Univerzitet u Nišu
Prirodno-Matematički fakultet
Departman za matematiku

Radica R. Bojičić

IZRAČUNAVANJE HANKELOVE TRANSFORMACIJE NIZOVA

Doktorska disertacija

Niš, 2014

University of Niš
Faculty of Science and Mathematics
Department of mathematics

Radica R. Bojičić

COMPUTATION OF THE HANKEL TRANSFORM OF SEQUENCES

PhD thesis

Niš, 2014

"I ja vam kažem:
Ištite i daće vam se!
Tražite i naći ćete!
Kucajte i otvoriće se!
(Luka, 11:9)

Mentor:

Prof. dr Marko Petković,
vanredni profesor Prirodno-Matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu.

Članovi komisije:

1. **Prof. dr Jelena Manojlović**,
   redovni profesor Prirodno-Matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu,
2. **Prof. dr Predrag Rajković**,
   redovni profesor Mašinskog fakulteta Univerziteta u Nišu.

Datum odbrane:

Zavolela sam matematiku odavno, čini mi se od kad znam za sebe. Još uvek se sećam nekih zanimljivih problemčića koje mi je pokojni deda zadavao da rešavam. Sećam se i svoje prve "zarađene crvene novčanice" koju sam dobila od njega kada sam za jedno popodne naučila tablicu množenja. Sećam se i da je on prvi pomenuo da veruje da ću jednom postati "doktor matematike" i samo po njegovom ponosnom izrazu lica sam mogla da zaključim da je to nešto važno i veliko. Sećam se i njegovog stiska ruke i srećnog pogleda kada sam mu pokazala indeks i saopštila vest da sam upisala matematiku. Reči nije bilo, jer se tad već gasio njegov život. Nije bio sa nama da ga obradujem kad sam diplomirala, magistrirala, objavila svoj prvi rad, prezentovala po prvi put svoj rad na konferenciji... Evo me, deda, na korak od toga da shvatim šta znači biti "doktor matematike"!

Imala sam sreću da su mi matematiku predavali, ne samo njeni izvrsni poznavaoci, nego i njeni veliki obožavaoci. Ne mogu a da ne pomenem učiteljicu Stevanu Kovačević i prva mesta na takmičenjima iz matematike koja sam postigla zahvaljujući njoj. Zatim, nastavnika i razrednog starešinu, velikog čoveka sa još većom dušom, Radivoja Manojlovića-Divču, koga doživljavam kao člana porodice. Tu je i profesor Ljubisav Stevović, bez čije stručne pomoći i velikog znanja ne bih uspela ni da upišem fakultet.

Da se ostvarim u svojoj omiljenoj oblasti matematike, oblasti diferencijalnih jednačina, zahvalnost dugujem prof. dr Jeleni Manojlović. Pod njenim mentorstvom i velikom pomoći sam postavila, a zatim i dokazala svoju prvu, samostalnu teoremu, pa zatim i drugu, treću... Na kraju i magistrirala. Još jednu zahvalnost joj dugujem, a to je što me je upoznala i predložila saradnju sa sadašnjim mentorom.

Veliku zahvalnost osećam i prema prof. dr Predragu Rajkoviću zbog nesebične pomoći, korisnih saveta, inspirativnih ideja, ali i zbog motivacije i velikog optimizma kojim zrači.

Linearna algebra nikad nije bila među mojim omiljenim predmetima. Do pre nešto više od tri godine kad sam upoznala prof. dr Marka D. Petkovića, mog sadašnjeg mentora i dobrog prijatelja.

Zadivilo me je koliko znanja poseduje, koliko definicija, pojmova, teorema, pa i čitavih teorija, koliko oblasti matematike i nauke uopšte nosi u sebi. Uz tu "živu enciklopediju", Ruđera Boškovića našeg doba sam, ne samo zavolela linearnu algebru, nego i upoznala lepotu programskog paketa MATHEMATICA, naučila da mi bude sastavni deo bilo kakvog rada u matematici, savladala LaTeX i sve prednosti njegovog korišćenja, ovladala engleskim jezikom i naučila da pišem radove, naučila da istražujem, postavljam probleme, dokazujem nove činjenice, potvrđujem neke već dokazane. Zato ne postoje dovoljno velike reči kojima bih mu na adekvatan način iskazala zahvalnost za sve ovo.

Zahvalnost dugujem i rektoru Univerziteta u Prištini, prof. dr Srećku Milačiću koji mi je ukazao veliku čast i poverenje da me, tada kao dekan Ekonomskog fakulteta u Kosovskoj Mitrovici, primi za asistenta i omogući moje napredovanje u matematici. Prof. dr Milana Božinovića mogu da pominjem i da mu se zahvaljujem bez prestanka, a da opet ne iskažem sve što želim. Nema tih reči koje bi oslikale svu podršku, svo poverenje i sve pohvale koje sam dobila od njega.

Zahvalila bih se bih i svojoj porodici, koja je za razliku od ove zahvalnice, na čijem je kraju, u mom životu na vodećem mestu. Tati i mami što su istrpeli sve promene u mom raspoloženju, od nerviranja kod mnogobrojnih pokušaja da neka teorema ili formula "prođe", pa do euforije kad iz nekog eminentnog časopisa stigne vest da je rad prihvaćen. Batu i Ljilji uz koje sam rasla i odrasla, sazrela i postala bolji čovek zahvaljujući njihovim vrlinama i plemenitim srcima. Zato što su se radovali mojim uspesima, bili moj oslonac u životu i nesebično mi pomagali uvek i u svemu. Điki i Njaki, na snazi, razumevanju, podršci koju su mi davale u ogromnim količinama. Što me toliko vole i veruju u mene. Što su pristajale da budu moji slušaoci i kad, verovatno, ni reč nisu razumele. Što su morale i da "ovladaju" terminima poput težinske funkcije, Hankelovih determinanti ili Motzkinovih brojeva, iako im je, kao vrsnim terapeutima, kako nešto najmanje potrebno. Jovani, prosto što je takvo dete, najbolje koje znam. Za nju jedno veeeliko "mmmmmmmm". Vasiliju, što nas je toliko usrećio, vratio nadu i uneo radost u naše živote.

Svim mojim prijateljima koje sam malo zapostavila zbog izrade ovog rada, zahvaljujem na prijateljstvu, podršci i razumevanju.

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	**монографска**
Тип записа, **ТЗ**:	**текстуални**
Врста рада, **ВР**:	**докторска дисертација**
Аутор, **АУ**:	**Радица Р. Бојичић**
Ментор, **МН**:	**Марко Петковић**
Наслов рада, **НР**:	**Израчунавање Ханкелове трансформације низова**
Језик публикације, **ЈП**:	**српски**
Језик извода, **ЈИ**:	**енглески**
Земља публиковања, **ЗП**:	**Србија**
Уже географско подручје, **УГП**:	**Србија**
Година, **ГО**:	**2014.**
Издавач, **ИЗ**:	**ауторски репринт**
Место и адреса, **МА**:	**Ниш, Вишеградска 33.**
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	
Научна област, **НО**:	**математика**
Научна дисциплина, **НД**:	**линеарна алгебра**
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	**теорија апроксимација**
УДК	**512.64**
Чува се, **ЧУ**:	**библиотека**
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Ханкелове детерминанте (персиметричне, Туранове детерминанте) као детерминанте Ханкелових матрица се проучавају већ дуже време. До сада је откривено више различитих метода за рачунање Ханкелових детерминанти. Осим што се публиковани радови на ову тему разликују по методима које аутори користе, разликују се још по класи низова које проучавају. Ханкелове детерминанте имају велику примену у различитим областима математике, физике и техничким наукама. Значајна је њихова примена у комбинаторици, односно у пребројавању различитих комбинаторних објеката. Главни задатак ове докторске дисертације биће допринос великој теорији Ханкелових трансформација на пољу симболичког израчунавања за одабране целобројне низове.
Датум прихватања теме, **ДП**:	**13.05.2013.**
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан, ментор:	

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Radica R. Bojičić**
Mentor, **MN**:	**Marko Petković**
Title, **TI**:	**COMPUTATION OF THE HANKEL TRANSFORM OF SEQUENCES**
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2014.**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	
Scientific field, **SF**:	**mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**linear algebra**
Subject/Key words, **S/KW**:	**theory of approximations**
UC	**512.64**
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	Hankel determinants (persymmetric, Turan determinants) have been studying for a long time. Until now, many different methods for computation of Hankel determinants have been constructed. Also, those methods are applied on a different number sequences. Hankel determinants have many applications in mathematics, physics and technical sciences. Hankel determinants play a main role in counting many different combinatorial objects. The main goal of this doctoral thesis is the symbolic computation of the Hankel determinants(transformation) of some classes of integer sequences.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	**13.05.2013.**
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member, Mentor:	

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Sedamdesetih godina prošlog veka, kada se javljaju prva začeća simboličkog izračunavanja (kompjuterske algebre), prvi implementirani algoritmi su bili komplikovani i prilično neefikasni. Zbog toga je istraživanje u ovoj oblasti bilo usmereno ka izvođenju novih teorijskih rezultata, prvenstveno u oblasti algebre, koji su kasnije iskorišćeni za poboljšanje algoritama u kompjuterskoj algebri. Danas se kompjuterska algebra masovno koristi kao pomoćno sredstvo za izvođenje i verifikaciju komplikovanih izraza. Takođe se koristi i za implementaciju numerički nestabilnih metoda, koji zahtevaju izračunavanja u aritmetici visoke preciznosti. Danas postoji više programskih paketa koji podržavaju simboličko računanje. Oni se nazivaju *softveri za kompjutersku algebru* (CAS, *Computer Algebra Software*), npr. MATHEMATICA, MAPLE, MUPAD, itd.

Najpoznatiji i ujedno najmoćniji CAS softver kada je u pitanju simboličko računanje je MATHEMATICA. Najvažnije svojstvo ovog programa je to da simbolički računa jednako dobro kao i numerički.

Literatura vezana za programski jezik MATHEMATICA je veoma obimna. U tom bogatom opusu, možemo izdvojiti oficijalne knjige autora Stephena Wolframa [115, 114, 116], pregledni rad [4], kao i knjige objavljene na srpskom jeziku [103, 66].

Međutim, ono što se proteže dugi niz godina je, da je ostala potreba matematike, ali i nauke uopšte, da se i dalje razvijaju metodi klasične, teorijske algebre, kako bi se, primenom njenih rezultata, poboljšao kavalitet, ali i efikasnost ne samo kompjuterske algebre, nego i drugih, srodnih grana matematike.

Hankelove determinante (persimetrične, Turanove determinante) kao determinante Hankelovih matrica se proučavaju već duže vreme. Međutim, pojam "Hankelova transformacija" uveo je prvi Layman 2001. godine u svom radu [68]. Do sada je otkriveno više različitih metoda za računanje Hankelovih determinanti. Možemo izdvojiti metod Dodgsonove kondenzacije, koji je primenljiv i u slučaju proizvoljne determinante, metod LU dekompozicije [63], metod baziran na rezultatima Radouxa i Junoda [91, 92, 93], koji su novijeg datuma, a koji koriste funkcije generatrise polaznog niza momenata. Zanimljiv je i metod koji su postavili Eğecioğlu, Redmond i Ryavec [41], a koji povezuje računanje Hankelovih determinanti sa rešavanjem diferencijalnih konvolucionih jednačina i može se primeniti u nekim slučajevima gde drugi metodi ne mogu. U poslednje vreme kod kombinatoričara često primenjivan metod, je Gessel-Viennot-Lindströv (G-V-L) metod [52, 69, 109] koji nam daje vezu između Hankelove transformacije i broja putanja u (celobrojnoj) mreži.

Ipak, najčešće proučavan i primenjivan metod je metod zasnovan na ortogonalnim polinomima, tj. metod baziran na verižnim razlomcima.

Hankelove determinante imaju veliku primenu u teoriji ortogonalnih polinoma, numeričkoj matematici a takođe i u drugim oblastima matematike i tehničkim naukama. Naročito je važno izračunavanje ovih determinanti u zatvorenom obliku. U skorije vreme publikovan je veći broj naučnih radova u kojima se računaju Hankelove determinante različitih nizova celih brojeva. Objavljen je i veći broj preglednih radova na ovu temu (npr. radovi Krattentnhalera [62, 63]).

Osim što se publikovani radovi na ovu temu razlikuju po metodima koje autori koriste, razlikuju se još po klasi nizova koje proučavaju. Napomeninimo da su mnogi poznati rezultati formulisani za nizove celih brojeva, ali da u opštem slučaju važe za proizvoljne realne nizove. Izraz u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju je do sada nađen za veliki broj poznatih celobrojnih nizova, kao što su nizovi: Fibonaccijevih brojeva [34], Catalanovih i isprekidanih Catalanovih brojeva [34, 94], Motzkinovih brojeva [24], malih i velikih Schröderovih brojeva [23], Jacobsthalovih brojeva [9], centralnih i generalizovanih centralnih trinomnih koeficijenata [87], Narayana polinoma [88], itd. Pored toga, za neke od tih nizova, brojni rezultati iz ove oblasi su potvrđeni na više različitih načina.

Tako su, na primer, Hankelovu transformaciju zbira dva uzastopna Catalanova broja prvi izračunali A. Cvetković, P. M. Rajković i M. Ivković [34] koristeći metod baziran na ortogonalnim polinomima. Sa druge strane, Chamberland i French [25] dokazuju još opštiji rezultat koristeći potpuno drugačiji metod (uglavnom baziran na LU faktorizaciji). Još jedna generalizacija pomenutog rezultata iz [34] može se naći u radu [94] P. M. Rajkovića, M. D. Petkovića i P. Barryja.

Hankelove determinante imaju veliku primenu u različitim oblastima matematike, fizike i tehničkim naukama. Značajna je njihova primena u kombinatorici, odnosno u prebrojavanju različitih kombinatornih objekata (Astečkih dijamanata, puteva u celobrojnim mrežama, itd.) U fizici čvrstog stanja, Hankelove determinante se pojavljuju kao rešenje Toda jednačine kao i kod još nekih jednačina koje imaju bitnu ulogu u povezivanju teorije kvantne gravitacije i teorije solitona. Primenjuju se takođe i u numeričkoj matematici kao i u tehničkim naukama, a naročito u automatici i sistemima automatskog upravljanja. Utvrđena je i veza između Hankelovih determinanti i sistema kompjuterske algebre, a dat je i jedan algoritam za računanje najvećeg zajedničkog delioca polinoma zasnovan baš na Hankelovim matricama.

Ova doktorska disertacija predstavlja dodatak velikoj teoriji Hankelovih transformacija na polju simboličkog izračunavanja za odabrane celobrojne nizove. Ona sadrži rezultate iz različitih oblasti linearne algebe kao što su teorije: ortogonalnih polinoma, specijalnih nizova, determinanti, matrica, analitičkog izračunavanja i raznih transformacija redova, ali i elemente kompleksne analize, rešavanja diferencnih jednačina, numeričke matematike, itd...

Disertacija je bazirana na originalnim rezultatima autora koji su publikovani u vodećim međunarodnim časopisima iz oblasti linearne algebre i specijalnih funkcija [16, 15, 17]. Takođe, sadrži i značajan broj rezultata koji se ovom prilikom prvi put pojavljuju [18, 19].

Rad je podeljen u 7 glava, svaka glava je podeljena na više poglavlja, a neka poglavlja i na odeljke.

Rezultati sadržani u drugoj glavi odnose se na simboličko izračunavanje Hankelovih determinantni, odnosno Hankelovih transformacija nizova. U prvom poglavlju ove glave navedene su osnovne definicije i pojmovi vezani za nizove celih brojeva, ali i primeri nekih poznatih nizova zajedno sa nekim njihovim zanimljivim osobinama. Drugo poglavlje sadrži pregled važnih transformacija nizova celih brojeva, uključujući binomnu, α-binomnu, invert kao i Hankelovu transformaciju. Prikazana su i osnovna svojstva ovih transformacija i nabrojane neke primene

Hankelove transformacije u nauci. Osnovni metodi za izračunavanje Hankelove transformacije su predmet proučavanja narednog, trećeg poglavlja. To su metod Dodgsonove kondenzacije i Radoux-Junodov metod. U četvrtom poglavlju je izložena teorija ortogonalnih polinoma, navedena su njihova osnovna svojstva sa posebnim osvrtom na tročlanu rekurentnu relaciju. Peto poglavlje je posvećeno upoznavanju metoda za računanje Hankelove transformacije pomoću verižnih razlomaka i ortogonalnih polinoma. Takođe je prikazan metod za nalaženje težinske funkcije primenom Stieltjesove inverzione formule, kao i metodi za transformaciju težinske funkcije. Ovo poglavlje ujedno predstavlja i osnovu razvoja teorije u daljem radu ove disertacije.

Treća glava ovog rada posvećena je metodima za izračunavanje Hankelove transformacije nizova zadatih inverznim redom. U prvom poglavlju ove glave definisan je inverzni red neke racionalne funkcije i data njegova najvažnija svojstva. Posebna pažnja je posvećena nizu $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ koji je zadat inverznim redom funkcije $Q(x) = \frac{x}{1+\alpha x+\beta x^2}$, dok je traženje njegove moment reprezentacije glavni cilj drugog poglavlja. U trećem poglavlju ove glave su izračunate Hankelove transformacije h_n^* i h_n^{**} pomerenih nizova u_n^* i u_n^{**} definisanih sa $u_n^* = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $u_n^{**} = (u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Glavni cilj ove glave, pronalaženje izraza u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju niza $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, je ostvaren u četvrtom poglavlju, dok su u poslednjem, petom, uspostavljene neke relacije koje, prethodno pomenute Hankelove transformacije zadovoljavaju. Definisan je i novi problem koji bi trebalo da bude smernica u daljem proučavanju ove problematike. Rezultati izloženi u ovoj glavi su originalni i zasnovani su na radu [16].

U narednoj, četvrtoj glavi su iznešeni rezultati vezani za Hankelovu transformaciju isprekidanih nizova. Prvo poglavlje je posvećeno definisanju isprekidanih nizova, ali i uvođenju novih vrsta transformacija nizova: isprekidane, α-isprekidane i isprekidane-Hankelove transformacije. Izračunavanje Hankelove determinante i determinante nalik-Hankelovoj koje su bazirane na Catalanovim brojevima predstavljaju glavni zadatak drugog poglavlja, dok se u trećem poglavlju bavimo Hankelovom transformacijom niza isprekidanih pomerenih Catalanovih brojeva. U četvrtom poglavlju ove glave je obrađena generalizacija rezultata datih u trećoj glavi ovog rada, a koji se odnose na Hankelovu transformaciju inverznog reda funkcije $Q(x) = \frac{x}{1+\alpha x+\beta x^2}$, kao i odgovarajućih pomerenih nizova. Sledeće poglavlje nam donosi izraze za Hankelove transformacije generalizacije niza u_n i odgovarajućih pomerenih nizova. Dokaz ovih izraza je baziran na primeni opadajuće α-binomne transformacije i rezultatima dobijenim u prethodnom poglavlju. Za razliku od prethodnih rezultata koji su dobijeni uglavnom korišćenjem metoda baziranog na ortogonalnim polonomima, pristup koji je korišćen u ovoj glavi zasnovan je na rezultatima Gessela i Viennota [49] i nekih novijih rezultata Krattenthalera [64]. Rezultati izloženi u ovoj glavi su originalni i preuzeti iz rada [17].

Nastavak ideje iznešene u Glavi 3 je dat u petoj glavi ovog rada, u kojoj je glavni zadatak traženje izraza u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju inverznog reda $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ funkcije $\frac{x(1-\alpha x)}{1-\beta x}$, ali i odgovarajućih pomerenih nizova $(v_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(v_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$. U prvom poglavlju ove glave su iznešeni pojmovi i svojstva pomenutog reda, dok je traženje njegove moment reprezentacije glavni zadatak narednog, drugog poglavlja. Treće poglavlje, ključno u ovoj glavi, se sastoji od pronalaženja izraza u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju kako niza $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, tako i njegovih pomerenih nizova $(v_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(v_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$, ali i niza $\tilde{v}_n$ koji se od početnog niza $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ razlikuje samo u početnom članu, tj. u članu sa indeksom 0. Hankelova transformacija inverznog reda $x(1-\alpha x)$ i LU-faktorizacija Hankelove matrice H_n^* je tema poslednjeg poglavlja ove glave. Rezultati izloženi u ovoj glavi su originalni i objavljeni u radu [15].

Hankelova transformacija nizova baziranih na Motzkinovim brojevima je predmet proučavanja šeste glave ove disertacije. Prvo poglavlje je posvećeno definiciji i uvodnom pojmovima vezanim za Motzkinove brojeve. U drugom poglavlju je izvedena moment reprezentacija Motzkinovih brojeva kao i izraz u zatvorenom obliku za njihovu Hankelovu transformaciju. Hankelova transformacija linearne kombinacije $(m_{n+1} - c \cdot m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dva uzastopna Motzkinova broja, kao i njeni specijalni slučajevi za različite vrednosti konstanti c, su detaljno proučeni u trećem poglavlju ove glave. Hankelova transformacija linearne kombinacije $m_{n+2} - a \cdot m_{n+1} + b \cdot m_n$ tri uzastopna Motzkinova broja je, kako se može videti u četvrtom poglavlju, znatno teži i obimniji zadatak. U opštem slučaju, za proizvoljne vrednosti konstanti a i b nije nađen izraz u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju, ali je to urađeno za neke konkretne vrednosti ovih parametara. Neki od tih rezultata predstavljaju novine u ovoj teoriji, dok su drugi potvrde nekih dobro poznatih rezultata, ali dokazane na drugačiji način. U petom poglavlju je data još jedna linearna kombinacija i Hankelova transformacija niza m_{n+3}. Šesto, poslednje poglavlje ove glave predstavlja rezime novih rezultata navedenih u celoj ovoj glavi.

Predmet proučavanja poslednje, sedme glave ove disertacije su (u, l, d)-Motzkinovi brojevi i Hankelove transformacije nizova zasnovanih na njima. U prvom poglavlju je uvedena definicija (u, l, d)-Motzkinovih brojeva kao i osnovni pojmovi vezani za njih, dok je njihova moment reprezentacija i Hankelova transformacija predstavljena u narednom, drugom poglavlju. Treće poglavlje nam donosi izraz u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju zbira dva uzastopna (u, l, d)-Motzkinova broja, dok su naredna dva vezana za traženje odgovarajućih izraza za Hankelovu transformaciju pomerenih (poglavlje 4) i zbira dva pomerena (poglavlje 5) (u, l, d)-Motzkinova broja. Kao što se može videti u ostatku ove glave, u prvom slučaju je nađen traženi izraz u zatvorenom obliku, dok je u drugom nađena diferencna jednačina koju ta transformacija zadovoljava. Treba napomenuti da su sve formule dobijene u ovoj glavi svedene na slučaj t-Motzkinovih brojeva (kada je $(u, l, d) = (1, t, 1)$), odnosno na slučaj (klasičnih) Motzkinovih brojeva (kada je $(u, l, d) = (1, 1, 1)$). Tamo gde je to bilo moguće izračunati su i koeficijenti odgovarajuće tročlane rekurentne relacije.

Sve formule koje su dobijene tokom istraživanja na temu Hankelovih transformacija i iznešene u ovoj disertaciji su proverene u programskom paketu MATHEMATICA. Ovaj programski paket je intenzivno korišćen za manipulaciju izrazima, što je umnogome olakšalo izvođenje glomaznih formula koje se javljaju kao međurezultati ili krajnji rezultati izračunavnaja.

Glava 2

Simboličko izračunavanje Hankelovih determinanti

Hankelove determinante, kao posebna klasa determinanti, predstavlja, u suštini, jednu transformaciju (Hankelovu transformaciju) definisanu na skupu nizova (celih brojeva ili u opštem slučaju realnih, odnosno, kompleksnih brojeva). Njihovo simboličko izračunavanje je glavna tema ove glave. Prvo su uvedeni osnovni pojmovi i glavne definicije, a zatim su opisani različiti metodi za računanje Hankelovih determinanti koji će kasnije biti iskorišćeni za izračunavanje Hankelove transformacije različitih klasa nizova.

2.1 Celobrojni nizovi i njihova svojstva

Svaka funkcija oblika

$$a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$$

predstavlja niz realnih brojeva. Označimo sa $a_n = a(n)$ opšti član niza a, a sam niz sa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Predmet našeg interesovanja u daljem radu najviše su nizovi celih brojeva tj. nizovi

$$a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z},$$

a i mnogi poznati rezultati koji su navedeni, su u originalu formulisani samo za nizove celih brojeva. Međutim, treba naglasiti da u opštem slučaju oni važe za proizvoljne realne nizove.

Nizovi se često zadaju pomoću *funkcije generatrise* (o.g.f, *ordinary generating function*). Tako je za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ funkcija generatrisa $g(x)$ funkcija definisana sa

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Osim ovog postoji još jedan tip funkcije generatrise, tzv. *eksponencijalna funkcija generatrisa* (e.g.f, *exponential generating function*). Za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eksponencijalna funkcija generatrisa $e(x)$ definisana je sa

$$e(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Možemo da primetimo da je eksponencijalna funkcija generatrisa niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ustvari jednaka funkciji generatrisi niza $(a_n/n!)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kažemo da je *niz momenata* mere μ ako važi

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x).$$

Ovakve nizove ćemo vrlo često koristiti u daljem radu.

U daljim razmatranjima često ćemo se pozivati na Online enciklopediju celih brojeva (EIS) [101]. Ova enciklopedija je najveća poznata arhiva nizova celih brojeva i sadrži mnoštvo informacija i svojstava za svaki od nizova u njoj (opšti član, funkciju generatrisu, e.g.f, itd...). Autor ove enciklopedije je Neil J. A. Sloane. Na primer, niz Catalanovih brojeva je u ovoj enciklopediji označen sa (A000108).

Navešćemo nekoliko poznatih brojnih nizova, kao i njihove najpoznatije karakteristike i zanimljiva svojstva.

Primer 2.1.1. Niz Catalanovih brojeva (A000108) $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definisan sa $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ ima funkciju generatrisu

$$c(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Ovo je jedan od najproučavanijih i ujedno i najbitnijih nizova celih brojeva. Catalanovi brojevi C_n predstavljaju niz momenata težinske funkcije

$$\omega(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{x(4-x)}}{x}dx$$

na intervalu $[0,4]$. Prema tome važi

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^4 x^n \frac{\sqrt{x(4-x)}}{x}dx.$$

Niz isprekidanih Catalanovih brojeva $(C(\lfloor n/2\rfloor)(1+(-1)^n)/2)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (prvih nekoliko članova ovog niza su $1,0,1,0,2,0,5,0,\ldots$) može biti predstavljen kao niz momenata na sledeći način.

$$C(\lfloor n/2\rfloor)\frac{1+(-1)^n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^2 x^n\sqrt{4-x^2}dx.$$

Da bi dokazali poslednji izraz, dovoljno je da uočimo da je $x^n\sqrt{4-x^2}$ neparna funkcija za neparne vrednosti broja n, pa je njen integral na segmentu $[-2,2]$ jednak nuli. Za parne vrednosti broja n, $n=2k$ važi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^2 x^{2k}\sqrt{4-x^2}dx = 2\int_0^4 y^n\sqrt{4-y}\frac{dy}{\sqrt{y}} = C_k.$$

Primer 2.1.2. Pod generalisanim Fibonaccijevim brojevima podrazumevamo rešenje sledeće linearne diferencne jednačine

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \qquad x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n \qquad (n\in\mathbb{N}_0;\ a,b\in\mathbb{R})\ . \tag{2.1}$$

gde su a,b dati brojevi.

Niz generalisanih Fibonaccijevih brojeva predstavlja uopštenje sledećih nizova:

(1) Fibonaccijevi brojevi A000045 odgovaraju slučaju $a=b=1$: $0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots;$

(2) Jacobsthalovi brojevi A001045 odgovaraju slučaju $a=1$ i $b=2$: $0,\ 1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 11,\ \ldots;$

(3) Pellovi brojevi A000129 odgovaraju slučaju $a=2$ i $b=1$: $0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ldots.$

Rešenje jednačine (2.1) očigledno ima sledeću funkciju generatrisu

$$g(x) = \frac{x}{1 - ax - bx^2} \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \; . \tag{2.2}$$

Dakle, možemo zaključiti da Fibonaccijevi brojevi $F(n)$ imaju funkciju generatrisu

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F(n)x^n.$$

Zanimljivo je primetiti još da niz $F(2n+1)$ čiji su prvi članovi $1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 34,\ \dots$ ima funkciju generatrisu $g(x) = \frac{1-x}{1-3x+x^2}$, dok je funkcija generatrisa niza $F(2n+2)$ čiji su prvi članovi $1,\ 3,\ 8,\ 21,\ 55,\ \dots$ data sa $g(x) = \frac{1}{1-3x+x^2}$.

Primer 2.1.3. Niz $(m_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (A001006) Motzkinovih brojeva, čiji su prvi članovi $1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, \dots$ ima veliku primenu u geometriji, kombinatorici i teoriji brojeva. Poznato je da zadovoljvaju rekurentnu relaciju

$$m_{n+1} = m_n + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot m_{n-1-i} = \frac{2n+3}{n+3} \cdot m_n + \frac{3n}{n+3} \cdot m_{n-1}$$

i da im je funkcija generatrisa

$$M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k x^k = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x^2}.$$

Osim toga, funkcija $M(x)$ zadovoljava jednakost $M(x) = 1 + xM(x) + x^2M^2(x)$.

Primer 2.1.4. Niz centralnih binomnih koeficijenata, $1, 2, 6, 20, 70, \dots$ (A000984) čiji je opšti član $\binom{2n}{n}$ možemo da predstavimo kao momente težinske funkcije

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^4 \frac{x^n}{\sqrt{x(4-x)}} dx.$$

Niz isprekidanih centralnih binomnih koeficijenata, $1, 0, 2, 0, 6, 0, 20, 0, \dots$ čiji su članovi sa parnim indeksom nula a neparni jednaki centralnim binomnim koeficijentima $\binom{2n}{n}$ ima opšti oblik

$$e_n = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

Eksponencijalna funkcija generatrisa ovog niza je jednaka $J_0(2x)$ gde je $J_0(x)$ Besselova funkcija prve vrste, tj. važi

$$J_0(2x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{n/2} \frac{(1 + (-1)^n)}{2n!} x^n.$$

Primer 2.1.5. Narayana brojevi $(N(n,k))_{n,k\in\mathbb{N}_0}$ su definisani na sledeći način [70, 101, 104]:

$$N(0,k) = N(k,0) = \delta_{k0} \quad (k \in \mathbb{N}_0), \qquad N(n,k) = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1} \quad (n,k \in \mathbb{N}), \tag{2.3}$$

gde je sa δ_{ij} označena Kronecker-ova delta funkcija. Ovom nizu (A001263) odgovara niz *Narayana polinoma* $(a(n;r))_{n\in\mathbb{N}_0}$ koji je definisan sa

$$a(n;r) = \sum_{k=0}^{n} N(n,k) r^k. \tag{2.4}$$

Narayana brojevi i polinomi zaokupljaju veliku pažnju mnogih kombinatoričara (na primer [6, 21, 104]). Vezu između Narayana brojeva i broja putanja u celobrojnoj mreži (tzv. rešetkastih putanja) je proučavao i R.A. Sulanke u [104]. Sulanke je posmatrao putanje u celobrojnoj rešetki $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ od $(0, -1)$ do (n, n) i dokazao da je broj tih putanja dužine k čija je dužina koraka iz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, takvih da cela putanja ostaje strogo iznad linije $y = x - 1$, jednaka $N(n,k)$.

2.2 Najčešće transformacije nizova

U ovom poglavlju su izložene sledeće transformacije brojevnih nizova: binomna, α-binomna, invert i Hankelova transformacija, kao i najvažnija njihova svojstva.

2.2.1 Binomna, α-binomna i invert transformacija

Definicija 2.2.1. *Binomna transformacija datog niza $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan sa*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Binomnu transformaciju označavaćemo sa $\mathbf{B}$ i pisaćemo $b = \mathbf{B}(a)$.

Ova važna transformacija nizova realnih brojeva je invertibilna. Sledeća lema opisuje inverznu transformaciju $\mathbf{B}^{-1}$ binomnoj transformaciji.

Lema 2.2.1. *Binomna transformacija je invertibilna. Ako važi $b = \mathbf{B}(a)$ onda je*

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

Ukoliko koristimo funkciju generatrisu za opisivanje niza, tada je binomna transformacija niza čija je funkcija generatrisa $g(x)$, niz čija je funkcija generatrisa jednaka $\frac{1}{1-x} g(\frac{x}{1-x})$. Slično, ukoliko niz opisujemo eksponencijalnom funkcijom generatrisom $e(x)$, tada je binomna transformacija ovog niza niz čija je eksponencijalna funkcija generatrisa jednaka $\exp(x)e(x)$.

Primer 2.2.1. Ukoliko dvaput primenimo binomnu transformaciju na niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ isprekidanih centralnih binomnih koeficijenata dobijamo niz centralnih binomnih koeficijenata $(\binom{2n}{n})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Polazni niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ima funkciju generatrisu $\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$. Primenjujući binomnu transformaciju na ovu funkciju generatrisu dobijamo

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 4(\frac{1}{1-x})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x - 3x^2}}.$$

Ova funkcija predstavlja funkciju generatrisu niza centralnih trinomnih koeficijenata (A002426). Ako još jednom primenimo binomnu transformaciju dobijamo sledeću funkciju generatrisu

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{x}{1-x} - 3(\frac{x}{1-x})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

Ovako dobijena funkcija je funkcija generatrisa niza centralnih binomnih koeficijenata. Posmatrajmo sada eksponencijalne funkcije generatrise. Možemo zaključiti da niz $\binom{2n}{n}$ ima eksponencijalnu funkciju generatrisu jednaku $\exp(2x)J_0(2x)$.

Rastuću i opadajuću α-binomnu transformaciju su definisali Spivey i Stail u radu [102]. Podsetimo se da je binomna transformacija niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{B}(a)$ definisan sa

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i. \tag{2.5}$$

Definicija 2.2.2. *Rastuća i opadajuća α-binomna transformacija niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ su redom nizovi $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{Br}(a;\alpha)$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{Bf}(a;\alpha)$ definisani sa*

$$r_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha^i a_i; \qquad f_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \alpha^{n-i} a_i. \tag{2.6}$$

Jasno je iz (2.6) da važi $\mathbf{B}(a) = \mathbf{Br}(a;1) = \mathbf{Bf}(a;1)$. Prema tome, rastuća i opadajuća α-binomna transformacija predstavljaju uopštenja binomne transformacije.

Definicija 2.2.3. *Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz koji zadovoljava uslove $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$ i neka je $f(x)$ funkcija generatrisa ovog niza. Invert transformacija niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ čija je funkcija generatrisa $g(x)$ definisana na sledeći način*

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 - f(x)}.$$

Invert transformaciju označimo sa **INV** *i zapišimo kao $b = \mathbf{INV}(a)$.*

2.2.2 Hankelova transformacija

Definišimo Hankelovu transformaciju koju ćemo proučavati u nastavku ovog rada.

Definicija 2.2.4. Hankelova transformacija *datog niza $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ determinanti Hankelovih matrica $H_n = [a_{i+j-2}]_{i,j=1}^{n}$, tj.*

$$a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \Longrightarrow^{\mathbf{H}} \quad h = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}: \quad h_n = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & & a_{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & a_{n+1} & & a_{2n} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Hankelovu transformaciju označavaćemo sa **H** *i pisaćemo $h = \mathbf{H}(a)$.*

Hankelove determinante se još nazivaju i *persimetrične* ili *Turanove* determinante. Iako se determinante Hankelovih matrica proučavaju već duže vreme, smatra se da je termin Hankelova transformacija uveo Layman 2001. godine u radu [68]. U istom radu, Layman je dokazao da je Hankelova transformacija invarijantna u odnosu na binomnu i invert transformaciju.

Teorema 2.2.2. [68] (Layman 2001) *Hankelova transformacija* **H** *je invarijantna u odnosu na binomnu transformaciju* **B** *kao i invert transformaciju* **INV**, *tj. važi $\mathbf{H}(\mathbf{B}(a)) = \mathbf{H}(a)$ i $\mathbf{H}(\mathbf{INV}(a)) = \mathbf{H}(a)$ za svaki niz $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Direktna posledica predhodne teoreme je važna činjenica da Hankelova transformacija **H** nije invertibilna.

Ono što treba naglasiti je da su neke vrste Hankelovih determinanti bile predmet proučavanja matematičara čak i više od 20 godina pre Laymana. Tako su, na primer, još 1976. godine J. W. Noonan i D. K. Thomas u [82] uveli pojam *q-te Hankelove determinante*, kao determinante oblika

$$H_q(k) = \det \begin{bmatrix} a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{k+q+1} \\ a_{k+1} & a_{k+2} & & a_{k+q+2} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{k+q-1} & a_{k+q+2} & & a_{k+2q-2} \end{bmatrix}$$

čiji su elementi $a_k, k > 1$, koeficijenti razlaganja analitičke funkcije oblika

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \qquad z \in U = \{z \in C, -1 < z < 1\}.$$

Oni su naročito proučavali problem *sekundarnih Hankelovih determinanti*, tzv. *Fekete-Szegöv problem*, odnosno ocenjivali vrednost determinante $H_2(2) = |a_2a_4 - a_3^2|$ u zavisnosti od vrste funkcije $f(z)$. Taj problem je aktuelan i današnje vreme, na primer u radovima [57, 79] se mogu pronaći jako interesantni rezultati na ovu temu.

Osim toga, godinu dana pre pomenutog Laymanovog rada, Pearth, Woan i Ehrenborg su objavili radove [83, 84, 40] u kojima su izračunavali Hankelove determinante u smislu Definicije 2.2.4. Izračunavanje determinante Hankelove matrice bilo je predmet proučavanja i rada [12] autora E. L. Basora, Y. Chena, H. Widoma, takođe nešto pre Laymana.

