jumping, in: Proceedings of IMAC XX, Vol. 1, pp. 120–126. Los Angeles, CA, February 4–7, 2002.
- [57] Pernica G.: Dynamic load factors for pedestrian movements and rhythmic exercises. Canadian Acoustics - Institute for Reaserch in Construction, (18(2)) p. 3-18, 1990.
- [58] Petersen C.: Dynamik der Baukonstruktion, Vieweg, 1996.

- [59] Petersen C.: Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau, Vieweg, 1996.
- [60] Pimentel R., Frenandes H.: A simplified formulation for vibration serviceability of footbridges, in: Proceedings of the International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of Footbridges, Paris, France, November 20–22, 2002.
- [61] Primentel R.L., Pavic A., Waldron P.: Evaluation of design requirements for footbridges excited by vertical forces from walking, Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 28, pp. 769–777., 2001.
- [62] Rainer, J. H., Pernica, G. and Allen, D.E.: Dynamic loading and response of footbridges. Structures Section, Institute for Research in Construction, National Research Council of Canada, Ottawa, 1987.
- [63] Rainer, J. H., Pernica, G. and Allen, D.E.: Dynamic loading and response of footbridges, Canadian Journal of Civil Engineering 15 (1), pp. 66–71., 1988.
- [64] Schneider M.: Ein Beitrag zu fußgängerinduzierten Brückenschwingungen, Dissertation, Lehrstuhl für Baumechanik, Technische Universität München, München, 1991.
- [65] Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein: SIA 261, Einwirkungen auf Tragwerke, 2003.
- [66] Sétra Guide méthodologique passerelles piétones. , Sétra. Service d'études techniques des routes et autoroutes, Paris, 2006.
- [67] Spasojević-Šurdilović. M.: Modeliranje i analiza stanja napona i deformacija mostova sa kosim zategama pri faznom formiranju sistema pomoću privremenih oslonaca, magistarski rad, Građevinsko-arhitektonski fakultet u Nišu, 2007.
- [68] Spasojević A., Đorđević Đ., Spasojević-Šurdilović M., Spasojević N.: Some relevant aspects of footbridge vibrations, FactaUniversitatis, Series:Architecture and Civil Engineering, Vol.2, N° 4, 2002, pp. 273-280, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Univerzitet u Nišu, Niš, 2002.
- [69] Spasojević-Šurdilović M., Spasojević A., Spasojević N.: Specifična problematika projektovanja i izvođenja pešačkog mosta preko reke Nišave i Nišu, Treći internacionalni naučno-stručni skup, Građevinarstvo – nauka i praksa GNP, knjiga 1, pp. 643-648, Žabljak, Crna Gora, Februar 2010., Građevinski fakultet , Univerzitet Crne Gore, 2010.
- [70] Spasojević N., Stanković M., Spasojević-Šurdilović M. : Pešački most preko reke Nišave u Nišu, od ideje do realizacije, Nauka+Praksa, 2004, br 7, str. 25-31, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Univerzitet u Nišu, Niš, 2004.

[71] Stanimirović P., Milovanović G.: Programski paket mathematica i primene, Elektronski fakultet u Nišu, Univerzitet u Nišu, Niš, 2002.

[72] Tehnička dokumentacija za izgradnju pešačkog mosta od lepljenog lameliranog drveta preko reke Svrljiški Timok na lokaciji u Knjaževcu, Institut za građevinarstvo i arhitekturu, Građevinski fakultet Niš, Niš, 1990.

[73] Yao S., Wright J., Pavic A., Reynolds P.: Forces generated when bouncing or jumping on a flexible Structure, in: Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration, Vol.2, pp. 563–572, Leuven, Belgium, September 16–18, 2002.

[74] Yao S.: Wright J., Pavic A., Reynolds P., Sachse R.: The effect of people jumping on a flexible structure, in: Proceedings of IMAC XXI, Kissimmee, FL, February 3–6, 2003.

[75] Young P.: Improved floor vibration prediction methodologies, ARUP Vibration Seminar, October 4, 2001.

[76] Wheeler J. E.: Prediction and control of pedestrian induced vibration in footbridges, Journal of the structural division, American Society of Civil Engineers, 1982.

[77] Wheeler J. E.: Pedestrian induced vibrations in footbridges Proceedings ARRB Vol.10, part 3, 1980.

[78] Williams C., Rafiq M.Y., Carter A.: Human structure interaction: the development of an analytical model of the human body, International Conference: Vibration, Noise and Structural Dynamics '99, pp. 32–39, Venice, Italy, April 28–30, 1999.

[79] Živanović, S., Pavić, A. and Reynolds, P. :Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 279, 2005.



---

Прилог1.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом  
**Анализа граничног стања употребљивости пешачких мостова у погледу вибрација  
индукованих пешацима**

---

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација, ни у целини, ни у деловима, није била предложена за добијање било које дипломе, према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

У Нишу, 18.09.2014.

Аутор дисертације:  
др Марија Спасојевић-Шурдиловић

---

Потпис докторанда:

Марија Спасојевић-Шурдиловић





Прилог2.

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ  
ДИСЕРТАЦИЈЕ

Име и презиме аутора: др Марија Спасојевић-Шурдиловић

Студијски програм: Грађевинарство

Наслов рада: Анализа граничног стања употребљивости пешачких мостова у погледу  
вибрација индукованих пешацима

Ментор: Проф. др Драгослав Стојић

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације истоветна електронској верзији, коју сам предао/ла за уношење у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбра нерада, и то у каталог у Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 18.09.2014.

Аутор дисертације: др Марија Спасојевић-Шурдиловић

Потпис докторанда:

Марија Спасојевић-Шурдиловић



Прилог3.

### ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом: **Анализа граничног стања употребљивости пешачких мостова у погледу вибрација индукованих пешацима**

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да подвучете само једну од шест понуђених лиценци; кратак опис лиценци је у наставку текста).

У Нишу, 18.09.2014.

Аутор дисертације: др Марија Спасојевић-Шурдиловић

Потпис докторанда:

Марија Спасојевић-Шурдиловић