Postoji više različitih metoda za računanje Hankelovih determinanti. Neki od nih su primenljivi na izračunavanje bilo kojih determinanti. Veoma lep prikaz tih metoda kao i odgovarajućih primera, može se naći u radu Krattenthalera [62].

Najpoznatiji metodi za računanje Hankelovih determinanti su metod Dodgsonove kondenzacije (može se direktno primeniti na računanje Hankelovih determinanti), metod LU dekompozicije, metod koji su opisali Eğecioğlu, Redmond i Ryavec [41] (povezuje računanje Hankelovih determinanti sa rešavanjem diferencijalnih konvolucionih jednačina i može se primeniti u nekim slučajevima gde drugi metodi ne mogu). Još jedan, u poslednje vreme kod kombinatoričara često primenjivan metod, je Gessel-Viennot-Lindströv (G-V-L) metod [52, 69, 109] koji nam daje vezu između Hankelove transformacije i broja putanja u (celobrojnoj) mreži. Skorašnji primer primene G-V-L metoda za izračunavanje Hankelove transformacije dat je u radu [24]. Još nešto više i detaljnije o vezi između Hankelove transformacije i pomenutih putanja može se naći u [53, 105, 111]. Viennot [109] i Flajolet [45] su čak dali vezu između ortogonalnih polinoma, verižnih razlomaka i tih rešetkastih putanja.

Ipak, najpopularniji metod za računanje Hankelovih determinanti je metod baziran na verižnim razlomcima, odnosno ortogonalnim polinomima. Ovaj metod je detaljno proučen u naredna dva poglavlja.

Postoji priličan broj radova u kojima je na različite načine izračunata Hankelova transformacija mnogobrojnih klasa nizova. Osim pomenutog rada [62], slična tematika može se pronaći i u radovima [41, 63, 83, 91, 92, 93]. U narednom primeru razmotrićemo izračunavanje Hankelove transformacije nekih različitih nizova brojeva.

Primer 2.2.2. Hankelova transformacija niza Catalanovih brojeva $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz $(1)_{n\in\mathbb{N}_0}$, tj.

$$|1| = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{vmatrix} = 1, \qquad \dots$$

Hankelova transformacija niza centralnih binomnih koeficijenata čiji je opšti član $\binom{2n}{n}$ je niz $(2^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Drugim rečima važi

$$|1| = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 20 \\ 6 & 20 & 70 \end{vmatrix} = 4, \qquad \dots$$

Za mnoge nizove vrednosti Hankelove transformacije mogu se pronaći na EIS-u. Tako na primer, na EIS-u se može pronaći oko dvadesetak različitih nizova koji, osim pomenutog niza Catalanovih brojeva, imaju Hankelovu transformaciju $(1)_{n\in\mathbb{N}_0}$. M. Somos (videti niz A055209) je pronašao, i na EIS-u objavio deset nezavisnih nizova čija Hankelova transformacija iznosi $(\sum_{i=1}^{n}(i!)^2)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

2.2.3 Primena Hankelove transformacije

Postoji mnogo primena Hankelove transformacije (Hankelovih determinanti) u matematici, fizici i tehničkim naukama uopšte. Brojni problemi u kombinatorici su rešeni zahvaljujući baš Hankelovim determinantama. Primene u prebrojavanju Astečkih dijamanata mogu da se nađu, na primer u [23, 56]. Primena koja se tiče square-ice modela data je, na primer, u radu [31]. Veza između Hankelovih determinanti i sistema kompjuterske algebre je uspostavljena u [100]. Takođe je dat jedan algoritam za računanje najvećeg zajedničkog delioca polinoma zasnovan na Hankelovim matricama. Pre par meseci je objavljen rad u kome se Hankelove matrice primenjuju u identifikacionim sistemima [80].

U fizici, na primer, postoje brojni slučajevi kada rešenje tzv. Toda jednačine može da bude izraženo uz pomoḱ Hankelovih determinanti [59]. U zadnje vreme, Toda jednačinama se obraća posebna pažnja zbog njihove uloge u vezi izmedju teorija kvantne gravitacije i teorije solitona. Osim toga, korišćenjem Hankelove transformacije u fizici, rešene su neke parcijalne diferencijalne jednačine sa radijalnom i sfernom simetrijom [14].

Hankelove determinante ne gube na aktuenosti ni danas. Takođe interesantna primena Hankelovih determinanti može se naći u radovima [27, 36, 20].

2.3 Neki metodi za izračunavanje Hankelove transformacije

U ovom poglavlju su izložena dva osnovna metoda za računanje Hankelove transformacije. To su metod Dodgsonove kondenzacije i Radoux-Junodov metod baziran na funkcijama generatrisama. Treći metod, metod baziran na verižnim razlomcima, odnosno ortogonalnim polinomima je detaljnije razmatran u naredna dva poglavlja.

2.3.1 Metod Dodgsonove kondenzacije

Ukoliko se odgovarajuće rešenje date deteminante intuitivno nasluti, onda ovaj metod omogućava efikasan i kratak induktivni dokaz tog rešenja. Naravno, nedostatak metoda je činjenica da rešenje mora najpre da se "nasluti" a tek onda i dokaže. Iako identitet na koji se bazira ovaj metod najverovatnije potiče od P. Desnanota, on se često vezuje za Charlesa Ludwiga Dodgsona, poznatijeg kao Lewis Carroll. Ipak, smatra se da je prvi strogi dokaz dao je Jacobi [22, 61].

Teorema 2.3.1. [62] (Dodgsonova kondenzacija) *Neka je A data matrica formata $n \times n$. Označimo sa $A^{-j_1,\ldots,j_k}_{-i_1,\ldots,i_k}$ podmatricu matrice A koja se dobija izbacivanjem vrsta $i_1,\ldots,i_k$ i kolona $j_1,\ldots,j_k$ iz matrice A. U tom slučaju važi*

$$\det A \cdot \det A^{-1,n}_{-1,n} = \det A^{-1}_{-1} \cdot \det A^{-n}_{-n} - \det A^{-n}_{-1} \cdot \det A^{-1}_{-n}.$$

Primetimo da ova teorema važi za proizvoljnu kvadratnu matricu, pa samim tim i za Hankelovu matricu. Nekoliko primena metoda Dodgsonove kondenzacije za izračunavanje različitih determinanti dato je kako u samom radu [62], tako i u njegovoj bogatoj bibliografiji. Naredna posledica nam daje primenu ovog metoda na Hankelove determinante.

Posledica 2.3.2. *Neka je* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *proizvoljan niz i neka je* $a' = (a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *i* $a'' = (a_{n+2})_{n\in\mathbb{N}_0}$. *Sa* h, h' *i* h'' *označimo Hankelovu transformaciju nizova* a, a' *i* a''. *Tada važi*

$$h_n h''_{n-2} = h''_{n-1} h_{n-1} - (h'_{n-1})^2.$$

2.3.2 Radoux-Junodov metod

Ovaj metod opisuje vezu između funkcije generatrise (klasične i eksponencijalne) i izračunavanja Hankelove transformacije. Osnove metoda postavili su Radoux 2000. godine i Junod 2003. godine. Iz rezultata do kojih je došao C. Radoux u radovima [91, 92, 93] proizilazi sledeća lema.

Lema 2.3.3. [58, 91] (Radoux 2000) *Označimo sa* $F(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n \frac{z^n}{n!}$, *e.g.f niza* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. *Ako postoji niz funkcija* $(F_n(z))_{n\in\mathbb{N}_0}$ *i niz brojeva* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *takvi da važi*

(1) $F_k^{(n)}(0) = 0$ *za svako* $n < k$,

(2) $\sum_{k=0}^{+\infty} d_k F_k(y) F_k(z) = F(y+z)$,

tada je Hankelova transformacija niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *jednaka* $h_n = \prod_{k=0}^{n} d_k (F_k^{(k)}(0))^2$.

Korišćenjem predhodne leme, možemo pokazati da važe naredne dve teoreme. Njih je dokazao Junod u radu [58]. Obe teoreme nam daju izraze za računanje Hankelove transformacije nizova. Prva za one nizove čija e.g.f. ima određena svojstva, a druga za one nizove čija o.g.f. ima određena svojstva.

Teorema 2.3.4. [58] (Junod 2003) *Neka je* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *niz čija je e.g.f. jednaka* $F(x)$. *Pretpostavimo da važi* $F(z) = e^{G(z)}$ *gde je* $G(z)$ *diferencijabilna funkcija takva da je* $G(0) = 0$ *i* $g(z) = G'(z) - G'(0)$ *zadovoljava* $g'(z) = \alpha + \beta g(z) + \gamma g(z)^2$ *za neke vrednosti parametara* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. *Tada je*

$$F(y+z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1+\gamma)(1+2\gamma)\cdots(1+(k-1)\gamma)}{k!\alpha^k} g(y)^k F(y) g(z)^k F(z).$$

Hankelova transformacija niza $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *jednaka je*

$$h_n = \alpha^{\binom{n+1}{2}} \prod_{k=0}^{n} \left(k!(1+\gamma)(1+2\gamma)\cdots(1+(k-1)\gamma)\right).$$

Pre nego što formulišemo narednu teoremu, uvešćemo operator ∇ na sledeći način

$$\nabla f(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

Teorema 2.3.5. **[58] (Junod 2003)** *Neka je dat niz* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *čija je funkcija generatrisa* $F(x)$*. Pretpostavimo da važi* $F(z) = \frac{1}{1-G(z)}$ *gde je* $G(z)$ *funkcija tako da je* $G(0) = 0$*. Pretpostavimo dalje da funkcija*

$$g(z) = \nabla G(z) - \nabla G(0) = \frac{G(z)}{z} - G'(0)$$

zadovoljava $g(z) = z(\alpha + \beta g(z) + \gamma g(z)^2)$ *za neke vrednosti parametara* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*,* $\alpha \neq 0$*. Tada je Hankelova transformacija niza* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *jednaka*

$$h_n = \alpha^{\binom{n+1}{2}}\gamma^{\binom{n}{2}}.$$

Važnost ove dve teoreme se ogleda u mogućnosti njihovih primena za izračunavanje Hankelove transformacije različitih nizova. U radu [58] one su primenjene na računanje Hankelove transformacije niza Hermiteovih polinoma, Bellovih polinoma, Ojlerovih brojeva, itd...

2.4 Ortogonalni polinomi

Teorija ortogonalnih polinoma je do sada bila predmet proučavanja mnogih matematičara. Primeri nekih od radova na ovu temu su [28, 51, 106, 109, 110]. Naše interesovanje za ortogonalne polinome potiče od činjenice da su oni usko povezani sa Hankelovim determinantama. Zbog toga je u ovom poglavlju izložena osnova teorije ortogonalnih polinoma.

2.4.1 Definicija i osnovna svojstva

Neka je $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neopadajuća funkcija i pretpostavimo da postoje konačne granične vrednosti $\lim_{t\to\pm\infty} \lambda(t)$. Ova funkcija indukuje pozitivnu meru $d\lambda$ na skupu $\mathbb{R}$. Osim toga, izrazom

$$\mathcal{L}(f) = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda, \qquad f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \tag{2.8}$$

je definisan pozitivni linearni funkcional $\mathcal{L}$ na skupu svih neprekidnih realnih funkcija jedne promenljive $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Napomenimo da, na osnovu Rieszove reprezentacione teoreme, za svaki pozitivni funkcional $\mathcal{L}$ na $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ postoji pozitivna mera $d\lambda$ takva da jednačina (2.8) važi.

Pretpostavimo da su svi momenti mere $d\lambda$ konačni, tj. da je

$$\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\lambda \in \mathbb{R}, \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Za svaki par polinoma (ali i bilo kojih neprekidnih funkcija) $p, q \in \mathbb{R}[x]$ skalarni proizvod (p, q) možemo definisati na sledeći način

$$(p, q) = \int_{\mathbb{R}} p(x)q(x)d\lambda.$$

Ovaj skalarni proizvod indukuje sledeću normu

$$\|p\| = (p, p)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} p(x)^2 d\lambda\right)^{1/2}.$$

Između ovako definisanog skalarnog proizvoda i Hankelove transformacije možemo uspostaviti vezu na sledeći način. Neka je $h = \mathbf{H}(\mu)$, i neka je $(H_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz Hankelovih matrica $H_n = [\mu_{i+j}]_{0\leq i,j\leq n-1}$. Za svaki polinom $p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$ označimo sa $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_n \end{bmatrix}^T$ vektor njegovih koeficijenata. Tada važi $(p,q) = \mathbf{p}^T H_n \mathbf{q}$ za svaka dva polinoma $p, q \in \mathbb{R}[x]$ stepena n. Relacija takođe važi i ako su stepeni polinoma p i q različiti, ukoliko vektor $\mathbf{p}$ ili $\mathbf{q}$ na odgovarajući način dopunimo nulama.

Propozicija 2.4.1. *Skalarni proizvod $(\cdot,\cdot)$ je pozitivno definitan na $\mathbb{R}[x]$ ako i samo ako važi $h_n > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$.*

Tačka t_0 je *tačka rasta* funkcije $\lambda(t)$ ako važi $\lambda(t_0 - \epsilon) < \lambda(t_0 + \epsilon)$ za svako $\epsilon > 0$. Skup svih tačaka rasta funkcije λ se naziva *nosač* mere $d\lambda$ i označava sa $\mathrm{supp}(d\lambda)$.

Definicija 2.4.1. *Monični polinomi $\pi_k(t) = t^k + \ldots \in \mathbb{R}[x]$, $k = 0, 1, \ldots$ se nazivaju monični ortogonalni polinomi u odnosu na meru $d\lambda$ ako važi*

$$\begin{aligned} (\pi_k, \pi_l) &= 0, \qquad k \neq l, \quad (k, l \in \mathbb{N}_0) \\ \|\pi_k\| &> 0, \qquad (k \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

Može se dokazati da je Propozicija 2.4.1 potreban i dovoljan uslov postojanja niza moničnih ortogonalnih polinoma $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zbog toga, na dalje možemo pretpostaviti da je ovaj uslov ispunjen. Trivijalno važi $\pi_0(x) = 1$, pošto su svi polinomi π_n monični.

Lema 2.4.2. *Skup polinoma $\{\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n\}$ je linearno nezavisan. Štaviše, svaki polinom $p \in \mathbb{R}[x]$ stepena najviše n može se na jedinstven način predstaviti u obliku*

$$p = \sum_{k=0}^{n} c_k \pi_k \tag{2.9}$$

za neke konstante c_k.

Dakle, prethodna lema tvrdi da ortogonalni polinomi $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ formiraju bazu podprostora svih polinoma koji su stepena najviše n. Naravno, niz polinoma $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ možemo dobiti primenom Gram-Schmidtovog metoda ortogonalizacije na niz $(x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Prema tome, polazimo od pretpostavke da je $\pi_0 = 1$ i rekurzivno računamo ostale članove niza moničnih ortogonalnih polinoma

$$\pi_k = x^k - \sum_{i=0}^{k-1} c_i \pi_i, \quad c_i = \frac{(x^k, \pi_i)}{(\pi_i, \pi_i)}.$$

Pošto je skalarni proizvod $(\cdot,\cdot)$ pozitivno definitan, polinom π_k je jednoznačno definisan i ortogonalan na sve ostale polinome π_j, $j \neq k$.

Količnik svakog od polinoma π_n i odgovarajuće norme $\|\pi_n\|$ daje niz *ortonormiranih polinoma* $(\pi_n(x)/\|\pi_n\|)_{n\in\mathbb{N}_0}$, a oni su ortogonalni u odnosu na skalarni proizvod $(\cdot,\cdot)$ i njihova norma je jednaka 1.

Kažemo da je mera $d\lambda$ *apsolutno neprekidna* ako je $d\lambda = w(t)dt$ gde je $w(x)$ nenegativna integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$ koju nazivamo *težinska funkcija (težina)*. Drugim rečima, kažemo da je mera $d\lambda$ apsolutno neprekidna (u odnosu na Lebesgueovu meru) ako postoji Lebesgue merljiva funkcija $w(x)$, tako da važi $d\lambda(S) = \int_S w(x)dx$ za svaki (Lebesgue) merljivi skup S. Može se dokazati da je $\mathrm{supp}(d\lambda) = \{x \in \mathbb{R} \mid w(x) \neq 0\}$. Zato se pojam nosača može sasvim prirodno proširiti i na težinske funkcije i pisati $\mathrm{supp}(w) = \mathrm{supp}(d\lambda)$.

Za odgovarajuće ortogonalne polinome $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kažemo da su ortogonalni u odnosu na težinu $w(x)$ (tj. da su pridruženi težini $w(x)$).

Naredna teorema nam daje vezu između Hankelovih determianti i ortogonalnih polinoma koja omogućava eksplicitno predstavljanje opšteg člana niza ortogonalnih polinoma u funkciji niza momenata $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Teorema 2.4.3. *Polinomi $\pi_n(x)$ mogu se predstaviti u sledećem obliku*

$$\pi_n(x) = \frac{1}{h_{n-1}} \det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & & \mu_{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{bmatrix}$$

gde je $h = \mathbf{H}(\mu)$ Hankelova transformacija niza momenata $\mu = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

2.4.2 Tročlana rekurentna relacija

Jedno od najvažnijih svojstava niza ortogonalnih polinoma predstavlja tročlana rekurentna relacija koju oni zadovoljavaju. Pomoću ove relacije možemo lako rekonstruisati ceo niz polinoma. Neka od najvažnijih svojstava tročlane rekurentne relacije su:

- Mogućnost računanja nula polinoma π_n kao sopstvenih vrednosti prirdužene trodijagonalne matrice (poznate kao Jacobijeva matrica). Ove nule su veoma važne u konstrukciji Gaussovih kvadratura.
- Direktno izračunavanje normi polinoma $\|\pi_n\|$ koje su potrebne da bi se prešlo sa moničnih na ortonormirane polinome.
- Uspostavljanje veze između ortogonalnih polinoma i verižnih razlomaka.

Ovo poslednje svojstvo je osnova za razvoj metoda za računanje Hankelovih determinanti baziranog na verižnim razlomcima odnosno ortogonalnim polinomima.

Teorema 2.4.4. *Neka je $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz moničnih ortogonalnih polinoma u odnosu na meru $d\lambda$. Tada ovaj niz zadovoljava sledeću tročlanu rekurentnu relaciju*

$$\pi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\pi_n(x) - \beta_n \pi_{n-1}(x), \qquad (n \in \mathbb{N}_0), \tag{2.10}$$

sa startnim vrednostima $\pi_{-1}(x) = 0$ i $\pi_0(x) = 1$. Koeficijenti α_n i β_n mogu da se odrede iz sledećih relacija

$$\alpha_n = \frac{(x\pi_n, \pi_n)}{(\pi_n, \pi_n)}, \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

$$\beta_n = \frac{(\pi_n, \pi_n)}{(\pi_{n-1}, \pi_{n-1})}, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Pošto je $\pi_{-1}(x) = 0$ zaključujemo da koeficijent β_0 možemo izabrati proizvoljno i da će relacija (2.10) svakako važiti. Zbog proizvoljnosti se najčešće za ovaj koeficijent bira vrednost $\beta_0 = \|\pi_0\|^2$. Za ovako izabranu vrednost koeficijenta β_0 važi sledeća posledica:

Posledica 2.4.5. *Neka su $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ koeficijenti tročlane rekurentne relacije* (2.10)*. Tada važi*

$$\|\pi_n\|^2 = \beta_0\beta_1 \cdots \beta_{n-1}\beta_n \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Napomenimo da, ukoliko niz polinoma zadovoljava ovu relaciju sa zadatim početnim vrednostima, onda je taj niz polinoma ortogonalan u odnosu na neku meru $d\lambda$. Dakle, tročlana rekurentna relacija ima veliku primenu u karakterizaciji moničnih otogonalnih polinoma. Ovaj rezultat je u literaturi sreće kao Favardova teorema, ali se smatra da je bio poznat još iz vremena rada Stieltjesa.

Teorema 2.4.6. (Favard) *Neka je $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz moničnih ortogonalnih polinoma koji zadovoljavaju $\deg p_n(x) = n$. Ovaj niz polinoma predstavlja niz ortogonalnih polinoma u odnosu na neku meru $d\lambda$ ako i samo ako postoje nizovi koeficijenata $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ takvi da je zadovoljena tročlana rekurentna relacija* (2.10) *(uz pretpostavku da je $p_{-1}(x) = 0$).*

2.5 Metod baziran na ortogonalnim polinomima

Kao što smo već rekli, u ovom poglavlju je detaljno izložen metod za izračunavanje Hankelove transformacije baziran na verižnim razlomcima, odnosno na ortogonalnim polinomima. Opisana je veza između Hankelove transformacije i verižnih razlomaka, tj. ortogonalnih polinoma, zatim navedena Stieltjesova inverziona teorema i date neke transformacije težinske funkcije.

2.5.1 Veza Hankelove transformacije sa verižnim razlomcima i ortogonalnim polinomima

Za naredni, veoma često korišćen rezultat, zaslužan je Heilermann, a daje nam vezu između Hankelovih determinanti i verižnih razlomaka. Ovaj rezultat je opisan sledećom teoremom, koja se može naći u [32, 110] a takođe u radu Krattenthalera [62].

Teorema 2.5.1. [32, 62, 110] (Heilermann 1845) *Neka je $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz brojeva čija je funkcija generatrisa jednaka $\mathcal{G}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n x^n$ i može da se napiše u obliku*

$$\mathcal{G}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n x^n = \cfrac{\mu_0}{1 - \alpha_0 x - \cfrac{\beta_1 x^2}{1 - \alpha_1 x - \cfrac{\beta_2 x^2}{1 - \alpha_2 x - \cdots}}}. \tag{2.11}$$

Tada je Hankelova transformacija $h = \mathbf{H}(\mu)$ odredjena sledećim izrazom

$$h_n = \mu_0^n \beta_1^{n-1} \beta_2^{n-2} \cdots \beta_{n-2}^2 \beta_{n-1}. \tag{2.12}$$

Važnost Teoreme 2.5.1 se ogleda u tome što nam omogućava da eksplicitno izračunamo Hankelove transformacije svakog niza $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ čija funkcija generatrisa $G(x)$ može da se predstavi u obliku (2.11).

Primer 2.5.1. Primer ovakvog izračunavanja Hankelove transformacije, dat u radu [23], je Hankelova transformacija niza velikih Schröderovih brojeva $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Niz velikih Schröderovih brojeva (A006318), čiji su prvih nekoliko članova 1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, ... označavaju niz brojeva (rešetkastih) putanja u ravni xOy koje počinju od $(0,0)$ a završavaju se u (n,n) i pri tome koriste horizontalne $(1,0)$, vertikalne $(0,1)$ i dijagonalne $(1,1)$ korake, vodeći računa da nikad ne prelaze iznad linije $y=x$. Funkcija generatrisa velikih Schröderovih brojeva je

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n x^n = \frac{1-x-\sqrt{1-6x+x^2}}{2x}.$$

Označimo sa $\omega = g(x)$ rešenje jednačine $x^2\omega - (1-3x)\omega + 2 = 0$, odakle je $\omega(1-3x-x^2\omega) = 2$. Možemo zaključiti da je

$$\omega = \frac{2}{1-3x-x^2\omega} = \frac{2}{1-3x-\frac{2x^2}{1-3x-x^2\omega}} = \frac{2}{1-3x-\frac{2x^2}{1-3x-\frac{2x^2}{\cdots}}}.$$

Iz poslednjeg razvoja sledi da je $\mu_0 = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = 2$. Dakle, korišćenjem relacije (2.12) možemo dobiti sledeći izraz u zatvorenom obliku za $h = \mathbf{H}((r_n)_{n\in\mathbb{N}_0})$

$$h_n = 2^{\sum_{i=1}^{n} i} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{\binom{n+1}{2}}.$$

Još jedan primer izračunavanja Hankelove transformacije razvijanjem funkcije generatrise u verižni razlomak (2.11) dato je od strane Krattenthalera u radu [62]. U tom radu, autor je izračunao u zatvorenom obliku izraz za Hankelovu transformaciju niza pomerenih Bernoullijevih brojeva $B'' = (B_{n+2})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Takođe, još neki primeri ovakvog izračunavanja dati su u [62, 63, 26].

Ono što predstavlja veliki problem u ovakvom izračunavanju je kako naći eksplicitan razvoj funkcije generatrise u verižni razlomak. Čak i kada se naslute izrazi za koeficijente u razvoju, ostaje poteškoća kako dokazati ispravnost tog razvoja. Jedan od načina da se reši ovaj problem je uspostavljanje veze između verižnih razlomaka oblika (2.11) sa jedne i ortogonalnih polinoma sa druge strane. Ovu vezu daje sledeća teorema.

Teorema 2.5.2. [62, 109, 110] *Neka je $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz moničnih ortogonalnih polinoma u odnosu na neki linearni funkcional $\mathcal{L}$. Posmatrajmo tročlanu rekurentnu relaciju*

$$p_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)p_n(x) - \beta_n p_{n-1}(x).$$

Tada funkcija generatrisa momenata $\mathcal{G}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n x^n$, gde su $\mu_n = \mathcal{L}(x^n)$ momenti zadovoljava (2.11) *pri čemu su α_n i β_n iz* (2.11) *upravo koeficijenti tročlane rekurentne relacije.*

Podsetimo se da smo koeficijent β_0 u tročlanoj rekurentnoj relaciji izabrali tako da je $\beta_0 = \mathcal{L}(1) = \mu_0$. Prema tome, relacija (2.12) može biti zapisana u obliku

$$h_n = \beta_0^n \beta_1^{n-1} \cdots \beta_{n-2}^2 \beta_{n-1}.$$

Dakle, kompletan metod za računanje Hankelove transformacije datog niza $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ se sastoji od tri koraka:

1. Pronaći meru $d\lambda$, odnosno težinsku funkciju $w(x)$, takvu da je μ_n njen n-ti moment;
2. Pronaći koeficijente α_n i β_n tročlane rekurentne relacije koji odgovaraju meri $d\lambda$ (težini $w(x)$);
3. Primeniti formulu (2.12).

U naredna dva poglavlja je objašnjen jedan od načina kako doći do izraza za težinsku funkciju i kako, njenom transformacijom, doći do koeficijenata za tročlanu rekurentnu relaciju.

2.5.2 Težinska funkcija i Stieltjesova inverziona formula

Osnovni problem koji je ovde proučen je kako da se za dati niz $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ utvrdi da li postoji linearni funkcional $\mathcal{L}$ takav da je $\mathcal{L}(x^n) = \mu_n$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$. Prema Rieszovoj reprezentacionoj teoremi, postojanje funkcionala $\mathcal{L}$ je ekvivalentno postojanju mere $d\lambda$ tako da važi $\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\lambda$. Ovaj problem je u literaturi poznat kao *Hamburgerov momentni problem* [29]. Sledeća teorema nam daje njegovo rešenje.

Teorema 2.5.3. *Za dati niz $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, postoji pozitivna mera $d\lambda$ takva da važi $\int_{\mathbb{R}} x^n d\lambda = \mu_n$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$, ako i samo ako je $h_n \geq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$ gde je $h = (h_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{H}(\mu)$ Hankelova transformacija niza $\mu = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Dakle, uslov nenegativnosti Hankelove transformacije posmatranih nizova, biće podrazumevan u ostatku ove glave, ali i svuda na dalje gde se bude primenjivao metod baziran na ortogonalnim polinomima.

Osim *Hamburgerovog momentnog problema*, u zavisnosti od intervala integracije, postoje i drugi tipovi momentnih problema. Ako je interval $(0, +\infty)$, onda se radi o *Stieltjesovom momentnom problemu* a ako je interval $(0, 1)$ onda je to *Hausdorffov momentni problem*. Više o momentnim problemima može se naći recimo u [3, 13].

Sada ćemo razmotriti način za eksplicitno nalaženje rešenja Hamburgerovog momentnog problema. Za svaku meru $d\lambda$, definišimo njenu *Stieltjesovu transformaciju* na sledeći način

$$S(z; d\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\lambda(t)}{z - t}.$$

Neka je $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz momenata mere $d\lambda$ i $G(z)$ funkcija generatrisa ovog niza. Tada važi

$$S(z; d\lambda) = \int_{\mathbb{R}} d\lambda z^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} t^n = z^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} \mu_n = z^{-1} G(z^{-1}).$$

Poslednji izraz nam daje vezu izmedju Stieltjesove transformacije i funkcije generatrise momenata. Naredna teorema, poznata kao Stieltjes-Perronova inverziona formula (ili Stieltjesova inverziona formula) [28, 67], nam daje eksplicitno rešenje za meru $d\lambda$ (tj. funkciju $\lambda(t)$).

Teorema 2.5.4. [28, 67] (Stieltjes-Perronova inverziona formula) *Neka je $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz takav da su svi elementi njegove Hankelove transformacije nenegativni. Označimo sa $G(z) = \sum_{n=0}^{n} \mu_n z^n$ funkciju generatrisu ovog niza i neka je $F(z) = z^{-1}G(z^{-1})$. Takođe, neka je funkcija $\lambda(t)$ definisana sledećim izrazom*

$$\lambda(t) - \lambda(0) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{y\to 0^+} \int_0^t \Big[F(x + iy) - F(x - iy)\Big] dx. \tag{2.13}$$

Tada važi $\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\lambda$, tj. $\lambda(t)$ definiše rešenje Hamburgerovog momentnog problema.

Od posebnog značaja za dalji rad će nam biti i naredna posledica.

Posledica 2.5.5. *Neka su ispunjene pretpostavke predhodne teoreme i neka je još $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$. Tada je*

$$\lambda(t) - \lambda(0) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y\to 0^+} \int_0^t \mathrm{Im}\ F(x + iy) dx. \tag{2.14}$$

2.5.3 Transformacije težinske funkcije

Kao što smo već videli, za izračunavanje Hankelove transformacije nekog niza potrebno je znati koeficijente $\tilde{\alpha}_n$ i $\tilde{\beta}_n$ tročlane rekurentne relacije koju zadovoljavaju monični polinomi, ortogonalni u odnosu na neku težinu $\tilde{w}(x)$. Postoji više metoda za numeričko računanje ovih koeficijenata. Neki od njih su dati u radovima [50, 51]. Naš zadatak je izračunavanje ovih koeficijenata u zatvorenom obliku. Jedan od načina za to je da se krene od neke druge težine $w(x)$ za koju znamo odgovarajuće koeficijente α_n i β_n i da primenom niza transformacija težinske funkcije dođemo do tražene težine $\tilde{w}(x)$. Prilikom izvođenja opisanih transformacija potrebno je da znamo relacije koje povezuju originalne koeficijente α_n i β_n sa transformisanim $\tilde{\alpha}_n$ i $\tilde{\beta}_n$.

Za početak razmotrimo dve jednostavne transformacije.

Lema 2.5.6. *Označimo sa $w(x)$ originalnu, sa $\tilde{w}(x)$ transformisanu težinsku funkciju a sa $(\pi_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(\tilde{\pi}_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ nizove moničnih ortogonalnih polinoma u odnosu na originalnu i transformisanu težinsku funkciju respektivno. Takodje, označimo sa $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (\tilde{\beta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ odgovarajuće koeficijente tročlane rekurentne relacije za originalnu i transformisanu težinsku funkciju respektivno.*

Važe sledeće transformacione formule:

(1) *Ako je $\tilde{w}(x) = Cw(x)$ gde je $C > 0$ onda važi $\tilde{\alpha}_n = \alpha_n$ za $n \in \mathbb{N}_0$ i $\tilde{\beta}_0 = C\beta_0$, $\tilde{\beta}_n = \beta_n$ za $n \in \mathbb{N}$. Dodatno važi $\tilde{\pi}_n(x) = \pi_n(x)$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$.*

(2) *Ako je $\tilde{w}(x) = w(ax+b)$ gde je $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ onda važi $\tilde{\alpha}_n = \frac{\alpha_n - b}{a}$ za $n \in \mathbb{N}_0$ i $\tilde{\beta}_0 = \frac{\beta_0}{|a|}$ i $\tilde{\beta}_n = \frac{\beta_n}{a^2}$ za $n \in \mathbb{N}$. Pored toga važi $\tilde{\pi}_n(x) = \frac{1}{a^n}\pi_n(ax+b)$.*

Dokaz.
(1) Primetimo da

$$\int_R \tilde{\pi}_n(x)\tilde{\pi}_k(x)\tilde{w}(x)dx = C\int_R \pi_n(x)\pi_k(x)w(x)dx = 0$$

važi za svako $n, k \in \mathbb{N}_0$ za koje je $n \neq k$. Ovim je dokazana ortogonalnost polinoma $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Prema tome zaključujemo da je $\tilde{\alpha}_n = \alpha_n$ za $n \in \mathbb{N}_0$ i $\tilde{\beta}_n = \beta_n$ za $n \in \mathbb{N}$. Koeficijent $\tilde{\beta}_0$ je jednak

$$\tilde{\beta}_0 = \int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x)dx = C\int_{\mathbb{R}} w(x)dx = C\beta_0.$$

Ovim je završen dokaz dela **(1)** leme.
(2) Neka je $\tilde{\pi}_n(x) = \frac{1}{a^n}\pi_n(ax+b)$. Onda je

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\pi}_n(x)\tilde{\pi}_k(x)\tilde{w}(x)dx &= \frac{1}{a^{n+k}}\int_{\mathbb{R}} \pi_n(ax+b)\pi_k(ax+b)w(ax+b)dx \\ &= \frac{1}{a^{n+k+1}}\int_{\mathbb{R}} \pi_n(y)\pi_k(y)w(y)dy = 0\end{aligned}$$

za svako $n, k \in \mathbb{N}_0$ i $n \neq k$. Osim toga važi i

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_{n+1}(x) &= \frac{1}{a^{n+1}}\pi_{n+1}(ax+b) = \frac{1}{a^{n+1}}[(ax+b-\alpha_n)\pi_n(ax+b) - \beta_n\pi_{n-1}(ax+b)] \\ &= \left(x - \frac{\alpha_n - b}{a}\right)\tilde{\pi}_n(x) - \frac{\beta_n}{a^2}\tilde{\pi}_{n-1}(x)\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je $\tilde{\alpha}_n = \frac{\alpha_n - b}{a}$ za $n \in \mathbb{N}_0$ i $\tilde{\beta}_n = \frac{\beta_n}{a^2}$ za $n \in \mathbb{N}$. Ponovo, direktnim izračunavanjem dobijamo

$$\tilde{\beta}_0 = \int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} w(ax+b)dx = \frac{\beta_0}{|a|}.$$

Ovim je i dokaz dela **(2)** ove leme završen. □

Posmatrajmo sada transformacije težinske funkcije oblika

$$\tilde{w}(x) = \frac{u(x)}{v(x)} w(x), \qquad u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x].$$

Naredni rezultati su uglavnom preuzeti iz [50], a njihova osnova je sledeća generalizacija poznate Christoffelove teoreme.

Teorema 2.5.7. *Neka su $\pi_n(x)$ i $\tilde{\pi}_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ monični ortogonalni polinomi u odnosu na težine $w(x)$ i $\tilde{w}(x) = r(x)w(x)$ respektivno, gde je $r(x) = u(x)/v(x)$ i $u(x) = \prod_{i=1}^{l}(x - u_i)$, $v(x) = \prod_{j=1}^{m}(x - v_j)$. U slučaju $m \leq n$, važi*

$$u(x)\tilde{\pi}_n(x) = C \det \begin{bmatrix} \pi_{n-m}(x) & \cdots & \pi_{n-1}(x) & \pi_n(x) & \cdots & \pi_{n+l}(x) \\ \pi_{n-m}(u_1) & \cdots & \pi_{n-1}(u_1) & \pi_n(u_1) & \cdots & \pi_{n+l}(u_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \pi_{n-m}(u_l) & \cdots & \pi_{n-1}(u_l) & \pi_n(u_l) & \cdots & \pi_{n+l}(u_l) \\ \rho_{n-m}(v_1) & \cdots & \rho_{n-1}(v_1) & \rho_n(v_1) & \cdots & \rho_{n+l}(v_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n-m}(v_m) & \cdots & \rho_{n-1}(v_m) & \rho_n(v_m) & \cdots & \rho_{n+l}(v_m) \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

U suprotnom, ako je $m > n$ onda važi

$$u(x)\tilde{\pi}_n(x) = C \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \pi_0(x) & \cdots & \pi_{n+l}(x) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \pi_0(u_1) & \cdots & \pi_{n+l}(u_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \pi_0(u_l) & \cdots & \pi_{n+l}(u_l) \\ 1 & v_1 & \cdots & v_1^{m-n-1} & \rho_0(v_1) & \cdots & \rho_{n+l}(v_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & v_m & \cdots & v_m^{m-n-1} & \rho_0(v_m) & \cdots & \rho_{n+l}(v_m) \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

gde je C normalizaciona konstanta (jednaka je recipročnoj vrednosti vodećeg koeficijenta polinoma sa desne strane). Sa $\rho_n(z)$ označili smo Cauchyjeve integrale polinoma $\pi_n(x)$ definisane sa

$$\rho_n(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_n(t)}{z - t} w(t)dt, \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Originalna Cristoffelova teorema se dobija u slučaju $v(x) = 1$, odnosno $m = 0$. Transformacione formule dobićemo primenom Teoreme 2.5.7 u specijalnim slučajevima.

Lema 2.5.8. *Posmatrajmo istu notaciju kao u Lemi 2.5.6. Neka je niz $(r_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definisan sa*

$$r_0 = c - \alpha_0, \qquad r_n = c - \alpha_n - \frac{\beta_n}{r_{n-1}} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.17}$$

Razmotrimo dva slučaja:

(1) *Ako je* $\tilde{w}(x) = (x-c)w(x)$ *gde je* $c < \inf \operatorname{supp}(w)$, *tada važi*

$$\tilde{\beta}_0 = \int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x)dx, \qquad \tilde{\beta}_n = \beta_n \frac{r_n}{r_{n-1}}, \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
$$\tilde{\alpha}_n = \alpha_{n+1} + r_{n+1} - r_n, \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

(2) *Ako je* $\tilde{w}(x) = (x-c)(x-\overline{c})w(x)$ *gde je* $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *tada važi*

$$\tilde{\beta}_0 = \beta_0(\beta_1 + |r_0|^2), \qquad \tilde{\beta}_n = \beta_n \frac{r''_{n+1} r''_{n-1}}{(r''_{n-1})^2} \left| \frac{r_n}{r_{n-1}} \right|^2 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
$$\tilde{\alpha}_n = \alpha_{n+2} + r'_{n+2} + \frac{r''_{n+2}}{r''_{n+1}} r'_{n+1} - \left(r'_{n+1} + \frac{r''_{n+1}}{r''_n} r'_n \right) \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

gde je $r'_n = \operatorname{Re} r_n$ *i* $r''_n = \operatorname{Im} r_n$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\tilde{w}(x) = (x-c)w(x)$ gde je $c < \inf \operatorname{supp}(w)$. Primenom Teoreme 2.5.7 dobijamo

$$(x-c)\tilde{\pi}_n(x) = -\frac{1}{\pi_n(c)} \det \begin{bmatrix} \pi_n(x) & \pi_{n+1}(x) \\ \pi_n(c) & \pi_{n+1}(c) \end{bmatrix} = \pi_{n+1}(x) - r_n \pi_n(x),$$

gde smo sa r_n označili $r_n = \pi_{n+1}(c)/\pi_n(c)$. Napišimo polinom $(x-c)x\tilde{\pi}_n(x)$ na dva načina. Najpre koristimo tročlanu rekurentnu relaciju za niz $(\pi_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$. Imamo da je

$$\begin{aligned} (x-c)x\tilde{\pi}_n(x) &= x\pi_{n+1}(x) - r_n x \pi_n(x) \\ &= \pi_{n+2}(x) + (\alpha_{n+1} - r_n)\pi_{n+1}(x) + (\beta_{n+1} - r_n\alpha_n)\pi_n(x) - r_n\beta_n\pi_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Zatim koristimo tročlanu rekurentnu relaciju za niz $(\tilde{\pi}_n(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$. Na taj način dobijamo

$$\begin{aligned} (x-c)x\tilde{\pi}_n(x) &= (x-c)[\tilde{\pi}_{n+1}(x) + \tilde{\alpha}_n\tilde{\pi}_n(x) + \tilde{\beta}_n\tilde{\pi}_{n-1}(x)] \\ &= \pi_{n+2}(x) + (\tilde{\alpha}_n - r_{n+1})\pi_{n+1}(x) + (\tilde{\beta}_n - r_n\tilde{\alpha}_n)\pi_n(x) - r_{n-1}\tilde{\beta}_n\pi_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Upoređenjem koeficijenta u (2.18) kao i u (2.19) dobijamo sledeće relacije

$$\tilde{\alpha}_n - r_{n+1} = \alpha_{n+1} - r_n, \qquad r_{n-1}\tilde{\beta}_n = r_n\beta_n. \tag{2.20}$$

Ovim smo dokazali deo **(1)** teoreme. Deo **(2)** se dokazuje analogno. □

U nekim slučajevima je veoma teško naći rešenje u zatvorenom obliku diferencne jednačine (2.17). Uvođenjem pomoćnog niza, sledeća posledica uprošćava transformacione formule iz dela **(1)** poslednje teoreme.

Posledica 2.5.9. *Posmatrajmo istu notaciju kao u Lemi 2.5.6. Neka je niz* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *definisan sa*

$$\lambda_{-1} = 0, \quad \lambda_0 = 1, \quad \lambda_{n+1} = (c - \alpha_n)\lambda_n - \beta_n\lambda_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{2.21}$$

gde je $c < \inf \operatorname{supp}(w)$. *Tada ako važi* $\tilde{w}(x) = (x-c)w(x)$ *imamo da je*

$$\begin{aligned} &\tilde{\beta}_0 = \int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x)dx, \qquad \tilde{\beta}_n = \beta_n \frac{\lambda_{n+1}\lambda_{n-1}}{\lambda_n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}), \\ &\tilde{\alpha}_n = c - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - \beta_{n+1}\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}_0). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dokaz. Neka je $\lambda_n = \pi_n(c)$. Kako važi $r_n = \lambda_{n+1}/\lambda_n$ i niz $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadovoljava rekurentnu relaciju

$$\lambda_{n+1} = (c-\alpha_n)\lambda_n - \beta_n\lambda_{n-1},$$

dobijamo traženi rezultat. □

Pretpostavimo da je transformacija zadata pomoću $\tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{x-c}$ gde je $c < \inf \operatorname{supp}(w)$. Na osnovu Teoreme 2.5.7 važi

$$\tilde{\pi}_n(x) = -\frac{1}{\rho_{n-1}(c)} \det \begin{bmatrix} \pi_{n-1}(x) & \pi_n(x) \\ \rho_{n-1}(c) & \rho_n(c) \end{bmatrix} = \pi_n(x) - r_{n-1}\pi_{n-1}(x)$$

gde je sad $r_n = \rho_{n+1}(c)/\rho_n(c)$. Može se dokazati da Cauchyjevi integrali $\rho_n(z)$ zadovoljavaju istu rekurentnu relaciju kao i polinomi $\pi_n(x)$. Razlika je samo u početnim uslovima, pošto važi $\rho_{-1}(x) = 1$ i $\rho_0(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{w(t)}{x-t}dt$. Sada ćemo dokazati ovu činjenicu. Imamo da je

$$\begin{aligned}
\rho_{n+1}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(t-\alpha_n)\pi_n(t) - \beta_n\pi_{n-1}(t)}{x-t} w(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{(t-\alpha_n)\pi_n(t)}{x-t} w(t)dt - \beta_n\rho_{n-1}(x) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \pi_n(t)w(t)dt + (x-\alpha_n)\rho_n(x) - \beta_n\rho_{n-1}(x) \\
&= (x-\alpha_n)\rho_n(x) - \beta_n\rho_{n-1}(x), \qquad (n\in\mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Za $n = 0$ takođe važi

$$\rho_1(x) = (x-\alpha_0)\rho_0(x) - \beta_0\rho_{-1}(x),$$

pošto je $\rho_{-1}(x) = 1$. Prema tome niz $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadovoljava istu rekurentnu relaciju kao u prvom slučaju, samo što se razlikuju startne vrednosti

$$r_n = c - \alpha_n - \frac{\beta_n}{r_{n-1}} \quad (n\in\mathbb{N}), \qquad r_{-1} = -\int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(t)dt.$$

Ponavljanjem iste procedure kao u predhodnom slučaju, predstavljajući na dva načina polinom $(t-x)\pi_n(t)$, možemo dokazati deo **(1)** sledeće leme. Drugi deo se dokazuje analogno.

Lema 2.5.10. *Posmatrajmo istu notaciju kao u Lemi 2.5.6. Neka je niz* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *definisan sa*

$$r_{-1} = -\int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x)\ dx, \qquad r_n = c - \alpha_n - \frac{\beta_n}{r_{n-1}} \qquad (n\in\mathbb{N}_0). \tag{2.23}$$

Razlikovaćemo dva slučaja.

(1) *Ako je* $\tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{x-c}$ *gde je* $c < \inf \operatorname{supp}(w)$ *tada važi*

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_0 &= \alpha_0 + r_0, & \tilde{\alpha}_n &= \alpha_n + r_n - r_{n-1}, \\
\tilde{\beta}_0 &= -r_{-1}, & \tilde{\beta}_n &= \beta_{n-1}\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, & (n\in\mathbb{N})
\end{aligned} \tag{2.24}$$

(2) *Ako je* $\tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{c-x}$ *gde je* $c > \sup \operatorname{supp}(w)$, *tada važe važe relacije* (2.23) *i* (2.24) *pri čemu je sad* $\tilde{\beta}_0 = r_{-1}$ *gde je*

$$r_{-1} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{w}(x)\ dx.$$

2.5.4 Hankelova i α-binomna transformacija

Naredna teorema nam daje vezu između Hankelove u α-binomne transformacije. Nju su 2006. godine dokazali Spivey i Stail u radu [102], koristeći kombinatorni način. Ovde je naveden dokaz koji je izveden u radu [86], a koji koristi transformaciju težinske funkcije. Treba još napomenuti da je ovaj dokaz takođe validan za proizvoljni realni broj α što nije slučaj sa dokazom datim u pomenutom radu [102].

Teorema 2.5.11. *Za zadati niz* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$*, neka je* $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{H}(a)$*. Opadajuća* α*-binomna transformacija je invarijantna u odnosu na Hankelovu transformaciju, tj. važi*

$$\mathbf{H}(a) = \mathbf{H}(\mathbf{Bf}(a;\alpha)) = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Takodje važi i

$$\mathbf{H}(\mathbf{Br}(a;\alpha)) = \alpha^{n(n+1)}h_n.$$

Dokaz. Podsetimo se za početak da, ukoliko su svi elementi Hankelove transformacije niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nenegativni, tada postoji pozitivna mera $d\lambda$ tako da je a_n vrednost n-tog momenta mere $d\lambda$, za svako $n \in \mathbb{N}_0$. Ova činjenica važi na osnovu Teoreme 2.5.3 (Hamburgerov momentni problem). Prema tome, dokaz ove teoreme je limitiran na slučaj kada su svi elementi Hankelove transformacije polaznog niza nenegativni.
Neka je $w(x)$ odgovarajuća težinska funkcija koja odgovara meri μ. Tada važi

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} x^n w(x)dx.$$

Uvedimo sledeće oznake $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{Bf}(a;\alpha)$ i $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{Br}(a;\alpha)$. Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz n-tih momenata težinske funkcije $w(x-\alpha)$.

$$f_n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^{n-i}\int_{\mathbb{R}} x^i w(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^{n-i}x^i\right)dx = \int_{\mathbb{R}}(x+\alpha)^n w(x)dx \tag{2.25}$$

Uvođenjem smene promenljivih $x \to x-\alpha$ u prethodnom integralu dobijamo traženi rezultat.

Posmatrajmo sada monične polinome $P_n(x)$ i $P_n^f(x)$ ortogonalne u odnosu na težine $w(x)$ i $w(x-\alpha)$ respektivno kao i odgovarajuće koeficijente tročlane rekurentne relacije β_n i β_n^f. Na osnovu Leme 2.5.6 važi $P_n^f(x) = P_n(x-\alpha)$ kao i $\beta_n = \beta_n^f$. Sada iz Heilermannove formule (2.12) možemo zaključiti da su Hankelove transformacije nizova $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ jednake, pošto važi $a_0 = f_0$.

Slično kao u relaciji (2.25), možemo dokazati da je niz $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zapravo niz n-tih momenata težine $w\left(\frac{x-1}{\alpha}\right)$.

$$\begin{aligned} r_n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^{i}\int_{\mathbb{R}} x^i w(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^{i}x^i\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}(1+\alpha x)^n w(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x^n w\left(\frac{x-1}{\alpha}\right)dx \end{aligned} \tag{2.26}$$

Primenom Leme 2.5.6 dobijamo $\beta_n^r = \alpha^2\beta_n$. Zamenom u Heilermannovu formulu (2.12) možemo direktno zaključiti da važi $\mathbf{H}(r) = (\alpha^{n(n+1)}h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. $\square$

Glava 3

Hankelova transformacija inverznog reda funkcije $\frac{x}{1+\alpha x+\beta x^2}$

U ovoj glavi je proučavana Hankelova transformacija niza $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadatog inverznim redom racionalne funkcije $Q(x) = \frac{x}{1+\alpha x+\beta x^2}$. Koristeći metod baziran na ortogonalnim polinomima, dobijen je izraz u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju niza $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ali i njegovih pomerenih nizova. Pokazano je da Hankelove transformacije originalnog i pomerenog niza zadovoljavaju određen uslov, iskazan u formi razlomka, i pomoću kog je moguće da se rekonstruiše polazni niz $(q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Samim tim, pokazano je i da odnos elemenata Hankelove transformacije originalnog i pomerenog niza može biti značajan parametar u proučavanju Hankelove transformacije. Takođe je utvrđeno i da ovaj niz generališe nekoliko dobro poznatih nizova brojeva. Napomenimo da je do sličnih rezultata došao i Xin u svom radu [119].

U ovoj celoj glavi je korišćen metod izračunavanja Hankelove transformacije baziran na ortogonalnim polinomima koji je korišćen u [34, 94] a sličan je i onom u [23]. Na početku je definisan inverzni red, a zatim takav red za funkciju $Q(x) = \frac{x}{1+\alpha x+\beta x^2}$. U sledećem poglavlju je nađena težinska funkcija niza $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, ali i težinske funkcije jednom i dvaput pomerenog niza, odnosno, težinske funkcije nizova $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Naravno, za svaki od ovih nizova je izračunata Hankelova transformacija (Poglavlja 3.3 i 3.4).

Svi rezultati prikazani u ovoj glavi su originalni i bazirani na radu [16].

3.1 Inverzni red funkcije $\frac{x}{1+\alpha x+\beta x^2}$

Uvedimo najpre definiciju *inverznog reda* za funkciju (generatrisu) $f(x)$ koja zadovoljava uslov $f(0) = 0$ (videti [6]).

Definicija 3.1.1. *Inverzni red date funkcije (generatrise) $v = f(u)$, koja je analitička u okolini nule i koja zadovoljava uslov $f(0) = 0$, je niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan sa*

$$u = f^{-1}(v) = s_1 v + s_2 v^2 + \cdots + s_n v^n + \cdots ,$$

gde je $u = f^{-1}(v)$ inverzna funkcija funkciji $v = f(u)$. Pri tome, zbog uslova da je $f(0) = 0$, mora da važi $s_0 = f^{-1}(0) = 0$.

Posmatrajmo niz $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadat inverznim redom funkcije

$$Q(x) = \frac{x}{1+\alpha x+\beta x^2}.$$

Ovaj niz je već proučavao Barry u radu [6] u kome je došao do nekoliko zanimljivih rezultata vezanih za ovaj niz. Primenom Definicije 3.1.1, možemo naći da je funkcija generatrisa $U(x)$ niza $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rešenje jednačine

$$Q(U(x)) = \frac{U(x)}{1+\alpha U(x)+\beta U(x)^2} = x \tag{3.1}$$

dato sa

$$U(x) = \frac{1-\alpha x-\sqrt{1-2\alpha x+(\alpha^2-4\beta)x^2}}{2\beta x}. \tag{3.2}$$

Prema Propoziciji 9 iz [6], opšti član niza $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je

$$u_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n-1}{2k} C_k \alpha^{n-2k-1}\beta^k. \tag{3.3}$$

Osim niza $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, posmatrajmo još i pomerene nizove $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(u_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisane sa $u_n^* = u_{n+1}$ i $u_n^{**} = u_{n+2}$. Označimo sa h_n, h_n^* i h_n^{**}, Hankelove transformacije nizova u_n, u_n^* i u_n^{**} respektivno. Videćemo da će nam Hankelove transformacije h_n^* i h_n^{**} biti potrebne za izračunavanje Hankelove transformacije h_n.

Ako u izrazu (3.2) stavimo da je $\alpha = 2$ i $\beta = 1$ dobijamo funkciju generatrisu

$$\frac{1-2x-\sqrt{1-4x}}{2x} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$$

niza $(C_n - \delta_{n0})_{n\in\mathbb{N}_0} = \{0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ \ldots\}$, gde je sa $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ označen niz Catalanovih brojeva.

Kao specijalan slučaj izraza (3.2) za $\alpha = z+1$ i $\beta = z$ dobijamo funkciju generatrisu niza $((N_n(z)-\delta_{n0})/z)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gde je sa $N_n(z)$ označen n-ti Narayana polinom. Ova činjenica sledi direktno iz izraza za funkciju generatrisu Narayana polinoma (videti recimo [70] ili [74]).

Osim toga, možemo primetiti da se za pojedine vrednosti parametara α i β, niz $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ svodi na sledeće dobro poznate nizove:

- **Motzkinovi brojevi** (A001006), za $\alpha = \beta = 1$. Ovo sledi direktno iz činjenice da se $\frac{U(x)}{x}$ svodi na $M(x) = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2x^2}$ što je funkcija generatrisa Motzkinovih brojeva [24, 101].
- **Isprekidani Catalanovi brojevi** (A126120), za $\alpha = 0$ i $\beta = 1$. I ovo, takođe, sledi iz činjenice da se $\frac{U(x)}{x}$ svodi na $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}$ što predstavlja funkciju generatrisu isprekidanih Catalanovih brojeva [101].

U nastavku ove glave videćemo još da se i odgovarajući izrazi za h_n i h_n^* takođe svode na pomenute specijalne slučajeve.

Označimo sa $Q(x)$ funkciju generatrisu niza $(q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ koja zadovoljava linearnu diferencnu jednačinu

$$q_{n+2} + \alpha q_{n+1} + \beta q_n = 0$$

sa početnim uslovima $q_0 = 0$ i $q_1 = 1$. Dakle, u zatvorenom obliku izraz za q_n dat je sa

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{\alpha^2-4\beta}}\left[(\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta})^n-(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta})^n\right] \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}(\alpha^2-4\beta)^k\alpha^{n-2k-1}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Primer 3.1.1. Prvih nekoliko članova pomenutih nizova su:

$$\begin{aligned} u_n &= \big(0,1,\alpha,\alpha^2+\beta,\alpha^3+3\alpha\beta,\alpha^4+6\alpha^2\beta+2\beta^2,\alpha^5+10\alpha^3\beta+10\alpha\beta^2,\alpha^6+15\alpha^4\beta+3\alpha^2\beta^2+5\beta^3\dots\big) \\ q_n &= \big(0,1,-\alpha,\alpha^2-\beta,2\alpha\beta-\alpha^3,\alpha^4-3\alpha^2\beta+\beta^2,-\alpha^5+4\alpha^3\beta-3\alpha\beta^2,\dots\big) \\ u_n^* &= \big(1,\alpha,\alpha^2+\beta,\alpha^3+3\alpha\beta,\alpha^4+6\alpha^2\beta+2\beta^2,\alpha^5+10\alpha^3\beta+10\alpha\beta^2,\alpha^6+15\alpha^4\beta+3\alpha^2\beta^2+5\beta^3,\dots\big) \\ u_n^{**} &= \big(\alpha,\alpha^2+\beta,\alpha^3+3\alpha\beta,\alpha^4+6\alpha^2\beta+2\beta^2,\alpha^5+10\alpha^3\beta+10\alpha\beta^2,\alpha^6+15\alpha^4\beta+3\alpha^2\beta^2+5\beta^3,\dots\big) \\ h_n &= \big(0,-1,-\alpha\beta,-\alpha^2\beta^3+\beta^4,-\alpha^3\beta^6+2\alpha\beta^7,\dots\big) \\ h_n^* &= \big(1,\beta,\beta^3,\beta^6,\beta^{10},\dots\big) \\ h_n^{**} &= \big(\alpha,\alpha^2\beta-\beta^2,\alpha^3\beta^3-2\alpha\beta^4,\alpha^4\beta^6-3\alpha^2\beta^7+\beta^8,\dots\big) \end{aligned}$$

Može se primetiti da ovih nekoliko prvih navedenih članova odgovarajućih nizova zadovoljavaju sledeće relacije:

$$\frac{(-1)^{n+1}h_{n+1}}{h_n^*} = q_{n+1}, \qquad \frac{(-1)^{n+1}h_n^{**}}{h_n^*} = q_{n+2},$$

koje će biti dokazane za proizvoljno n u poslednjem poglavlju ove glave.

3.2 Moment reprezentacije

Naredna teorema nam daje eksplicitan izraz za težinsku funkciju čiji su momenti članovi niza $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dokaz je izveden direktnom primenom Stieltjes-Perron inverzione formule (Teorema 2.5.4).

Teorema 3.2.1. *Niz $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz momenata čija je težinska funkcija*

$$w(x) = w_{ac}(x) + \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2\beta}\delta(x) \tag{3.5}$$

gde je

$$w_{ac}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4\beta-(x-\alpha)^2}}{2\pi\beta x}, & x\in[\alpha-2\sqrt{\beta},\alpha+2\sqrt{\beta}] \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases}.$$

a sa $\delta(x)$ je označena Diracova delta funkcija.

Dokaz. Za početak definišimo funkciju

$$F(z) = z^{-1}U(z^{-1}) = \frac{z-\alpha-\sqrt{z^2-2\alpha z+\alpha^2-4\beta}}{2\beta z} = \frac{z-\alpha-\sqrt{(z-\alpha)^2-4\beta}}{2\beta z},$$

i označimo sa $x_{1,2} = \alpha \pm 2\sqrt{\beta}$ tačke grananja funkcije

$$\rho(z) = \sqrt{(z-\alpha)^2 - 4\beta}.$$

Izabraćemo regularnu granu korena $\rho(z)$ takvu da je $\arg(z - x_1) = \arg(z - x_2) = 0$ za $z \in (x_2, +\infty)$. Tako izabrana grana je definisana u $\mathbb{C} \setminus (x_1, x_2)$ i direktnom proverom možemo utvrditi da važi $\overline{F(z)} = F(\overline{z})$. Eksplicitnim izračunavanjem[1] možemo dobiti sledeći izraz za primitivnu funkciju funkcije $F(z)$:

$$F_1(z) = \int F(z)dz = \frac{1}{2\beta}\left[z - \rho(z) - \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)L_1(z) + \alpha L_2(z) - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}L_3(z)\right]$$

gde je

$$\begin{aligned} L_1(z) &= \log z, \\ L_2(z) &= \log\left(z - \alpha + \rho(z)\right), \\ L_3(z) &= \log\left(\alpha^2 - 4\beta - \alpha z + \rho(z)\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right). \end{aligned}$$

U prethodnom izrazu figuriše regularna grana funkcije log na $\mathbb{C}\backslash[0, +\infty)$ takva da je $\lim_{y\to 0+} \log(x + iy) = \log x$ za $x > 0$. Tada sledi da je

$$G_\rho(x) = \lim_{y\to 0} \mathrm{Im}\ \rho(x + iy) = \begin{cases} \sqrt{4\beta - (x-\alpha)^2}, & x \in (x_1, x_2) \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases}. \tag{3.6}$$

Neka je $G_k(x) = \lim_{y\to 0+} L_k(x + iy)$ gde je $k = 1, 2, 3$. Kao što već znamo, važi

$$G_1(x) = \lim_{y\to 0+} \mathrm{Im}\ \log(x + iy) = \begin{cases} \pi, & x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}. \tag{3.7}$$

Slično tome, važi i

$$G_2(x) = \lim_{y\to 0} \mathrm{Im}\ L_2(x + iy) = \begin{cases} \pi, & x < x_1 \\ \pi + \arctan\frac{\sqrt{4\beta-(x-\alpha)^2}}{x-\alpha}, & x \in [x_1, \alpha) \\ \frac{\pi}{2}, & x = \alpha \\ \arctan\frac{\sqrt{4\beta-(x-\alpha)^2}}{x-\alpha}, & x \in (\alpha, x_2] \\ 0, & x > x_2 \end{cases} \tag{3.8}$$

i

$$G_3(x) = \lim_{y\to 0} \mathrm{Im}\ L_3(x + iy) = \begin{cases} \pi, & x < x_1 \\ \pi + \arctan\frac{\sqrt{4\beta-(x-\alpha)^2}\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{\alpha^2-4\beta-\alpha x}, & x \in [x_1, \frac{\alpha^2-4\beta}{\alpha}) \\ \frac{\pi}{2}, & x = \frac{\alpha^2-4\beta}{\alpha} \\ \arctan\frac{\sqrt{4\beta-(x-\alpha)^2}\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{\alpha^2-4\beta-\alpha x}, & x \in (\frac{\alpha^2-4\beta}{\alpha}, x_2] \\ 0, & x > x_2 \end{cases}. \tag{3.9}$$

[1]Kod ovako složenih izračunavanja, od velike pomoći može biti korišćenje, recimo, programskog paketa MATHEMATICA.

Sada, na osnovu Posledice 2.5.5 dobijamo da je $\lambda(t) = -\frac{1}{\pi}(G(t) - G(0))$, gde je funkcija $G(x)$ data sa

$$\begin{aligned} G(x) &= \lim_{y\to 0+} \operatorname{Im} F_1(x+iy) \\ &= \frac{1}{2\beta}\left[-G_\rho(x) - \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2-4\beta}\right)G_1(x) + \alpha G_2(x) - \sqrt{\alpha^2-4\beta}G_3(x)\right]. \end{aligned}$$

Diferenciranjem funkcije $\lambda(t)$ u smislu distribucija dobićemo (3.5).

Napomenimo i to da su funkcije $G_\rho(x)$, $G_2(x)$ i $G_3(x)$ diferencijabilne za $x \in (x_1, x_2)$ i obrazuju apsolutno neprekidnu komponentu mere $d\lambda(x)$ (koja daje težinu $w_{ac}(x)$) gde $G_1(x)$ predstavlja izraz za delta funkciju. Ovim je dokaz teoreme završen. □

Označimo sa $\bar{u}_n$ n-ti moment težinske funkcije $w_{ac}(x)$, tj.

$$\bar{u}_n = \int_{\mathbb{R}} x^n w_{ac}(x)dx,$$

za $n \in \mathbb{N}_0$. Na osnovu Teoreme 3.2.1 imamo da je

$$\begin{aligned} u_n = \int_{\mathbb{R}} x^n w(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} x^n w_{ac}(x)dx + \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2\beta}\int_{\mathbb{R}} x^n \delta(x)dx \\ &= \bar{u}_n + \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2\beta}\delta_{n0}. \end{aligned}$$

gde je δ_{n0} Kroneckerov delta simbol. Drugim rečima, nizovi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ se razlikuju samo u elementu sa indeksom $n = 0$. Dakle, možemo zaključiti da važi

$$\bar{u}_n = \begin{cases} \dfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2\beta}, & n = 0 \\ u_n\ , & n \geq 1 \end{cases}. \tag{3.10}$$

Kao što ćemo videti u poglavlju 3.4, Hankelova transformacija niza $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ biće izračunata baš korišćenjem Hankelovih transformacija nizova $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Moment reprezentacije pomerenih nizova $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(u_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$ se dobijaju direktnom primenom Teoreme 3.2.1.

Posledica 3.2.2. *Težinska funkcija niza* $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0} = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *je*

$$w^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4\beta - (x-\alpha)^2}}{2\pi\beta}, & x \in [\alpha - 2\sqrt{\beta}, \alpha + 2\sqrt{\beta}] \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases} \tag{3.11}$$

Posledica 3.2.3. *Težinska funkcija niza* $(u_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0} = (u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *je*

$$w^{**}(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{4\beta - (x-\alpha)^2}}{2\pi\beta}, & x \in [\alpha - 2\sqrt{\beta}, \alpha + 2\sqrt{\beta}] \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases} \tag{3.12}$$

3.3 Hankelova transformacija nizova u_n^* i u_n^{**}

U ovom poglavlju su izračunate Hankelove transformacije h_n^* i h_n^{**} nizova $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0} = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(u_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0} = (u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}_0}$ korišćenjem Heilermannove formule (2.12). Za njenu primenu su nam potrebni koeficijenti α_n i β_n tročlane rekurentne relacije. Ti koeficijenti su dobijeni primenom transformacija težinske funkcije, koje su navedene u prethodnoj glavi (Leme 2.5.6, 2.5.8 i 2.5.10).

Teorema 3.3.1. *Hankelova transformacija niza $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa*

$$h_n^* = \beta^{\binom{n+1}{2}}. \tag{3.13}$$

Dokaz. U dokazu ove teoreme koristimo Heilermannovu formulu (2.12) i izraze za transformaciju težinske funkcije date u Lemi 2.5.6. Pošto je težinska funkcija niza $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ data sa,

$$w^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4\beta-(x-\alpha)^2}}{2\pi\beta}, & x\in[\alpha-2\sqrt{\beta},\alpha+2\sqrt{\beta}] \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases},$$

posmatrajmo niz moničnih ortogonalnih polinoma $(Q_n^{(0)}(x))_{n\in\mathbb{N}_0}$ u odnosu na težinsku funkciju

$$w^{(0)}(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,1] \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases}.$$

Primetimo da su ti polinomi zapravo monični Chebyshevljevi polinomi druge vrste definisani sa

$$Q_n^{(0)}(x) = S_n(x) = \frac{\sin\big((n+1)\arccos x\big)}{2^n\cdot\sqrt{1-x^2}}.$$

Oni zadovoljavaju sledeću tročlanu rekurentnu relaciju

$$S_{n+1}(x) - xS_n(x) + \frac{1}{4}S_{n-1}(x) = 0, \qquad (n\ge 1),$$

sa početnim vrednostima

$$S_0(x) = 1, \qquad S_1(x) = x.$$

Odgovarajući koeficijenti α_n i β_n tročlane rekurentne relacije su

$$\beta_0^{(0)} = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_n^{(0)} = \frac{1}{4} \quad (n\ge 1), \qquad \alpha_n^{(0)} = 0 \quad (n\ge 0)\ .$$

Posmatrajmo sada novu težinsku funkciju $w^{(1)}(x)$ definisanu sa

$$w^{(1)}(x) = w^{(0)}\left(\frac{x-\alpha}{2\sqrt{\beta}}\right) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4\beta-(x-\alpha)^2}}{2\sqrt{\beta}}, & x\in[\alpha-2\sqrt{\beta},\alpha+2\sqrt{\beta}] \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases},$$

i primenino deo **(2)** Leme 2.5.6 gde je $a = 1/(2\sqrt{\beta})$ i $b = -\alpha/(2\sqrt{\beta})$. Tako dobijamo da su koeficijenti

$$\alpha_n^{(1)} = \alpha \quad (n\in\mathbb{N}_0), \qquad \beta_0^{(1)} = \pi\sqrt{\beta}, \qquad \beta_n^{(1)} = \beta \quad (n\in\mathbb{N}). \tag{3.14}$$

Primetimo da je
$$w^*(x) = w^{(1)}(x)/(\pi\sqrt{\beta}).$$
Zbog toga, na osnovu dela **(1)** Leme 2.5.6 dobijamo da je
$$\alpha_n^* = \alpha_n^{(1)} = \alpha \quad \text{za} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \qquad \beta_0^* = \beta_0^{(1)}/(\pi\sqrt{\beta}) = 1, \qquad \beta_n^* = \beta_n^{(1)} = \beta \quad \text{za} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Dakle, koeficijenti odgovarajuće tročlane rekurentne relacije niza $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ u odnosu na težinu $w^*(x)$ su:
$$\alpha_n^* = \alpha \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad \beta_0^* = 1, \quad \beta_n^* = \beta \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.15}$$
Odavde direktnom primenom relacije (3.15) i Heilermannove formule (2.12) dobijamo da važi:
$$h_n^* = (u_0^*)^{n+1}(\beta_1^*)^n(\beta_2^*)^{n-1}\cdots\beta_n^* = \beta^{\binom{n+1}{2}} \tag{3.16}$$
čime je dokaz teoreme završen. □

Možemo primetiti da izraz za h_n^* ne zavisi od α, što znači da svi nizovi koji se dobijaju za neku fiksiranu vrednost β imaju istu vrednost Hankelove transformacije. Zapazimo još i da nizovi kod kojih je $\beta = 1$ imaju istu vrednost Hankelove transformacije koja iznosi $h_n^* = 1$. Primer za to je recimo, Hankelova transformacija niza isprekidanih Catalanovih brojeva i niza Motzkinovih brojeva.

Teorema 3.3.2. *Hankelova transformacija niza $(u_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data izrazom*
$$h_n^{**} = \frac{\beta^{\binom{n+1}{2}}}{2^{n+1}\sqrt{\alpha^2-4\beta}}\left[(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta})^{n+2} - (\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta})^{n+2}\right]. \tag{3.17}$$

Dokaz. Primetimo da je $w^{**}(x) = xw^*(x)$. Zbog toga je potrebno da primenimo odgovarajuću tansformaciju težinske funkcije $w^*(x)$, tj. Lemu 2.5.8. U tu svrhu definišimo pomoćni niz $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ na sledeći način:
$$r_0 = -\alpha_0^* = -\alpha, \qquad r_n = -\alpha_n^* - \frac{\beta_n^*}{r_{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$
Na osnovu Leme 2.5.8 koeficijenti β_n^{**} su dati sa
$$\beta_0^{**} = \int_{-\infty}^{+\infty} w^{**}(x)\,dx = \alpha,$$
$$\beta_n^{**} = \beta_n^* \cdot \frac{r_n}{r_{n-1}} \quad (n \geq 1).$$
Podsetimo se da su koeficijenti α_n^* i β_n^* dati relacijom (3.15). Pošto nismo u mogućnosti da pogodimo "lepo" rešenje ove rekurentne jednačine sa početnim uslovima $\beta_0^{**} = \alpha$, moramo da koristimo drugačiju tehniku dokazivanja od one primenjene u dokazu prethodne teoreme.

Primenom Heilermannove formule 2.12 imamo da važi
$$\begin{aligned}\frac{h_{n+1}^{**}}{h_n^{**}} =& \frac{(\beta_0^{**})^{n+1}(\beta_1^{**})^n\cdots(\beta_{n+1}^{**})}{(\beta_0^{**})^n(\beta_1^{**})^{n-1}\cdots(\beta_n^{**})} = \beta_0^{**}\beta_1^{**}\beta_2^{**}\cdots\beta_{n+1}^{**}\\ =&\alpha\cdot\beta_1^*\frac{r_1}{r_0}\cdot\beta_2^*\frac{r_2}{r_1}\cdots\beta_{n+1}^*\frac{r_{n+1}}{r_n} = \alpha\cdot\beta^{n+1}\frac{r_{n+1}}{r_0}\\ =&-\beta^{n+1}r_{n+1},\end{aligned}$$

Odakle dobijamo da je

$$r_n = -\frac{h_n^{**}}{\beta^n h_{n-1}^{**}}, \qquad (n \geq 1).$$

Zamenom prethodnog izraza u

$$r_n = -\alpha - \frac{\beta}{r_{n-1}},$$

dobijamo sledeću diferencnu jednačinu

$$-\frac{h^{**}}{\beta^n h_{n-1}^{**}} = -\alpha - \frac{\beta}{-\frac{h_{n-1}^{**}}{\beta^{n-1} h_{n-2}^{**}}}, \qquad n \geq 2$$

čijim sređivanjem dobijamo jednačinu

$$h_n^{**} = \alpha\beta^n h_{n-1}^{**} - \beta^{2n} h_{n-2}^{**}, \quad (n \geq 2) \tag{3.18}$$

sa startnim vrednostima

$$h_0^{**} = \alpha \qquad \text{i} \qquad h_1^{**} = \alpha^2\beta - \beta^2.$$

Da bi rešili jednačinu (3.18), uvedimo novi niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan sa

$$y_n = h_n^{**}\beta^{-\frac{n^2}{2}}.$$

Zamenom u prethodnoj jednačini dobijamo da je

$$y_n = \alpha\sqrt{\beta}y_{n-1} - \beta^2 y_{n-2}. \tag{3.19}$$

Rešenje linearne diferencne jednačine (3.19) sa početnim uslovima

$$y_0 = \alpha \qquad \text{i} \qquad y_1 = \alpha^2\sqrt{\beta} - \beta\sqrt{\beta},$$

je

$$y_n = \frac{\beta^{\frac{n}{2}}}{2^{n+1}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}\left[(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})^{n+2} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})^{n+2}\right].$$

Na kraju, smenom $h_n^{**} = y_n\beta^{\frac{n^2}{2}}$ dobijamo da važi tvrđenje teoreme. □

3.4 Hankelova transformacija nizova $\bar{u}_n$ i u_n

Podsetimo se da je niz $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan sa

$$\bar{u}_n = \begin{cases} \dfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta}, & n = 0 \\ u_n\ , & n \geq 1 \end{cases}$$

niz momenata koji obrazuju apsolutno neprekidnu komponentu mere $w_{ac}(x)$, težine $w(x)$, koja je data sa

$$w_{ac}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4\beta - (x-\alpha)^2}}{2\pi\beta x}, & x \in [\alpha - 2\sqrt{\beta}, \alpha + 2\sqrt{\beta}] \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases}.$$

Primetimo da je $w_{ac}(x) = w^*(x)/x$, pa prema tome, možemo izračunati koeficijente $\bar{\alpha}_n$ i $\bar{\beta}_n$, koji odgovaraju težini $w_{ac}(x)$, primenjujući Lemu 2.5.10.

Naredna teorema nam daje izraz u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju niza $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Teorema 3.4.1. *Hankelova transformacija niza* $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *je data sa*

$$\bar{h}_n = \beta^{\binom{n+1}{2}} \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta} \right)^{n+1}. \tag{3.20}$$

Dokaz. Da bi primenili Lemu 2.5.8 potrebno je da uvedemo novi niz

$$r_n = -\alpha_n^* - \frac{\beta_n^*}{r_{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad r_{-1} = -\int_{\mathbb{R}} w_{ac}(x)dx = -\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta} \tag{3.21}$$

i izračunamo koeficijente $\bar{\beta}_n$ na sledeći način:

$$\bar{\beta}_0 = -r_{-1} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta}, \quad \bar{\beta}_n = \beta_{n-1}\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

za startne vrednosti

$$\alpha_n^* = \alpha \quad (n \in \mathbb{N}_0), \qquad \beta_0^* = 1, \quad \beta_n^* = \beta \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Koristimo istu tehniku kao i za niz u_n^{**} u dokazu Teoreme 3.3.2. Primenom Heilermannove formule (2.12), dobijamo da važi:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{h}_{n+1}}{\bar{h}_n} &= \bar{\beta}_0\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2 \cdots \bar{\beta}_{n+1} \\ &=(-r_{-1}) \cdot \beta_0^*\frac{r_0}{r_{-1}} \cdot \beta_1^*\frac{r_1}{r_0} \cdots \beta_n^*\frac{r_n}{r_{n-1}} \\ &= -\beta^n r_n, \end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$r_n = -\frac{\bar{h}_{n+1}}{\beta^n \bar{h}_n}.$$

Rekurentna relacija (3.21) sada postaje

$$\bar{h}_{n+1} = \alpha\beta^n\bar{h}_n - \beta^{2n}\bar{h}_{n-1}. \tag{3.22}$$

Uvedimo novi niz $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan sa $v_n = \bar{h}_n\beta^{-\frac{n^2}{2}}$. Njegovom zamenom u prethodnoj jednačini dobijamo da je:

$$v_{n+1} - \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}v_n + v_{n-1} = 0, \qquad (n \geq 1). \tag{3.23}$$

Prva dva elementa niza $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ su

$$v_0 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta} \qquad \text{i} \qquad v_1 = \frac{\alpha^2 - 2\beta - \alpha\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta\sqrt{\beta}}.$$

Rešavanjem linearne diferencne jednačine (3.23) dobijamo

$$v_n = \frac{1}{2^{n+1}\beta^{\frac{n+2}{2}}}\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)^{n+1}$$

a samim tim i

$$\bar{h}_n = \beta^{\binom{n+1}{2}}\left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta}\right)^{n+1}. \tag{3.24}$$

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Naredna lema nam daje vezu između Hankelovih transformacija nizova koji se razlikuju jedino u početnom članu, odnosno u članu sa indeksom 0.

Lema 3.4.2. *Neka se nizovi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ razlikuju jedino u članu sa indeksom 0, tj. neka je $u_n = \bar{u}_n$ za zvako $n \geq 1$. Hankelove transformacije $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(\bar{h}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tih nizova respektivno zadovoljavaju izraz*

$$h_n = \bar{h}_n + (u_0 - \bar{u}_0)h^{**}_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

gde je sa $(h^{**}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ označena Hankelova transformacija niza $(u^{**}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ koji je definisan sa $u^{**}_n = u_{n+2}$ za svako $n \geq 0$ i za koji još važi $h^{**}_{-1} = 1$.

Dokaz. Za početak, primetimo da se determinanta $h_n = \det[u_{i+j-2}]_{1\leq i,j\leq n}$ može zapisati na sledeći način

$$h_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k M_{1,k+1} \tag{3.25}$$

gde je sa $M_{1,k}$ označen minor odgovarajuće matrice koji je pridružen njenom elementu $(1, k)$. Takođe primetimo da $\bar{h}_n$ možemo zapisati u obliku

$$\bar{h}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{u}_k \bar{M}_{1,k+1}. \tag{3.26}$$

Uočimo još da su minori $M_{1,k+1}$ i $\bar{M}_{1,k+1}$ međusobno jednaki za svako $k \geq 0$. Dakle, zadovoljena je sledeća relacija:

$$h_n - \bar{h}_n = (u_0 - \bar{u}_0)M_{1,1}.$$

Na kraju, ako iskoristimo činjenicu da je

$$M_{1,1} = \det[u_{i+j}]_{1\leq i,j\leq n-1} = \det[u_{i+j+2}]_{0\leq i,j\leq n-2} = \det[u^{**}_{i+j}]_{0\leq i,j\leq n-2} = h^{**}_{n-1}.$$

dobijamo da važi tvrđenje teoreme. □

Na osnovu Leme 3.4.2 i izraza (3.20) i (3.17) (Teorema 3.4.1 i Teorema 3.3.2) dobićemo izraz u zatvorenom obliku za $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Posledica 3.4.3. *Hankelova transformacija niza $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa*

$$h_n = \frac{\beta^{\binom{n}{2}}}{2^n\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}\left[\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)^n - \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)^n\right]. \tag{3.27}$$

Dokaz. Primenom Leme 3.4.2 i Teoreme 3.4.1, imamo da važi:

$$h_n = \beta^{\binom{n+1}{2}} \cdot \left[\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta}\right]^{n+1} - \left[\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2\beta}\right] \cdot h_{n-1}^{**}. \tag{3.28}$$

Nakon sređivanja poslednjeg izraza dobijamo formulu (3.27). □

Smenom $\alpha = z + 1$ i $\beta = z$ u (3.27) dobijamo izraz

$$h_n = \begin{cases} z^{\binom{n}{2}} \cdot \frac{1-z^n}{z-1}, & z > 1 \\ z^{\binom{n}{2}} \cdot \frac{z^n-1}{z-1}, & z < 1 \end{cases}$$

koji predstavlja Hankelovu transformaciu niza $(\frac{N_n(z)-\delta_{n0}}{z})_{n\in\mathbb{N}_0}$, gde sa $N_n(z)$ označen n-ti Narayana polinom.

Takođe je i slučaj kada je $\beta = \alpha^2/4$ vredan pažnje. Tada se izraz (3.27) ne može primeniti, jer je imenilac $\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}$ jednak nuli. Međutim, zbog polinomijalnosti (a samim tim i neprekidnosti) izraza $h_n = h_n(\alpha, \beta)$ možemo naći $h_n(\alpha, \alpha^2/4)$ na sledeći način:

$$h_n(\alpha, \alpha^2/4) = \lim_{\beta\to\alpha^2/4} h_n(\alpha, \beta).$$

Smenom $t = \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}$ imamo da je

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to\alpha^2/4} h_n(\alpha, \beta) &= \lim_{\beta\to\alpha^2/4} \frac{\beta^{\binom{n}{2}}}{2^{n-1}} \cdot \frac{\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)^n - \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)^n}{2\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \\ &= \frac{\alpha^{n(n-1)}}{2^{n^2-1}} \lim_{t\to 0} \frac{(\alpha - t)^n - (\alpha + t)^n}{2t} = -\frac{n\alpha^{n^2-1}}{2^{n^2-1}}.\end{aligned}$$

Dakle, konačan izraz za $h_n(\alpha, \alpha^2/4)$ je

$$h_n(\alpha, \alpha^2/4) = -n\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n^2-1}.$$

Smenom $\alpha = 2$, dobijamo da važi sledeća teorema.

Posledica 3.4.4. *Hankelova transformacija niza $(C_n - \delta_{n0})_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz čiji je opšti član jednak $h_n = -n$.*

3.5 Količnik Hankelovih transformacija $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(h_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(h_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$

Pošto smo našli izraze u zatvorenom obliku za Hankelove transformacije $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(h_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(h_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$, jednostavnim izračunavanjem (korišćenjem izraza (3.4), (3.13), (3.17) i (3.27)) možemo dokazati da važe sledeće relacije:

$$\frac{(-1)^{n+1}h_{n+1}}{h_n^*} = q_{n+1}, \qquad \frac{(-1)^{n+1}h_n^{**}}{h_n^*} = q_{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}_0). \tag{3.29}$$

za koje smo u Poglavlju 3.1 utvrdili da važe na konkretnom primeru za prvih nekoliko članova ovih nizova.

Primetimo da su ove relacije opšte, jer se koeficijenti α i β ne pojavljuju eksplicitno. Ovaj rezultat se može uzeti kao motivacija za formulisanje narednog problema koji je ostavljen za neka dalja istraživanja.

PROBLEM: Odrediti niz $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (tj. funkciju generatrisu $Q(x)$) takvu da Hankelove transformacije $h = \mathbf{H}(u)$, $h^* = \mathbf{H}(u^*)$ i $h^{**} = \mathbf{H}(u^{**})$ zadovoljavaju relaciju (3.29), gde je sa $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ označen inverzni red funkcije $Q(x)$, a nizovi $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(u_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisani kao $u^* = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $u^{**} = (u_{n+2})_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Glava 4

Hankelova transformacija isprekidanih nizova

Cilj ove glave je da se pronađe i opiše veza između Hankelove transformacije i dva različita tipa isprekidanih transformacija. Takođe je proučavana i transformacija koja je mešavina isprekidane i Hankelove transformacije (a koju ćemo zvati *isprekidana-Hankelova transformacija*). Svi rezultati koji su navedeni su opšti i mogu se primeniti na različite tipove nizova. Kao jedna od mnogobrojnih mogućnosti, data je primena tih rezultata na niz pomerenih Catalanovih brojeva $(C_{n+t})_{n\in\mathbb{N}_0}$, što je dalo uopštenje rezultata iz Glave 3.

Pristup koji je korišćen u ovoj glavi zasnovan je na rezultatima Gessela i Viennota [49] i nekih novijih rezultata Krattenthalera [64]. Navedena su i izračunavanja Hankelove transformacije nizova $(\alpha^2 C_n - \beta C_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(\alpha^2 C_{n+1} - \beta C_{n+2})_{n\in\mathbb{N}_0}$, kojima se omogućava direktna generalizacija rezultata koji su dali Cvetković, Rajković i Ivković u radu [34].

Cela ova glava je bazirana na originalnim rezultatima sadržanim u prihvaćenom radu [17].

4.1 Isprekidana transformacija i veza sa Hankelovom transformacijom

Pod pojmom *isprekidani niz*, podrazumevamo niz oblika $(c_0, 0, c_1, 0, c_2, 0, \ldots)$, gde je $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ neki dati niz. Na isti način definišemo i sledeću transformaciju:

Definicija 4.1.1. *Neka je $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dati niz.* **Isprekidana transformacija** $p = \mathcal{A}(c)$ *ovog niza definisana je sa*

$$p_n = \begin{cases} c_{n/2}, & n \text{ je parno} \\ 0, & n \text{ je neparno} \end{cases}.$$

Drugim rečima, ako je $p = \mathcal{A}(c)$ tada je $p = (c_0, 0, c_1, 0, c_2, 0, c_3, 0, \ldots)$.

Sledeća teorema daje vezu između Hankelove transformacije datog niza c i njegove isprekidane transformacije $p = \mathcal{A}(c)$. Ona je bazirana na dobro poznatoj formuli za determinantu tzv. "checkerboard" matrice.

Teorema 4.1.1. *Neka su $g = \mathbf{H}(p)$ i $h = \mathbf{H}(c)$ Hankelove transformacije nizova p i c respektivno, gde je $p = \mathcal{A}(c)$ isprekidani niz niza c. Tada je*

$$\det[p_{i+j}]_{0\le i,j\le n} = \det[c_{i+j}]_{0\le i,j\le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \det[c_{i+j+1}]_{0\le i,j\le \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}.$$

Na osnovu definicije Hankelove transformacije, poslednju jednakost možemo zapisati u obliku

$$g_n = h_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} h^*_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor},$$

gde je sa h^* *označena Hankelova transformacija pomerenog niza* $c^* = (c_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$*, tj.* $h^* = \mathbf{H}(c^*)$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je n parno, tj. $n = 2k$. Ako u determinanti

$$\det(a_{i+j})_{0\le i,j\le n-1} = \begin{vmatrix} c_0 & 0 & c_1 & 0 & c_2 & \cdots & c_{k-1} \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & & c_k \\ 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 & & 0 \\ c_2 & 0 & c_3 & 0 & c_4 & & c_{k+1} \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ c_{k-1} & 0 & c_k & 0 & c_{k+1} & \cdots & c_{2k-1} \end{vmatrix}$$

zamenimo vrste i kolone, dobijamo determinantu

$$\det[p_{i+j}]_{0\le i,j\le n} = \begin{vmatrix} c_0 & 0 & c_1 & 0 & c_2 & \cdots \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & \\ 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 & \\ c_2 & 0 & c_3 & 0 & c_4 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{vmatrix} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \\ & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

gde je $\mathbf{A} = [c_{i+j}]_{0\le i,j\le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1}$ i $\mathbf{B} = [c_{i+j+1}]_{0\le i,j\le \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor -1}$.

Za slučaj da je n neparno dokaz se izvodi na analogno prethodnom. □

Na sličan način, definišimo i drugi tip isprekidane transformacije, koju ćemo nazvati α-*isprekidana transformacija* i označiti sa $\mathcal{A}(c;\alpha)$.

Definicija 4.1.2. *Neka je dat niz* $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*. Njegova* **$\alpha$-isprekidana transformacija** $a = \mathcal{A}(c;\alpha)$ *je definisana sa* $a_n = \alpha p_n + p_{n+1}$*, gde je* $p = \mathcal{A}(c)$*. Drugim rečima, ako je* $a = \mathcal{A}(c;\alpha)$ *tada je* $a = (\alpha c_0, c_1, \alpha c_1, c_2, \alpha c_2, c_3, \alpha c_3, \ldots)$*.*

Neka je $[\mathbf{A}]_{m\times m}$ matrica formirana od prvih m vrsta i kolona (beskonačne) matrice $\mathbf{A}$. Pretpostavimo i da se vrste i kolone matrice indeksiraju počev od indeksa 0.

Sledeća teorema daje izraz za Hankelovu transformaciju α-isprekidanog niza $a = \mathcal{A}(c,\alpha)$ čiji je opšti član jednak:

$$g_n = \det[a_{i+j}]_{0\le i,j\le n} = \det \begin{bmatrix} \alpha c_0 & c_1 & \alpha c_1 & c_2 & \cdots \\ c_1 & \alpha c_1 & c_2 & \alpha c_2 & \\ \alpha c_1 & c_2 & \alpha c_2 & c_3 & \\ c_2 & \alpha c_2 & c_3 & \alpha c_3 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

Teorema 4.1.2. *Neka je* $g = \mathbf{H}(a)$ *i* $a = \mathcal{A}(c;\alpha)$. *Tada je*

$$g_n = \det[a_{i+j}]_{0\le i,j\le n} = \begin{cases} \det[\alpha^2 c_{i+j} - c_{i+j+1}]_{0\le i,j\le k-1} \cdot \det[c_{i+j+1}]_{0\le i,j\le k-1}, & n = 2k-1 \\ \alpha \cdot \det[\alpha^2 c_{i+j+1} - c_{i+j+2}]_{0\le i,j\le k-1} \cdot \det[c_{i+j}]_{0\le i,j\le k}, & n = 2k \end{cases}. \tag{4.1}$$

Dokaz. Razlikovaćemo dva slučaja u zavisnosti od parnosti broja n.
Slučaj 1. $n = 2k-1$ je neparno.

Pomnožimo kolonu $2j+1$ sa α^{-1}, pa je oduzmimo od kolone $2j$, za svako $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Tako dobijamo determinantu

$$\det[a_{i+j}]_{0\le i,j\le n} = \det \begin{bmatrix} \alpha c_0 - \alpha^{-1}c_1 & c_1 & \alpha c_1 - \alpha^{-1}c_2 & c_2 & \cdots \\ 0 & \alpha c_1 & 0 & \alpha c_2 & \\ \alpha c_1 - \alpha^{-1}c_2 & c_2 & \alpha c_2 - \alpha^{-1}c_3 & c_3 & \\ 0 & \alpha c_2 & 0 & \alpha c_3 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

Razmeštanjem odgovarajućih redova i kolona, dobijamo blok-dijagonalnu formu

$$\det[a_{i+j}]_{0\le i,j\le n} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & * \\ & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B},$$

gde je zvezdicom $(*)$ označena odgovarajuća $k\times k$ matrica koja nema nikakav uticaj na računanje determinante. Matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ su date sa

$$\mathbf{A} = [\alpha c_{i+j} - \alpha^{-1}c_{i+j+1}]_{0\le i,j\le k-1}, \quad \mathbf{B} = [\alpha c_{i+j+1}]_{0\le i,j\le k-1}.$$

Sada iz

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \alpha^{-k} \det[\alpha^2 c_{i+j} - c_{i+j+1}]_{0\le i,j\le k-1} \cdot \alpha^k \det[c_{i+j+1}]_{0\le i,j\le k-1}$$

$$= \det[\alpha^2 c_{i+j} - c_{i+j+1}]_{0\le i,j\le k-1} \cdot \det[c_{i+j+1}]_{0\le i,j\le k-1}$$

dobijamo prvi deo izraza (4.1).
Slučaj 2. $n = 2k$ je parno.

Ako sa α^{-1} pomnožimo kolonu $2j$ i oduzmemo od kolone $2j-1$ ($j = 1, 2, \ldots, k$), dobićemo

$$\det[a_{i+j}]_{0\le i,j\le n} = \det \begin{bmatrix} \alpha c_0 & 0 & \alpha c_1 & 0 & \alpha c_2 & \cdots \\ c_1 & \alpha c_1 - \alpha^{-1}c_2 & c_2 & \alpha c_2 - \alpha^{-1}c_3 & c_3 & \\ \alpha c_1 & 0 & \alpha c_2 & 0 & \alpha c_3 & \\ c_2 & \alpha c_2 - \alpha^{-1}c_3 & c_3 & \alpha c_3 - \alpha^{-1}c_4 & \alpha c_3 & \\ \alpha c_2 & 0 & \alpha c_3 & 0 & \alpha c_4 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Ponovnim razmeštanjem redova i kolona na odgovarajući način dobijamo blok-dijagonalnu formu

$$\det[a_{i+j}]_{0\le i,j\le n} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & * \\ & \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \det \mathbf{A}' \cdot \det \mathbf{B}',$$

gde je

$$\mathbf{A}' = [\alpha c_{i+j}]_{0\le i,j\le k}, \quad \mathbf{B}' = [\alpha c_{i+j+1} - \alpha^{-1} c_{i+j+2}]_{0\le i,j\le k-1}.$$

Drugi deo izraza (4.1) sledi iz:

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A}' \cdot \det \mathbf{B}' &= \alpha^{k+1} \det[c_{i+j}]_{0\le i,j\le k} \cdot \alpha^{-k} \det[\alpha^2 c_{i+j+1} - c_{i+j+2}]_{0\le i,j\le k-1} \\ &= \alpha \cdot \det[c_{i+j}]_{0\le i,j\le k} \cdot \det[\alpha^2 c_{i+j+1} - c_{i+j+2}]_{0\le i,j\le k-1}.\end{aligned}$$

□

Posmatrajmo matricu $\tilde{\mathbf{H}}_c$, formiranu dodavanjem dodatnog reda i kolone u Hankelovu matricu $\mathbf{H}_a$ iz α-isprekidanog niza $a = \mathcal{A}(c,\alpha)$:

$$\tilde{\mathbf{H}}_c = \begin{bmatrix} 0 & p^T \\ p & \mathbf{H}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_0 & 0 & c_1 & 0 & \cdots \\ c_0 & \alpha c_0 & c_1 & \alpha c_1 & c_2 & \\ 0 & c_1 & \alpha c_1 & c_2 & \alpha c_2 & \\ c_1 & \alpha c_1 & c_2 & \alpha c_2 & c_3 & \\ 0 & c_2 & \alpha c_2 & c_3 & \alpha c_3 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Ovde smo uzeli da je $p = \mathcal{A}(c)$, a niz tretiramo kao beskonačnu vektor kolonu.

Definicija 4.1.3. *Isprekidana-Hankelova transformacija niza $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan sa*

$$\tilde{h}_n = \det[\tilde{\mathbf{H}}_c]_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Sledeća teorema se bavi izračunavanjem isprekidane-Hankelove transformacije. Pri tome koristimo oznaku:

$$\chi(P) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } P \text{ istinito} \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases}.$$

Teorema 4.1.3. *Ako je $p = \mathcal{A}(c)$ i $a = \mathcal{A}(c;\alpha)$, tada je*

$$\tilde{h}_n = \det[\tilde{\mathbf{H}}_c]_{(n+1)\times(n+1)} = P_1 \cdot P_2$$

gde je

$$P_1 = \begin{cases} \det[c_{i+j}]_{0\le i,j\le k-1}, & n = 2k-1 \\ \det[c_{i+j+1}]_{0\le i,j\le k-1}, & n = 2k \end{cases}$$

$$P_2 = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k+l} \Big(\sum_{h=0}^{l} \alpha^{2h} c_{l-h}\Big) \det[c_{i+j+\chi(j\ge l)+1}]_{0\le i,j\le k-2}, & n = 2k-1 \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{k} (-1)^{k+l+1} \Big(\sum_{h=0}^{l-1} \alpha^{2h+1} c_{l-1-h}\Big) \det[c_{i+j+\chi(j\ge l)}]_{0\le i,j\le k-1}, & n = 2k \end{cases}$$

Dokaz. Opet razlikujemo dva slučaja u zavisnosti od parnosti broja n.

Slučaj 1. $n = 2k-1$ je neparno.

Ako sa α pomnožimo kolonu $2j$ i oduzmemo od kolone $2j+1$ $(j=0,1,\dots,k-1)$, dobijamo

$$\tilde{h}_n = \det \begin{bmatrix} 0 & c_0 & 0 & c_1 & 0 & \cdots \\ c_0 & 0 & c_1 & 0 & c_2 & \\ 0 & c_1 & \alpha c_1 & c_2-\alpha^2 c_1 & \alpha c_2 & \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & \\ 0 & c_2 & \alpha c_2 & c_3 - \alpha^2 c_2 & \alpha c_3 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Permutacijom redova i kolona u prethodnoj determinanti dobijamo

$$\tilde{h}_n = (-1)^k \det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & * \\ & \mathbf{B} \end{bmatrix} = (-1)^k \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} \tag{4.2}$$

gde su matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ jednake

$$\mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{k-1} \\ c_1 & c_2-\alpha^2 c_1 & & c_{k-2}-\alpha^2 c_{k-1} \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{k-1} & c_{k-2}-\alpha^2 c_{k-1} & & c_{2k-2}-\alpha^2 c_{2k-3} \end{bmatrix}$$

i

$$\mathbf{B} = [c_{i+j}]_{0\le i,j\le k-1}.$$

Sukcesivnim dodavanjem kolone j pomnožene sa α^2 koloni $j+1$ matrice $\mathbf{A}$ $(j=0,1,\dots,k-2)$ dobićemo sledeću determinantu

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} c_0 & \alpha^2 c_0 + c_1 & \alpha^4 c_0 + \alpha^2 c_1 + c_2 & \cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \\ c_2 & c_3 & c_4 & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}_{k\times k}.$$

Razvijanjem duž prve vrste sledi

$$\det \mathbf{A} = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \left(\sum_{h=0}^{l} \alpha^{2h} c_{l-h} \right) \det[c_{i+j+\chi(j\ge l)+1}]_{0\le i,j\le k-2}. \tag{4.3}$$

Sada, kombinovanjem (4.2) i (4.3), dobijamo da važi tvrđenje ove teoreme za $n=2k-1$.

Case 2. $n=2k$ je parno.
Pomnožimo sa α kolonu $2j-1$ i oduzmimo od kolone $2j$ $(j=1,2,\dots,k)$. Dobićemo

$$h_n = \det \begin{bmatrix} 0 & c_0 & -\alpha c_0 & c_1 & 0 & \cdots \\ c_0 & \alpha c_0 & c_1-\alpha^2 c_0 & \alpha c_1 & c_2-\alpha^2 c_1 & \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & \\ c_1 & \alpha c_1 & c_2-\alpha^2 c_1 & \alpha c_2 & c_3-\alpha^2 c_2 & \\ 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Razmeštanjem redova i kolona na odgovarajući način, prethodnu determinantu prevodimo u oblik

$$h_n = (-1)^k \det \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & * \\ & \mathbf{B}' \end{bmatrix} = (-1)^k \det \mathbf{A}' \cdot \det \mathbf{B}' \tag{4.4}$$

gde su matrice $\mathbf{A}'$ i $\mathbf{B}'$ date sa

$$\mathbf{A}' = \det \begin{bmatrix} 0 & -\alpha c_0 & \cdots & -\alpha c_{k-1} \\ c_0 & c_1 - \alpha^2 c_0 & & c_k - \alpha^2 c_{k-1} \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{k-1} & c_k - \alpha^2 c_{k-1} & & c_{2k-1} - \alpha^2 c_{2k-2} \end{bmatrix}$$

i

$$\mathbf{B}' = [c_{i+j+1}]_{0 \le i,j \le k-1}.$$

Opet, sabirajući kolonu j pomnoženu sa α^2 i kolonu $j+1$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$), dobićemo determinantu

$$\det \mathbf{A}' = \det \begin{bmatrix} 0 & -\alpha c_0 & -\alpha^3 c_0 - \alpha c_1 & -\alpha^5 c_0 - \alpha^3 c_1 - \alpha c_2 & \cdots \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}.$$

koju možemo razviti duž prve vrste na sledeći način:

$$\det \mathbf{A}' = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} \Big(\sum_{h=0}^{l-1} \alpha^{2h+1} c_{l-1-h} \Big) \det[c_{i+j+\chi(j \ge l)}]_{0 \le i,j \le k-1}. \tag{4.5}$$

Sada, kombinujući (4.4) i (4.5), dobijamo da važi tvrđenje ove teoreme za $n = 2k$. $\square$

4.2 Determinante nalik-Hankelovoj bazirane na Catalanovim brojevima

U ovom poglavlju su izložena izračunavanja determinanti koje su bazirane na nizu Catalanovih brojeva $C = (C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, što je dalje korišćeno u ostatku ove glave. Naš glavni instrument u daljem radu je sledeća teorema koju su Gessel i Viennot dokazali u radu [49], a koja je data i u radu Krattenthalera [64] (Teorema 3). Pre toga uvedimo pojam determinante nalik-Hankelovoj.

Definicija 4.2.1. *Za niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ determinanta nalik-Hankelovoj je determinanta oblika:*

$$\det[a_{\alpha_i + j}],$$

gde je $(\alpha_i)_{n \in \mathbb{N}_0}$ proizvoljan niz.

Teorema 4.2.1. [49, 64] *Neka je n pozitivan broj i neka su $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ nenegativni brojevi. Tada je*

$$\det[C_{\alpha_i + j}]_{0 \le i,j \le n-1} = \prod_{0 \le i < j \le n-1} (\alpha_j - \alpha_i) \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(i+n)!(2\alpha_i)!}{(2i)!\alpha_i!(\alpha_i + n)!}. \tag{4.6}$$

Posledica 4.2.2. *Za svako $t \in \mathbb{N}_0$, Hankelova transformacija niza $(C_{n+t})_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa*

$$\det[C_{i+j+t}]_{0\le i,j\le n-1} = \prod_{p=0}^{t-1} \frac{p!(2n+2p)!}{(2p)!(2n+p)!}.$$

Uzimajući u obzir već uvedenu oznaku

$$\chi(P) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } P \text{ istinito} \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases},$$

možemo pokazati da važe naredne dve posledice.

Posledica 4.2.3. *Za svako $l = 0, 1, \ldots, n-1$ važi da je*

$$\det[C_{i+j+\chi(j\ge l)}]_{0\le i,j\le n-1} = \binom{l+n}{2l}.$$

Dokaz. Ako označimo sa $\alpha_i = i + \chi(i \ge l)$, dokaz se svodi na izračunavanje determinante

$$\det[c_{\alpha_i+j}]_{0\le i,j\le n-1}.$$

Prema Teoremi 4.2.1, potrebno je da nađemo sledeće proizvode:

$$P_1 = \prod_{0\le i<j\le n-1} (\alpha_j - \alpha_i) \qquad \text{i} \qquad P_2 = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(i+n)!(2\alpha_i)!}{(2i)!\alpha_i!(\alpha_i+n)!}.$$

Direktnim izračunavanjem dobijamo da je:

$$P_1 = \binom{k}{l-1} \prod_{j=0}^{n-1} j! \qquad \text{i} \qquad P_2 = \frac{n!l!}{\prod_{j=0}^{n+1} j!} \cdot \frac{(2n+2)(l+n)!}{(2l+1)!}. \tag{4.7}$$

Prvi proizvod je dobijen u zavisnosti od tri različita slučaja ($i < j < l$, $l \le i < j$, $i \le l < j$), dok je za drugi bilo potrebno razlikovati samo dve mogućnosti: $i < l$ ili $i \ge l$. Primenom (4.7) i Teoreme 4.2.1 dobijamo da je

$$\det[C_{\alpha_i+j}]_{0\le i,j\le n-1} = P_1 \cdot P_2 = \binom{l+n}{2l}.$$

Ovim je tvrđenje Posledice dokazano. □

Posledica 4.2.4. *Za svako $l = 0, 1, \ldots, n-1$ i svako $t \in \mathbb{N}_0$ važi da je*

$$\det[C_{i+j+\chi(j\ge l)+t}]_{0\le i,j\le n-1} = \binom{l+n}{2l} \prod_{p=0}^{t-1} \frac{p!(2n+2p+1)!(p+n+l+1)}{(2p)!(2n+p+1)!(2p+2l+1)}$$

Dokaz. Dokaz se izvodi analogno prethodnom, uzimajući da je $\alpha_i = i + \chi(i \geq l) + t$. $\square$

Sledeća lema omogućava jednostavnu generalizaciju Leme 4 iz [64], koja predstavlja njen specijalan slučaj za $A = B = 1$.

Lema 4.2.5. *Ako je* $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ *data matrica, tada je*

$$\det[Aa_{i,j} + Ba_{i+1,j}]_{0\leq i,j\leq n-1} = \sum_{s=0}^{n} A^s B^{n-s} \det[a_{i+\chi(i\geq s),j}]_{0\leq i,j\leq n-1}.$$

gde su A *i* B *proizvoljne konstante.*

Kombinujući Teoremu 4.2.1 i Lemu 4.2.5 dobijamo narednu generalizaciju Posledice 5 iz [64].

Posledica 4.2.6. *Neka je* n *pozitivan broj i neka su* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *nenegativni brojevi. Tada je*

$$\begin{aligned}\det[AC_{\alpha_i+j} + BC_{\alpha_i+j+1}]_{0\leq i,j\leq n-1} = &\prod_{0\leq i<j\leq n} (\alpha_j - \alpha_i) \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(i+n)!}{(2i)!} \prod_{i=0}^{n} \frac{(2\alpha_i)!}{\alpha_i!(\alpha_i+n)!} \\ &\times \sum_{s=0}^{n} \frac{A^s B^{n-s} \alpha_s!(\alpha_s+n)!}{(2\alpha_s)! \prod_{j=0}^{s-1}(\alpha_s - \alpha_j) \prod_{j=s+1}^{n}(\alpha_j - \alpha_s)}\end{aligned}$$

Sledeće dve posledice predstavljaju specijalne slučajeve Posledice 4.2.6, a biće nam potrebne u daljim razmatranjima tokom ove glave. Druga posledica nam omogućava direktnu generalizaciju rezultata dokazanog od strane Cvetkovića, Rajkovića i Ivkovića u radu [34], koji se odnosi na izračunavanje Hankelove transformacije niza $(C_n + C_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Posledica 4.2.7. *Za svako* $t \in \mathbb{N}_0$ *i proizvoljne konstante* A *i* B*, Hankelova transformacija niza* $(AC_{n+t} + BC_{n+t+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *je data sa*

$$\det[AC_{i+j+t}+BC_{i+j+t+1}]_{0\leq i,j\leq n-1} = \frac{n!(2n+2t)!}{(t+n)!(t+2n)!} \prod_{p=0}^{t-1} \frac{p!(2n+2p)!}{(2p)!(2n+p)!} \sum_{s=0}^{n} \frac{(s+t)!(n+s+t)!}{s!(n-s)!(2s+2t)!} A^s B^{n-s}.$$

Posledica 4.2.8. *Hankelove transformacije nizova* $(\alpha^2 C_n - \beta C_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *i* $(\alpha^2 C_{n+1} - \beta C_{n+2})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *su date sa*

$$\begin{aligned}\det[\alpha^2 C_{i+j} - \beta C_{i+j+1}]_{0\leq i,j\leq n} &= \frac{1}{2^{2n+3}\sqrt{\alpha^2-4\beta}} \left[(\alpha + \sqrt{\alpha^2-4\beta})^{2n+3} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2-4\beta})^{2n+3}\right] \\ \det[\alpha^2 C_{i+j+1} - \beta C_{i+j+2}]_{0\leq i,j\leq n} &= \frac{1}{2^{2n+4}\alpha\sqrt{\alpha^2-4\beta}} \left[(\alpha + \sqrt{\alpha^2-4\beta})^{2n+4} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2-4\beta})^{2n+4}\right]\end{aligned} \tag{4.8}$$

Dokaz. Označimo sa $(\hat{h}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(\breve{h}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Hankelove transformacije redom nizova

$$(\alpha^2 C_n - \beta C_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} \qquad \text{i} \qquad (\alpha^2 C_{n+1} - \beta C_{n+2})_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Uzimajući da je $t = 0, 1$ u Posledici 4.2.2, dobijamo redom:

$$\begin{aligned} \hat{h}_n &= \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^{n-s+1} \alpha^{2s} \beta^{n-s+1} \binom{n+s+1}{n-s+1} \\ \breve{h}_n &= \sum_{s=0}^{n+1} (-1)^{n-s+1} \alpha^{2s} \beta^{n-s+1} \binom{n+s+2}{n-s+1} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Neposrednom proverom možemo utvrditi da oba niza zadovoljavaju sledeću diferencnu jednačinu

$$z_n - (\alpha^2 - 2\beta) z_{n-1} + \beta^2 z_{n-2} = 0, \qquad (n \geq 2)$$

sa početnim uslovima

$$\hat{h}_0 = \alpha^2 - \beta, \quad \hat{h}_1 = \alpha^4 - 3\alpha^2\beta + \beta^2 \qquad \text{i} \qquad \breve{h}_0 = \alpha^2 - 2\beta, \quad \breve{h}_1 = \alpha^4 - 4\alpha^2\beta + 3\beta^2.$$

Izraze (4.8) dobijamo kao odgovarajuća rešenja prethodne diferencne jednačine. $\square$

4.3 Hankelova transformacija niza isprekidanih pomerenih Catalanovih brojeva

Posmatrajmo niz *pomerenih Catalanovih brojeva* $C^t = (C_n^t)_{n\in\mathbb{N}_0} = (C_{n+t})_{n\in\mathbb{N}_0}$, gde je $t \in \mathbb{N}_0$ proizvoljan broj. Rezultati dobijeni u Poglavlju 4.1 iskorišćeni su za izračunavanje Hankelove transformacije isprekidanih nizova $C^{\mathcal{A},t} = \mathcal{A}(C^t)$ i $C^{\mathcal{A},\alpha,t} = \mathcal{A}(C^t;\alpha)$. Primetimo da je

$$C^{\mathcal{A},t} = (C_t, 0, C_{t+1}, 0, \ldots), \quad C^{\mathcal{A},\alpha,t} = (\alpha C_t, C_{t+1}, \alpha C_{t+1}, C_{t+2}, \ldots).$$

Direktnom primenom Teoreme 4.1.1, Teoreme 4.1.2, Posledice 4.2.2 i Posledice 4.2.7 dobijamo da važe sledeći izrazi za Hankelovu transformaciju.

Posledica 4.3.1. *Hankelova transformacija niza $C^{\mathcal{A},t} = \mathcal{A}(C^t)$ je data sa:*

$$\det[C_{i+j}^{\mathcal{A},t}]_{0\leq i,j\leq n} = \begin{cases} \dfrac{(2t)!(2k+1)!}{t!(2k+t+1)!} \displaystyle\prod_{p=0}^{t} \dfrac{p!^2(2k+2p)!^2}{(2p)!^2(2k+p)!^2}, & n = 2k \\[2ex] \dfrac{(2t)!(2k+t)!}{t!(2k+2t)!} \displaystyle\prod_{p=0}^{t} \dfrac{p!^2(2k+2p)!^2}{(2p)!^2(2k+p)!^2}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

Posledica 4.3.2. *Hankelova transformacija niza $C^{\mathcal{A},\alpha,t} = \mathcal{A}(C^t;\alpha)$ je data sa:*

$$\det[C_{i+j}^{\mathcal{A},\alpha,t}]_{0\leq i,j\leq n} = \begin{cases} \dfrac{2(2k+1)!k!(2t)!(2k+2t+1)!}{t!(k+t)!(2k+t+1)!^2} \displaystyle\prod_{p=0}^{t} \dfrac{p!^2(2k+2p)!^2}{(2p)!^2(2k+p)!^2} \\ \qquad \times \displaystyle\sum_{s=0}^{k} \dfrac{(s+t+1)!(k+s+t+1)!}{s!(k-s)!(2s+2t+2)!} (-1)^{k-s} \alpha^{2s+1}, & n = 2k \\[2ex] \dfrac{k!(2t)!}{t!(k+t)!} \displaystyle\prod_{p=0}^{t} \dfrac{p!^2(2k+2p)!^2}{(2p)!^2(2k+p)!^2} \\ \qquad \times \displaystyle\sum_{s=0}^{k} \dfrac{(s+t)!(k+s+t)!}{s!(k-s)!(2s+2t)!} (-1)^{k-s} \alpha^{2s}, & n = 2k-1 \end{cases}$$

Posledica 4.3.3. *Isprekidana-Hankelova transformacija niza C^t je data sa:*

$$\tilde{h}_n = \det[\tilde{\mathbf{H}}_{C^t}]_{(n+1)\times(n+1)} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{t!}{(2t)!}\displaystyle\prod_{p=0}^{t-1}\frac{p!^2(2k+p+t)!}{(2p)!^2(2k+p)!} \\ \quad\times\displaystyle\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k+l}\Big(\sum_{h=0}^{l}\alpha^{2h}C_{l+t-h}\Big)\binom{l+k-1}{2l}\prod_{p=0}^{t}\frac{p+k+l}{2p+2l+1}, & n=2k-1 \\ \dfrac{t!}{(2t)!}\displaystyle\prod_{p=0}^{t-1}\frac{p!^2(2k+p+t+1)!}{(2p)!^2(2k+p+1)!} \\ \quad\times\displaystyle\sum_{l=1}^{k}(-1)^{k+l-1}\Big(\sum_{h=0}^{l-1}\alpha^{2h+1}C_{l+t-h-1}\Big)\binom{l+k}{2l}\prod_{p=0}^{t-1}\frac{p+k+l+1}{2p+2l+1}, & n=2k \end{cases}$$

4.4 Generalizacija inverznog reda funkcije $\frac{x}{1+\alpha x+\beta x^2}$

U Glavi 3 izračunali smo Hankelovu transformaciju inverznog reda funkcije $Q(x) = \frac{x}{1+\alpha x+\beta x^2}$, kao i odgovarajućih pomerenih nizova. Podsetimo se da je po Definiciji 3.1.1 za datu funkciju (generatrisu) $v = f(u)$ koja zadovoljava uslov $f(0) = 0$, inverzni red zapravo niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ za koji važi

$$u = f^{-1}(v) = s_1 v + s_2 v^2 + \cdots + s_n v^n + \cdots ,$$

uz uslov da je $u = f^{-1}(v)$, inverzna funkcija funkcije $v = f(u)$.

Opšti član niza dobijenog inverzijom $Q(x) = \frac{x}{1+\alpha x+\beta x^2}$ je dat sa (kao što je i izračunato u [6, 16])

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n-1}{2k}C_k\alpha^{n-2k-1}\beta^k. \tag{4.10}$$

Posmatrajmo, sledeću generalizaciju $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ toga niza, datu sa:

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n-1}{2k}C_{k+t}\alpha^{n-2k-1}\beta^k. \tag{4.11}$$

Pri tome, napomenimo da se (4.11) svodi na (4.10) uzimajući da je $t = 0$.

Posmatrajmo pomerene nizove $(u_n^*(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(u_n^{**}(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisane redom sa $u_n^*(t) = u_{n+1}(t)$ i $u_n^{**}(t) = u_{n+2}(t)$. U Glavi 3 izračunate su odgovarajuće Hankelove transformacije $h_n^*(0)$, $h_n^{**}(0)$ i $h_n(0)$ korišćenjem metoda baziranog na ortogonalnim polinomima [34, 94] (Teoreme 3.3.1 i 3.3.2 i Posledica 3.4.3).

Potpuno drugačiji pristup od onog korišćenog u dokazu Teorema 3.3.1 i 3.3.2, a takođe baziran na ortogonalnim polinomima, dat je u skorašnjem radu [30].

U sledećem poglavlju, su izračunate Hankelove transformacije $h_n^*(t)$, $h_n^{**}(t)$ i $h_n(t)$ koje omogućavaju generalizaciju Teorema 3.3.1, 3.3.2 i Posledice 3.4.3. Dokaz im je baziran na primeni opadajuće α-binomne transformacije i rezultatima dobijenim u prethodnom poglavlju.

4.5 Opadajuća α-binomna transformacija

Podsetimo se da je, po Definiciji 2.6, opadajuća α-binomna transformacija $b = \mathbf{Bf}(a;\alpha)$, za dati niz $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ jednaka sa:

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} a_k.$$

Takođe smo u Glavi 2 naveli i jednu generalizaciju (Teorema 2.5.11) dobro poznatog rezultata Spiveya i Steila iz [102], a koji je naveden u Teoremi 2.5.11. Po toj teoremi važi da je

$$\mathbf{H}(\mathbf{Bf}(a;\alpha)) = \mathbf{H}(a).$$

Opadajuća α-binomna transformacija se može zapisati u obliku sledeće matrične forme:

$$b = \mathbf{B}^\alpha a, \quad \mathbf{B}^\alpha = \left[\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\right]_{n,k\in\mathbb{N}_0}$$

gde su nizovi a i b tretirani kao odgovarajuće vektor kolone. Ista notacija je korišćena i u nastavku ove glave. Matrica $\mathbf{B}^\alpha$ se naziva *α-binomna matrica.*
Naredna Lema nam daje vezu između Hankelovih matrica

$$\mathbf{H}_a = [a_{i+j}]_{i,j\in\mathbb{N}_0}, \quad \mathbf{H}_b = [b_{i+j}]_{i,j\in\mathbb{N}_0}$$

i matrice $\mathbf{B}^\alpha$.

Lema 4.5.1. *Ako je $b = \mathbf{Bf}(a;\alpha)$, tada važi da je*

$$\mathbf{H}_b = \mathbf{B}^\alpha \mathbf{H}_a (\mathbf{B}^\alpha)^T. \tag{4.12}$$

Dokaz. Pođimo od opšteg člana b_{n+m} matrice $\mathbf{H}_b$:

$$b_{n+m} = \sum_{t=0}^{n+m} \binom{n+m}{t} \alpha^{n+m-t} a_t.$$

Primenom dobro poznatog rezultata

$$\binom{n+m}{t} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{t-k}$$

dobićemo

$$\begin{aligned} b_{n+m} &= \sum_{t=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{t-k}\alpha^{n+m-t}a_t = \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{l}\alpha^{n+m-k-l}a_{k+l} \\ &= \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\cdot a_{k+l}\cdot\binom{m}{l}\alpha^{m-l} = \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\Big(\mathbf{B}^\alpha\Big)_{nk}\cdot a_{k+l}\cdot\Big(\mathbf{B}^\alpha\Big)_{ml}. \end{aligned}$$

Time je dokaz leme kompletiran. $\square$

4.6 Izračunavanje Hankelove transformacije nizova $u_n(t)$, $u_n^*(t)$ i $u_n^{**}(t)$

U ovom poglavlju je pokazano da su nizovi $u_n^*(t)$ i $u_n^{**}(t)$ zapravo, opadajuće α-binomne transformacije $\mathcal{A}(c)$ i $\mathcal{A}(c;\alpha)$, gde je $c = (\beta^n C_{t+n})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Takođe je pokazano da je $\mathbf{H}(u(t))$ isto što i isprekidana-Hankelova transformacija niza c.

Koristeći ovo, možemo primeniti rezultate iz Poglavlja 4.1, Poglavlja 4.2 i Poglavlja 4.3 da bi izračunali Hankelove transformacije nizova $(u_n^*(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(u_n^{**}(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Glavni rezultati ovog poglavlja su Teoreme 4.6.2-4.6.4. Kao poseban slučaj ovih izračunavanja (za $t=0$), je potvrđivanje Teorema 3.3.1, 3.3.2, kao i Posledice 3.4.3, dokazane u [16].

4.6.1 Niz $u_n^*(t)$

Neka je dat niz $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan sa $c_n = \beta^n C_{n+t}$ i neka je $p = \mathcal{A}(c)$, tj.

$$p_n = \begin{cases} \beta^k C_{k+t}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k-1 \end{cases}.$$

Podsetimo se da se niz $u_n^*(t)$ može zapisati na sledeći način (direktno iz (4.11)):

$$u_n^*(t) = u_{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} \alpha^{n-2k} \beta^k C_{k+t} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \alpha^{n-l} p_l$$

odakle sledi da je $(u_n^*(t))_{n\in\mathbb{N}_0} = \mathbf{Bf}\Big(p;\alpha\Big)$, a samim tim i $h^*(t) = \mathbf{H}(p)$ (Teorema 2.5.11). Za dalji rad nam je potrebna još i naredna propozicija.

Propozicija 4.6.1. *Neka je $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ proizvoljan niz i neka je $h = \mathbf{H}(s)$ njegova Hankelova transformacija. Tada je*

$$\mathbf{H}\Big((r^n s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\Big) = (r^{n(n+1)} h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

gde je r proizvoljan broj.

Dokaz. Hankelova transformacija $\mathbf{H}\Big((r^n s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\Big)$ niza $(r^n s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz $(q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, čiji je opšti član jednak sa:

$$
\begin{aligned}
q_n =& \det \begin{bmatrix} r^0 s_0 & r^1 s_1 & \cdots & r^n s_n \\ r^1 s_1 & r^2 s_2 & & r^{n+1} s_{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \\ r^n s_n & r^{n+1} s_{n+1} & & r^{2n} s_{2n} \end{bmatrix} \\
=& r^0 \cdot r^1 \cdot r^2 \cdots r^n \cdot \det \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ r^1 s_1 & r^1 s_2 & & r^1 s_{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \\ r^n s_n & r^n s_{n+1} & & r^n s_{2n} \end{bmatrix} \\
=& (r^0 \cdot r^1 \cdot r^2 \cdots r^n)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & & s_{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \\ s_n & s_{n+1} & & s_{2n} \end{bmatrix} \\
=& r^{n(n+1)} h_n,
\end{aligned}
$$

čime je tvrđenje Propozicije dokazano. □

Primetimo i da se niz $p = \mathcal{A}(c)$ može zapisati i u obliku $p = (\beta^{n/2} C_n^{\mathcal{A},t})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gde je $C^{\mathcal{A},t} = \mathcal{A}(C^t)$ (iz Poglavlja 4.3). Dakle, važi da je

$$
h_n^*(t) = \det[p_{i+j}]_{0\le i,j\le n} = \beta^{\binom{n+1}{2}} \det[C_{i+j}^{\mathcal{A},t}]_{0\le i,j\le n}. \tag{4.13}
$$

Sledeća teorema se može dobiti neposredno iz (4.13) i Posledice 4.3.1.

Teorema 4.6.2. *Hankelova transformacija $(h_n^*(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ niza $(u_n^*(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa:*

$$
\begin{aligned}
h_{2k}^*(t) &= \beta^{\binom{2k+1}{2}} \frac{(2t)!(2k+1)!}{t!(2k+t+1)!} \prod_{p=0}^{t} \frac{p!^2(2k+2p)!^2}{(2p)!^2(2k+p)!^2} \\
h_{2k-1}^*(t) &= \beta^{\binom{2k}{2}} \frac{(2t)!(2k+t)!}{t!(2k+2t)!} \prod_{p=0}^{t} \frac{p!^2(2k+2p)!^2}{(2p)!^2(2k+p)!^2}
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

Napomenimo da se smenom $t = 0$ potvrđuje činjenica da je $h_n^*(0) = \beta^{\binom{n+1}{2}}$ iz Teoreme 3.3.1.

4.6.2 Niz $u_n^{**}(t)$

Neka je $a = \mathcal{A}\Big(c;\alpha\Big)$, tj. α-isprekidana transformacija niza $c_n = \beta^n C_{n+t}$. Niz $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ se može zapisati u sledećem obliku

$$
a_n = \begin{cases} \alpha\beta^k C_{k+t}, & n = 2k \\ \beta^k C_{k+t}, & n = 2k-1 \end{cases}. \tag{4.15}
$$

Prema (4.11) imamo da je

$$
u_n^{**}(t) = \sum_{k=0}^{[\frac{n+1}{2}]} \binom{n}{2k-1} \alpha^{n-(2k-1)} \beta^k C_{k+t} + \sum_{k=0}^{[\frac{n+1}{2}]} \binom{n}{2k} \alpha^{n-2k} (\alpha\beta^k C_{k+t}) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \alpha^{n-l} a_l.
$$

Dakle, na osnovu $u^{**}(t) = \mathbf{Bf}(a;\alpha)$ i iz Leme 2.5.11 zaključujemo da je $\mathbf{H}(u^{**}(t)) = \mathbf{H}(a)$.

Pretpostavimo da je $n = 2k-1$. Na osnovu Teoreme 4.1.2 i Propozicije 4.6.1, dobijamo da je

$$\begin{aligned}\det[a_{i+j}]_{0\le i,j\le n} &= \det[\alpha^2\beta^{i+j}C_{i+j+t} - \beta^{i+j+1}C_{i+j+t+1}]_{0\le i,j\le k-1}\cdot\det[\beta^{i+j+1}C_{i+j+t+1}]_{0\le i,j\le k-1}\\ &= \beta^{k(2k-1)}\det[\alpha^2C_{i+j+t} - \beta C_{i+j+t+1}]_{0\le i,j\le k-1}\cdot\det[C_{i+j+t+1}]_{0\le i,j\le k-1}\end{aligned}\tag{4.16}$$

Slično, za $n = 2k$ imamo da je

$$\begin{aligned}\det[a_{i+j}]_{0\le i,j\le n} &= \alpha\det[\alpha^2\beta^{i+j+t+1}C_{i+j+t+1} - \beta^{i+j+2}C_{i+j+t+2}]_{0\le i,j\le k-1}\cdot\det[\beta^{i+j+1}C_{i+j+t}]_{0\le i,j\le k}\\ &= \alpha\beta^{k(2k+1)}\det[\alpha^2C_{i+j+t+1} - \beta C_{i+j+t+2}]_{0\le i,j\le k-1}\cdot\det[C_{i+j+t}]_{0\le i,j\le k}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Ako sada iskoristimo Posledicu 4.2.2 i Posledicu 4.2.7 dobijamo da važi naredna teorema.

Teorema 4.6.3. *Hankelova transformacija $(h_n^{**}(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ niza $(u_n^{**}(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa:*

$$\begin{aligned}h_{2k-1}^{**}(t) &= \beta^{k(2k-1)}\frac{k!(2t)!}{t!(k+t)!}\prod_{p=0}^{t}\frac{p!^2(2k+2p)!^2}{(2p)!^2(2k+p)!^2}\\ &\quad\times\sum_{s=0}^{k}\frac{(s+t)!(k+s+t)!}{s!(k-s)!(2s+2t)!}(-1)^{k-s}\beta^{k-s}\alpha^{2s},\\ h_{2k}^{**}(t) &= \beta^{k(2k+1)}\frac{2(2k+1)!k!(2t)!(2k+2t+1)!}{t!(k+t)!(2k+t+1)!^2}\prod_{p=0}^{t}\frac{p!^2(2k+2p)!^2}{(2p)!^2(2k+p)!^2}\\ &\quad\times\sum_{s=0}^{k}\frac{(s+t+1)!(k+s+t+1)!}{s!(k-s)!(2s+2t+2)!}(-1)^{k-s}\beta^{k-s}\alpha^{2s+1}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Smenom $t = 0$ u (4.16) i (4.17) dobijamo da važi

$$h_n(0) = \begin{cases}\beta^{k(2k-1)}\det[\alpha^2C_{i+j} - \beta C_{i+j+1}]_{0\le i,j\le k-1}, & n = 2k-1\\ \alpha\beta^{k(2k+1)}\det[\alpha^2C_{i+j+1} - \beta C_{i+j+2}]_{0\le i,j\le k-1}, & n = 2k\end{cases}$$

pa na osnovu Posledice 4.2.8 potvrđujemo rezultate Teoreme 3.3.2.

4.6.3 Niz $u_n(t)$

Već smo dokazali da je $u^*(t) = \mathbf{Bf}\Big(p;\alpha\Big)$ i $u^{**}(t) = \mathbf{Bf}(a;\alpha)$. Prva jednakost može se zapisati, u matričnoj formi, na sledeći način: $u^*(t) = \mathbf{B}^\alpha p$. Osim toga, prema Lemi 4.5.1 imamo da je

$$\mathbf{H}_{u^{**}(t)} = \mathbf{B}^\alpha\mathbf{H}_a(\mathbf{B}^\alpha)^T$$

pa važi matrična jednakost:

$$\begin{bmatrix}1 & \\ & \mathbf{B}^\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & p^T\\ p & \mathbf{H}_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & (\mathbf{B}^\alpha)^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & p^T(\mathbf{B}^\alpha)^T\\ \mathbf{B}^\alpha p & \mathbf{B}^\alpha\mathbf{H}_a(\mathbf{B}^\alpha)^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & (u^*(t))^T\\ u^*(t) & \mathbf{H}_{u^{**}(t)}\end{bmatrix} = \mathbf{H}_{u(t)}\tag{4.19}$$

Dakle, determinanta $(n+1)\times(n+1)$ glavnog minora $\mathbf{H}_{u(t)}$, formiranog od redova i kolona sa indeksima $1,2,\ldots,n+1$, jednaka je istom minoru matrice

$$\tilde{\mathbf{H}}_c = \begin{bmatrix} 0 & p^T \\ p & \mathbf{H}_a \end{bmatrix}.$$

Drugim rečima, $h_n(t)$ je jednako n-tom članu isprekidane-Hankelove transformacije niza $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, pa se, može izračunati primenom Teoreme 4.1.3.

Teorema 4.6.4. *Hankelova transformacija* $(h_n(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ *niza* $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}_0}$ *je data sa:*

$$\begin{aligned}
h_{2k-1}(t) &= \beta^{(k-1)(2k-1)} \frac{t!}{(2t)!} \prod_{p=0}^{t-1} \frac{p!^2(2k+p+t)!}{(2p)!^2(2k+p)!} \\
&\quad \times \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k+l} \Big(\sum_{h=0}^{l} \alpha^{2h}\beta^{k-1-h} C_{l+t-h} \Big) \binom{l+k-1}{2l} \prod_{p=0}^{t} \frac{p+k+l}{2p+2l+1} \\
h_{2k}(t) &= \beta^{k(2k-1)} \frac{t!}{(2t)!} \prod_{p=0}^{t-1} \frac{p!^2(2k+p+t+1)!}{(2p)!^2(2k+p+1)!} \\
&\quad \times \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k+l+1} \Big(\sum_{h=0}^{l-1} \alpha^{2h+1}\beta^{k-1-h} C_{l+t-h-1} \Big) \binom{l+k}{2l} \prod_{p=0}^{t-1} \frac{p+k+l+1}{2p+2l+1}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Dokaz. U zavisnosti od parnosti broja n, razlikujemo dva slučaja.

Slučaj 1. $n = 2k-1$ je neparno.

Primenom Teoreme 4.1.3 imamo da važi $h_{2k-1}(t) = P_1\cdot P_2$ gde je

$$P_1 = \det[c_{i+j}]_{0\le i,j\le k-1} = \det[\beta^{i+j}C_{i+j+t}]_{0\le i,j\le k-1} = \beta^{k(k-1)}\det[C_{i+j+t}]_{0\le i,j\le k-1} \tag{4.21}$$

i

$$\begin{aligned}
P_2 &= \sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k+l}\Big(\sum_{h=0}^{l}\alpha^{2h}c_{l-h}\Big)\det[c_{i+j+\chi(j\ge l)+1}]_{0\le i,j\le k-2} \\
&= \sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k+l}\Big(\sum_{h=0}^{l}\alpha^{2h}\beta^{l-h}C_{l+t-h}\Big)\beta^{k^2-k-l}\det[C_{i+j+\chi(j\ge l)+t+1}]_{0\le i,j\le k-2}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Prema Posledici 4.2.2 i Posledici 4.2.4, uz formule (4.21) i (4.22), dobijamo izraz za $h_{2k-1}(t)$ u (4.20).

Slučaj 2. $n = 2k$ je parno.

Sada je $h_{2k}(t) = P_1\cdot P_2$ gde je

$$P_1 = \det[\beta^{i+j+1}C_{i+j+t+1}]_{0\le i,j\le k-1} = \beta^{k^2}\det[C_{i+j+t+1}]_{0\le i,j\le k-1} \tag{4.23}$$

a prema Propoziciji 4.6.1 je

$$\begin{aligned}
P_2 &= \sum_{l=1}^{k}(-1)^{k+l+1}\Big(\sum_{h=0}^{l-1}\alpha^{2h+1}c_{l-1-h}\Big)\det[c_{i+j+\chi(j\ge l)}]_{0\le i,j\le k-1} \\
&= \sum_{l=1}^{k}(-1)^{k+l+1}\Big(\sum_{h=0}^{l-1}\alpha^{2h+1}\beta^{l-1-h}C_{l+t-1-h}\Big)\beta^{k^2-l}\det[C_{i+j+\chi(j\ge l)+t}]_{0\le i,j\le k-1}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Slično kao u prethodnom slučaju, prema Posledici 4.2.2 i Posledici 4.2.3, uz formule (4.23) i (4.24), dobijamo izraz za $h_{2k}(t)$ u (4.20). $\square$

U specijalnom slučaju, kada je $t = 0$, izraz (4.20) se svodi na:

$$\begin{aligned} h_{2k-1}(0) &= \beta^{(k-1)(2k-1)} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k+l} \Big(\sum_{h=0}^{l} \alpha^{2h} \beta^{k-h-1} C_{l-h} \Big) \binom{l+k}{2l+1} \\ h_{2k}(0) &= \beta^{k(2k-1)} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k+l+1} \Big(\sum_{h=0}^{l-1} \alpha^{2h+1} \beta^{k-h-1} C_{l-1-h} \Big) \binom{l+k}{2l} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Dokaz Teoreme 3.4.3. Izraz (4.25) se, zamenom poretka sumiranja, može transformisati u sledeći oblik:

$$\begin{aligned} h_{2k-1}(0) &= \beta^{(k-1)(2k-1)} \sum_{h=0}^{k-1} \alpha^{2h} \beta^{k-1-h} \sum_{l=h}^{k-1} (-1)^{k+l} C_{l-h} \binom{l+k}{2l+1} \\ h_{2k}(0) &= \beta^{k(2k-1)} \sum_{h=0}^{k-1} \alpha^{2h+1} \beta^{k-1-h} \sum_{l=h+1}^{k} (-1)^{k+l+1} C_{l-1-h} \binom{l+k}{2l} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Neka je $z_n = \beta^{-\binom{n}{2}} h_n(0)$ a u drugoj jednakosti iz (4.26) smanjene granice u l za 1. Izrazi za z_{2k} i z_{2k-1} su

$$\begin{aligned} z_{2k-1} &= \sum_{h=0}^{k-1} \alpha^{2h} \beta^{k-1-h} \sum_{l=h}^{k-1} (-1)^{k+l} C_{l-h} \binom{l+k}{2l+1}, \\ z_{2k} &= \sum_{h=0}^{k-1} \alpha^{2h+1} \beta^{k-1-h} \sum_{l=h}^{k-1} (-1)^{k+l} C_{l-h} \binom{l+k+1}{2l+2}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Neposrednom proverom možemo zaključiti da z_n zadovoljava tročlanu linearnu diferencnu jednačinu

$$z_{n+2} - \alpha z_{n+1} + \beta z_n = 0$$

za svako $n \in \mathbb{N}_0$, odakle direktno sledi izraz (3.27) u Teoremi 3.4.3:

$$h_n(0) = \beta^{\binom{n}{2}} z_n = \frac{\beta^{\binom{n}{2}}}{2^n \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \left[\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \right)^n - \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \right)^n \right].$$

Dakle, potvrdili smo tvrđenje Teoreme 3.4.3.

Glava 5

Hankelova transformacija inverznog reda funkcije $\frac{x(1-\alpha x)}{1-\beta x}$

Traženje izraza u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju inverznog reda $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ funkcije $\frac{x(1-\alpha x)}{1-\beta x}$, ali i odgovarajućih pomerenih nizova $(v_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(v_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$ je glavna tema i ove glave. Osim toga, nađena je i LU-faktorizacija Hankelove matrice H_n^* koja odgovara nizu $(v_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$, koja potvrđuje tačnost dobijenog izraza za njegovu Hankelovu transformaciju. Relaciju koja povezuje Hankelovu transformaciju ovih nizova pretpostavio je P. Barry u radu [8] (Pretpostavka 6). Cilj ove glave je da potvrdi neke rezultate, da pruži dokaze pomenutim pretpostavkama, ali i da doda neke nove rezultate i činjenice iz ove oblasti. Metodologija i način rasuđivanja je sličan kao i u Glavi 3.

Svi rezultati prikazani u ovoj glavi su originalni i preuzeti iz objavljenog rada [15].

5.1 Inverzni red funkcije $B(x) = \frac{x(1-\alpha x)}{1-\beta x}$

Posmatrajmo niz $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadat inverznim redom funkcije

$$B(x) = \frac{x(1-\alpha x)}{1-\beta x}$$

gde je $\beta \neq 0$. Funkcija generatrisa $V(x)$ niza $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je rešenje jednačine

$$B(V(x)) = \frac{V(x)(1-\alpha V(x))}{1-\beta V(x)} = x \tag{5.1}$$

uz uslov $V(0) = 0$ i data je sa

$$V(x) = \frac{1+\beta x - \sqrt{1-2(2\alpha-\beta)x+\beta^2x^2}}{2\alpha}. \tag{5.2}$$

Opšti član niza $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je (videti Propoziciju 19 u [6]):

$$v_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n+k-1}{2k} C_k \alpha^k (-\beta)^{n-k-1}. \tag{5.3}$$

Glavni cilj ove glave je izračunavanje Hankelove transformacije niza $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, tj. inverznog reda funkcije $B(x)$, ali i njegovih pomerenih nizova $(v_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(v_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisanih sa $v_n^* = v_{n+1}$ i $v_n^{**} = v_{n+2}$. Označimo Hankelove transformacije nizova $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(v_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(v_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$ sa h_n, h_n^* i h_n^{**}, respektivno. Direktnim izračunavanjem[1] možemo dobiti proizvoljan broj početnih članova svakog od navedenih nizova koji su dati u narednom primeru.

Primer 5.1.1. Prvih nekoliko članova pomenutih nizova je dato sa:

$$\begin{aligned}
v_n =&\Big(0, 1, \alpha-\beta, 2\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2, 5\alpha^3-10\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3, 14\alpha^4-35\alpha^3\beta+30\alpha^2\beta^2-10\alpha\beta^3+\beta^4, \dots\Big)\\
v_n^* =&\Big(1, \alpha-\beta, 2\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2, 5\alpha^3-10\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3, 14\alpha^4-35\alpha^3\beta+30\alpha^2\beta^2-10\alpha\beta^3+\beta^4, \dots\Big)\\
v_n^{**} =&\Big(\alpha-\beta, 2\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2, 5\alpha^3-10\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3, 14\alpha^4-35\alpha^3\beta+30\alpha^2\beta^2-10\alpha\beta^3+\beta^4, \dots\Big)\\
h_n =&\Big(0, -1, -\alpha(\alpha-\beta)(2\alpha-\beta), -\alpha^3(\alpha-\beta)^3(3\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2), -\alpha^6(\alpha-\beta)^6(4\alpha^3-6\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2-\beta^3), \dots\Big)\\
h_n^* =&\Big(1, \alpha(\alpha-\beta), \alpha^3(\alpha-\beta)^3, \alpha^6(\alpha-\beta)^6, \dots\Big)\\
h_n^{**} =&\Big(\alpha-\beta, \alpha(\alpha-\beta)^3, \alpha^3(\alpha-\beta)^6, \alpha^6(\alpha-\beta)^{10}, \dots\Big)
\end{aligned}$$

5.2 Moment reprezentacija

Moment reprezentaciju niza v_n^{**} određujemo primenom Stieltjes-Perronove inverzione formule.

Teorema 5.2.1. *Težinska funkcija čiji su momenti jednaki $(v_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$ data je sa:*

$$w^{**}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4\alpha(\alpha-\beta)-(x-2\alpha+\beta)^2}}{2\pi\alpha}, & x\in[x_1,x_2] \\ 0\ , & \text{u protivnom} \end{cases} \tag{5.4}$$

gde su $x_{1,2} = 2\alpha-\beta\pm 2\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta}$.

Dokaz. Korišćenjem (5.3) i (5.2), imamo da je

$$v_n^{**} = v_{n+2} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n-k+1}{2k}C_k\alpha^k(-\beta)^{n-k+1} \tag{5.5}$$

niz čija je funkcija generatrisa

$$V^{**}(x) = \frac{1+\beta x-\sqrt{1-2(2\alpha-\beta)x+\beta^2x^2}}{2\alpha x^2}. \tag{5.6}$$

Da bi primenili Stieltjes-Perronovu inverzionu formulu (tj. Teoremu 2.5.4), uvedimo novu oznaku. Označimo sa $F^{**}(z)$ sledeći izraz:

$$F^{**}(z) = \frac{1}{z}\ V^{**}\Big(\frac{1}{z}\Big) = \frac{z+\beta-\sqrt{(z-2\alpha+\beta)^2-4\alpha(\alpha-\beta)}}{2\alpha}$$

Cilj nam je da pronađemo funkciju $w^{**}(x) = \mu'(t)$, gde je $\mu(t)$ is definisano sa

$$\mu(t)-\mu(0) = -\frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0^+}\int_0^t \mathrm{Im}\ F^{**}(x+iy)\ dx. \tag{5.7}$$

[1]Opet je od velike pomoći bilo korišćenje programskog paketa MATHEMATICA

Posmatrajmo funkciju $F^{**}(z)$ u gornjoj poluravni $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\}$ kompleksne ravni. Funkcija

$$\sigma(z) = \sqrt{(z-2\alpha+\beta)^2 - 4\alpha(\alpha-\beta)}$$

ima dve tačke grananja. To su

$$x_1 = 2\alpha - \beta - 2\sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta} \qquad \text{i} \qquad x_2 = 2\alpha - \beta + 2\sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta}.$$

Izaberimo regularnu granu kvadratnog korena u prethodnom izrazu, tj. onu granu korena koji ima pozitivnu vrednost kad je izraz pod korenom pozitivan.

Eksplicitnim izračunavanjem dobijamo da je integral funkcije $F^{**}(z)$ jednak

$$\int F^{**}(z)\ dz = \frac{2z\beta + z^2 - (z-2\alpha+\beta)\sigma(z) - 4\alpha(\beta-\alpha)\log 2(z-2\alpha+\beta+\sigma(z))}{4\alpha}. \tag{5.8}$$

Ako uvedemo oznake:

$$\begin{aligned} M_\sigma^{**}(x) &= \lim_{y\to 0^+} \mathrm{Im}\ \sigma(x+iy), \\ l^{**}(z) &= \log\left(z-2\alpha+\beta+\sigma(z)\right), \\ M_l^{**}(x) &= \lim_{y\to 0^+} \mathrm{Im}\ l^{**}(x+iy), \end{aligned} \tag{5.9}$$

onda sledeće izraze možemo dobiti direktnim izračunavanjem:

$$\begin{aligned} M_\sigma^{**}(x) &= \begin{cases} \sqrt{4\alpha(\alpha-\beta)-(x-2\alpha+\beta)^2}, & x \in [x_1, x_2] \\ 0\ , & \text{u protivnom} \end{cases}, \\ M_l^{**}(x) &= \begin{cases} \pi\ , & x < x_1 \\ \pi + \arctan \frac{\sqrt{4\alpha(\alpha-\beta)-(x-2\alpha+\beta)^2}}{x-2\alpha-\beta}, & x \in [x_1, 2\alpha-\beta) \\ \frac{\pi}{2}\ , & x = 2\alpha-\beta \\ \arctan \frac{\sqrt{4\alpha(\alpha-\beta)-(x-2\alpha+\beta)^2}}{x-2\alpha-\beta}, & x \in (2\alpha-\beta, x_2] \\ 0\ , & x > x_2 \end{cases}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Iz Stieltjes-Perronove inverzione formule sada zaključujemo da je $\mu(x) = -\frac{1}{\pi}\ M^{**}(x)$ gde je

$$M^{**}(x) = -\frac{x-2\alpha+\beta}{4\alpha}\ M_\sigma^{**}(x) - (\beta-\alpha)M_l^{**}(x).$$

Dakle, imamo da je

$$w^{**}(x) = (\mu(x))' = \frac{\sqrt{4\alpha(\alpha-\beta)-(x-2\alpha-\beta)^2}}{2\alpha\pi}, \quad x \in [x_1, x_2] \tag{5.11}$$

čime je završen dokaz teoreme. $\square$

Neposrednim izračunavanjem možemo naći da je

$$v_0^* = v_1 = 1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{w^{**}(x)}{x} dx.$$

Prethodni izraz i Teorema 5.2.1 nam daju narednu posledicu.

Posledica 5.2.2. *Težinska funkcija $w^*(x)$ niza $(v_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa:*

$$w^*(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4\alpha(\alpha-\beta)-(x-2\alpha+\beta)^2}}{2\pi\alpha x}, & x \in [x_1, x_2] \\ 0\ , & \text{u protivnom} \end{cases} \tag{5.12}$$

Sledeći ovu ideju, posmatrajmo funkciju $\tilde{w}(x) = \frac{w^*(x)}{x}$. Pošto je

$$\int_{x_1}^{x_2} \tilde{w}(x)\ dx = \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta} \neq 0 = v_0,$$

sledi da je $\tilde{w}(x)$ težinska funkcija niza $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisanog sa

$$\tilde{v}_n = \begin{cases} \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}, & n = 0 \\ v_n\ , & n \geq 1 \end{cases} . \tag{5.13}$$

Drugim rečima, važi sledeća posledica:

Posledica 5.2.3. *Težinska funkcija $\tilde{w}(x)$ niza $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa:*

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4\alpha(\alpha-\beta)-(x-2\alpha+\beta)^2}}{2\pi\alpha x^2}, & x \in [x_1, x_2] \\ 0\ , & \text{u protivnom} \end{cases} \tag{5.14}$$

5.3 Hankelova transformacija nizova v_n, v_n^*, v_n^{**} i $\tilde{v}_n$

Najpre racunamo Hankelovu transformaciju niza v_n^{**}.

Teorema 5.3.1. *Hankelova transformacija $(h_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$ niza $(v_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa*

$$h_n^{**} = \alpha^{\binom{n+1}{2}}(\alpha-\beta)^{\binom{n+2}{2}} \tag{5.15}$$

Dokaz. U dokazu ove teoreme koristimo Heilermannovu formulu (2.12) i transformaciju težinske funkcije navedene u Lemi 2.5.6. Pošto je

$$w^{**}(x) = \frac{\sqrt{4\alpha(\alpha-\beta)-(x-2\alpha+\beta)^2}}{2\pi\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta}}{\pi\alpha}\sqrt{1-\Big(\frac{x}{2\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta}} - \frac{2\alpha-\beta}{2\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta}}\Big)^2}$$

polazimo od moničnih Chebyshevljevih polinoma druge vrste, već pominjanih u prethodnoj glavi. Njihova težinska funkcija $w^{(0)}(x)$ je, kao što smo već rekli, oblika

$$w^{(0)}(x) = \sqrt{1-x^2}$$

gde su koeficijenti $\alpha_n^{(0)}$ i $\beta_n^{(0)}$ dati sa

$$\alpha_n^{(0)} = 0, \quad (n \geq 0) \qquad \beta_0^{(0)} = \frac{\pi}{2}, \qquad \beta_n^{(0)} = \frac{1}{4}, \quad (n > 1). \tag{5.16}$$

Sada, pošto je

$$w^{**}(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta}}{\pi\alpha} w^{(0)}\Big(\frac{x}{2\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta}} - \frac{2\alpha-\beta}{2\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta}}\Big)$$

možemo primeniti Lemu 2.5.6 gde je $a = \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta}}$, $b = -\frac{2\alpha-\beta}{2\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta}}$ i $C = \frac{\sqrt{\alpha^2-\alpha\beta}}{\pi\alpha}$. Odavde dobijamo da je

$$\begin{aligned} \alpha_n^{**} &= \frac{\alpha_n^{(0)} - b}{a} = 2\alpha - \beta \quad (n \in \mathbb{N}_0), \\ \beta_0^{**} &= c\,\frac{\beta_0^{(0)}}{|a|} = \alpha - \beta, \\ \beta_n^{**} &= \frac{\beta_n^{(0)}}{a^2} = \alpha(\alpha - \beta) \qquad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Izraz u zatvorenom obliku za $(h_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$ sada dobijamo direktnom primenom Heilermannove formule (2.12):

$$\begin{aligned} h_n^{**} &= v_0^{n+1}\beta_1^n\beta_2^{n-1}\cdots\beta_n \\ &= (\alpha-\beta)^{n+1}\alpha^n(\alpha-\beta)^n\alpha^{n-1}(\alpha-\beta)^{n-1}\cdots\alpha(\alpha-\beta) \\ &= \alpha^{\binom{n+1}{2}}(\alpha-\beta)^{\binom{n+2}{2}}. \end{aligned}$$

Ovim je teorema dokazana. □

Sledeće dve teoreme se mogu dobiti daljim korišćenjem odgovarajućih transformacija težinske funkcije $w^{**}(x)$ i nastavljanjem tehnike slične onoj koja je korišćena u dokazu Teoreme 5.3.1.

Teorema 5.3.2. *Hankelova transformacija niza $(v_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa*

$$h_n^* = (\alpha(\alpha-\beta))^{\binom{n+1}{2}}. \tag{5.18}$$

Dokaz. Primenimo transformaciju $w^*(x) = \frac{w^{**}(x)}{x}$. Da bi primenili Lemu 2.5.8 moramo uvesti pomoćni niz $(r_n)_{n\geq -1}$ na sledeći način

$$r_{-1} = -\int w^{**}(x)\,dx, \qquad r_n = -\alpha_n^{**} - \frac{\beta_n^{**}}{r_{n-1}}, \quad n \geq 0.$$

Pored toga, korišćenjem prethodnog izraza i matematičke indukcije, možemo utvrditi da je

$$r_{-1} = -1, \qquad r_n = -\alpha, \quad n \geq 0.$$

Sada su uslovi Leme 2.5.8 zadovoljeni, pa njenom primenom nalazimo da je

$$\alpha_0^* = \alpha_0^{**} + r_0 = \alpha - \beta, \qquad \alpha_n^* = \alpha_n^{**} + r_n - r_{n-1} = 2\alpha - \beta \quad (n \geq 1)$$

i

$$\beta_0^* = -r_{-1} = 1, \qquad \beta_n^* = \beta_{n-1}^{**}\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \quad (n \geq 1).$$

Primena Heilermannove formule (2.12) nam daje izraz u zatvorenom obliku za h_n^*:

$$h_n^* = (\beta_0^*)^{n+1}(\beta_1^*)^n(\beta_2^*)^{n-1}\cdots\beta_n^* = \Big[\alpha(\alpha-\beta)\Big]^{\binom{n+1}{2}},$$

čime je dokaz teoreme završen. □

Teorema 5.3.3. *Hankelova transformacija niza* $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *je data sa:*

$$\tilde{h}_n = \frac{[\alpha(\alpha-\beta)]^{\binom{n}{2}}}{\beta}\Big[\frac{2\alpha-\beta}{\alpha}(\alpha-\beta)^n - \alpha^n\Big]. \tag{5.19}$$

Dokaz. Primetimo da je transformacija $\tilde{w}(x) = \frac{w^*(x)}{x}$ istog tipa, kao ona u dokazu Teoreme 5.3.2. Niz $(r_n)_{n\geq -1}$ definišimo sledećom rekurentnom relacijom:

$$r_{-1} = -\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}, \qquad r_n = -\alpha_n^* - \frac{\beta_n^*}{r_{n-1}}. \tag{5.20}$$

Osim toga, za koeficijente $\tilde{\beta}_n$ važi

$$\tilde{\beta}_0 = -r_{-1}, \qquad \tilde{\beta}_n = \beta_{n-1}^*\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \quad (n \geq 1).$$

Primenom Heilermannove formule (2.12) imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{h}_{n+1}}{\tilde{h}_n} &= \tilde{\beta}_0\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2\cdots\tilde{\beta}_{n+1} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}\beta_0^*\,\frac{r_0}{r_{-1}}\beta_1^*\,\frac{r_1}{r_0}\cdots\beta_n^*\,\frac{r_n}{r_{n-1}} = -\beta_0^*\beta_1^*\cdots\beta_n^* r_n \\ &= -\,[\alpha(\alpha-\beta)]^n r_n,\end{aligned} \tag{5.21}$$

odakle sledi

$$r_n = -\frac{\tilde{h}_{n+1}}{[\alpha(\alpha-\beta)]^n\tilde{h}_n}\ . \tag{5.22}$$

Ako iskoristimo rekurentnu relaciju (5.20) i relaciju (5.22), dobijamo

$$-\frac{\tilde{h}_{n+1}}{[\alpha(\alpha-\beta)]^n\tilde{h}_n} = -(2\alpha-\beta) - \frac{\alpha(\alpha-\beta)}{-\frac{\tilde{h}_n}{[\alpha(\alpha-\beta)]^n\tilde{h}_{n-1}}}\ ,$$

a samim tim i

$$\tilde{h}_{n+1} = (2\alpha-\beta)[\alpha(\alpha-\beta)]^n\tilde{h}_n - [\alpha(\alpha-\beta)]^{2n}\tilde{h}_{n-1}.$$

Da bi rešili prethodnu rekurentnu jednačinu, uvedimo novi niz $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan sa

$$s_n = [\alpha(\alpha-\beta)]^{-\frac{n^2}{2}}\tilde{h}_n.$$

Zamenom u prethodnoj jednačini dobijamo linearnu diferencnu jednačinu

$$s_{n+1} - \frac{2\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha(\alpha-\beta)}}s_n + s_{n-1} = 0 \tag{5.23}$$

sa početnim uslovima

$$s_0 = \tilde{h}_0 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}, \qquad s_1 = [\alpha(\alpha-\beta)]^{-\frac{1}{2}}\tilde{h}_1 = \frac{\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2}{\alpha\beta\sqrt{\alpha(\alpha\beta)}}.$$

Rešavanjem jednačine (5.23) dobijamo:

$$s_n = -\frac{1}{\beta}\Big[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha-\beta)}}\Big]^n + \frac{2\alpha-\beta}{\alpha\beta}\Big[\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha(\alpha-\beta)}}\Big]^n.$$

Na kraju, smenom $\tilde{h}_n = s_n\Big[\alpha(\alpha-\beta)\Big]^{\frac{n^2}{2}}$, završavamo dokaz teoreme. □

Sada, ako primenimo Lemu 3.4.2 koja nam daje vezu između Hankelovih transformacija nizova koji se razlikuju samo u početnom članu, tj. samo u članu sa indeksom 0, možemo izvesti glavni rezultat ovog poglavlja, odnosno izraz u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju niza $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Teorema 5.3.4. *Hankelova transformacija niza $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa*

$$h_n = \frac{1}{\beta}\Big(\alpha(\alpha-\beta)\Big)^{\binom{n}{2}}\Big((\alpha-\beta)^n - \alpha^n\Big). \tag{5.24}$$

Dokaz. Sledi neposredno, iz Leme 3.4.2 i Teoreme 5.3.3, nakon primene odgovarajućih algebarskih sređivanja izraza. □

Kao direktna posledica Teorema 5.3.1, 5.3.2 i 5.3.4, dobijamo Pretpostavku 6 iz [8].

Posledica 5.3.5. *Važe sledeće relacije:*

$$\begin{aligned} 1)\quad & \frac{h_n}{h_{n-1}^*} = \frac{(\alpha-\beta)^n - \alpha^n}{\beta}, \\ 2)\quad & \frac{h_n^{**}}{h_n^*} = (\alpha-\beta)^{n+1}\ . \end{aligned}$$

5.4 Hankelova transformacija inverznog reda $x(1-\alpha x)$ i LU-faktorizacija Hankelove matrice H_n^*

Primetimo da je ovo u stvari slučaj $\frac{x(1-\alpha x)}{1-\beta x}$ kada je $\beta = 0$. Inverzija reda $x(1-\alpha x)$, tj. rešenje jednačine $V(x)(1-\alpha V(x)) = x$, je dato sa

$$V(x) = \frac{1-\sqrt{1-4\alpha x}}{2\alpha}\ .$$

Ova funkcija je funkcija generatrisa niza $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisanog sa

$$v_n = \begin{cases} 0\ , & n = 0 \\ C_{n-1}\alpha^{n-1}\ , & n \geq 1. \end{cases}$$

gde je $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz Catalanovih brojeva.

Na primer, slučaj kad je $\alpha = 1$ ovaj niz se svodi na niz Catalanovih brojeva koji započinje sa 0. Napomenimo da je Barry dao formulu za pomenutu LU-faktorizaciju za ovaj specijalan slučaj u radu [8] (Primer 7), ali bez dokaza. U ovom poglavlju je u potpunosti izvedena formula za LU faktorizaciju Hankelove matrice H_n^*. Kao direktna posledica toga dobijen je još jedan način izračunavanja Hankelove transformacije h_n^* u ovom slučaju.

Primetimo da su izrazi za h_n, h_n^* i h_n^{**}, dobijeni u prethodnom poglavlju, polinomu po α i β. Slučaj kada je $\beta = 0$ se rešava krajnje jednostavno, pustajući da $\beta \to 0$ u svim prethodnim izrazima. Dakle, dobijamo da važi naredna teorema.

Teorema 5.4.1. *Korišćenjem prethodno uvedene notacije, imamo da je:*

$$
\begin{aligned}
&1) \quad h_n = -n\alpha^{n^2-1}, \qquad \frac{h_{n+1}}{h_n^*} = -(n+1)\alpha^n \ ; \\
&2) \quad h_n^* = \alpha^{n(n+1)} \ ; \\
&3) \quad h_n^{**} = \alpha^{(n+1)^2}, \qquad \frac{h_n^{**}}{h_n^*} = \alpha^{n+1} \ .
\end{aligned}
$$

Dokaz. Relacije 2) i 3) slede direktno iz Teorema 5.3.1 i 5.3.2 za slučaj da je $\beta = 0$. Ostaje samo da se pokaže prva relacija. Kako za pomeren niz $(q_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ važi da je $h_n^* = \alpha^{n(n+1)}$, imamo da je:

$$h_n = -nh_{n-1}^*\alpha^{n-1} \ ,$$

odnosno

$$h_n = -n\alpha^{n^2-1}.$$

Na kraju zaključujemo da važi:

$$\frac{h_{n+1}}{h_n^*} = -\frac{(n+1)\alpha^{n(n+2)}}{\alpha^{n(n+1)}} = -(n+1)\alpha^n.$$

□

Označimo sada sa $H_n^* = [v_{i+j}^*]_{0\le i,j\le n}$ Hankelovu matricu niza $(v_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Sledeća teorema nam daje LU-faktorizaciju matrice H_n^*.

Teorema 5.4.2. *Faktorizacija $H_n^* = L_n L_n^T$ važi, za $L_n = [L_{i,k}]_{0\le i,k\le n}$ gde je*

$$L_{i,k} = \binom{2i}{i+k}\frac{2k+1}{i+k+1}\ \alpha^i.$$

Dokaz. Koeficijent uz x^{i+j+1} u $F(x) = (1-\alpha x)^2(1+\alpha x)^{2i+2j}$ jednak je:

$$[x^{i+j+1}]F(x) = \left[\binom{2i+2j}{i+j+1} - 2\binom{2i+2j}{i+j} + \binom{2i+2j}{i+j-1}\right]\alpha^{i+j+1} = -2C_{i+j}\alpha^{i+j+1}. \quad (5.25)$$

Sa druge strane, koeficient uz x^k u $G_i(x) = (1-\alpha x)(1+\alpha x)^{2i}$ jednak je:

$$c_{i,k} = [x^k]G_i(x) = \left[\binom{2i}{k} - \binom{2i}{k-1}\right]\alpha^k = \binom{2i}{k}\frac{2i-2k+1}{2i-k+1}\alpha^k. \quad (5.26)$$

Sada, s obzirom da je $F(x) = G_i(x)G_j(x)$, pretpostavljajući da je $i \ge j$ imamo da važi:

$$[x^{i+j+1}]F(x) = \sum_{k=i-j}^{i+j+1} c_{i,k}c_{j,i+j+1-k} = \sum_{k=-j-1}^{j} c_{i,i+k+1}c_{j,j-k}.$$

Neposrednom proverom možemo utvrditi da je $c_{l,l+k+1} = -c_{l,l-k}\alpha^{2k+1}$ i $c_{l,l-k} = L_{l,k}\alpha^{-k}$ za svako $k = 0, 1, \ldots, l$ i $l \in \mathbb{N}_0$. Na osnovu toga, prethodnu sumu možemo zapisati kao

$$[x^{i+j+1}]F(x) = -2\sum_{k=0}^{j} c_{i,i-k}c_{j,j-k}\alpha^{2k+1} = -2\alpha\sum_{k=0}^{j} L_{i,k}L_{j,k}. \quad (5.27)$$

Ako iskoristimo sada (5.25), (5.27) i $v_{i+j}^* = \alpha^{i+j} C_{i+j}$, dobićemo

$$v_{i+j}^* = \sum_{k=0}^{j} L_{i,k} L_{j,k}$$

a samim tim i $H_n = L_n L_n^T$. $\square$

Napomenimo da je matrica L_n formirana od prvih $n+1$ redova i kolona beskonačne matrice $\mathbf{L}$ date sa

$$\mathbf{L} = [L_{i,k}]_{0\le i,k\le n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2\alpha^2 & 3\alpha^2 & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 5\alpha^3 & 9\alpha^3 & 5\alpha^3 & \alpha^3 & 0 & 0 & \cdots \\ 14\alpha^4 & 28\alpha^4 & 20\alpha^4 & 7\alpha^4 & \alpha^4 & 0 & \cdots \\ 42\alpha^5 & 90\alpha^5 & 75\alpha^5 & 35\alpha^5 & 9\alpha^5 & \alpha^5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Dakle, pošto je

$$\det L_n = \prod_{k=0}^{n} L_{k,k} = \prod_{k=0}^{n} \alpha^k = \alpha^{\binom{n}{2}}$$

zaključujemo da je

$$h_n^* = \det H_n = \Big(\det L_n\Big)^2 = \Big(\alpha^{\binom{n+1}{2}}\Big)^2 = \alpha^{n(n+1)}.$$

Znači, kao direktnu posledicu Teoreme 5.4.2 dobijamo potpuno drugačiji dokaz dela 2) Teoreme 5.4.1.

Glava 6

Hankelova transformacija nizova baziranih na Motzkinovim brojevima

U ovoj glavi se primenom metoda baziranim na ortogonalnim polinomima došlo do izraza u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju nizova vezanih za Motzkinove brojeve. Tu su uključene i linearne kombinacije uzastopna dva, tri i četiri Motzkinova broja. U nekim slučajevima su dobijeni izrazi u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju, dok je u drugim slučajevima dokazano da Hankelova transformacija zadovoljava određenu diferencnu jednačinu. Pojedini, u literaturi već poznati rezultati, su ponovo dokazani korišćenjem drugačijeg pristupa i metoda zaključivanja, ali su izvedeni i potpuno novi rezultati vezani za Hankelovu transformaciju niza Motzkinovih i pomerenih Motzkinovih brojeva.

Tehnika koja je korišćena u tim izračunavanjima može da posluži kao ideja kako primeniti metod baziran na ortogonalnim polinomima na nizove čije Hankelove transformacije sadrže nulu kao svoj član.

Kao i prethodne dve, tako je i ova glava bazirana na originalnim rezultatima, sa tom razlikom što ovi još uvek nisu objavljeni.

6.1 Osnovni pojmovi vezani za Motzkinove brojeve

Motzkinov broj m_n je broj različitih skupova nepresecajućih tetiva cije su krajnje tačke neke od zadatih n tačaka na krugu. Ovaj niz je određen kao (A001006) na On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [101] na kojoj se može naći i pregršt zanimljivosti vezanih za Motzkinove brojeve u komentarima koji slede posle definicije. Prvih nekoliko njegovih članova je dato sa $1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, \ldots$.

Kao što se i može zaključiti iz same definicije, niz Motzkinovih brojeva je predmet proučavanja i ima zamiljivu primenu u geometriji, kombinatorici i teoriji brojeva [1, 2].

Poznato je (na primer iz rada [75]) da niz Motzkinovih brojeva zadovoljava sledeću rekurentnu relaciju:

$$m_{n+1} = m_n + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot m_{n-1-i} = \frac{2n+3}{n+3} \cdot m_n + \frac{3n}{n+3} \cdot m_{n-1}$$

Takođe se zna i da je

$$m_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(k+1)!(n-2k)!}.$$

Funkcija generatrisa niza Motzkinovih brojeva $M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k x^k$ je data sa

$$M(x) = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x^2} \tag{6.1}$$

i zadovoljava uslov $M(x) = 1 + xM(x) + x^2M^2(x)$.

Motzkinovi brojevi predstavljaju broj puteva u (celobrojnoj) ravni koji se ne spuštaju ispod Ox-ose, a koji počinju u $(0, 0)$ i završavaju u $(n, 0)$, pri čemu su dozvoljeni koraci $(1, 0)$, $(1, 1)$ i $(1, -1)$. Ako koraku $(1, 0)$ pridružimo težinu t, a koracima $(1, 1)$ i $(1, -1)$ težinu 1, dobićemo "težinsku" verziju Motzkinovih brojeva, koji su poznati kao *t-Motzkinovi brojevi* i u literaturi označeni sa m_n^t.

Izostavimo li uslov da se putevi ne spuštaju ispod x-ose, dobijamo da takvi putevi predstavljaju niz *centralnih trinomnih koeficienata* c_n. Podsetimo se da je c_n koeficijent uz x^n u razvoju $(1+x+x^2)^n$. U literaturi ima dosta radova koji se bave (generalizovanim) centralnim trinomnim koeficijentima i njihovim Hankelovim transformacijama [52, 96, 87]. Slično je i sa Motzkinovim i t-Motzkinovim brojevima [38, 24, 63, 62]. U nedavno objavljenom radu [24], Cameron i Yip su izračunavali Hankelovu transformaciju nizova $m_n^t + m_{n+1}^t$ i $m_{n+1}^t + m_{n+2}^t$ koristeći kombinatorni Gessel-Viennot-Lindstrom (GVL) metod [52]. Sa druge strane, metod baziran na ortogonalnim polinomima se uspešno primenjuje na slične nizove uključujući i (generalizovane) Catalanove brojeve [34, 94] i (generalizovane) centralne trinomne koeficiente [87].

U nastavku ove glave, biće reči i o *pomerenim Motzkinovim brojevima* $(m_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(m_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(m_n^{***})_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisanim sa $m_n^* = m_{n+1}$, $m_n^{**} = m_{n+2}$ i $m_n^{***} = m_{n+3}$. Osim toga, ako sa h_n, h_n^*, h_n^{**} i h_n^{***} označimo Hankelove transformacije nizova m_n, m_n^*, m_n^{**} i m_n^{***} respektivno, direktnim izračunavanjem možemo dobiti njihove početne članove, date u narednom primeru.

Primer 6.1.1. Prvih nekoliko članova gore pomenutih nizova je dato sa:

$$\begin{aligned}
m_n &= \{1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, ...\},\\
m_n^* &= \{1, 2, 4, 9, 21, , 51, 127, 323, ...\},\\
m_n^{**} &= \{2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, ...\},\\
m_n^{***} &= \{4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, ...\},\\
h_n &= \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...\},\\
h_n^* &= \{1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, ...\},\\
h_n^{**} &= \{2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, ...\},\\
h_n^{***} &= \{4, 3, -6, -16, -10, 15, 36, 21, ...\}
\end{aligned}$$

6.2 Moment reprezentacija, ortogonalni polinomi i Hankelova transformacija Motzkinovih brojeva

U ovom poglavlju je proučavana moment reprezentacija Motzkinovih brojeva i izračunata njihova Hankelova transformacija, kao i koeficijenti odgovarajuće tročlane rekurentne relacije. Naravno, opet je korišćena Stieltjes-Perronova inverziona formula za dobijanje odgovarajuće moment reprezentacije kao, metod baziran na ortogonalnim polinomima za izračunavanje Hankelove transformacije i transformacija težinske funkcije za određivanje pomenutih koeficijenata.

Sledeća teorema nam daje eksplicitni izraz za težinsku funkciju čiji je niz momenata $(m_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, koji se može naći u [101] ili u radu [5] gde je dat dokaz baziran na Stieltjes-Perronovoj inverzionoj formuli (videti, na primer [28, 67]). Slična tehnika dokazivanja je data i ovde.

Teorema 6.2.1. *Motzkinovi brojevi* $(m_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *predstavljaju niz momenata težine*

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-(x-1)^2}, & x \in [-1,3] \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases}. \tag{6.2}$$

Dokaz. Neka je $F(z)$ definisana sa

$$F(z) = z^{-1}M(z^{-1}) = \frac{z-1-\sqrt{z^2-2z-3}}{2}$$

i neka su $x_1 = -1, x_2 = 3$ tačke grananja funkcije

$$\rho(z) = \sqrt{z^2-2z-3}.$$

Izaberimo regularnu granu funkcije $\rho(z)$ takvu da je $\arg(z-x_1) = \arg(z-x_2) = 0$ za $z \in (x_2, +\infty)$. Tako odabrana grana je definisana na $\mathbb{C}\setminus(x_1,x_2)$ i zadovoljava uslov $\overline{F(z)} = F(\overline{z})$. Za primitivnu funkciju funkcije $F(z)$ tada dobijamo:

$$F_1(z) = \int F(z)dz = \frac{1}{2}\Big[-z + \frac{z^2}{2} - \frac{z-1}{2}\rho(z) + 2L(z)\Big]$$

gde je

$$L(z) = \log[2(z-1+\rho(z))].$$

Izaberimo takođe regularnu granu funkcije log definisanu na $\mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$ za koju je $\lim_{y\to 0+}\log(x+iy) = \log x$ za $x > 0$. Zbog toga imamo da je

$$G_\rho(x) = \lim_{y\to 0} \operatorname{Im}\, \rho(x+iy) = \begin{cases} \sqrt{4-(x-1)^2}, & x \in (x_1,x_2) \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases}$$

i

$$G_L(x) = \lim_{y\to 0} \operatorname{Im}\, L(x+iy) = \begin{cases} \pi, & x < -1 \\ \pi + \arctan\frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{x-1}, & x \in [-1,1) \\ \pi/2, & x = 1 \\ \arctan\frac{\sqrt{4-(x-1)^2}}{x-1}, & x \in (1,3] \\ 0, & x > 3 \end{cases}.$$

Primenom Posledice 2.5.5 dobijamo da je $\lambda(t) = -\frac{1}{\pi}(G(t) - G(0))$ gde je funkcija $G(x)$ data sa

$$G(x) = \frac{x-1}{4}G_\rho(x) + G_L(x).$$

Kako je $d\lambda$ apsolutno neprekidna mera, izraz (6.2) se može dobiti jednostavnim nalaženjem izvoda funkcije $\lambda(t)$. Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Da bi izračunali Hankelovu transformaciju h_n primenom Heilermannove formule (2.12), potrebno je da nađemo koeficijente α_n i β_n tročlane rekurentne relacije, odgovarajuće težinske funkcije $w(x)$. Njih nalazimo primenom Leme 2.5.6 i 2.5.10.

U narednoj teoremi je dat novi dokaz poznatog rezultata vezanog za Hankelovu transformaciju Motzkinovih brojeva (videti, recimo, [1, 24]). Dokaz je baziran na transformaciji težinske funkcije date u Lemi 2.5.6. Izvedeni izrazi za koeficijente α_n i β_n su korišćeni u kasnijim izračunavanjima ove glave.

Teorema 6.2.2. *Hankelova transformacija niza Motzkinovih brojeva $(m_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz čiji su svi članovi jednaki* 1. *Koeficijenti α_n i β_n tročlane rekurentne relacije dati su sa:*

$$\alpha_n = \beta_n = 1, \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Dokaz. U prethodnim glavama već pominjani monični Chebyshevljevi polinomi druge vrste

$$Q_n^{(1)}(x) = S_n(x) = \frac{\sin\Big((n+1)\arccos x\Big)}{2^n \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

su ortogonalni u odnosu na težinu $w^{(0)}(x) = \sqrt{1-x^2}$. Odgovarajući koeficijenti tročlane rekurentne relacije su

$$\beta_0^{(0)} = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_n^{(0)} = \frac{1}{4} \quad (n \geq 1), \qquad\qquad \alpha_n^{(1)} = 0 \quad (n \geq 0)\ .$$

Posmatrajmo novu težinsku funkciju $w^{(1)}(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$. Za nju važi da je

$$w^{(1)}(x) = w^{(0)}(ax+b),$$

gde su

$$a = 1/2 \qquad \text{i} \qquad b = -1/2.$$

Odavde zaključujemo (po Lemi 2.5.6) da je:

$$\beta_0^{(1)} = \pi, \quad \beta_n^{(1)} = 1 \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad\qquad \alpha_n^{(1)} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\ .$$

Kako je

$$w(x) = \frac{1}{\pi} w^{(1)}(x),$$

prema Lemi 2.5.6 dobijamo

$$\beta_0 = \frac{1}{\pi}\beta_0^{(1)} = 1, \qquad \beta_n = \beta_n^{(1)} = 1 \quad \text{za} \quad n \geq 1 \qquad \text{i} \qquad \alpha_n = \alpha_n^{(1)} = 1.$$

Sada izraz za Hankelovu transformaciju niza Motzkinovih brojeva sledi direktnom primenom Heilermannove formule (2.12). $\square$

6.3 Linearna kombinacija dva uzastopna Motzkinova broja

Prednost metoda baziranog na ortogonalnim polinomima je i ta što, znajući koeficijente α_n i β_n koji odgovaraju nekom nizu, možemo uspešno da dobijemo i koeficijente Hankelove transformacije linearne kombinacije uzastopnih članova datog niza. Ta ideja je u ovom poglavlju sprovedena na niz Motzkinovih brojeva. Osim toga, na kraju poglavlja su navedeni i neki zanimljivi specijalni slučajevi te linearne kombinacije.

Teorema 6.3.1. *Hankelova transformacija $\bar{h}_n(c)$ niza $(m_{n+1} - c \cdot m_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, gde je $(m_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz Motzkinovih brojeva i $c \in \mathbb{R}$, je data sa:*

$$\bar{h}_n(c) = \frac{1}{\sqrt{c^2-2c-3}} \cdot \Big[\Big(\frac{1-c+\sqrt{c^2-2c-3}}{2}\Big)^{n+2} - \Big(\frac{1-c-\sqrt{c^2-2c-3}}{2}\Big)^{n+2}\Big] \tag{6.3}$$

Dokaz. Dokaz započinjemo uvođenjem sledeće transformacije težinske funkcije:

$$\bar{w}(x) = (x-c)w(x)$$

i primenom Leme 2.5.10. Koeficijenti $\bar{\alpha}_n$ i $\bar{\beta}_n$ su dati sa

$$\bar{\alpha}_n = \alpha_{n+1} + \bar{r}_{n+1} - \bar{r}_n = 1 + \bar{r}_{n+1} - \bar{r}_n, \qquad n \geq 0, \tag{6.4}$$

$$\bar{\beta}_0 = \int_{-1}^{3} \bar{w}(x)dx = 1-c, \qquad \bar{\beta}_n = \beta_n \frac{\bar{r}_n}{\bar{r}_{n-1}} = \frac{\bar{r}_n}{\bar{r}_{n-1}}, \quad n \geq 1, \tag{6.5}$$

gde je niz $(\bar{r}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ određen sledećom rekurentnom relacijom:

$$\bar{r}_0 = c-1, \qquad \bar{r}_n = c - \alpha_n - \frac{\beta_n}{\bar{r}_{n-1}} = c - 1 - \frac{1}{\bar{r}_{n-1}}, \quad n \geq 1. \tag{6.6}$$

Ako iskoristimo prethodni izraz možemo dobiti da je

$$\bar{r}_1 = c - 1 - \frac{1}{c-1}, \qquad \bar{r}_2 = c - 1 - \frac{c-1}{c(c-2)} = \frac{(c-1)(c^2-3c+1)}{c(c-2)}.$$

Pošto nismo u mogućnosti da naslutimo rešenje rekurentne jednačine, upotrebićemo drugačiji pristup. Primenom Heilermannove formule (2.12) dobijamo da je

$$\frac{\bar{h}_{n+1}(c)}{\bar{h}_n(c)} = \bar{\beta}_0 \cdot \bar{\beta}_1 \cdot \bar{\beta}_2 \cdots \bar{\beta}_{n+1} = -\bar{r}_{n+1}$$

Iz rekurentne relacije (6.6) i prethodnog izraza, možemo dobiti narednu diferencnu jednačinu:

$$\bar{h}_n(c) + (c-1)\bar{h}_{n-1}(c) + \bar{h}_{n-2}(c) = 0, \qquad n \geq 2 \tag{6.7}$$

koja zadovoljava početne uslove

$$\bar{h}_0(c) = 1-c, \qquad \bar{h}_1(c) = c^2 - 2c.$$

Rešavanjem linearne diferencne jednačine (6.7), dobijamo (6.3). $\square$

Direktnom primenom prethodne teoreme možemo potvrditi već poznat rezultat vezan za Hankelovu transformaciju pomerenog niza $m_n^* = m_{n+1}$. Taj rezultat je publikovan u radu [24], dok su još neka dalja razmatranja i izračunavanja uz korišćenje G-V-L metoda data u [73].

Posledica 6.3.2. *Hankelova transformacija niza pomerenih Motzkinovih brojeva $(m_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa:*

$$h_n^* = \begin{cases} 1, & n = 6k \quad \textit{ili} \quad n = 6k+5 \\ 0, & n = 6k+1 \quad \textit{ili} \quad n = 6k+4 \quad (k \in \mathbb{N}_0) \\ -1, & n = 6k+2 \quad \textit{ili} \quad n = 6k+3 \end{cases} \tag{6.8}$$

Dokaz. Smenom $c = 0$ u izrazu (6.3) dobijamo:

$$h_n^* = \bar{h}_n(0) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}\Big(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^n + \frac{1+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}\Big(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\Big)^n \tag{6.9}$$

što je ekvivalentno sa (6.8). $\square$

Štaviše, izraz (6.3) se može svesti na neke lepe specijalne slučajeve navedene u sledećem primeru.

Primer 6.3.1. Za određene vrednosti konstante c u izrazu (6.3), dobijamo sledeće Hankelove transformacije:

1. $c = 1$. Hankelova transformacija niza $m_{n+1} - m_n$ je $\bar{h}(1) = (0, -1, 0, 1, \ldots)$.

2. $c = 2$. Hankelova transformacija niza $m_{n+1} - 2m_n$ je $\bar{h}(2) = (-1, 0, 1, -1, 0, 1, \ldots)$.

3. Neposrednim proverom, koristeći izraz (6.3), možemo pokazati da važi relacija $\bar{h}_n(-c) = (-1)^{n+1}\bar{h}_n(2+c)$.

4. Računajući graničnu vrednost izraza (6.3) kada $c \to -1$ možemo dobiti da je Hankelova transformacija linearne kombinacije $m_{n+1} + m_n$ data sa $\bar{h}_n(-1) = n+2$. Ovo, takođe sledi i iz [24, Teorema 4.4].

5. Slično, kada $c \to 3$, nalazimo da je Hankelova transformacija linearne kombinacije $m_{n+1} - 3m_n$ data sa $\bar{h}_n(-3) = (-1)^{n+1}(n+2)$.

6.4 Linearna kombinacija tri uzastopna Motzkinova broja

Posmatrajmo sada linearnu kombinaciju tri uzastopna Motzkinova broja, tj. kombinaciju

$$m_{n+2} - a \cdot m_{n+1} + b \cdot m_n,$$

gde su a i b proizvoljne konstante. Označimo sa $\hat{h}_n(a,b)$ Hankelovu transformaciju ovog niza. Za razliku od Hankelove transformacije linearne kombinacije dva uzastopna Motzkinova broja, za koju je, u prethodnom poglavlju, bio nađen izraz u zatvorenom obliku, u narednj teoremi je samo pokazano da $\hat{h}_n(a,b)$ zadovoljava određenu diferencnu jednačinu.

U ostatku ovog poglavlja su posmatrani specijalni slučajevi Hankelove transformacije navedene linearne kombinacije tri uzastopna Motzkinova broja u zavisnosti od vrednosti konstanti a i b. U većini slučajeva su nađeni izrazi u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju.

Teorema 6.4.1. *Za proizvoljno $a, b \in \mathbb{R}$, Hankelova transformacija $\hat{h}_n(a,b)$ niza*

$$(m_{n+2} - a \cdot m_{n+1} + b \cdot m_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

zadovoljava diferencnu jednačinu

$$\begin{aligned}&\Big(\bar{h}_{n-1}(a,b)\Big)^2 \cdot \hat{h}_n(a,b) - \Big[\sqrt{a^2-4b} \cdot \bar{h}_{n-1}(a,b) \cdot \bar{h}_n(a,b) + \\ &\Big(\bar{h}_{n-1}(a,b)\Big)^2 + \Big(\bar{h}_n(a,b)\Big)^2\Big] \cdot \hat{h}_{n-1}(a,b) + \Big(\bar{h}_n(a,b)\Big)^2 \cdot \hat{h}_{n-2}(a,b) = 0\end{aligned} \tag{6.10}$$

sa početnim uslovima: $\hat{h}_0(a,b) = 2-a+b$, $\hat{h}_1(a,b) = 2-a+5b-2ab+b^2$ gde je $\bar{h}_n(a,b) = \bar{h}_n(c)$ data u (6.3) *i $c = \frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$.*

Dokaz. Težinska funkcija posmatranog niza $m_{n+2} - a \cdot m_{n+1} + b \cdot m_n$ je

$$\hat{w}(x) = \Big(x - \frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\Big) \cdot \Big(x - \frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}\Big) \cdot w(x) = \Big(x - \frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\Big) \cdot \bar{w}(x).$$

Kao i u dokazu prethodne teoreme, polazimo od transformacije

$$\hat{w}(x) = (x-d)\bar{w}(x) \qquad \text{gde je} \qquad d = \frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

i primenjujemo Lemu 2.5.10. Podsetimo se da su $\bar{w}(x) = (x-c)w(x)$, kao i $\bar{r}_n$, $\bar{\alpha}_n$ i $\bar{\beta}_n$, funkcije koje zavise od c. Smenom $c = \frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$, ti izrazi postaju funkcije po a i b. Koeficijenti $\hat{\alpha}_n$ i $\hat{\beta}_n$ su dati sa

$$\hat{\alpha}_n = \bar{\alpha}_{n+1} + \hat{r}_{n+1} - \hat{r}_n = 1 + \bar{r}_{n+2} - \bar{r}_{n+1} + \hat{r}_{n+1} - \hat{r}_n, \qquad n \geq 0, \tag{6.11}$$

$$\hat{\beta}_0 = \int_{-1}^{3} \hat{w}(x)dx = 2-a+b, \qquad \hat{\beta}_n = \bar{\beta}_n \cdot \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}_{n-1}} = \frac{\bar{r}_n}{\bar{r}_{n-1}} \cdot \frac{\hat{r}_n}{\hat{r}_{n-1}}, \quad n \geq 1, \tag{6.12}$$

gre je niz $(\hat{r}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ određen sledećom rekurentnom relacijom:

$$\begin{aligned}\hat{r}_0 &= d - \bar{\alpha}_0 = \frac{4-2a+2b}{a-2+\sqrt{a^2-4b}}, \\ \hat{r}_n &= d - \bar{\alpha}_n - \frac{\bar{\beta}_n}{\hat{r}_{n-1}}, \quad n \geq 1.\end{aligned} \tag{6.13}$$

Iz prethodnog izraza, primenom Heilermannove formule (2.12) imamo da je

$$\frac{\hat{h}_{n+1}(a,b)}{\hat{h}_n(a,b)} = \hat{\beta}_0 \cdot \hat{\beta}_1 \cdot \hat{\beta}_2 \cdots \hat{\beta}_{n+1} = (2-a+b) \cdot \frac{\bar{r}_{n+1}}{\bar{r}_0} \cdot \frac{\hat{r}_{n+1}}{\hat{r}_0} = -\frac{\bar{h}_{n+1}(a,b)}{\bar{h}_n(a,b)} \cdot \hat{r}_{n+1}$$

odakle sledi

$$\hat{r}_{n+1} = -\frac{\hat{h}_{n+1}(a,b)}{\hat{h}_n(a,b)} \cdot \frac{\bar{h}_n(a,b)}{\bar{h}_{n+1}(a,b)}.$$

Sada iz rekurentne relacije (6.13), dobijamo:

$$\begin{aligned}\hat{r}_n &= d - \bar{\alpha}_n - \frac{\bar{\beta}_n}{\hat{r}_{n-1}} = d - (1 + \bar{r}_{n+1} - \bar{r}_n) - \frac{\frac{\bar{r}_n}{\bar{r}_{n-1}}}{\hat{r}_{n-1}} \\ &= d - (1 + c - \alpha_{n+1} - \frac{\beta_n}{\bar{r}_n} - \bar{r}_n) + \frac{\bar{r}_n}{\bar{r}_{n-1}} \cdot \frac{\bar{h}_{n-1}(a,b) \cdot \hat{h}_{n-2}(a,b)}{\bar{h}_{n-2}(a,b) \cdot \hat{h}_{n-1}(a,b)} \\ &= -\sqrt{a^2-4b} - \frac{\bar{h}_{n-1}(a,b)}{\bar{h}_n(a,b)} - \frac{\bar{h}_n(a,b)}{\bar{h}_{n-1}(a,b)} + \frac{\bar{h}_n(a,b)}{\bar{h}_{n-1}(a,b)} \cdot \frac{\hat{h}_{n-2}(a,b)}{\hat{h}_{n-1}(a,b)}\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da važi (6.10) uz početne uslove:

$$\hat{h}_0(a,b) = 2 - a + b \qquad \text{i} \qquad \hat{h}_1(a,b) = 2 - a + 5b - 2ab + b^2,$$

čime je dokaz završen. □

Treba napomenuti da u ovom opštem slučaju nije nađen izraz u zatvorenom obliku koji je rešenje jednačine (6.10). Zato možemo razmotriti naredna dva specijalna slučaja.

1. Smenom $b = 0$ i $a = c$, naš niz se svodi na linearnu kombinaciju dva pomerena Motzkinova broja:

$$m_{n+2} - c \cdot m_{n+1} = m^*_{n+1} - c \cdot m^*_n.$$

Ako sa $\bar{h}^*_n(c)$ označimo Hankelovu transformaciju tog niza, diferencna jednačina (6.10) postaje

$$\Big[\bar{h}_{n-1}(c)\Big]^2 \cdot \bar{h}^*_n(c) - \Big[\Big(\bar{h}_{n-1}(c)\Big)^2 + \Big(\bar{h}_n(c)\Big)^2 + c \cdot \bar{h}_{n-1}(c) \cdot \bar{h}_n(c)\Big] \cdot \bar{h}^*_{n-1}(c) + \Big[\bar{h}_n(c)\Big]^2 \cdot \bar{h}^*_{n-2}(c) = 0 \tag{6.14}$$

sa početnim uslovima:

$$\bar{h}^*_0(c) = \bar{h}^*_1(c) = 2 - c.$$

Nažalost, ni za ovu jednačinu ne možemo odrediti rešenje u zatvorenom obliku.

Međutim, u slučaju kada je $c = -1$, primenom matematičke indukcije se može utvrditi da je Hankelova transformacija kombinacije $m_{n+2} + m_{n+1}$ data sa

$$\bar{h}^*_n(-1) = \begin{cases} 6k+3, & n = 6k \quad ili \quad n = 6k+1 \\ -1, & n = 6k+2 \\ -6(k+1) & n = 6k+3 \quad ili \quad n = 6k+4 \\ 1, & n = 6k+5 \end{cases} \tag{6.15}$$

Podsetimo se da smo u prethodnom poglavlju već pokazali da je $\bar{h}_n(-1) = n + 2$.

2. Smenom $b = c^2$ i $a = 2c$, naš niz se svodi na

$$m_{n+2} - 2c \cdot m_{n+1} + c^2 \cdot m_n.$$

Označimo sa $\hat{h}_n(c)$ njegovu Hankelovu transformaciju, koja zadovoljava diferencnu jednačinu

$$\Big[\bar{h}_{n-1}(c)\Big]^2 \cdot \hat{h}_n(c) - \Big[\Big(\bar{h}_{n-1}(c)\Big)^2 + \Big(\bar{h}_n(c)\Big)^2\Big] \cdot \hat{h}_{n-1}(c) + \Big[\bar{h}_n(c)\Big]^2 \cdot \hat{h}_{n-2}(c) = 0. \tag{6.16}$$

sa početnim uslovima:

$$\hat{h}_0(c) = c^2 - 2c + 2 \qquad \text{i} \qquad \hat{h}_1(c) = c^4 - 4c^3 + 5c^2 - 2c + 2.$$

Za ovu jednačinu je moguće naći rešenje u zatvorenom obliku, kao što je dokazano u narednoj teoremi.

Teorema 6.4.2. *Za proizvoljno $c \in \mathbb{R}$, Hankelova transformacija $\hat{h}_n(c)$ niza*

$$(m_{n+2} - 2c \cdot m_{n+1} + c^2 \cdot m_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

je data sa

$$\hat{h}_n(c) = \frac{1}{(c^2-2c-3)^{3/2}}\Big[H_1^{2n+5} - H_2^{2n+5}\Big] - \frac{5+2n}{c^2-2c-3} \tag{6.17}$$

gde su

$$H_1 = \frac{1-c+\sqrt{c^2-2c-3}}{2}, \quad H_2 = \frac{1-c-\sqrt{c^2-2c-3}}{2}.$$

Dokaz. Na početku dokaza ove teoreme, primetimo da se diferencna jednačina (6.16) može zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
\hat{h}_n(c) - \hat{h}_{n-1}(c) &= \Big(\hat{h}_{n-1}(c) - \hat{h}_{n-2}(c)\Big) \cdot \frac{\Big(\bar{h}_n(c)\Big)^2}{\Big(\bar{h}_{n-1}(c)\Big)^2} \\
&= \Big(\hat{h}_1(c) - \hat{h}_0(c)\Big) \cdot \frac{\Big(\bar{h}_2(c)\Big)^2}{\Big(\bar{h}_1(c)\Big)^2} \cdot \frac{\Big(\bar{h}_3(c)\Big)^2}{\Big(\bar{h}_2(c)\Big)^2} \cdots \frac{\Big(\bar{h}_n(c)\Big)^2}{\Big(\bar{h}_{n-1}(c)\Big)^2} \\
&= \Big(\hat{h}_1(c) - \hat{h}_0(c)\Big) \cdot \frac{\Big(\bar{h}_n(c)\Big)^2}{\Big(\bar{h}_1(c)\Big)^2} = \Big(\bar{h}_n(c)\Big)^2.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Osim toga, važi i da je

$$\begin{aligned}
\hat{h}_n(c) &= \hat{h}_{n-1}(c) + \Big(\bar{h}_n(c)\Big)^2 \\
&= \hat{h}_{n-2}(c) + \Big(\bar{h}_{n-1}(c)\Big)^2 + \Big(\bar{h}_n(c)\Big)^2 \\
&= \hat{h}_0(c) + \Big(\bar{h}_1(c)\Big)^2 + \Big(\bar{h}_2(c)\Big)^2 + \ldots + \Big(\bar{h}_{n-1}(c)\Big)^2 + \Big(\bar{h}_n(c)\Big)^2.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Kako je

$$\bar{h}_n(c) = D^{-1/2}\Big[H_1^{n+2} - H_2^{n+2}\Big],$$

gde je $D = c^2 - 2c - 3$ (Teorema 6.3.1), neposrednim izračunavanjem nalazimo da je:

$$H_1 H_2 = 1 \qquad \text{i} \qquad \bar{h}_n(c)^2 = D^{-1}\Big[H_1^{2n+4} + H_2^{2n+4} - 2\Big].$$

Zamenom u (6.19) dobijamo da je:

$$\hat{h}_n(c) = \hat{h}_0(c) + \frac{1}{D}\Big[\frac{H_1^6}{1-H_1^2}(1-H_1^{2n}) + \frac{H_2^6}{1-H_2^2}(1-H_2^{2n}) - 2n\Big]$$

Sledeća pojednostavljenja dobijamo, takođe, neposrednim izračunavanjem:

$$P = \frac{H_1^6}{1-H_1^2} + \frac{H_2^6}{1-H_2^2} = 1 - 2c - 3c^2 + 4c^3 - c^4,$$

$$\frac{H_1}{1-H_1^2} = -\frac{1}{\sqrt{D}} \qquad \text{i} \qquad \frac{H_2}{1-H_2^2} = \frac{1}{\sqrt{D}}$$

Uz prethodno uvedene oznake i činjenicu da je $\hat{h}_0(c) = c^2 - 2c - 2$, na kraju dobijamo da je:

$$\begin{aligned}\hat{h}_n(c) &= \hat{h}_0(c) + \frac{1}{D}\Big[P + \frac{1}{\sqrt{D}}\Big(H_1^{2n+5} - H_2^{2n+5}\Big) - 2n\Big] \\ &= \frac{1}{D^{3/2}}\Big[H_1^{2n+5} - H_2^{2n+5}\Big] - \frac{2n+5}{D}\end{aligned}$$

čime je dokaz teoreme završen. □

Primer 6.4.1. Ako za konstantu c u (6.17) uzmemo neke konkretne vrednosti, dobićemo sledeće lepe izraze za Hankelovu transformaciju:

1. $c = 1$. Hankelova transformacija kombinacije $m_{n+2} - 2m_{n+1} + m_n$ je: $(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots)$.
2. $c = 2$, $c = 0$. Hankelova transformacija kombinacije m_{n+2} i $m_{n+2} - 4m_{n+1} + 4m_n$ je: $(2, 2, 3, 4, 4, 5, \ldots)$.
3. Direktnom proverom uz korišćenje (6.17), možemo pokazati da važi $\hat{h}_n(-c) = \hat{h}_n(2 + c)$.
4. Ako u izrazu (6.17) konstanta $c \to -1$ dobijamo da je Hankelova transformacija linearne kombinacije $m_{n+2} + 2m_{n+1} + m_n$ jednaka $\hat{h}_n(-1) = (30 + 37n + 15n^2 + 2n^3)/6$. Isti takav niz se dobija i u slučaju kada $c \to 3$, tj. $m_{n+2} - 6m_{n+1} + 9m_n$.

Specijalni slučaj za $c = 0$, odnosno Hankelova transformacija pomerenih Motzkinovih brojeva $m_n^{**} = m_{n+2}$, takođe sledi i iz [24, Posledica 4.2]. Radi kompletnosti, ovde je naveden kao posebna posledica.

Posledica 6.4.3. *Hankelova transformacija niza pomerenih Motzkinovih brojeva $(m_n^{**})_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa:*

$$h_n^{**} = \begin{cases} 4k+2, & n = 6k \quad \textit{ili} \quad n = 6k+1 \\ 4k+3, & n = 6k+2 \\ 4k+4, & n = 6k+3 \quad \textit{ili} \quad n = 6k+4 \\ 4k+5, & n = 6k+5 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}_0) \tag{6.20}$$

Dokaz. Rezultat ove posledice može se dobiti direktno, pustajući da u izrazu (6.17) konstanta $c \to 0$ i rešavanjem tako dobijene, odgovarajuće linearne diferencne jednačine. Na taj način dobijamo:

$$\Big(h_{n-1}^*\Big)^2 \cdot h_n^{**} - \Big[\Big(h_{n-1}^*\Big)^2 + \Big(h_n^*\Big)^2\Big] \cdot h_{n-1}^{**} + \Big(h_n^*\Big)^2 \cdot h_{n-2}^{**} = 0 \tag{6.21}$$

uz početne uslove: $h_0^{**} = h_1^{**} = 2$. Ako uvedemo oznaku

$$h_{i,k}^{**} = h_{6k+i}^{**}, \qquad i \in \{0, 1, ..., 5\}, \quad k \in N_0, \tag{6.22}$$

tada se jednačina (6.21) transformiše u sistem:

$$\begin{cases} h_{0,k}^{**} = h_{1,k}^{**} \\ h_{3,k}^{**} - 2h_{2,k}^{**} + h_{1,k}^{**} = 0 \\ h_{3,k}^{**} = h_{4,k}^{**} \\ h_{0,k+1}^{**} - 2h_{5,k}^{**} + h_{4,k}^{**} = 0 \end{cases} \tag{6.23}$$

čije je rešenje oblika:

$$\begin{cases} h^{**}_{0,k} = h^{**}_{1,k} = 4k+2 \\ h^{**}_{2,k} = 4k+3 \\ h^{**}_{3,k} = h^{**}_{4,k} = 4k+4 \\ h^{**}_{5,k} = 4k+5 \end{cases} \tag{6.24}$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

Sledeća posledica nam daje izraze za koeficijente $\hat{\alpha}_n$ i $\hat{\beta}_n$ tročlane rekurentne relacije, odgovarajućeg niza $m_{n+2} - 2c \cdot m_{n+1} + c^2 \cdot m_n$. Ti koeficijenti su korišćeni u narednom poglavlju.

Posledica 6.4.4. *Koeficijenti $\hat{\alpha}_n$ i $\hat{\beta}_n$ su dati sa:*

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_n &= 1 + \frac{(\bar{h}_{n+1}(c))^2 - \bar{h}_n(c) \cdot \bar{h}_{n+2}(c)}{\bar{h}_n(c) \cdot \bar{h}_{n+1}(c)} \\ &\quad + \frac{(\hat{h}_n(c))^2 \cdot \bar{h}_{n-1}(c) \cdot \bar{h}_{n+1}(c) - (\bar{h}_n(c))^2 \cdot \hat{h}_{n-1}(c) \cdot \hat{h}_{n+1}(c)}{\bar{h}_n(c) \cdot \bar{h}_{n+1}(c) \cdot \hat{h}_{n-1}(c) \cdot \hat{h}_n(c)} \end{aligned} \tag{6.25}$$

$$\hat{\beta}_n = \frac{\hat{h}_n(c) \cdot \hat{h}_{n-2}(c)}{\left(\hat{h}_{n-1}(c)\right)^2} \tag{6.26}$$

Naredna posledica odgovara specijalnom slučaju kada je $c = 0$, a iskorišćena je u izračunavanju izraza za Hankelovu transformaciju niza $m^{***}_n = m_{n+3}$.

Posledica 6.4.5. *Koeficijenti $\beta^{**}_n = \bar{\beta}^{*}_n(0)$ su dati sa:*

$$\beta^{**}_n = \begin{cases} \dfrac{4k+3}{4k+2}, & n = 6k \\ \dfrac{8(k+1)\cdot(2k+1)}{(4k+3)^2}, & n = 6k+1 \\ \dfrac{4k+3}{4k+4}, & n = 6k+2 \\ \dfrac{4k+5}{4k+4}, & n = 6k+3 \\ \dfrac{8(2k+3)\cdot(k+1)}{(4k+5)^2}, & n = 6k+4 \\ \dfrac{4k+5}{4k+6}, & n = 6k+5 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}_0) \tag{6.27}$$

6.5 Linearna kombinacija četiri uzastopna Motzkinova broja

Posmatrajmo sledeću linearnu kombinaciju četiri uzastopna Motzkinova broja

$$\breve{m}_n = m_{n+3} - 3c \cdot m_{n+2} + 3c^2 \cdot m_{n+1} - c^3 \cdot m_n$$

koja predstavlja niz momanata težine

$$\breve{w}(x) = (x-c)^3 w(x) = (x-c)\hat{w}(x).$$

Neka je sa $\breve{h}_n(c)$ označena Hankelova transformacija niza $(\breve{m}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Ponavljajući postupak sličan onom iz prethodnog poglavlja, možemo dokazati da $\breve{h}_n(c)$ zadovoljava određenu diferencnu jednačinu, što je i dato u narednoj teoremi.

Teorema 6.5.1. *Hankelova transformacija $\breve{h}_n(c)$ niza*

$$(\breve{m}_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (m_{n+3} - 3c\cdot m_{n+2} + 3c^2\cdot m_{n+1} - c^3\cdot m_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

zadovoljava diferencnu jednačinu

$$\begin{aligned}\left[\left(\hat{h}_{n-1}(c)\right)^2\cdot\bar{h}_n(c)\right]\cdot\breve{h}_n(c) - \left[\bar{h}_{n+1}(c)\cdot\left(\hat{h}_{n-1}(c)\right)^2 + \bar{h}_{n-1}(c)\cdot\left(\hat{h}_n(c)\right)^2\right]\cdot\breve{h}_{n-1}(c)\\ + \bar{h}_n(c)\cdot\left(\hat{h}_n(c)\right)^2\cdot\breve{h}_{n-2}(c) = 0.\end{aligned}\tag{6.28}$$

sa početnim uslovima: $\breve{h}_0(c) = 4-6c+3c^2-c^3$ *i* $\breve{h}_1(c) = 3-18c+21c^2-20c^3+15c^4-6c^5+c^6$.

Dokaz. Dokaz opet počinjemo transformacijom težinske funkcije

$$\breve{w}(x) = (x-c)^3\cdot w(x) = (x-c)\cdot\hat{w}(x)$$

i primenom Leme 2.5.10. U tom slučaju koeficienti $\breve{\alpha}_n$ i $\breve{\beta}_n$ su:

$$\breve{\alpha}_n = \hat{\alpha}_{n+1} + \breve{r}_{n+1} - \breve{r}_n, \qquad n\geq 0,\tag{6.29}$$

$$\breve{\beta}_0 = \int_{-1}^{3}\breve{w}(x)dx = 4-6c+3c^2-c^3, \qquad \breve{\beta}_n = \hat{\beta}_n\cdot\frac{\breve{r}_n}{\breve{r}_{n-1}} = \frac{\bar{r}_n}{\bar{r}_{n-1}}\cdot\frac{\hat{r}_n}{\hat{r}_{n-1}}\cdot\frac{\breve{r}_n}{\breve{r}_{n-1}}, \qquad n\geq 1,\tag{6.30}$$

gde je sa $(\breve{r}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ označen niz definisan sa

$$\breve{r}_n = c - \hat{\alpha}_n - \frac{\hat{\beta}_n}{\breve{r}_{n-1}}, \quad n\geq 1,\tag{6.31}$$

i čija je početna vrednost jednaka

$$\begin{aligned}\breve{r}_0 &= c-\hat{\alpha}_0 = c - (\bar{\alpha}_1 + \hat{r}_1(c) - \hat{r}_0(c))\\ &= \frac{\bar{\beta}_1}{\hat{r}_0(c)} + \hat{r}_0(c) = \frac{\bar{r}_1(c)}{\bar{r}_0(c)}\cdot\frac{1}{\hat{r}_0(c)} + \hat{r}_0(c)\\ &= \frac{1}{c-1}\cdot\frac{c(c-2)}{c-1}\cdot\frac{c-1}{c^2-2c+2} + \frac{c^2-2c+2}{c-1} = \frac{c^2-2c+(c^2-2c+2)^2}{(c-1)(c^2-2c+2)}\end{aligned}$$

Iz prethodnog izraza i Heilermannove formule (2.12) dobijamo da je:

$$\frac{\breve{h}_n(c)}{\breve{h}_{n-1}(c)} = -\frac{\hat{h}_n(c)}{\hat{h}_{n-1}(c)}\cdot\breve{r}_n.$$

odakle zaključujemo da je

$$\breve{r}_n = -\frac{\hat{h}_{n-1}(c)\cdot\breve{h}_n(c)}{\hat{h}_n(c)\cdot\breve{h}_{n-1}(c)}\tag{6.32}$$

Sada, zamenom (6.32) i (6.25)-(6.26) (Posledica 6.4.4) u (6.31), dobijamo (6.28). $\square$

Primenom formule (6.28) za odgovarajući specijalan slučaj, dobijamo izraz u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju niza $(m_{n+3})_{n\in\mathbb{N}_0}$, što je dato u sledećoj teoremi.

Teorema 6.5.2. *Hankelova transformacija niza* $(m_{n+3})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *je data sa:*

$$h_n^{***} = \begin{cases} 4(2k+1)^2, & n = 6k \\ (2k+1)(4k+3), & n = 6k+1 \\ -2(k+1)(4k+3), & n = 6k+2 \\ -16(k+1)^2, & n = 6k+3 \\ -2(k+1)(4k+5), & n = 6k+4 \\ (4k+5)(2k+3), & n = 6k+5 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}_0) \tag{6.33}$$

Dokaz. Smenom $c = 0$ u (6.28), imamo da je:

$$\left[\left(h_{n-1}^{**}\right)^2 \cdot h_n^*\right] \cdot h_n^{***} - \left[h_{n+1}^* \cdot \left(h_{n-1}^{**}\right)^2 + h_{n-1}^* \cdot \left(h_n^{**}\right)^2\right] \cdot h_{n-1}^{***} + h_n^* \cdot \left(h_n^{**}\right)^2 \cdot h_{n-2}^{***} = 0. \tag{6.34}$$

Uvođenjem oznake

$$h_{i,k}^{***} = h_{6k+i}^{***}, \qquad i \in \{0,1,\ldots,5\}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{6.35}$$

jednačina (6.34) se svodi na sistem:

$$\begin{cases} (4k+2)^2 \cdot h_{2,k}^{***} - (4k+2)^2 \cdot h_{1,k}^{***} + (4k+3)^2 \cdot h_{0,k}^{***} = 0 \\ (4k+3)^2 \cdot h_{3,k}^{***} - (4k+4)^2 \cdot h_{2,k}^{***} + (4k+4)^2 \cdot h_{1,k}^{***} = 0 \\ h_{4,k}^{***} - h_{3,k}^{***} + h_{2,k}^{***} = 0 \\ (4k+4)^2 \cdot h_{5,k}^{***} - (4k+4)^2 \cdot h_{4,k}^{***} + (4k+45)^2 \cdot h_{3,k}^{***} = 0 \\ (4k+5)^2 \cdot h_{0,k+1}^{***} - (4k+6)^2 \cdot h_{5,k}^{***} + (4k+6)^2 \cdot h_{4,k}^{***} = 0 \\ h_{1,k+1}^{***} - h_{0,k+1}^{***} + h_{5,k}^{***} = 0 \end{cases} \tag{6.36}$$

u kome su izrazi za h_n^* i h_n^{**} dati sa (6.8) i (6.20) respektivno. Rešenje prethodnog sistema je

$$\begin{cases} h_{0,k}^{***} = 4(2k+1)^2 \\ h_{1,k}^{***} = (2k+1)(4k+3) \\ h_{2,k}^{***} = -2(k+1)(4k+3) \\ h_{3,k}^{***} = -16(k+1)^2 \\ h_{4,k}^{***} = -2(k+1)(4k+5) \\ h_{5,k}^{***} = (2k+3)(4k+5). \end{cases}$$

što se može dokazati primenom metoda matematičke indukcije. □

6.6 Rezime

Na kraju ove glave napravimo karatak rezime novih rezultata vezanih za izračunavanje Hankelovih transformacija linearnih kombinacija Motzkinovih brojeva koji je dat sledećom tabelom.

Niz	Diferencna jednačina	Izraz u zatvorenom obliku
$m_{n+1} - c \cdot m_n$	(6.7)	(6.3)
$m_{n+2} - a \cdot m_{n+1} + b \cdot m_n$	(6.10)	(spec. slučajevi)
$m_{n+2} - c \cdot m_{n+1}$	(6.14)	(6.15), za $c = -1$
$m_{n+2} - 2c \cdot m_{n+1} + c^2 \cdot m_n$	(6.16)	(6.17)
$m_{n+3} - 3c \cdot m_{n+2} + 3c^2 \cdot m_{n+1} - c^3 \cdot m_n$	(6.28)	(spec. slučajevi)
m_{n+3}	(6.34)	(6.33)

Glava 7

Hankelova transformacija nizova vezanih za (u, l, d)-Motzkinove brojeve

Glavni cilj ove glave je pronalaženje izraza u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju nizova vezanih za (u, l, d)-Motzkinove brojeve. U slučajevima gde takav izraz nije dobijen, nađena je diferencna jednačina koju ta transformacija zadovoljava. Osim Hankelove transformacije za (u, l, d)-Motzkinove brojeve, korišćenjem metoda baziranog na ortogonalnim polinomima, u ovoj glavi je proučavana i Hankelova transformacija pomerenih (u, l, d)-Motzkinovih brojeva, ali i Hankelova transformacija zbira dva uzastopna kao i pomerena (u, l, d)-Motzkinova broja.

Značaj rezultata koji su izloženi u ovoj glavi se ogleda u njihovoj opštosti i mogućnosti svođenja na t i klasične Motzkinove brojeve, koji imaju veliku primenu u drugim oblastima matematike.

Svi rezultati navedeni u ostatku ove glave su originilani i još neobjavljeni.

7.1 Osnovni pojmovi vezani za (u, l, d)-Motzkinove brojeve

Pojam klasičnih Motzkinovih brojeva uveden je u prethodoj glavi. U skladu sa njihovom definicijom, uvedimo nove oznake. Označimo sa $u = (1, 1)$ *dijagonalni korak nagore* (**u***p diagonal step*), sa $l = (1, 0)$ *horizontalni korak* (**l***evel-step*), a sa $d = (1, -1)$ *dijagonalni korak nadole* (**d***own-step*). Označimo još sa $M(n, k)$ skup svih putanja koji počinju u $(0, 0)$ i završavaju se u (n, k), a koje ne presecaju Ox-osu. Putanje iz skupa $M(n, 0)$ su u literaturi poznate, kao što smo već rekli, pod imenom *Motzkinove putanje*, dok njihov broj predstavlja *n-ti Motzkinov broj*.

Sa druge strane, napomenimo još i činjenicu da se (u, l, d)-Motzkinovi brojevi svode na t-Motzkinove brojeve u slučaju kada je $u = d = 0$ i $l = t$, tj. kada se vrši prebrojavanje, jedino dozvoljenih, horizontalnih putanja.

Zanimljivo je da postoje brojni radovi u kojima je data interpretacija svih navedenih Motzkinovih putanja predstavljenih bojama. Tako *t-obojene Motzkinove putanje* imaju horizontalne korake obojene t bojama, kao što je predstavljeno, na primer, u radovima [98, 99]. Woan je 2005. godine u radovima [112, 113] uveo boje za svaki tip putanja, pa samim tim i broj u, l i d boja odgovarajućih putanja. Na taj način je definisao skup $M^{(u,l,d)}(n, 0)$ tzv. (u, l, d)-*obojenih Motzkinovih staza* kao i odgovarajućih (u, l, d)-*Motzkinovih brojeva* $m_n^{(u,l,d)} = |M^{(u,l,d)}(n, 0)|$. Woan je u pomenutom radu [112] dokazao još i da $(1, l, d)$-Motzkinovi brojevi zadovoljavaju rekurentnu relaciju:

$$(n+2)m_n^{(1,l,d)} = l(2n+1)m_{n-1}^{(1,l,d)} + (4d-l^2)(n-1)m_{n-2}^{(1,l,d)}. \tag{7.1}$$

Ako u prethodnoj relaciji uvedemo smenu $l = 1$ i $d = 1$ dobićemo da važi

$$m_{n+1} = m_n + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \cdot m_{n-1-i} = \frac{2n+3}{n+3} \cdot m_n + \frac{3n}{n+3} \cdot m_{n-1}$$

za klasične Motzkinove brojeve $m_n \equiv m_n^{(1,1,1)}$.

Primetimo da se smenom $u = 1$, $l = t$ i $d = 1$ dobijaju odgovarajući t-Motzkinovi brojevi definisani sa $m_n^{(t)} = |M^{(1,t,1)}(n,0)|$, pa će za njih primenom (7.1) važiti relacija:

$$(n+2)m_{t,n} = t(2n+1)m_{t,n-1} + (4-t^2)(n-1)m_{t,n-2} \tag{7.2}$$

Koristeći poslednju relaciju u [98] je izveden izraz za funkciju generatrisu niza $m_n^{(t)}$:

$$M^{(t)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{(t)} x^n = \frac{1 - tx - \sqrt{(1-tx)^2 - 4x^2}}{2x^2}.$$

Možemo primetiti da se u slučaju kada je $t = 1$, prethodna funkcija generatrisa svodi na, dobro poznatu, funkciju generatrisu klasičnih Motzkinovih brojeva, $m_n \equiv m_n^{(1)}$.

Mansour, Schrok i Sun su otišli korak dalje. U svom radu [75] su dokazali da (u, l, d)-Motzkinovi brojevi zadovoljavaju rekurentnu relaciju:

$$(n+2)m_n^{(u,l,d)} = l(2n+1)m_{n-1}^{(u,l,d)} + (4ud-l^2)(n-1)m_{n-2}^{(u,l,d)} \tag{7.3}$$

a da im je funkcija generatrisa data sa:

$$M^{(u,l,d)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{(u,l,d)} x^n = \frac{1 - lx - \sqrt{(1-lx)^2 - 4udx^2}}{2udx^2}. \tag{7.4}$$

7.2 Moment reprezentacija i Hankelova transformacija niza (u, l, d)-Motzkinovih brojeva

Ako sa $h_n^{(u,l,d)}$, $h_n^{(t)}$ i h_n označimo Hankelovu transformaciju redom nizova $(m_n^{(u,l,d)})_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(m_n^{(t)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(m_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, možemo neposrednim izračunavanjem naći njihove početne članove.

Primer 7.2.1. Prvih nekoliko članova prethodno pomenutih nizova dato je sa:

$m_n^{(u,l,d)} = \{1, l, l^2 + du, l^3 + 3ldu, l^4 + 6l^2du + 2(du)^2, l^5 + 10l^3du + 10l(du)^2, \ldots\}$;

$m_n^{(t)} = \{1, t, 1 + t^2, 3t + t^3, 2 + 6t^2 + t^4, 10t + 10t^3 + t^5, 5 + 30t^2 + 15t^4 + t^6, 35t + 70t^3 + 21t^5 + t^7, \ldots\}$;

$m_n = \{1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, \ldots\}$;

$h_n^{(u,l,d)} = \{1, du, (du)^3, (du)^6, (du)^{10}, \ldots\}$;

$h_n^{(t)} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$;

$h_n = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$.

Naredna teorema nam daje eksplicitan izraz za težinsku funkciju čiji je momentni niz $(m_n^{(u,l,d)})_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Teorema 7.2.1. *(u, l, d)-Motzkinovi brojevi $(m_n^{(u,l,d)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ su momenti čija je težinska funkcija*

$$w^{(u,l,d)}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4du-(x-l)^2}}{2\pi du}, & x \in [l - 2\sqrt{ud}, l + 2\sqrt{ud}] \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases}. \tag{7.5}$$

Dokaz. Kao i više puta do sad, u dokazu teoreme koristićemo Stieltjes-Perronovu inverzionu formulu, odnosno Teoremu 2.5.4. Pođimo od formule (7.4) i uvedimo oznaku

$$F^{(u,l,d)}(z) = z^{-1}M^{(u,l,d)}(z^{-1}) = \frac{z - l - \sqrt{(z-l)^2 - 4ud}}{2ud}$$

gde su $x_1 = l - 2\sqrt{ud}, x_2 = l + 2\sqrt{ud}$ tačke prekida funkcije

$$\Theta^{(u,l,d)}(z) = \sqrt{(z-l)^2 - 4ud}.$$

Izaberimo regularnu granu funkcije $\Theta(z)$ takvu da je $\arg(z - x_1) = \arg(z - x_2) = 0$ za $z \in (x_2, +\infty)$. Odabrana grana je definisana na $\mathbb{C} \setminus (x_1, x_2)$ i zadovoljava uslov $\overline{F(z)} = F(\overline{z})$. Primitivna funkcija funkcije $F(z)$ je tada:

$$F_1^{(u,l,d)}(z) = \int F^{(u,l,d)}(z)dz = \frac{1}{4ud}[-z^2 + 2lz + l \cdot \Theta^{(u,l,d)}(z) - z \cdot \Theta^{(u,l,d)}(z) - 4ud \cdot L^{(u,l,d)}(z)]$$

gde je

$$L^{(u,l,d)}(z) = \log[l - z + \Theta^{(u,l,d)}(z)]$$

Izaberimo regularnu granu i logaritamske funkcije definisane na $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ takvu da je

$$\lim_{y\to 0+} \log(x + iy) = \log x \qquad \text{za} \qquad x > 0.$$

Sada važi da je

$$G_\Theta(x) = \lim_{y\to 0} \text{Im } \Theta^{(u,l,d)}(x + iy) = \begin{cases} \sqrt{4ud - (x-l)^2}, & x \in (x_1, x_2) \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases}$$

i

$$G_L(x) = \lim_{y\to 0} \text{Im } L^{(u,l,d)}(x + iy) = \begin{cases} \pi, & x < x_1 \\ \pi + \arctan \frac{\sqrt{4ud-(x-l)^2}}{l-x}, & x \in [x_1, l) \\ \pi/2, & x = l \\ \arctan \frac{\sqrt{4ud-(x-l)^2}}{l-x}, & x \in (l, x_2] \\ 0, & x > x_2 \end{cases}.$$

Na osnovu Posledice 2.5.5 dobijamo da je $\lambda(t) = -\frac{1}{\pi}(G(t) - G(0))$ gde je funkcija $G(x)$ data sa

$$G(x) = \frac{l-x}{4ud} G_\Theta(x) - G_L(x).$$

Zbog apsolutne neprekidnosti mere $d\lambda$, željeni izraz (7.5) dobijamo diferenciranjem funkcije $\lambda(t)$. Ovim je kompletiran dokaz teoreme. $\square$

U narednoj teoremi je izveden izraz u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju niza (u, l, d)-Motzkinovih brojeva, opet primenom odgovarajuće transformacije težinske funkcije.

Teorema 7.2.2. *Hankelova transformacija niza (u, l, d)-Motzkinovih brojeva $(m_n^{(u,l,d)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa:*

$$h_n^{(u,l,d)} = (du)^{\binom{n+1}{2}} \tag{7.6}$$

Dokaz. Transformaciju težinske funkcije započinjemo od težine $w^{(0)}(x) = \sqrt{1-x^2}$ u odnosu na koju su ortogonalni monični Chebyshevljevi polinomi druge vrste. Odgovarajući koeficijenti tročlane rekurentne relacije su, kako smo videli više puta do sad,

$$\beta_0^{(1)} = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_n^{(1)} = \frac{1}{4} \quad (n \geq 1), \qquad\qquad \alpha_n^{(1)} = 0 \quad (n \geq 0)\ .$$

Uvedimo novu težinsku funkciju

$$w^{(1)}(x) = \sqrt{1 - \Big(\frac{x-l}{2\sqrt{ud}}\Big)^2}.$$

Za nju važi da je $w^{(1)}(x) = w^{(0)}(ax+b)$, gde su $a = 1/2\sqrt{ud}$ i $b = -l/2\sqrt{ud}$. Primenom Leme 2.5.6 imamo da je:

$$\beta_0^{(1)} = \pi\sqrt{ud}, \quad \beta_n^{(1)} = du \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \alpha_n^{(1)} = l \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\ .$$

Sledeća transformacija je oblika:

$$w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{ud}} \cdot w^{(1)}(x),$$

odakle, ponovo po Lemi 2.5.6, nalazimo da su koeficijenti

$$\begin{aligned} &\beta_0 = 1, \qquad \beta_n = ud, \qquad n \geq 1, \\ &\alpha_n = \alpha_n^{(1)} = l. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Ostaje još da se primeni Heilermannova formula (2.12), odakle dobijamo da je:

$$h_n^{(u,l,d)} = \beta_0^{n+1} \cdot \beta_1^n \cdot \beta_2^{n-1} \dots \beta_n = 1 \cdot (ud)^n \cdot (ud)^{n-1} \dots ud) = (ud)^{\frac{n(n+1)}{2}}, \qquad n \geq 0,$$

odnosno

$$h_n^{(u,l,d)} = (du)^{\binom{n+1}{2}}.$$

□

Posledica 7.2.3. *Hankelova transformacija niza t-Motzkinovih brojeva $(m_n^t)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz čiji su svi članovi jednaki* 1.

Dokaz. Kao što je već bilo napomenuto, za $u = 1$, $l = t$ i $d = 1$, (u, l, d)-Motzkinovi brojevi postaju t-Motzkinovi brojevi, zato ako u izrazu (7.6) zamenimo (u, l, d) sa $(1, t, 1)$ dobićemo:

$$h_n^{(t)} = 1 \tag{7.8}$$

□

Sledeća posledica predstavlja potvrdu poznatog rezultata dokazanog u prethodnoj glavi ovog rada. Dobija se direktno iz izraza (7.8).

Posledica 7.2.4. *Hankelova transformacija (klasičnih) Motzkinovih brojeva $(m_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je niz čiji su svi člsnovi jednaki* 1.

7.3 Hankelova transformacija zbira dva uzastopna (u,l,d)-Motzkinova broja

Označimo sa $\bar{h}_n^{(u,l,d)}$, $\bar{h}_n^{(t)}$ i $\bar{h}_n$ Hankelovu transformaciju zbira dva uzastopna (u,l,d), t i klasična Motzkinova broja respektivno. Posmatrana je Hankelova transformacija ovog tipa delom i zbog toga što je nađeno da ih povezuju zanimljivi rezultati sa Hankelovim transformacijama generalizovanih Catalanovih brojeva u [25, 30, 34, 64, 94].

Primer 7.3.1. Neposrednim izračunavanjem možemo zadati početne članove pomenutih nizova:

$$\begin{aligned}
\bar{h}_n^{(u,l,d)} &= \{1+l, du((1+l)^2-du), (du)^3(1+l)((1+l)^2-2du), \ldots\},\\
\bar{h}_n^{(t)} &= \{1+t, t(2+t), t^3+3t^2+t-1, t^4+4t^3+3t^2-2t-1, \ldots\},\\
\bar{h}_n &= \{2,3,4,5,6,\ldots\}.
\end{aligned}$$

Navođenjem članova ovih nizova u prethodnom primeru, možemo zapaziti neke njihove osobine. Recimo, u svim članovima niza $\bar{h}_n^{(u,l,d)}$, parametri u i d se javljaju sa istim stepenom, dok je u nizu $\bar{h}_n$ svaki elemenat za 1 veći od svog prethodnika. Pitanje je može li se naći izraz u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju $\bar{h}_n^{(u,l,d)}$ zbira dva uzastopna (u,l,d)-Motzkinova broja, koji bi za odgovarajuće vrednosti konstanti u, l i d bio primenljiv i za zbir dva uzastopna t, odnosno klasična Motzkinova broja? Odgovor na ovo pitanje dat je u narednoj teoremi.

Teorema 7.3.1. *Hankelova transformacija $\bar{h}_n^{(u,l,d)}$ zbira dva uzastopna (u,l,d)-Motzkinova broja je data sa:*

$$\bar{h}_n^{(u,l,d)} = \frac{(du)^{\binom{n+1}{2}}}{2^{n+2}\cdot\sqrt{(1+l)^2-4du}}\cdot\left[\left(1+l+\sqrt{(1+l)^2-4du}\right)^{n+2}-\left(1+l-\sqrt{(1+l)^2-4du}\right)^{n+2}\right]$$

Dokaz. Primetimo da se težinska funkcija zbira dva uzastopna (u,l,d)-Motzkinova broja $\bar{w}^{(u,l,d)}(x)$ može zapisati u obliku

$$\bar{w}^{(u,l,d)}(x) = (x+1)w^{(u,l,d)}(x), \tag{7.9}$$

zbog čega možemo primeniti Lemu 2.5.10 u kojoj je data odgovarajuća transformacija. Prema tome, koeficijente $\bar{\alpha}_n$ i $\bar{\beta}_n$ izračunavamo na sledeći način:

$$\bar{\alpha}_n = \alpha_{n+1}+r_{n+1}-r_n = l+r_{n+1}-r_n, \qquad n\geq 0, \tag{7.10}$$

$$\bar{\beta}_0 = \int (x+1)w^{(u,l,d)}(x)dx = 1+l, \qquad \bar{\beta}_n = \beta_n\frac{r_n}{r_{n-1}} = du\cdot\frac{r_n}{r_{n-1}}, \quad n\geq 1, \tag{7.11}$$

gde je pomoćni niz $(r_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan rekurentnom relacijom:

$$\bar{r}_0 = -1-\alpha_0 = -1-l, \qquad \bar{r}_n = -1-\alpha_n-\frac{\beta_n}{\bar{r}_{n-1}}, \quad n\geq 1. \tag{7.12}$$

Neposrednom primenom prethodnog izraza nalazimo da je

$$\bar{r}_1 = -1-l-\frac{du}{1+l} = \frac{du-(1+l)^2}{1+l}\ , \qquad \bar{r}_2 = -1-l-\frac{du(1+l)}{du-(1+l)^2}\ , \qquad \ldots$$

Kao što možemo videti, nemoguće je naslutiti rešenje rekurentne jednačine (6.5), pa je potrebno primeniti drugačiji pristup da bi došli do željenih rezultata.

Zbog toga ćemo primeniti Heilermannovu formulu (2.12), po kojoj imamo da je:

$$\frac{\bar{h}_{n+1}^{(u,l,d)}}{\bar{h}_n^{(u,l,d)}} = \bar{\beta}_0 \cdot \bar{\beta}_1 \cdot \bar{\beta}_2 \dots \bar{\beta}_{n+1} = (1+l) \cdot \beta_1 \cdot \frac{\bar{r}_1}{\bar{r}_0} \cdot \beta_2 \cdot \frac{\bar{r}_2}{r_1} \dots \beta_{n+1} \cdot \frac{\bar{r}_{n+1}}{\bar{r}_n} = -(du)^{n+1} \cdot \bar{r}_{n+1},$$

odakle sledi:

$$\bar{r}_n = -\frac{\bar{h}_n^{(u,l,d)}}{\bar{h}_{n-1}^{(u,l,d)} \cdot (du)^n}.$$

Primenom rekurentne relacije (7.12) dobijamo da je

$$-1 - l + \frac{(du)^n \cdot \bar{h}_{n-2}^{(u,l,d)}}{\bar{h}_{n-1}^{(u,l,d)}} = -\frac{\bar{h}_n^{(u,l,d)}}{\bar{h}_{n-1}^{(u,l,d)} \cdot (du)^n},$$

a samim tim i

$$\bar{h}_n^{(u,l,d)} - (1+l) \cdot (du)^n \cdot \bar{h}_{n-1}^{(u,l,d)} + (du)^{2n} \cdot \bar{h}_{n-2}^{(u,l,d)} = 0, \qquad (n \geq 3), \tag{7.13}$$

uz početne uslove:

$$\bar{h}_0^{(u,l,d)} = 1 + l, \qquad \bar{h}_1^{(u,l,d)} = du((1+l)^2 - du).$$

Da bi rešili ovu diferencnu jednačinu, uvedimo novi niz $(V_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definisan sa

$$V_n = \bar{h}_n^{(u,l,d)} \cdot (du)^{-\frac{(n+1)^2}{2}}.$$

Njegovom smenom u prethodnoj jednačini dobijamo novu diferencnu jednačinu:

$$V_n - (1+l) \cdot (du)^{-\frac{1}{2}} \cdot V_{n-1} + V_{n-2} = 0, \qquad (n \geq 3), \tag{7.14}$$

sa početnim uslovima $V_0 = \frac{1+l}{\sqrt{du}}$ i $V_1 = \frac{(1+l)^2 - du}{du}$, čijim rešavanjem dobijamo:

$$\begin{aligned} V_n = & \frac{(1+l)^2 - 2du + (1+l) \cdot \sqrt{(1+l)^2 - 4du}}{2\sqrt{du} \cdot \sqrt{(1+l)^2 - 4du}} \cdot \Big(\frac{1 + l + \sqrt{(1+l)^2 - 4du}}{2\sqrt{du}}\Big)^n + \\ & \frac{-(1+l)^2 + 2du + (1+l) \cdot \sqrt{(1+l)^2 - 4du}}{2\sqrt{du} \cdot \sqrt{(1+l)^2 - 4du}} \cdot \Big(\frac{1 + l - \sqrt{(1+l)^2 - 4du}}{2\sqrt{du}}\Big)^n. \end{aligned}$$

Na kraju, smenom $\bar{h}_n^{(u,l,d)} = V_n \cdot (du)^{\frac{(n+1)^2}{2}}$ završavamo dokaz teoreme. $\square$

Kao što se moglo primetiti u dosadašnjem radu, osim potrage za izrazom u zatvorenom obliku Hankelove transformacije nekog od celobrojnih nizova, uvek nam je bio i cilj (ako je to bilo moguće) da nađemo i koeficijente odgovarajuće tročlane rekurentne relacije. Za prethodno izračunatu Hankelovu transformaciju, pomenuti koeficijenti su dati u sledećoj posledici.

Posledica 7.3.2. *Koeficijenti $\bar{\alpha}_n(c)$ i $\bar{\beta}_n(c)$ su dati sa:*

$$\bar{\alpha}_n = l - \frac{1}{2}\cdot\Big[\frac{\Big(1+l+\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+3} - \Big(1+l-\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+3}}{\Big(1+l+\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+2} - \Big(1+l-\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+2}}\Big]$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\Big[\frac{\Big(1+l+\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+2} - \Big(1+l-\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+2}}{\Big(1+l+\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+1} - \Big(1+l-\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+1}}\Big],$$

$$\bar{\beta}_n = 4du\cdot\frac{\Big(1+l+\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+2} - \Big(1+l-\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+2}}{\Big(1+l+\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+1} - \Big(1+l-\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+1}}\cdot$$
$$\frac{\Big(1+l+\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n} - \Big(1+l-\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n}}{\Big(1+l+\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+1} - \Big(1+l-\sqrt{(1+l)^2-4du}\Big)^{n+1}}$$

Kako je izraz u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju zbira dva uzastopna (u, l, d)-Motzkinova broja nađen, ostaje da se vidi može li se on primeniti i u slučaju kada je $(u, l, d) = (1, t, 1)$, odnosno kada je $(u, l, d) = (1, 1, 1)$? Naredna posledica nam daje odgovor na prvi deo pitanja.

Posledica 7.3.3. *Hankelova transformacija $\bar{h}_n^{(t)}$ zbira dva uzastopna t-Motzkinova broja je data sa:*

$$\bar{h}_n^{(t)} = \frac{1}{2^{n+2}\cdot\sqrt{t^2+2t-3}}\cdot\Big[\Big(1+t+\sqrt{t^2+2t-3}\Big)^{n+2} - \Big(1+t-\sqrt{t^2+2t-3}\Big)^{n+2}\Big] \tag{7.15}$$

Međutim, izraz (7.15) se ne može primeniti za slučaj kada je $t = 1$, jer je tada imenilac razlomka (7.9) jednak nuli. Dakle, izraz za zbir dva uzastopna Motzkinova broja se može dobiti jedino direktnim izračunavanjem, što je i urađeno u [24, Teorema 4.4] ili kao specijalni slučaj navedeno u Primeru 6.3.1 u prethodnoj glavi ovog rada. Zato ovde navodimo samo njenu formulaciju.

Teorema 7.3.4. *Hankelova transformacija $\bar{h}_n$ zbira dva Motzkinova broja je data sa:*

$$\bar{h}_n = 2 + n \tag{7.16}$$

7.4 Hankelova transformacija pomerenih (u, l, d)-Motzkinovih brojeva

U ovom poglavlju su posmatrani pomereni nizovi $(m_n^{*(u,l,d)})_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(m_n^{*(t)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(m_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisani sa $m_n^{*(u,l,d)} = m_{n+1}^{(u,l,d)}$, $m_n^{*(t)} = m_{n+1}^{(t)}$ i $m_n^* = m_{n+1}$, sa ciljem da se kao i u prethodnom razmatranju, dođe do izraza u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju $h_n^{*(u,l,d)}$ niza $(m_n^{*(u,l,d)})_{n\in\mathbb{N}_0}$, a potom on primeni na odgovarajuće specijalne slučajeve, kako bi dobili izraze za Hankelovu transformaciju $h_n^{*(t)}$ i h_n^* pomerenih t i klasičnih Motzkinovih brojeva, redom.

Primer 7.4.1. Navedimo početne članove pomenutih nizova:

$$
\begin{aligned}
&h_n^* = \{1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, \ldots\},\\
&h_n^{*(t)} = \{t, t^2 - 1, t(t^2 - 2), t^4 - 3t + 1, t(t^4 - 4t^2 + 3), \ldots\},\\
&h_n^{*(u,l,d)} = \{l, du(l^2 - du), d^3u^3l(l^2 - 2du), d^6u^6(l^4 - 3dul^2 + d^2u^2), \ldots\}.
\end{aligned}
$$

Sledeća teorema nam daje izraz u zatvorenom obliku za Hankelovu transformaciju pomerenog niza (u, l, d)-Motzkinovih brojeva. Dokaz je izveden primenom odgovarajuće transformacije težinske funkcije i Heilermannove formule.

Teorema 7.4.1. *Hankelova transformacija niza $(m_n^{*(u,l,d)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ je data sa:*

$$
h_n^{*(u,l,d)} = \frac{(du)^{\binom{n+1}{2}}}{2^{n+2} \cdot \sqrt{l^2 - 4du}} \cdot \left[\left(l + \sqrt{l^2 - 4du}\right)^{n+2} - \left(l - \sqrt{l^2 - 4du}\right)^{n+2}\right]. \tag{7.17}
$$

Dokaz. Pošto je težinska funkcija $w^{*(u,l,d)}(x)$ niza $(m_n^{*(u,l,d)})_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$
w^{*(u,l,d)}(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{4du-(x-l)^2}}{2\pi du}, & x \in [l - 2\sqrt{ud}, l + 2\sqrt{ud}] \\ 0, & \text{u protivnom} \end{cases}, \tag{7.18}
$$

možemo je zapisati u obliku

$$
w^{*(u,l,d)}(x) = x \cdot w^{(u,l,d)}(x),
$$

i primeniti Lemu 2.5.10, odakle dobijamo

$$
r_0^* = -\alpha_0 = -l, \qquad r_0^* = -\alpha_n - \frac{\beta_n}{r_{n-1}^*} = -l - \frac{du}{r_{n-1}^*}, \quad (n \in \mathbb{N},
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_0^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} w^*(x)\, dx = l,\\
\beta_n^* &= \beta_n^* \cdot \frac{r_n^*}{r_{n-1}^*} \quad (n \geq 1).
\end{aligned}
$$

Koeficijenti α_n i β_n su već poznati i dati formulom (7.7). Iz razloga što nismo u mogućnosti da pogodimo "lepo" rešenje ove rekurentne jednačine koja zadovoljava početni uslov $\beta_0^* = l$, koristićemo pristup kao i u dokazu Teoreme 7.3.1. Tako po Heilermannovoj formuli (2.12) imamo da važi

$$
\begin{aligned}
\frac{h_{n+1}^*}{h_n^*} =& \beta_0^*\beta_1^*\beta_2^* \cdots \beta_{n+1}^*\\
=& l \cdot \beta_1 \frac{r_1^*}{r_0^*} \cdot \beta_2 \frac{r_2^*}{r_1^*} \cdots \beta_{n+1} \frac{r_{n+1}^*}{r_n^*} = l \cdot (du)^{n+1} \frac{r_{n+1}^*}{r_0^*}\\
=& -(du)^{n+1} \cdot r_{n+1}^*,
\end{aligned}
$$

odakle sledi

$$
r_n^* = -\frac{h_n^*}{(du)^n \cdot h_{n-1}^*}, \qquad (n \geq 1).
$$

Smenom

$$
r_n^* = -l - \frac{du}{r_{n-1}^*},
$$

u prethodnom izrazu, dobijamo diferencnu jednačinu

$$h_n^* - l(du)^n \cdot h_{n-1}^* - (du)^{2n} \cdot h_{n-2}^* = 0, \quad (n \geq 2), \tag{7.19}$$

uz početne uslove

$$h_0^* = l \qquad \text{i} \qquad h_1^* = du(l^2 - du).$$

Da bi rešili jednačinu (7.19), uvedimo novi niz $(H_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definisan sa

$$H_n = h_n^* \cdot (du)^{-\frac{(n+1)^2}{2}}.$$

Njegovom zamenom u prethodnoj jednačini dobijamo novu linearnu diferencnu jednačinu oblika

$$H_n - l(du)^{-\frac{1}{2}} \cdot H_{n-1} + H_{n-2} = 0, \tag{7.20}$$

koja zadovoljava početne uslove

$$H_0 = l(du)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{i} \qquad H_1 = \frac{l^2 - du}{du},$$

a čijim rešavanjem dobijamo da je

$$H_n = \frac{1}{2^{n+2} \cdot \sqrt{l^2 - 4du} \cdot (\sqrt{du})^{n+1}} \cdot \Big[\Big(l + \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+2} - \Big(l - \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+2}\Big]$$

Na kraju, smenom $h_n^* = H_n \cdot (du)^{\frac{(n+1)^2}{2}}$ završavamo dokaz teoreme. □

Naravno, primenom odgovarajućih algebarskih operacija i izraza dobijenih u dokazu ove teoreme, možemo doći do formula za koeficijente odgovarajuće tročlane rekurentne relacije, tj. možemo pokazati da važi naredna posledica.

Posledica 7.4.2. *Koeficijenti α_n^* i β_n^* tročlane rekurentne relacije, pominjani u prethodnoj teoremi dati su sa:*

$$\begin{aligned} \alpha_n^* = l + \frac{1}{2} \cdot \Big[\frac{\Big(l + \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+2} - \Big(l - \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+2}}{\Big(l + \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+1} - \Big(l - \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+1}}\Big] \\ - \frac{1}{2} \cdot \Big[\frac{\Big(l + \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+3} - \Big(l - \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+3}}{\Big(l + \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+2} - \Big(l - \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+2}}\Big] \end{aligned} \tag{7.21}$$

$$\beta_n^* = du \cdot \frac{\Big[\Big(l + \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+2} - \Big(l - \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+2}\Big] \cdot \Big[\Big(l + \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n} - \Big(l - \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n}\Big]}{\Big[\Big(l + \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+1} - \Big(l - \sqrt{l^2 - 4du}\Big)^{n+1}\Big]^2} \tag{7.22}$$

Prethodna teorema može biti iskorišćena i da bi se dobili odgovarajući izrazi za Hankelovu transformaciju nizova $(m_n^{*(t)})_{n \in \mathbb{N}_0}$ i $(m_n^*)_{n \in \mathbb{N}_0}$, što je i navedeno u sledeće dve posledice.

Posledica 7.4.3. *Hankelova transformacija niza pomerenih t-Motzkinovih brojeva* $(m_n^{*(t)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *jednaka je:*

$$h_n^{*(t)} = \frac{1}{2^{n+2}\cdot\sqrt{t^2-4}}\cdot\left[\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)^{n+2} - \left(t-\sqrt{t^2-4}\right)^{n+2}\right]. \tag{7.23}$$

Posledica 7.4.4. *Hankelova transformacija niza pomerenih Motzkinovih brojeva* $(m_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *data je sa:*

$$h_n^* = \begin{cases} 1, & n=6k \quad \textit{ili} \quad n=6k+5 \\ 0, & n=6k+1 \quad \textit{ili} \quad n=6k+4 \qquad (k\in\mathbb{N}_0) \\ -1, & n=6k+2 \quad \textit{ili} \quad n=6k+3 \end{cases} \tag{7.24}$$

Ovaj poslednji rezultat se pojavljuje kao specijalan slučaj Teoreme 29 u [62], ali i i nekim drugačijim razmatranjima, uz korišćenje, recimo, G-V-L metoda, kao što je dato u [73, 105].

7.5 Hankelova transformacija zbira dva uzastopna pomerena (u, l, d)-Motzkinova broja

Kao što smo videli u prethodnim poglavljima ove glave, za svaki od posmatranih nizova smo našli izraz u zatvorenom obliku za njegovu Hankelovu transformaciju. Pokušaj da se dođe do odgovarajućeg izraza za Hankelovu transformaciju zbira dva uzastopna pomerena (u, l, d)-Motzkinova broja, ostao je bezuspešan, kako se može videti u ostatku ove glave, zbog komplikovanog oblika same diferencne jednačine koju ta transformacija zadovoljava.

Označimo sa $(\bar{h}_n^{*(u,l,d)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ Hankelovu transformaciju zbira dva pomerena (u, l, d)-Motzkinova broja $(\bar{m}_n^{*(u,l,d)})_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Možemo zaključiti da je težinska funkcija $\bar{w}^{*(u,l,d)}(x)$ niza $(\bar{m}_n^{*(u,l,d)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ jednaka

$$\bar{w}^{*(u,l,d)}(x) = (x+1)\cdot w^{*(u,l,d)}(x) = \frac{x(x+1)}{2\pi du}\cdot\sqrt{4du-(x-l)^2},$$

pri čemu su koeficijenti $\bar{\alpha}_n^*$ i $\bar{\beta}_n^*$ tročlane rekurentne relacije koju zadovoljavaju polinomi koji su ortogonalni u odnosu na težinu $\bar{w}^{*(u,l,d)}(x)$ dati sa:

$$\bar{\beta}_0^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{w}^{*(u,l,d)}(x)\,dx = l^2+l+du, \qquad \bar{\beta}_n^* = \beta_n^*\cdot\frac{\bar{r}_n^*}{\bar{r}_{n-1}^*}, \quad (n\geq 1),$$

$$\bar{\alpha}_n^* = \alpha_n^* + \bar{r}_{n+1}^* - \bar{r}_n^*, \qquad (n\geq 0).$$

Odavde je, primenom Leme 2.5.10, pomoćni niz $(\bar{r}_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan rekurentnom relacijom:

$$\bar{r}_0^* = -1-\alpha_0^* = -\frac{l^2+l+du}{l}, \qquad \bar{r}_n^* = -1-\alpha_n^* - \frac{\beta_n^*}{\bar{r}_{n-1}^*}, \quad n\geq 1, \tag{7.25}$$

čijom primenom uz Heilermannovu formulu (2.12) dobijamo da važi:

$$\frac{\bar{h}_{n+1}^{*(u,l,d)}}{\bar{h}_n^{*(u,l,d)}} = \bar{\beta}_0^*\cdot\bar{\beta}_1^*\cdot\bar{\beta}_2^*\ldots\bar{\beta}_{n+1}^* = (l^2+l+du)\cdot(\beta_1^*\cdot\beta_2^*\ldots\beta_{n+1}^*)\cdot\frac{\bar{r}_{n+1}^*}{\bar{r}_0^*},$$

odakle sledi da je

$$\bar{r}_n^* = -\frac{\bar{h}_n^{*(u,l,d)} \cdot h_{n-1}^{*(u,l,d)}}{\bar{h}_{n-1}^{*(u,l,d)} \cdot h_n^{*(u,l,d)}}.$$

Sa druge strane, iz (7.25), sledi da je:

$$\bar{r}_n^* = -1 - \alpha_n^* + \beta_n^* \cdot \frac{\bar{h}_{n-2}^{*(u,l,d)} \cdot h_{n-1}^{*(u,l,d)}}{\bar{h}_{n-1}^{*(u,l,d)} \cdot h_{n-2}^{*(u,l,d)}},$$

a samim tim i

$$(h_{n-1}^{*(u,l,d)} \cdot h_{n-2}^{*(u,l,d)}) \cdot \bar{h}_n^{*(u,l,d)} - (1+\alpha_n^*) \cdot h_n^{*(u,l,d)} \cdot h_{n-2}^{*(u,l,d)} \cdot \bar{h}_{n-1}^{*(u,l,d)} + \beta_n^* \cdot h_n^{*(u,l,d)} \cdot h_{n-1}^{*(u,l,d)} \cdot \bar{h}_{n-2}^{*(u,l,d)} = 0 \quad (7.26)$$

gde su koeficijenti α_n^* i β_n^* dati u (7.21) i (7.22).

Rešenje ovako dobijene diferencne jednačine koja zadovoljava početni uslov:

$$\bar{h}_0^{*(u,l,d)} = l^2 + l + du, \qquad \bar{h}_1^{*(u,l,d)} = du(l^4 + 2l^3 - dul + l^2(1 - du) + du(2du - 1)),$$

predstavlja izraz za Hankelovu transformaciju zbira dva uzastopna pomerena (u, l, d)-Motzkinova broja.

Literatura

[1] M. Aigner, *Motzkin numbers*, European J. Combin. **19:6** (1998), 663–675.

[2] M. Aigner, *Catalan-like Numbers and Determinants*, J. of Combin. Theory, **87** (1999), 33–51.

[3] N. I. Akhiezer, *The classical moment problem and some related questions in analysis*, Translated by N. Kemmer, Hafner Publishing Co., New York, 1965.

[4] A. S. Cvetković, G. V. Milovanović, *The MATHEMATICA package "OrthogonalPolynomials"* Facta Univerzitatis (Niš), Ser. Math. Inform. **19** (2004), 17–36.

[5] S. Barbelo, U. Cerruti, *Catalan Moments*, Congressus Numerantium **201** (2010), 187–209.

[6] P. Barry, *On Integer-Sequence-Based Constructions of Generalized Pascal Triangles*, J. Integer Seq. **9** (2006), Article 06.2.4.

[7] P. Barry, *A conjecture on the form of the Hankel transform of the sum of consecutive generalized Catalan numbers*, unpublished manuscript.

[8] P. Barry, *Some conjectures on the ratio of Hankel transforms for sequences and series reversion*, arXiv:math/0701483v1 [math.CO] 17 Jan 2007.

[9] P. Barry, A. Hennessy, *Notes on a Family of Riordan Arrays and Associated Integer Hankel Transforms*, J. Integer Seq. **12** (2009), Article 09.5.3.

[10] P. Barry, P. M. Rajković, M. D. Petković, *On the Hankel transform of generalized central trinomial coefficients*, Integr. Transf. Spec. F., DOI: 10.1080/10652469.2011.640326.

[11] P. Barry, P.M. Rajković, M.D. Petković, *Hankel Transform of the Reversion of Generalized Fibonacci Sequences*, unpublished manuscript.

[12] E. L. Basor, Y. Chen, H. Widom, *Determinants of Hankel Matrices*, J. of Functional Analysis, **179** (2001), 214–234.

[13] C. Berg, *Indeterminate moment problems and the theory of entire functions*, J. Comput. Appl. Math. **65** (1995), no. 1, 27-55.

[14] R. Bisseling, R. Kosloff, *The fast Hankel transformas a tool in the solution of the time dependent Schrödinger equation*, J. of Comput. of Phis. **59** (1985), 136-151.

[15] R. Bojičić, *Hankel transform of a series reversion of a certain rational function*, Linear Algebra Appl. **438:11** (2013), 4237–4248.

[16] R. Bojičić, M. D. Petković, P. Barry, *Hankel transform of a sequence obtained by series reversion*, Integr. Transf. Spec. F., **23:11** (2012), 803–816.

[17] R. Bojičić, M. D. Petković, P. Barry, *The Hankel transform of aerated sequences*, Integr. Transf. Spec. F., DOI: 10.1080/10652469.2012.751105.

[18] R. Bojičić, M. D. Petković, *Orthogonal polynomials approach to the Hankel transform of sequences based on Motzkin numbers*, unpublished manuscript.

[19] R. Bojičić, M. D. Petković, *The Hankel transform (u, l, d)-Motzkin numbers*, unpublished manuscript.

[20] V. Bosser, F. Pellarin, *Hankel-type determinants and Drinfeld quasi-modular forms*, J. of Number Theory, **113** (2013), 871-887.

[21] P. Brändén, *q-Narayana numbers and the flag h-vector of $J(2 \times n)$*, Discrete Math., **281** (2004), 67–81.

[22] D. M. Bressoud, *Proofs and confirmations - The story of the alternating sign matrix conjecture*, Cambridge University Press, Cambridge, (1999).

[23] R. Brualdi, S. Kirkland, *Aztec diamonds and digraphs, and Hankel determinants of Schröder numbers*, J. of Combinatorial Theory, Series B **94** (2005), 334-351.

[24] N. T. Cameron, A. C. M. Yip, *Hankel determinants of sums of consecutive Motzkin numbers*, Linear Algebra Appl. **434** (2011), 712–722.

[25] M. Chamberland, C. French, *Generalized Catalan numbers and generalized Hankel transformations*, J. Integer Seq. **10** (2007), Article 07.1.1.

[26] W. Chammam, F. Marcellan, R. Sfaxi, *Orthogonal polynomials, Catalan numbers, and a general Hankel determinant evaluation*, Linear Algebra and its Appl. **436** (2012), 2105-2116.

[27] X. K. Chang, X. B. Hu, Y. N. Zhang *A direct method for evaluating some nice Hankel determinants and proofs of several conjectures*, Linear Algebra and its Appl. **438** (2013), 2523-2541.

[28] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[29] T. S. Chihara, *, Hamburger moment problems and orthogonal polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol **315** (1989), no. 1, 189-203.

[30] J. Cigler , *Some relations between generalized Fibonacci and Catalan numbers*, Österreich Akad. Wiss. Math.-Nur. Kl. Sitzungsber. II **211** (2002), 143–154.

[31] F. Colomo, A.G. Pronko, *Square ice, alternating sign matrices, and classical orthogonal polynomials*, J. Stat. Mech. (2005), P01005.

[32] E. F. Conrad, *Some continued fraction expansions of Laplace transforms of elliptic functions*, phd. thesis, Ohio State University, Ohio, 2002.

[33] D. Coppersmith, S. Winograd, *Matrix multiplication via arithmetic progression*, J. Symbolic Comput. **9** (1990), 251–280.

[34] A. Cvetković, P. Rajković, M. Ivković, *Catalan Numbers, the Hankel Transform and Fibonacci Numbers*, J. of Int. Sequen. **5** (2002), Article 02.1.3.

[35] H. P. Decell, *An application of the Cayley-Hamilton theorem to generalized matrix inversion*, SIAM Review **7** No 4 (1965), 526–528.

[36] A. Dernek, N. Dernek, O. Yürekli, *Identities for the Hankel transform and their applications*, J. Math. Anal. Appl. **354** (2009), 165-176.

[37] C. L. Dodgson, *Condensation of determinants*, Proc. Royal Soc. London **15** (1866), 150–155.

[38] R. Donaghey, L. Shapiro, *Motzkin numbers*, J. Combin. Theory Ser. A**23** (1977), 291–301.

[39] M.P. Drazin, *Pseudo inverses in associative rings and semigroups*, Amer. Math. Monthly **65**, (1958), 506514.

[40] R. Ehrenborg, *The Hankel determinant of exponential polynomials*, Amer. Math. Monthly, **107** (2000), 557–560.

[41] O. Eğecioğlu, T. Redmond, C. Ryavec, *Almost product evaluation of Hankel determinants* The Electronic Journal of Combinatorics **15** (2008), #R6

[42] I. Erdelyi, *On the Matrix Equation $Ax = \lambda Bx$* J. Math. Anal. Appl. **17**, No 1 (1967), 119–132.

[43] L. Euler, *Observationes analyticae*, Novi Commentarii Acad. Sci. Imper. Petropolitanae, **11** (1765) 1767, 124–143.
Reprinted in *Opera Omnia*, Series I, vol. 15, 50–69.

[44] D.K. Faddeev, V.N. Faddeeva, *Computational methods of linear algebra (in Russian)*, Fizmatgiz, Moscow, 1960. (English translation by R. C. Williams, W.H. Freeman, San Francisco, 1963.)

[45] P. Flajolet, *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Math. **306** (2006), 992-1021.

[46] G. Fragulis, B. G. Mertzios, A.I.G. Vardulakis, *Computation of the inverse of a polynomial matrix and evaluation of its Laurent expansion*, Int. J. Control **53** (1991), 431–443.

[47] J. S. Frame, *A simple recursion formula for inverting a matrix*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 19-45.

[48] C. French, *Transformations Preserving the Hankel Transform*, Journal of Integer Sequences, Vol **10** (2007), Article 07.7.3.

[49] I. M. Gessel, X. Viennot, *Determinants, paths, and plane partitions*, preprint, available at `http://www.cs.brandeis.edu/~ira`.

[50] W. Gautschi, *Orthogonal polynomials: applications and computations*, in *Acta Numerica, 1996*, Cambridge University Press, 1996, pp. 45–119.

[51] W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*, Clarendon Press - Oxford, 2003.

[52] I. M. Gessel, G. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. Math. **58:3** (1985), 300-321.

[53] I.M. Gessel, G. Xin, *The generating function of ternary trees and continued fractions*, Electron. J. Combin **13** (2006), #R53, 48 pp.

[54] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1994, 2nd edition.

[55] R.E. Hartwig, *A method for calculating* A^d, Math. Japonica **26**, No 1 (1981), 37–43.

[56] H. A. Helfgott, I. M. Gessel, *Enumeration of Tilings of Diamonds and Hexagons with Defects*, The Electronic Journal of Combinatorics, **6** (1999), #R16.

[57] A. Janteng, S. A. Halim, M. Darus, *Hankel determinant for starlike and convex function*, Int. J. of Math. Anal. **1:13** (2007), 619–625.

[58] A. Junod, *Hankel determinants and orthogonal polynomials*, Expo. Math. **21** (2003), 63–74.

[59] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta, Y. Yamada Y, *Determinant formulas for the Toda and discrete Toda equations*, Funkcial. Ekvac. Vol **44** (2001), 291-307.

[60] K. Kajiwara, M.Mazzocco, Y. Ohta, *A Remark on the Hankel Determinant Formula for Solutions of the Toda Equation*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol **40** (2007), Issue 42, 12661-12675.

[61] D. E. Knuth, *Overlapping pfaffians*, Electron. J. Combin. **3**, (no. 2), (1996).

[62] C. Krattenthaler, *Advanced determinant calculus*, Seminaire Lotharingien Combin. **42** ("The Andrews Festschrift") (1999), Article B42q, 67 pp.

[63] C. Krattenthaler, *Advanced determinant calculus: a complement*, Linear Algebra Appl. **411** (2005), 68–166.

[64] C. Krattenthaler, *Determinants of (generalised) Catalan numbers*, J. Statist. Plann. Inference **240** (2010), 2260-2270.

[65] V. Kučera, *Diophantine Equations in Control - a survey*, Automatica, **29** (1993), 1361–1375.

[66] N. Krejić, Dj. Herceg, *Matematika i MATHEMATICA*, Institut za matematiku, Novi Sad, 1993.

[67] W. Lang, *On sums of powers of zeros of polynomials*, Journal of Comput. Appl. Mathematics, **89:2** (1998), 237 – 256.

[68] J. W. Layman, *The Hankel Transform and Some of its Properties,* Journal of Integer Sequences, Article 01.1.5, Volume 4, 2001.

[69] B. Lindström, *On the vector representations of induced matroids*, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 85-90.

[70] L. L. Liu, Y. Wang, *A unified approach to polynomial sequences with only real zeros*, Adv. Appl. Math., **38:4** (2007), 542-560.

[71] C.C. MacDuffee, *The Theory of Matrices*, Chelsea, New York, N.Y., 1956.

[72] P.A. MacMahon, *Combinatorial Analysis*, Vols. 1 and 2, Cambridge University Press, 1915,1916; reprinted by Chelsea, 1960. JFM 31.0219.01

[73] L. Matthews, *Enumeration of disjoint Motzkin paths systems*, Congr. Numer. **165** (2003), 213-222.

[74] T. Mansour, Y. Sun, *Identities involving Narayana polynomials and Catalan numbers*, Discrete Math. **309:12** (2009), 4079–4088.

[75] T. Mansour, M. Sshork, Y. Sun, *Motzkin Numbers of Higher Rank: Generating Function and Explicit Expression*, J. Integer Seq. **10** (2007), Article 07.7.4.

[76] J. Miao, *Representations for the weighted Moore-Penrose inverse of a partitioned matrix*, J. Comput. Math., **7** (1989), 320-323.

[77] J. Miao, *General expressions for the Moore-Penrose inverse of a 2 2 block matrix*, Linear Algebra Appl., **151** (1991), 1–15.

[78] T. Miwa, M. Jimbo, E. Date, *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite dimensional algebras*, Cambridge tracts in mathematics, Vol. **135**, Cambridge University Press, Cambridge.

[79] G. Murugusundaramoorthy, N. Magesh, *Coefficient inequalities for certain classes of analytic functions associated with Hankel determinant*, Bull. of Math. Anal. Appl. **1(13)** (2009), 85-89.

[80] B. Q. Mu, H. F. Chen, *Hankel matrices for system identification*, J.of Math. Anal. and Appl. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.07.025.

[81] T. D. Noe, *On the Divisibility of Generalized Central Trinomial Coefficients*, Journal of Integer Sequences, Vol. 9 (2006), Article 06.2.7.

[82] J. W. Noonan, D. K. Thomas, *On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **223:2** (1976), 337-346.

[83] P. Peart, W. J. Woan, *Generating functions via Hankel and Stieltjes matrices*, J. of Integer Seq. Article 00.2.1, **2:3** (2000).

[84] P. Peart, *Hankel determinants via Stieltjes matrices*, Congr. Numer. **144** (2000), 153-159.

[85] M. D. Petković, P. M. Rajković, *The Hankel transform of shifted Narayana polynomials*, Proceedings of the conference PRIM, Novi Sad, 2007.

[86] M. D. Petković, P. M. Rajković, *Alternative proof of the theorems connecting Hankel transform and k-binomial transforms*, unpublished manuscript.

[87] M.D. Petković, P.M. Rajković P. Barry, *The Hankel Transform of generalized central trinomial coefficients and related sequences*, Integr. Transf. Spec. F. **22:1** (2011), 29-44.

[88] M. D. Petković, P. M. Rajković P. Barry, *Closed-form expression for Hankel determinants of the Narayana polynomials*, Czech. Math. J. **62:137** (2012), 39–57.

[89] B. Popović, *Matematička statistika i statističko modelovanje*, PMF Niš, 2003.

[90] M. Radić, *Some contributions to the inversions of rectangular matrices*, Glasnik Matematički, **1:21** (1966), 23–37.

[91] Ch. Radoux, *Addition formulas for polynomials built on classical combinatorial sequences*, J. of Comput. and Appl. Math., **115** (2000), 471–477.

[92] Ch. Radoux, *Determinant de Hankel construit sur les polynomes de Hermite*, Annales de la Societe Scientifiques de Bruxelles, **104:2**(1991), 59–61.

[93] Ch. Radoux, *The Hankel Determinant of Exponential Polynomials:A very short proof and a new result concerning Euler numbers*, Amer. Math. Monthly **109** (2002) pp. 277–278

[94] P. M. Rajković, M. D. Petković, P. Barry, *The Hankel Transform of the Sum of Consecutive Generalized Catalan Numbers*, Integral Transforms and Special Functions, Vol **18:44** (2007), 285–296.

[95] P. Robert, *On the Group inverse of a linear transformation*, J. Math. Anal. Appl. **22** (1968), 658–669.

[96] D. Romik, *Some formulas for the central trinomial and Motzkin numbers*, J. Integer Seq. **6** (2003), Article 03.2.4.

[97] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third edition, McGraw-Hill, 1987.

[98] A. Sapounakis, P. Tsikouras, *On k-colored Motzkin words*, J. Integer Seq. **7** (2004), Article 04.2.5.

[99] A. Sapounakis, P. Tsikouras, *Counting peaks and valleys in k-colored Motzkin words*, Electron. J. Comb. **12** (2005), Article 12.

[100] J. R. Sendra, *Hankel Matrices and Computer Algebra*, ACM SIGSAM Bulletin, Vol **24:3** (1990), 17–26.

[101] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, http://www.research.att.com/∼njas/sequences/.

[102] M. Z. Spivey, L. L. Steil, *The k-Binomial Transforms and the Hankel Transform*, Journal of Integer Sequences, Vol. **9** (2006), Article 06.1.1.

[103] P. S. Stanimirović, *Programski paket MATHEMATICA i primene*, Elektronski fakultet, Niš, 2002.

[104] R. A. Sulanke, *Counting Lattice Paths by Narayana Polynomials*, Electron. J. Combin., **7** (2000), #R40. Zbl 0953.05006

[105] R.A. Sulanke, G. Xin, *Hankel determinants for some common lattice paths*, Adv. Appl. Math. **40** (2008), 149–167.

[106] G. Szegö, *Orthogonal polynomials (Fourth ed.)*, Vol. **23** of AMS Colloquium Publications. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1975.

[107] S. Toledo, *Locality of reference in LU decomposition with partial pivoting*, SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications, **18** (1997), 1065–1081.

[108] P. Mladenović, *Kombinatorika*, Društvo Matematičara Srbije, Beograd 1992.

[109] X. Viennot, *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, UQAM, Montréal, Québec, 1983.

[110] H. S. Wall, *Analytic Theory of Continued Fractions*, Van Nostrand, New York, 1948.

[111] W. J. Woan, *Hankel Matrices and Lattice Paths,* Journal of Integer Sequences, Article 01.1.2, Volume 4, 2001.

[112] W. J. Woan, *A Recursion Relation for Weighted Motzkin Sequences*, J. Integer Seq. **8** (2005), Article 05.1.6.

[113] W. J. Woan, *A Relation between Restricted and Unrestricted Weighted Motzkin Paths*, J. Integer Seq. **9** (2006), Article 06.1.7.

[114] S. Wolfram, *Mathematica Book, Version 3.0*, Wolfram Media and Cambridge University Press, 1996.

[115] S. Wolfram, *The Mathematica Book, 4th ed.*, Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999.

[116] S. Wolfram, *Mathematica Book, Version 5.0*, Wolfram Media and Cambridge University Press, 1996.

[117] F. Zhang, *Matrix Theory: Basic Results and Techniques*, New York: Springer-Verlag, 1999.

[118] E. L. Žukovski, R. S. Lipcer, *On computation pseudoinverse matrices*, Ž. Vicisl. Mat. i Mat. Fiz., **15** (1975), 489–492 (In Russian).

[119] G. Xin, *Proof of the Somos-4 Hankel determinants conjecture*, Adv. Appl. Math. **42** (2009), 152-156.

Biografija

Radica R. Bojičić je rođena 19. februara 1975. godine u Podujevu, AP Kosovo i Metohija. Osnovnu školu "9. oktobar" u Prokuplju je završila kao učenik generacije i nosilac diplome "Vuk Karadžić". Gimnaziju u Prokuplju, prirodno-matematički smer je završila takođe kao učenik generacije i nosilac diplome "Vuk Karadžić". Po završetku Gimnazije je upisala Filozofski fakultet u Nišu, odsek za matematiku, smer Teorijska matematika, koji je završila 1999. godine.

Odmah sledeće, 2000. godine je na Prorodno-matematičkom fakultetu u Nišu upisala postdiplomske studije, smer Matematička analiza (Diferencijalne jednačine) i položila sve ispite sa prosečnom ocenom 10. Magistarsku tezu pod nazivom "Oscilatornost polulinearne diferencijalne jednačine sa kašnjenjem" pod mentorstvom Prof. dr Jelene Manojlović, redovnog profesora na PMF-u u Nišu, je odbranila 2003. godine.

Radno iskustvo:

- Tehnička kola "15. maj", Prokuplje (drugo polugodište školske 1999/2000.);
- O.Š. "9.oktobar", Prokuplje (od 01.09.2000. do 01.03.2010. godine);
- Gimnazija, Prokuplje (školske 2004/2005.);
- PMF u Nišu (školske 2006/2007. kao zamena asistenta na predmetu Parcijalne jednačine);
- Ekonomski fakultet u Kosovskoj Mitrovici (od 02.03.2010. kao asistent na predmetima Matematika za ekonomiste, Operaciona istraživanja i Statistika).

Spisak prihvaćenih i objavljenih naučnoh radova:

- Radica Bojičić, Marko D. Petković, Paul Barry, Hankel transform of a sequence obtained by series reversion, Integral Transforms And Special Functions, 23:11 (2012), 803-816;
- Radica Bojičić, Marko D. Petković, Paul Barry, Hankel transform of aerated sequences, Integral Transforms And Special Functions, DOI:10.1080/10652469.2012.751105;
- Radica Bojičić, Hankel transform of a series reversion of a certain rational function, Linear Algebra and Its Applications, DOI:10.1016/j.laa.2013.01.024.

Učešće na međunarodnim konferencijama:

- Međunarodna konferencija "Matematičke i informacione tehnologije" MIT-2011., Vrnjačka Banja, avgust 2011.
- Druga matematička konferencija Republike Srpske, Trebinje, jun 2012.
- Međunarodna konferencija "Matematičke i informacione tehnologije" MIT-2013., Vrnjačka Banja, septembar 2013.

Прилог 1.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом
Израчунавање Ханкелове трансформације низова

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација, ни у целини, ни у деловима, није била предложена за добијање било које дипломе, према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

У Нишу, __________________

Аутор дисертације: Мр. Радица Бојичић

Потпис докторанда:

Прилог 2.

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Име и презиме аутора:
Радица Бојичић
Студијски програм:
Математика
Наслов рада:
Израчунавање Ханкелове трансформације низова
Ментор:
Проф. др Марко Петковић

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације истоветна електронској верзији, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, ________________

Аутор дисертације:
Мр. Радица Бојичић

Потпис докторанда:

____

Прилог 3.

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла" да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом:
Израчунавање Ханкелове трансформације низова

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да подвучете само једну од шест понуђених лиценци; кратак опис лиценци је у наставку текста).

У Нишу, _________________

Аутор дисертације: Мр. Радица Бојичић

Потпис докторанда:

____